De La Versión Original Rusa

El libro de Y. I. Perelman "Aritmética Recreativa" tuvo, durante la vida del autor, siete ediciones que fueron revisadas una a una por él mismo. La última de ellas salió a la luz en Leningrado, en 1938.
En los siguientes 16 años, el libro no se reimprimió, y fue hasta 1954 que la Editorial Estatal de Literatura Infantil realizó una octava edición abreviada.
En esta novena edición, se reelaboraron los capítulos primero, segundo y noveno. Estos capítulos se complementaron con material nuevo: hablan con más detalle de los diversos sistemas de numeración, de cómo se calculaba en el ábaco chino, de los grandes números de nuestra realidad y especialmente de los gigantes numéricos del grandioso plan septenal de 1959-1965. Asimismo se habla de la denominación de los grandes números.

NOTA DEL TRADUCTOR

El presente libro es una versión española de la "Zanimatielnaia arifmétika" (Aritmética recreativa) que forma parte de la extensa obra (Matemáticas recreativas., Algebra recreativa, Mecánica para todos, Física recreativa, en 2 tomos, cuya próxima publicación en español correrá a cuenta de esta Editorial, etc.) del eminente investigador y pedagogo soviético, de la ciencia recreativa, Yakov Isidorovich Perelman.

La presente obra posee un alto valor didáctico que puede ser aprovechado, tanto por el profesor de matemática elemental, como por el estudiante autodidacta que se interese por el origen y evolución histórica de los diversos sistemas de numeración; asimismo, es altamente provechoso el tratamiento referente a la manera de calcular de diversos pueblos de la Antigüedad.

En cierta medida, el presente libro puede servir como estímulo para que el lector se interese por la técnica de cálculo basada en las máquinas electrónicas, en virtud que contiene un excelente capítulo referente a los sistemas no decimales de numeración, donde en forma especial se tratan dos sistemas: el de base dos (binario) y el de base cinco (quinario). El primero tiene una alta importancia en la codificación de la computación electrónica, Y el segundo muestra su importancia en la codificación de las comunicaciones telegráficas múltiples (sistema Baudot, etc.)

Puede, además, en virtud del material que contiene acerca de las propiedades de ciertos números y de las pirámides numéricas, motivar el interés en el lector, por el estudio sistemático de la Aritmética, pues no debe olvidar que lo que en un principio es sólo curiosidad, posteriormente se puede llegar a transformar en un anhelo.

Desde el punto de vista recreativo, el libro contiene bastante material para el desarrollo y realización de trucos, adivinanzas y charadas matemáticas, la mayor parte, de gran originalidad, que pueden servir para agudizar la percepción e inteligencia del joven estudiante y de los lectores en general. Posee, además, un gran valor "mnemotécnico", pues contiene una serie de procedimientos para la memorización de los números, sirviendo, al mismo tiempo, tanto al lector ordinario como al estudiante, de regla de cálculo "natural" debido a la formulación de reglas para la realización de operaciones con los números aproximados, lo que da por resultado un ahorro en el trabajo de cálculo,

Contiene, también, material que permite valorizar en una forma clara y precisa, la magnitud, tanto de los gigantes numéricos, como de los enanos numéricos, en relación con fenómenos o hechos del dominio general.

Resumiendo: creemos con firmeza que la presente obra con todo su contenido tan rico en cuestiones históricas, didácticas, metodológicas y recreativas de la Aritmética elemental, descubrirá ante el lector todo el mundo fantástico de los números, permitiéndole, después de su lectura, abordar tanto textos sistemáticos de Aritmética elemental, como libros que investiguen o expongan la historia de la matemática elemental. Y consideramos que después de la lectura de esta obra, el lector ordinario y el estudiante comprenderán y aceptarán el papel tan importante que juega la Aritmética, y, sin dudar un momento de que estamos en lo justo, la matemática en general, en la vida del hombre moderno.

Finalmente, no dejamos de reconocer la gran complejidad del texto original ruso, en virtud de su amplio campo de cuestiones tratadas, y de que es posible que no hayamos superado, con éxito, todas las dificultades que originó su traducción; pero hacemos patente nuestro reconocimiento para todo el lector que con motivo de sus observaciones críticas, dirigidas a la dirección de esta Editorial, contribuya a elevar, tanto la calidad del contenido, como de la exposición y terminología de la presente traducción.

Apéndice

UN BREVE ESBOZO SOBRE LA ARITMETICA

Jorge Castro Briones

El concepto de número, tan familiar para nosotros, se elaboró muy lentamente. Nos podemos formar un juicio sobre lo anterior, si se toma en cuenta cómo contaban aquellas pueblos que todavía hace poco tiempo se hallaban en diversos grados de un régimen primitivo-comunal. En algunos de tales pueblos no existían aún nombres para los números mayores que el dos o el tres; en otros, el cantar se prolongaba un paco más, pero en una forma o en otra éste finalizaba, comparativamente, de manera rápida, y sobre el número en general dichos pueblos decían simplemente, "mucho" a "innumerable". Esto muestra que la asimilación por los hombres de números claramente distintos, se llevó a cubo gradualmente.

Al principio los hombres no poseían el concepto de número, aunque podían, a su manera, opinar sobre las dimensiones de uno u otro conjunto de objetos que encontraban en su práctica. Es necesario considerar que el número era percibido por ellos directamente como una propiedad inalienable de un conjunto de objetos, propiedad que sin embargo, aún no descubrían claramente. Nosotros estamos a tal grado habituados a contar, que es poco probable que nos podamos representar esto; sin, embargo, lo comprendemos.

En un grado más alto, el número se muestra ya como una propiedad de un conjunto de objetos, pero aún no se separa de él como "número abstracto", como el número en general, no relacionado con objetos concretos. Esto es evidente en virtud de la existencia en ciertos pueblos, de nombres de números tales como "mano" para el cinco, "todo el hombre" para el veinte, etc. Aquí el cinco se entiende no abstractamente, sino en el sentido de "tanto, como dedos haya en la mano"; el veinte "tanto, como todos los dedos del hombre", etc. En forma completamente análoga, en ciertos pueblos no existían, por ejemplo, los conceptos "negro", "sólido", "redondo". Para indicar que un objeto era negro, lo comparaban, supongamos, con un cuervo, y para indicar que se tenían cinco objetos, comparaban directamente dichos objetos con la mano. Ocurrió precisamente de manera que diferentes nombres de números se empleaban para diversos géneros de objetos: unos números para contar hombres, otros para contar barcas y así sucesivamente hasta diez clases diferentes de números. Aquí no hay números abstractos, puesto que se presentan como "concretos" que se relacionan a un determinado género de objetos. En otros pueblos, en general, no existen nombres especiales para los números; por ejemplo, no existe la palabra "tres" aunque ellos pueden decir :"tres hombres", "en tres lugares", etc.

Análogamente a esto, con facilidad decirnos que este u otro objeto son negros, pero muy raramente hablamos sobre 1a "negrura" en si, ya que éste es un concepto que se muestra más abstracto.

En relación con lo anterior conviene observar que, en la formación de los conceptos sobre las propiedades de los objetos, sea el color o la numerabilidad de un conjunto, se pueden distinguir tres grados, los cuales además, no es posible delimitar estrictamente. En el primer grado la propiedad se determina por una comparación directa de objetos: igual como el cuervo; tanto, como en la mano. En el segundo grado aparece el adjetivo: la piedra negra, y análogamente el numeral cinco árboles, etc. En el tercer grado la propiedad se abstrae de los objetos y puede figurar "como tal", como "negrura", como el número abstracto "cinco", etcétera.

Para poder descubrir y separar claramente esta propiedad general, es decir, para formar el concepto sobre uno u otro número y darle el nombre "seis", "diez", etc., fue necesario comparar entre sí muchos conjuntos de objetos. Los hombres contaron en el transcurso de largas

generaciones repitiendo millones de veces una y la misma operación. De ese modo, en la práctica, descubrieron los números y las relaciones entre ellos.
Las operaciones con los números surgieron, a su vez, como la reflexión de las operaciones reales con los objetos concretos. Esto es patente también en los nombres de los números. Así, por ejemplo, entre ciertos indígenas el número "veintiséis" se pronuncia como "encima de dos decenas yo coloco un seis". Es claro que aquí se refleja el método concreto de contar los objetos. Tanto más claro es, que la adición de números corresponde a la suma, a la unión de dos o varios conjuntos en uno. Igualmente, es fácil ver el significado concreto de la sustracción, de la multiplicación y de la división (1a multiplicación en particular, parece tener su origen principalmente en la necesidad de contar conjuntos iguales: 2 veces, 2 veces, etc.)
Los hombres descubrieron y asimilaron, en el proceso de contar, no solamente relaciones entre números particulares, como por ejemplo, que dos y tres son cinco, sino establecieron también gradualmente, leyes generales. En la práctica descubrieron que la suma no depende del orden de los sumandos, o que el resultado de contar objetos dados no depende del orden en que se efectúe dicha cuenta. (Esta última circunstancia encuentra expresión en 1a coincidencia de los números "ordinales" y "cardinales": primero, segundo, etc., y uno, dos, etc.). En esta forma, los números aparecieron, no como aislados e independientes, sino en relación unos con otros.
Unos números se expresan por medio de otros, tanto en los nombres como en la escritura. Así 32 denota "treinta y dos", en francés 90 representa "cuatro veintes y diez (quatre-vingt-dix)" y, por ejemplo, las cifras romanas VIII, IX denotan que 8 = 5 + 3, 9 = 10 - 1.
En general, surgieron no simplemente números particulares, sino un sistema de números con sus relaciones y leyes.
El objeto de la aritmética lo constituye, precisamente, el sistema de números con sus relaciones y leyes. (*Históricamente la palabra "aritmética" procede del griego "arte del contar" de "aritmos": número y "texne": arte*). Un número abstracto aislado, no tiene en sí propiedades ricas en contenido, y es poco lo que puede decirse acerca de él, si nos preguntamos, por ejemplo, acerca de las propiedades del número 6, observamos que 6 = 5 + 1, que 6 = 3 × 2, que 6 es un divisor de 30, etc. Pero en todos los caos el número 6 se relaciona con otros números, de suerte que las propiedades de un número dado se manifiestan precisamente, en su relación con otros números. Tanto más claro es, quo toda operación aritmética determina una liga, o en otras palabras, una relación entre números.
En esta forma, la aritmética tiene que ver con las relaciones entre números. Pero las relaciones entre números son formas abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre los conjuntos de objetos, razón por la cual se puede decir que: La Aritmética es la ciencia que trata sobre las relaciones cuantitativas reales, consideradas sin embargo, abstractamente o, como se dice, en forma pura.
Como vemos, la aritmética no procede del pensamiento puro, según pretenden hacer creer los idealistas, sino quo refleja determinadas propiedades de las cosas reales: ella ha surgido como resultado de una larga experiencia práctica de numerosas generaciones.
Cuanto más vasta y compleja se hace la práctica social, tanto más amplios son los problemas que se, plantea. Ha sido necesario, no sólo registrar la cantidad de objetos y cambiarla por el pensamiento de su número, lo que ya requería de la formación del concepto de número y de los nombren de los números, sino además, aprender a contar todos los grandes conjuntos (sean animales en manadas, objetos en el trueque, días hasta un plazo señalado, etc.), fijar, y transmitir otros resultados del contar, lo que justamente requirió también el perfeccionamiento de los nombres, y posteriormente el de las notaciones de los números.
La introducción de las notaciones para los números, que principia

aparentemente desde el propio nacimiento de la lengua escrita, ha jugado un inmenso papel en el desarrollo de la aritmética. Además, éste fue el primer paso hacía los signos y las fórmulas matemáticas en general. El siguiente paso, que consistió en la introducción de los signos para las operaciones aritméticas y la notación literal (x) para la incógnita, fue efectuado mucho después.
El concepto de número, como todo concepto abstracto, no tiene una imagen directa, no es posible representarle, y sólo se puede pensar. Pero el pensamiento se formula en el lenguaje, por lo que sin nombres no existen conceptos. La notación es el mismo nombre, sólo que no sonoro, sino escrito, y reproduce al pensamiento en forma de una imagen visual. Por ejemplo, si yo digo "siete" ¿qué se representa Ud.? Probablemente no siete objetos cualesquiera, sino ante todo la cifra "7"; ésta sirve, precisamente, de cubierta material para el número abstracto "siete". Y un número como por ejemplo, 18273, es visiblemente más difícil de pronunciar que de escribir, y es ya completamente imposible representarlo, con total exactitud, en forma de un conjunto de objetos. De esta manera, las notaciones ayudaron a crear el concepto sobre aquellos números que ya no es posible descubrir en la simple observación y en el acto directo de contar. En esto estaba la necesidad práctica: con la aparición del estado fue necesario recaudar impuestos, reunir y suministrar tropas, etc., lo que requería operaciones con números muy grandes.
Así, en primer lugar, el papel de las notaciones para los números consiste en que ellas dan una encarnación sencilla del concepto de número abstracto. (Vale la pena observar que el concepto sobre los números, que como hemos visto se elaboró con tan gran trabajo durante un tiempo excesivamente largo, es comprendido ahora por un niño de una manera comparativamente fácil. ¿Por qué? En primer lugar, naturalmente, porque el niño oye y ve cómo los adultos utilizan constantemente los números e inclusive le enseñan eso. Y en segundo lugar, porque -y precisamente sobre esto deseamos llamar la atención, el niño tiene palabras y notaciones hechas para los números. El, al principio, estudia estas formas exteriores del número, y después estudia ya su significado.) Tal papel de las notaciones matemáticas es general: suministran una personificación de los conceptos matemáticos abstractos. En esta forma, + significa adición, a un número desconocido, a cualquier número dado, etc. En segundo lugar, las notaciones de los números dan la posibilidad de efectuar, en una forma particularmente sencilla, las operaciones con ellos. Todos saben hasta qué punto es más fácil "calcular sobre el papel" que "en la mente". Igual valor tienen los sitos y fórmulas matemáticas en general: permiten substituir parte de los razonamientos de los cálculos haciéndolos casi mecánicos. Con respecto a eso mismo, si el cálculo está escrito, posee ya una determinada seguridad. Allí todo es evidente, todo se puede comprobar, todo se determina por reglas exactas. Como ejemplo puede recordarse la adición "por columnas" o cualquier transformación algebraica como por ejemplo, "el traslado al otro miembro de la igualdad se efectúa por el cambio de signo".
De lo señalado es claro que sin notaciones convenientes para los números, la aritmética no habría podido avanzar mucho en su desarrollo. Tanto más que la matemática moderna sería sencillamente imposible sin los signos y fórmulas especiales.
Por sí mismo es comprensible la imposibilidad de que los hombres hayan podido producir, en un momento dado, el tan conveniente método moderno de escritura de los números. Desde los tiempos antiguos, en los diversos pueblos con rudimentos de cultura, aparecieron diferentes notaciones numéricas poco parecidas, a nuestras notaciones modernas, no sólo por lo que al trazado de los signos se refiere, sino también en cuanto a los principios; por ejemplo, no en todas partes se empleaba el sistema decimal (entre los antiguos babilonios existía un sistema decimal y sexagesimal mixto). En la tabla adjunta se muestran, en calidad de ejemplo, algunas de las notaciones de los números en diversos pueblos. En particular, vemos que los antiguos griegos, y posteriormente también los rusos, utilizaron notaciones alfabéticas. Nuestras cifras "arábigas"

modernas, y en general el método de escritura de las números, procede de la India, de donde fue llevado por los árabes a Europa en el siglo X, en donde finalmente arraigó en el, transcurso de varios siglos.
La primera particularidad de nuestro sistema consiste en que es decimal. Pero dicha particularidad no es esencial, porque puede ser empleado con éxito digamos, un sistema duodecimal, introduciendo notaciones especiales para el diez y el once.
La principal particularidad de nuestro sistema de notaciones consiste en que es "posicional", es decir, en él una misma cifra tiene diferente valor en función del lugar que ocupa. Así, por ejemplo, en la notición 372 la cifra 3 representa el número de las centenas, y el 7 el número de las decenas. Tal procedimiento de escritura no sólo es breve y sencillo, sino que también facilita al extremo los cálculos. Las notaciones romanas son mucho menos convenientes el mismo número 372 en romano se escribe así: CCCLXXII, y el multiplicar grandes números escritos en romano, es totalmente inconveniente.
La escritura posicional de los números requiere que se distinga el orden vacío, pues de no ser así, entonces confundiríamos, por ejemplo, el trescientos uno y el treinta y uno. En el lugar del orden vacío se coloca un cero; en esta forma diferenciamos 301 y 31. E1 cero aparece ya en forma rudimentaria, en las tardías escrituras cuneiformes babilónicas. La introducción sistemática del cero fue un logro de los hindúes.(*El primer manuscrito hindú en donde se halla el cero, se remonta a1 final del siglo IX; en él, la escritura del numero 270 corresponde exactamente a la de nuestras notaciones. Sin embargo, probablemente el cero se introdujo en la India ya, anteriormente, en el siglo VI*): esto permitió conducir hasta el final el sistema posicional de escritura de los números, el cual empleamos en la actualidad.
Pero aún hay más: el cero se hizo también un número, al penetrar en el sistema de los números. Por sí mismo, el cero es la nada, en lengua sánscrita (antiguo hindú) llama precisamente cunga "(vacio)", pero en relación con otros números, el cero adquiere contenido, gana propiedades conocidas, como aquella de que cualquier número más cero da el mismo número, y multiplicado por cero es cero.
En lo referente a la aritmético de los antiguos, se puede decir que los textos matemáticos más ancestrales de Babilonia y Egipto que han llegado hasta nosotros, se remontan al segundo milenio anterior a nuestra era. Ellos y los textos más tardíos, contienen diversos problemas aritméticos con resoluciones, inclusive algunos que hoy pertenecen al álgebra, como son las resoluciones de ciertas ecuaciones cuadráticas y aún cúbicas o de progresiones (todo esto, naturalmente, sobre problemas concretas y ejemplos numéricos). De Babilonia han llegado también hasta nosotros, tabla de cuadrados, cubos, y números inversos. Existe la suposición de que allí ya se habían formado intereses matemáticos que no estiban relacionados directamente con problemas prácticos particulares.
En todo caso, en la Babilonia y el Egipto antiguos la aritmética estaba muy desarrollada. Pero no tenía aún el carácter de una teoría matemática de los números, sino más bien era un conjunto de reglas para el cálculo y la resolución de diferentes problemas. Por otra parte, así se enseña la aritmética en la escuela primaria actual, y así la conciben todos aquellos que no se dedican, en especial, a la matemática. Esto es completamente legitimo, pero sin embargo, en esto forma la aritmética aún no es una teoría matemática: en ella no existen teoremas generales sobre los números.
El paso a 1a aritmética teórica se efectuó en una forma gradual.
Las notaciones, como ya se dijo, dan la posibilidad de operar con los números grandes que ya no es posible representar claramente en forma de conjuntos de objetos, y hasta los cuales no es factible llegar contando de uno en uno a partir de la unidad. Si entre las tribus salvajes los

números se interrumpen en e1 3, 10, 100, etc., y después sigue el indeterminado "muchos", las notaciones posibilitaron en China, Babilonia y Egipto, el avanzar más allá de las decenas de millares, e inclusive después del millón. Aquí ya se manifiesta la posibilidad de una prolongación ilimitada de la serie de números. Pero no fue comprendida con claridad inmediata, y no se sabe con certeza cuando ocurrió ello. Ya el gran matemático, físico e ingeniero griego Arquímedes (287 - 212 a.n.e.) quien anticipó genialmente algunas ideas y métodos de la matemática superior, en su célebre obra "Sobre el cálculo de la arena" indicó un método, para denominar a un número mayor que el número de granos de arena que podría caber en la "esfera de las estrellas fijas". La posibilidad de nombrar y escribir tal número, vale decir, aún requirió en ese tiempo una explicación detallada.
Hacia el siglo III antes de nuestra era, los griegos tenían ya plena conciencia de dos importantes ideas: en primer lugar, que la serie de los números se puede prolongar ilimitadamente, y en segundo lugar, que se puede operar, no sólo con cualesquiera números dados, sino también razonar sobre los números en general, formulando y demostrando teoremas generales sobre los mismos. Esto era una generalización de la enorme experiencia anterior en la operación con los números concretos. Con motivo de esta experiencia, aparecieron leyes generales y métodos de los razonamientos generales sobre los números. En estas condiciones se produjo el paso a un grado más alto de la abstracción: de números particulares dados (aunque también abstractos) al número en general, a cualquier posible número.
Del sencillo proceso de contar los objetos uno por uno, pasamos a la noción acerca del proceso ilimitado de formación de los números, por medio de la adición de la unidad a un número construido anteriormente. La serie de los números se piensa ya como prolongación ilimitada, y con ello entra el infinito a la matemática. Naturalmente, de hecho, no podemos penetrar tan lejos como fuera deseable en la serie de los números por medio de la adición de unidades: ¿quién puede contar hasta un millón de millones, si inclusive cien años contienen casi 40 veces menos segundos? Pero esta no es la cuestión. El proceso de acumulamiento de unidades, el proceso de formación de cuantos grandes conjuntos de objetos fueran deseables, no está fundamentalmente limitado y, vale decir, es una posibilidad potencial de la prolongación ilimitada de la serie numérica. Los teoremas generales sobre los números tocan ya esta serie mencionada.
Los teoremas generales sobre cualquier propiedad de todo número, ya contienen en forma implícita afirmaciones sobre las propiedades de los números particulares, y son ricos en aseveraciones específicas que pueden verificarse para los números aislados. Por tal motivo, los teoremas generales deben demostrarse por medio de razonamientos generales que partan de la propia ley de formación de la serie numérica. Aquí se revela una profunda particularidad de la matemática: ella tiene como objetivo, no sólo relaciones cuantitativas dadas, sino en general, las relaciones cuantitativas posibles y, vale decir, el infinito.
En esta forma la aritmética se convierte en la teoría de los números. Esta se abstrae ya de los problemas particulares concretos, y se enfoca hacia el dominio de los conceptos y razonamientos abstractos, convirtiéndose con ello, en rama de la matemática "pura". Más exactamente este fue también el momento del nacimiento de la matemática pura con todas sus particularidades (su carácter abstracto, su gran rigorismo, su amplia aplicación en otras ciencias y en la técnica, etc.). Es necesario observar, por cierto, que la matemática pura nació simultáneamente, a partir de la aritmética y de la geometría. Además, en las reglas generales de la aritmética se tienen ya gérmenes del álgebra, la cual se separó posteriormente de aquella.
En la actualidad, el desenvolvimiento de la matemática en conjunto tiene gran influencia sobre el desarrollo de la aritmética y de las ciencias contiguas a ella, lo que se ha manifestado, por

ejemplo, en la construcción axiomática de la aritmética, es decir, en la sistematización de la misma sobre la base de un cierto número de axiomas.
Por otra harte, los procedimientos y métodos de cálculo utilizados en la aritmética, han obtenido un amplio desarrollo y aplicación en las técnicas matemáticas modernas de cálculo, lo cual queda evidenciado en las bases aritméticas de la forma de representación de los números, lo que involucra el estudio de los diversos sistemas de numeración, en las máquinas calculadoras numéricas electrónicas modernas.
Finalmente, por medio de una tabla cronológica trataremos de presentar un esquema histórico del desarrollo, en especial, de la aritmética, así como de algunas ramas contiguas a la misma y de diversos aspectos del desenvolvimiento de la técnica que, en forma directa o indirecta, contribuyeron a la aparición de los números, de las relaciones entre ellos y como resultado de esto, a la creación de la aritmética ya con los rasgos característicos de una ciencia matemática.
Debe mencionarse que la formación de "la tabla cronológica debe, en gran medica a la labor ingente de recopilación y ordenamiento del Sr. Alfonso Linares F., que es Egresado (*egresado, -da. m., f. Amér. Persona que sale de un establecimiento docente después de haber terminado sus estudios*.) de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional (*nota del traductor y autor del Breve Esbozo...*)

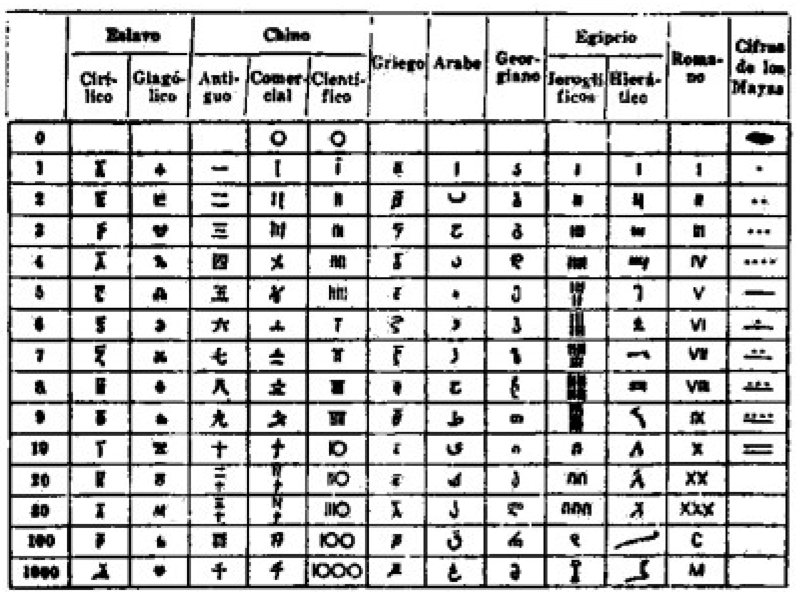


Tabla 1. ***Notaciones de los números en los diversos pueblos.***
Tabla tomada del artículo de I. G. Bashmakov y A. P. Iushkievich “Origen de los Sistemas de Numeración (Enciclopedia de la Matemática Fundamental)Tomo I, Moscú, 1951

TABLA CRONOLOGICA DEL DESARROLLO DE LA ARITMETICA

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
	Primitivos (edad de piedra)		Primeras representaciones del mundo real: tallado, grabados y técnicas de construcción: desde las armas sencillas hasta las complejas, utensilios. Sistemas de numeración rudimentarios (sin simbolismo)
¿ ?-2500 a.n.e.	Egipto		Sistema numérico simbólico
2500-1800 a.n.e.	Babilonia, Sumeria, Egipto. Creta		Contactos de babilonios y sumerios. Tablas matemáticas babilónicas que contienen: cuadrados, cubos, inversos, y tablas de multiplicación de números. Origen del contenido del papiro Rhind. Uso del número pi por los babilonios (pi=3). Sistemas de medidas, longitudes, peso, capacidad, sistemas de numeración más desarrollados
1800-1400 a.n.e.	Egipto, Grecia, Creta, Sumeria	Ahmes (sacerdote egipcio), en el texto de Perelman: Ajmes	Papiro Rhind de Egipto. Primera época de contacto de los pueblos egipcio, griego, sumerio
1400-1200 a.n.e.	Egipto, Grecia		Período guerrero y predominio griego
1200-1000 a.n.e.	Grecia, Egipto		Formación de los estados griegos y decadencia de Egipto
1000-550 a.n.e.	Grecia	Tales de Mileto	Teorema de Tales, desarrollo de problemas geométricos con aplicaciones (predicción de un eclipse). Contacto de las culturas griega y oriental
550-000 a.n.e.	Grecia	Pitágoras de Samos y la Escuela de Crotona	Se adquiere en toda su pureza el concepto de número y se descubren los irracionales por medio de un caso particular del célebre Teorema de Pitágoras.
		Parménides de Elea y la Escuela de Elea	Introduce el razonamiento en un primer intento de rigorismo lógico

Tabla 2.

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
550-000 a.n.e	Grecia	Zenón de Elea (Eleatas)	Critica a Pitágoras y como resultado se elimina el infinito de la matemática griega
		Jenófanes de Colofón (Eleata)	Introduce la critica en la elaboración científica
		Platón (La Academia)	Estudios en todos los campos del pensamiento (Filosofía)
		Eudoxio de Cnido	Teoría general de las proporciones (conmensurables o no) hoy llamada "Método de exhaución"
		Aristóteles (Liceo)	Continúa el estudio en todos los campos del pensamiento (creación de la Lógica)
		Eudemo de Rodas	Historiador de las Matemáticas.
	Grecia	Euclides de Alejandría	Reunión de los conocimientos matemáticos griegos ("Elementos"): Libro V: Teoría de las Proporciones; Libros VII, VIII y IX: Teoría de los Números o Aritmética: divisibilidad, descomposición en factores primos, proporciones y progresiones geométricas, números perfectos pares; Libro X, números irracionales. Ya se tiene organizada la Aritmética como una rama de las Matemáticas.
		Arquímedes de Siracusa	Se desliga a la Matemática de la Filosofía para aplicarla a problemas prácticos variados. Intento de representación simbólica de los grandes números.
		Eratóstenes de Cirene	Una solución del problema de Delos (determinación del lado de un cubo de volumen doble del de un cubo dado). Procedimiento para construir una tabla de números primos (Criba de Eratóstenes).

Tabla 3

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
550-000 a.n.e		Apolonio de Perga	Tratamiento de las secciones cónicas en forma exhaustiva en su obra "Cónicas"
		Herón de Alejandría	Agregados y perfeccionamientos a los "Elementos" de Euclides
000-1500 n.e.	China		Obra sobre Aritmética, "Chin-Chang": invención del ábaco para calcular; solución de problemas aritméticos: cuadrados mágicos.
	Grecia	Nicomaco de Gerasa	Glosa y comentario en su obra "Introducción a la Aritmética", que sirvió para la enseñanza en la Edad Media.
		Menelao de Alejandría	Culminacion de la Geometría griega y aparición del triángulo esférico.
		Pappus de Alejandría	Resumen de los conocimientos matemáticos anteriores en su obra "Colección Matemática" Tiene gran valor por sus informaciones históricas y bibliográficas de la Matemática griega.
		Diofanto de Alejandría	Primeros esbozos del Algebra en su obra "Aritmética": estudio de una gran variedad de problemas vinculados algunos con el "Análisis Indeterminado"; simbolización de operaciones, incógnitas y exponentes. (Un problema famoso en la Teoría de los Números: $x^2 + y^2 = z^2$).
	India	Aryabhata	Funciones circulares y Análisis Indeterminado aproximado al actual.
		Brahmagupta	Análisis Indeterminado
		Bhaskara	Simbolismo algebraico y [illegible] del sistema de numeración posicional de base 10.
			Su obra "Aritmética" [illegible]

Tabla 4

Fecha	Pueblos	Matemáticos	Aportaciones
000-1500	Arabia	Al-Khuwarizmi	cifras hindúes y el 0; su obra "Sobre el Cálculo mediante la Restauración y la Reducción" es el primer tratado sobre el Algebra.
		Thabit b. Qurra	Traducciones y métodos para encontrar números amigos.
		Al-Mahani y Abu Kamil	Tratamiento de los problemas geométricos por medio del Algebra.
		Italianos y Españoles	Trabajos de traducción de las obras griegas y árabes: se fundan escuelas de traducción (Toledo).
	Francia	Nicolás Oresme	Primeras manifestaciones de la representación gráfica de funciones.
	Italia	Leonardo Pisano	Introducción del símbolo $\frac{a}{b}$ (1202).
	Alemania	Johann Widmann	Introducción de los símbolos + y -- (1489)
	Alemania	Gutenberg	Su invención de la imprenta con tipos móviles da lugar a una divulgación en gran escala del pensamiento humano.
1500-1600	Italia	Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Gerolamo Cardano, Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli	Contribuciones al Algebra propiamente dicha. Invención de los números imaginarios (Bombelli)
	Escocia Suiza Inglaterra	John Napier Jobst Bürgi Henry Briggs	Invención de los logaritmos: naturales (Napier y Bürgi); decimales (Briggs).
	Francia e Italia	Francois Viete, A. Rhaeticus, Francesco Maurolyco, Guidubaldo del Monte	Llevan al Algebra, a la Geometría y a la Trigonometría a un estado de madurez. Se estudian las series y se investiga la naturaleza del número "pi".
	Alemania	J. Rudolf	Introducción del símbolo ($\sqrt{\ }$) (1525).
	Inglaterra	Robert Recorde	Introducción del símbolo de igualdad (=) (1557).

Tabla 5

Capitulo Primero
Lo Antiguo y lo Nuevo Sobre Los Números y Las Numeraciones

Contenido:

1. La Numeraciones Escrita Mas Difundida
Parto de la base que a ninguno de ustedes, lectores de este libro, constituye un gran esfuerzo escribir cualquier número entero; por ejemplo, dentro de los límites de un millón. Para la escritura de los números, empleamos los diez bien conocidos signos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, llamados; cifras. Ahora nadie duda que, con la ayuda de estos diez signos (cifras) podemos escribir un número, ya sea muy grande o muy pequeño, entero o fraccionario.
Los números del uno al nueve, los escribimos con la ayuda de sólo una de las; nueve primeras cifras. Para la escritura de los números del diez al noventa y nueve, necesitamos ya de dos cifras, una de las cuales puede ser también el cero, y así sucesivamente.
Como base de la numeración tomamos el número "diez", por lo que nuestro sistema de numeración se llama decimal.
Es decir, que diez unidades simples (unidades de primer orden) forman una decena (una unidad de segundo orden), diez decenas forman una centena (una unidad de tercer orden), diez centenas forman un millar (una unidad de cuarto orden) y, en general, cada diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.

En muchos pueblos los sistemas de numeración eran decimales. Eso está relacionado con el hecho de que tengamos diez dedos en nuestras manos.
En la escritura de los números, en el primer lugar de la derecha escribimos la cifra correspondiente a las unidades; en segundo lugar, la cifra de las decenas; luego la de las centenas, después la de los millares, etc. Así, por ejemplo, la escritura de 2716 denota que el número se compone de 2 millares, 7 centenas, 4 decenas y 6 unidades.
Si un número carece de unidades de determinado orden, en el lugar correspondiente escribimos un cero. Así, el número que tiene tres millares y cinco unidades, se escribe. 3005. En él no existen decenas ni centenas, es decir, las unidades de segundo * y tercer orden; por tal razón, en los lugares segundo y tercero de la derecha escribimos ceros.
¿Qué particularidad notable podemos encontrar en el sistema de numeración que siempre hemos usado?
En el caso, por ejemplo, del número 14742, usamos dos veces la cifra 4: en el segundo y en el cuarto lugar de la derecha. En tanto que una vez representa 4 decenas, la otra representa 1 millares. En consecuencia, resulta que una misma cifra puede denotar tanto cantidades de unidades, como cantidades de decenas, de centenas, de millares, etc. en función de la posición que ocupe la cifra en la escritura del número. De aquí precisamente que nuestro sistema de numeración se llame posicional.
Volvamos al número 2746, del cual hemos hablado antes. En él, la primera cifra de la derecha (la cifra 6) representa 6 unidades, la segunda cifra de la derecha (4) representa 4 decenas, es decir, el número

$$40 = 4 * 10,$$

la tercera cifra de la derecha (7) representa 7 centenas, o sea, el número

$$700 = 7 * 10 * 10 = 7 * 10^2,$$

y finalmente, la cuarta cifra (2) representa 2 millares, es decir, el número

$$2000 = 2 * 10 * 10 * 10 = 2 * 10^3$$

El mencionado número puede ser escrito, pues, así:

$$2746 = 2000 + 700 + 40 + 6 = 2 ** 10^3 + 7 * 10^2 + 4 * 10 + 6$$

Cada tres órdenes en un número constituyen una clase. Las clases se cuentan siempre de derecha a izquierda. Primero está la llamada primera clase, constituida por las unidades, decenas y centenas; después la segunda clase, con los millares, las decenas de millar y las centenas de millar: luego la tercera clase, constituida por los millones, las decenas de millón y las centenas de millón, etc.
Pensemos un poco en esta cuestión: ¿ Por qué se efectúan tan rápida y fácilmente con los números las cuatro operaciones aritméticas: adición, substracción, multiplicación y división?: Estas ventajas nos son ofrecidas, lógicamente, por el citado principio posicional de la escritura de los números.
En efecto, al hacer una operación aritmética cualquiera con números, trabajamos con las decenas, centenas, millares, etc., como si fueran unidades, y sólo al obtener el resultado final tenemos en cuenta su orden.

Así, para la escritura de los números, empleamos el sistema decimal posicional de numeración. El famoso físico y matemático francés Laplace (siglos XVIII-XIX), escribió acerca del sistema: "La idea de representar todos los números con diez signos, asignándoles además de un valor por su forma otro por su posición, es tan sencilla, que en virtud de esta sencillez resulta difícil imaginarse en qué medida es admirable esta idea".
Ahora casi toda la humanidad utiliza este sencillo sistema de numeración, cuyo principio de construcción y trazo de cifras aparecen con idénticas propiedades pana tolo mundo.
¿Cómo surgió este extraordinario sistema de numeración decimal posicional?
No obstante su sencillez, los hombres necesitaron varios miles de años para llegar a él. No será una exageración si decimos que todos los pueblos del mundo tomaron parte en la creación de dicho sistema.
Inicialmente el sistema decimal posicional de numeración apareció en la India, y ya a mediados del siglo VIII, se usaba ahí ampliamente. Por esa misma época, también surge en China y otros países del Oriente. Los europeos adoptaron este sistema hindú de numeración en el siglo XIII, debido a la influencia árabe. De aquí surgió, precisamente, la denominación, históricamente incorrecta, de "numeración arábiga".
¿Qué sistemas de numeración estaban en uso, antes del surgimiento del decimal posicional?
El enorme interés de esta pregunta, hace necesario un análisis detallado de ella, lo que nos proporcionará la posibilidad de valorar mejor la, ventajas de nuestro sistema de numeración.
Volver

2. Numeración Antigua Egipcia
Una de las más antiguas numeraciones es la egipcia. Data aproximadamente de hace 7000 años, es decir, de más de 3000 años antes de nuestra era. En el transcurso de los tres primeros milenios sufrió cambios insignificantes. Relacionémonos más de cerca con dicha numeración antigua, y fijemos nuestra atención en la forma en que se representaban en ella los signos numéricos, y cómo, con ayuda de ellos, se escribían los números.
En la numeración egipcia existían signos especiales (jeroglíficos) para los números: uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil, un millón. Estos signos están representados en la figura 1.

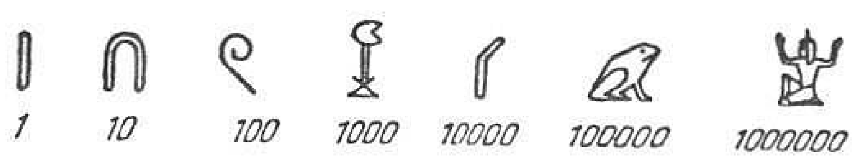


Figura 1. Estos signos especiales (jeroglíficos) eran utilizados por los antiguos egipcios para la notación de los números.

Para representar, por ejemplo, el número entero 23 1415, era suficiente escribir en serie dos jeroglíficos de diez mil luego tres jeroglíficos de mil, uno de cien, cuatro de diez y cinco jeroglíficos para las unidades (ver. fig. 2).

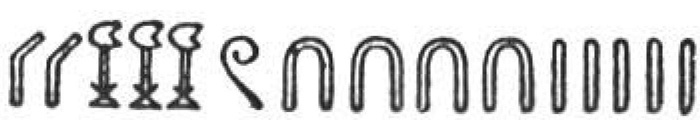


Figura 2. Escritura del número 23 145 en el sistema de numeración egipcio.

Estos símbolos, en la escritura, no podían aparecer más de nueve veces en cada número. En el sistema egipcio de numeración no había signo alguno para el cero.
Este solo ejemplo es suficiente para aprender a escribir los números tal y como los representaban los antiguos egipcios. Este sistema de numeración es muy simple y primitivo. Es un sistema decimal puro, puesto que en la representación de los números enteros se emplea el principio decimal conforme al orden clase. Hay que notar que cada signo numérico representa solamente un número. Así, por ejemplo, el signo para las decenas (ver fig. 1) denota solamente diez unidades. Y no diez decenas o diez centenas, lo que pone en evidencia el por qué el sistema de numeración egipcio no era posiciones.
Volver

3. Numeración Antigua Rusa
Conforme al principio de la numeración egipcia antigua, se construyeron sistemas de numeración en algunos pueblos más, tales como el de la antigua Grecia por ejemplo, del que hablaremos detalladamente más adelante.
En la antigua Rusia, por ejemplo, existió un sistema popular de numeración ampliamente difundido, y elaborado sobre el mismo principio del sistema egipcio, pero distinguiéndose de éste por la representación de los signos numéricos.
Es interesante anotar, que esta numeración era, en la antigua Rusia, inclusive de índole legal: precisamente conforme a tal sistema, sólo que más desarrollado, los recaudadores de impuestos debían llevar los registros en el libro de contribuciones.
El recaudador, leemos en el antiguo "Código de las Leyes", recibiendo de cualquiera de los arrendadores o propietarios el dinero aportado, deberá él mismo, o por medio de un escribiente, registrar en el libro de contribuciones frente al nombre del arrendador, la cantidad de dinero recaudado, anotando la suma recibida con cifras o signos. Para conocimiento de todos y de cada cual, estos signos se instituyen idénticos para todo lugar, a saber:

diez rublos se denota por el signo	(
un rublo	O
diez kopeks	x
un kopek	|
un cuarto	-

Por ejemplo, veintiocho rublos, cincuenta y siete kopeks y tres cuartos:

((OOOOOOOOxxxxx|||||||---

En otro lugar del mismo tomo del "Código de las Leyes", nos volvemos a encontrar con una mención acercan del empleo obligatorio de las notaciones numéricas nacionales. Se dan signos especiales para los millares de rublos, en forma de una estrella de seis puntas con una cruz en su centro, y para las centenas, en forma de una rueda con ocho rayos. Pero las notaciones para los rublos y las decenas de kopeks aquí se establecen en distinta forma que en la ley anterior. Veamos el texto de la ley acerca de los así llamados "signos tributarios"
Que en todo recibo entregado al Representante de la Alta Estirpe, además de la redacción con palabras se escriba, con signos especiales, los rublos y kopeks aportados, de tal manera que al

realizar un simple cálculo de todos los números, pueda ser aseverada la veracidad de las declaraciones[1]. Los signos empleados en el recibo significan:

una estrella	mil rublos
una rueda	cien rublos
diez rublos	.
X	un rublo,
|||||||||	diez kopeks
		un kopek.

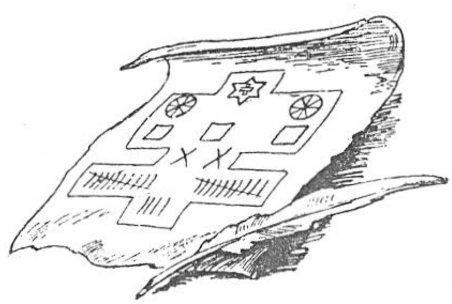


Figura 3. Inscripción antigua en un recites de pago de impuesto ("tributo"), que representa la suma 1232 rublos, 24 kopeks.

Para que no puedan hacerse aquí adiciones de ningún tipo, todos los signos se rodean por medio de un trazo constituido por líneas rectas.
Por ejemplo, mil doscientos treinta y dos rublos; veinticuatro kopeks se representan así (Ver fig. 3).
Volver

4. Numeración Romana

De todas las numeraciones antiguas, la romana es, posiblemente la única que se ha conservado hasta hoy, y que es empleada con frecuencia. Las cifras romanas se utilizan hoy día para las notaciones de los siglos, las numeraciones de los capítulos en los libros, etc.
Para la escritura de los números enteros en la numeración romana, es necesario recordar las representaciones de los siete números fundamentales:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Con su ayuda, podemos escribir todo número entero menor que 4000, y algunas de las cifras (I, X, C, M) pueden repetirse consecutivamente hasta tres veces.
En la escritura de los números en el sistema romano de numeración, una cifra menor puede estar a la derecha de una mayor; en este caso, la menor se adiciona a la mayor. Por ejemplo, el número 283 lo podernos escribir, en signos romanos así:

CCLXXXIII

[1] Esto muestra que los signos escritos tenían una amplia utilización entre el pueblo.

es decir, 200 + 50 + 30 + 3 = 283. Aquí, la cifra que representa a la centena aparece dos veces, y las que representan respectivamente a las decenas y a las unidades aparecen tres veces.
Una cifra menor, también puede escribirse a la izquierda de una mayor, con lo que aquella se substrae de ésta. En este caso no se admite la repetición de la cifra menor. Los ejemplos que se proporcionan enseguida ayudan a aclarar completamente el método de escritura de los números en la numeración romana.
Escribamos en romanos los números 94, 944, 1809, 1959:

XCIV	= 100 - 10 + 5 - 1	= 94
CMXLIV	= 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1	= 944
MDCCCIX	= 1000 + 500 + 300 + 10 - 1	= 1809
MCMLIX	= 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1	= 1959

¿Se ha observado que en este sistema no existe signo para representar el cero? En la escritura del número 1809, por ejemplo, no usamos el cero.

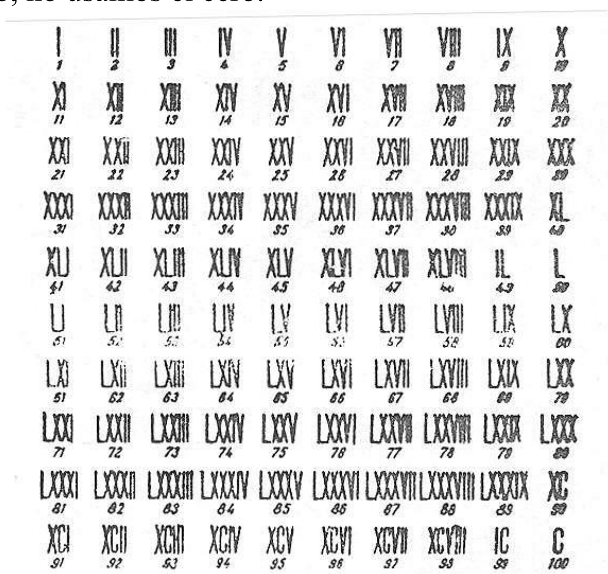


Figura 4.- Así se escriben en la numeración romana todos y cada uno de los números romanos del uno al cien.

Estudien ustedes la figura 4, donde proporcionamos la escritura en la numeración romana de todos los números enteros del 1 al 100.
Con la ayuda de las cifras romanas se pueden escribir también grandes números para lo cual, después de la escritura del signo de millares se introduce la letra latina *M* como subíndice.
Escribamos, como ejemplo, el número 417.986:

CDXVIIM CMLXXXVI

El sistema romano de numeración, como el antiguo egipcio, no es posiciones: cada cifra en él representa sólo un número estrictamente definido. Sin embargo, a diferencia del antiguo egipcio, no es decimal puro. La presencia en el sistema romano de signos especiales para los números cinco, cincuenta, y quinientos, muestran que en él existen fuertes vestigios de un sistema de numeración quinario.

La numeración romana no está adaptada, en modo alguno, para la realización de operaciones aritméticas en forma escrita. Esta es su desventaja mayor.
Volver

5. Numeración Antigua Griega

Continuemos nuestro relato acerca de los sistemas no posicionales[2] de numeración, y al final del capítulo describiremos detalladamente uno de los más antiguos sistemas de numeración (aunque por supuesto, posterior al egipcio): el babilónico, que fue el primer sistema posicional.

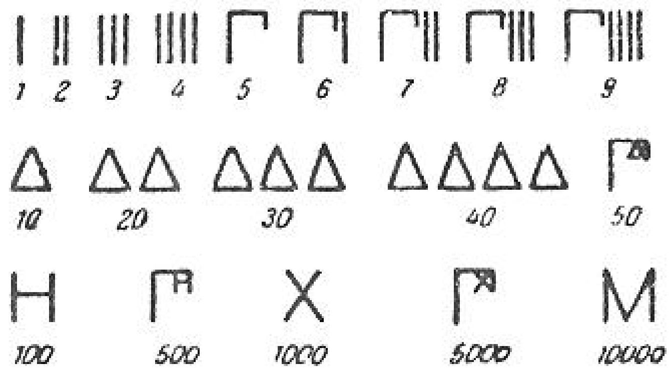
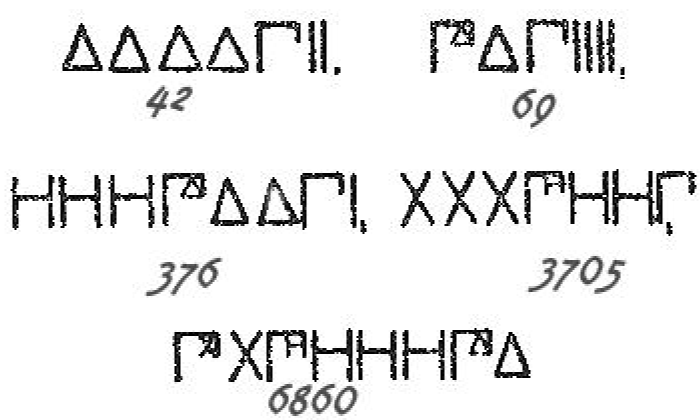


Figura 5. Escritura de algunos números en la numeración ática o herodiánica.

Un sistema muy parecido al romano es el llamado ático o herodiánico[3], que se utilizó en la Grecia antigua. En la figura 5 se muestran las representaciones de varios números de esta numeración. A diferencia de la numeración romana este dibujo muestra que aquí, los signos parar los números uno, diez, cien y mil, pueden repetirse no tres, sino cuatro veces, en cambio, se prohíbe escribir una cifra menor la izquierda de una mayor.

En la figura 6 se dan ejemplos de la escritura de números enteros en el sistema ático de numeración, que, aclaran completamente el método de tal escritura.



[2] En general, a los sistemas de numeración no decimales. Le dedicamos más adelante un capítulo entero (Ver Cap. IV).

[3] Herodiano era un Historiador griego de los siglo II-III de N. E. En sus obras científicas fue donde primero se mencionó la numeración ática. Las más antigua de las escrituras se encontrarán con respecto a esta numeración, corresponde al siglo VI antes de nuestra era.

Figura 6. Ejemplos que aclaran el método de escritura de los números enteros en el sistema ático de numeración.

Durante el siglo III A. de N. E., en Grecia, en lugar de la numeración ática se utilizaba la numeración jónica, donde números enteros se representaban con letras del alfabeto griego sobrerrayadas; sistema de numeración denominado alfabético.

Figura 7.

Como se ve, este sistema es decimal, pero no posicional.

Esto también sucede en otras numeraciones alfabéticas.

Volver

6. Numeración Eslava

Los pueblos eslavos también utilizaron una numeración alfabética. En la figura 8 están representadas las 27 letras del alfabeto eslavo. Bajo cada letra está escrito su nombre y el valor numérico que le corresponde. Sobre la letra que representa al número hay un signo (ver fig. 8) llamado "titlo".

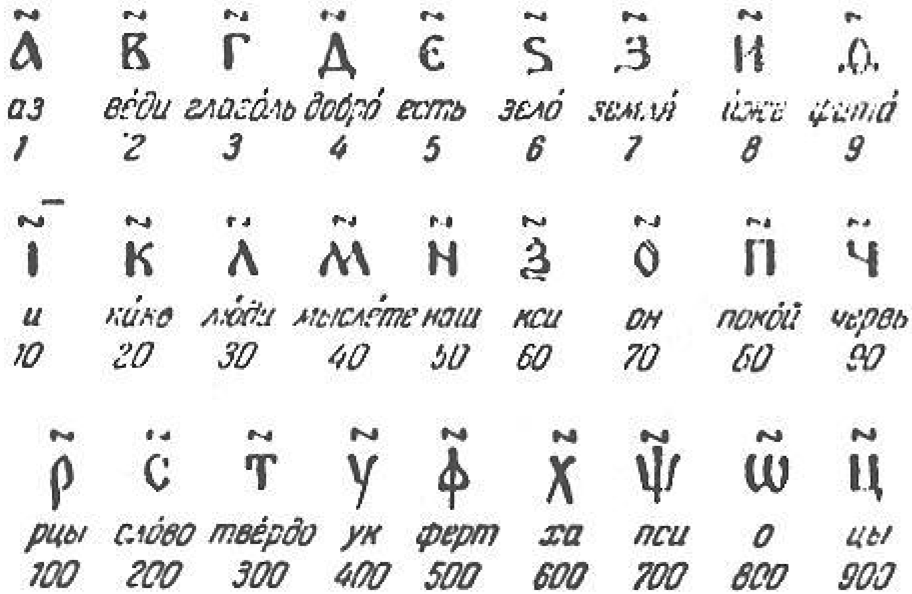


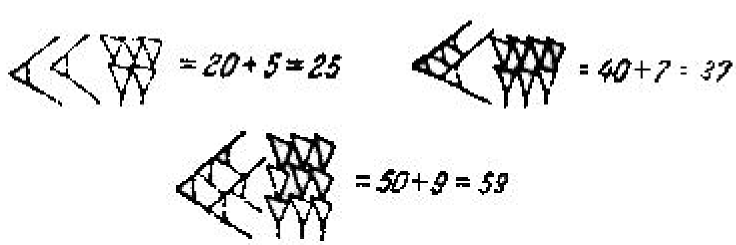
Figura 8. Notación de los números en la numeración alfabética eslava. Los nombres de las letras, que en el dibujo están escritas en ruso, se traducen como sigue, en su orden correspondiente: az vedi glagol dobró est zeló zenilia izhe fitá i kako lyudi mislietie nash ksi on pokoy cherv rtsi slevo tvierbo uk fert ja psi o tsy.

Volver

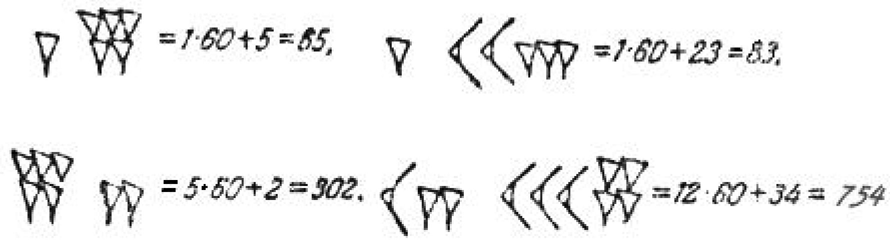
7. Numeración Babilónica

El más interesante de todos los antiguos sistemas de numeración es el babilónico, que surgió aproximadamente en el año 2000 A. de N.E. Fue el primer sistema posicional de numeración, conocido por nosotros. Los números en el sistema se representaban con la ayuda de sólo dos símbolos, una cuña vertical V que representaba a la unidad y una cuña horizontal para el número diez. Estas cuñas resaltaban en las tablillas de las cuñas de arcilla, por los palitos inclinados, y tomaban la forma de un prisma. De aquí surgió la denominación de cuneiforme para la escritura de los antiguos babilonios.

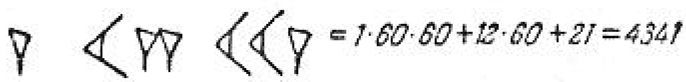
Con la ayuda de los dos signos mencionados, todos los, números enteros del 1 al 59 conforme a un sistema decimal se podían escribir exactamente como en la numeración egipcia: es decir, que los signos para el diez y la unidad repetían, correspondientemente tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades. Proporcionemos algunos ejemplos explicativos:



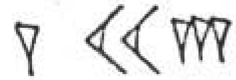
Hasta el momento no hemos encontrado nada nuevo. Lo nuevo empieza con la escritura del número 60 donde se utiliza el mismo signo que para el 1, pero con un mayor intervalo entre él y los signos restantes. Proporcionemos también, aquí, ejemplos aclaratorios:



De esta manera, ya podemos representar los números del 1 al 59 * 60 + 59 = 3599.
Enseguida está una unidad de un nuevo orden (es decir el número 1 * 60 * 60 = 3600), que también se representa por el signo para la unidad; por ejemplo:

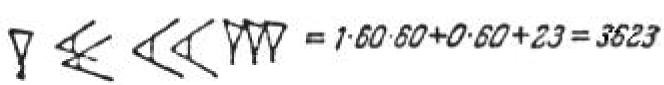


De esta manera, la unidad de segundo orden representada por el mismo signo es 60 veces mayor que la de primer orden, y la unidad de tercer orden es 60 veces mayor que la de segundo y 3600 veces mayor (60 * 60 = 3600) que la unidad de primer orden. Y así sucesivamente.
¿Pero qué sucede si uno de los órdenes intermedios no existe?, preguntarán ustedes. ¿Cómo se escribe, por ejemplo, el número 1 * 60 * 60 + 23 = 3623? Si se escribiera simplemente en esta forma:



Podría confundírsele con el número 1 * 60 + 23 = 83. Para evitar confusiones se introdujo, posteriormente, el signo separador, que jugaba el mismo papel que el signo "cero"

juega en nuestra numeración. Así pues, con la ayuda de dicho signo separador, el número 3623 se escribirá así:



El signo separador babilonio nunca se colocaba al final de un número; por tal razón, los números 3; 3 * 60 = 180: 3 * 60 * 60 = 10800; etc., se representaban en forma idéntica. Se convenía en determinar conforme al sentido del texto, a cuál de estos números se refería lo expuesto.

Es notable el que, en la matemática babilónica, se empleara un mismo signo, tanto para la escritura de los números enteros, como para la el de las fracciones. Por ejemplo, las tres cuñas verticales escritas en fila, podían denotar 3/60, ó 3/60*60 = 3/3.600, ó 3/60*60*60 = 3/216.000
¿ Cuáles son las conclusiones que podemos sacar, ahora, sobre las particularidades de la numeración babilónica?
En primer lugar, observamos que este sistema de numeración es posicional. Así, un mismo signo puede representar en él, tanto 1 como 1 * 60, como $1*60*60 = 1 * 60^2 = 1 * 3600$, etc., en función del lugar en que dicho signo esté escrito. Exactamente como en nuestro sistema de numeración, una cifra, por ejemplo, 2, puede representar los números: 2, ó 2 * 10 = 20, ó $2 * 10 * 10 = 2 X 10^2 = 2 * 100 = 200$, etc., según si está en el primero, segundo, tercero, etc, orden.
Sin embargo, el principio posicional, en la numeración babilónica, se lleva a cabo en órdenes sexagesimales. Por tal motivo, dicha numeración se llama sistema de numeración posicional sexagesimal. Los números hasta el 60 se escribían, en esto sistema, conforme al principio decimal
En segundo lugar la numeración babilónica permitía una escritura sencilla de las fracciones sexagesimales, es decir, las fracciones con denominadores 60, 60 * 60 = 3600, 60 * 60 * 60 = 216 000, etc.
Las fracciones sexagesimales se utilizaron mucho en la época de los babilonios. Pero aún hoy dividimos 1 hora en 60 minutos, y 1 minuto en 60 segundos. Exactamente igual, dividimos la circunferencia en 360 partes, llamadas grados, un grado lo dividimos en 60 minutos, en tanto que un minuto en 60 segundos.
Como se ve, el sistema de numeración hindú, ampliamente usado por nosotros, está lejos de ser el único método de notación de los números.
Han existido también, otros procedimientos de representación de los números; así, por ejemplo, algunos comerciantes tenían sus signos secretos para las notaciones numéricas: las llamada, "claves" comerciales. Sobre ellas hablaremos ahora detenidamente.
Volver

8. "CLAVES" SECRETAS COMERCIALES

En tiempos pre-revolucionarios, en las cosas compradas en los comercios ambulantes o en las tiendas particulares[4], especialmente de provincia, se veían frecuentemente unas letras indescifrables, por ejemplo,

a ve v uo.

Se trata simplemente de dos claves: una es del precio de venta que tiene la mercancía, y la otra es del costo que tuvo la misma para el comerciante. Así, éste puede calcular cuánto rebajarla en caso de que el cliente le pidiese descuento.

[4] Aunque esta costumbre ha desaparecido -por innecesaria- en la URSS y otros países, sigue siendo muy usual entre los pueblos de sistema capitalista. (N. del Editor)

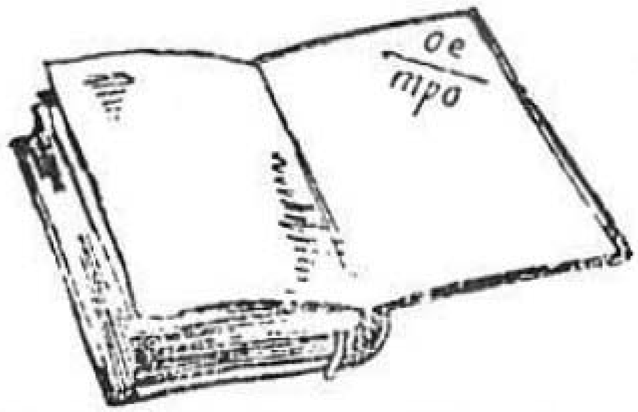


Figura 9. "Clave" comercial en la cubierta de un libro (en ella se representa con las letras superiores, el valor intrínseco, o costo, del libro, y con las letras inferiores el precio de renta).

El sistema de notaciones era muy sencillo. El vendedor escogía cualquier palabra de diez diferentes letras: por ejemplo la palabra "feudalismo". La primera letra de la palabra representaba al uno, la segunda, 2 la tercera, 3, y así sucesivamente hasta la última letra, que representaba al cero. Con la ayuda de estas letras-cifras condicionales el comerciante anotaba sobre las mercancías, su precio, guardando en estricto secreto "la clave" de su sistema de ganancias.
Si por ejemplo, era escogida la palabra:

f	e	u	d	a	l	i	s	m	o
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

el precio 4 rublos, 75 kopeks, se escribía **d ia**
Algunas veces, sobre la mercancía se escribía el precio en forma de quebrado (fig. 9), por ejemplo, en un libro se encontraba la notación

ao / f en

eso significaba, en la clave "f e u d a l i s m o" que era necesario pedir un rublo 25 kopeks, si el mismo libro valía 50 kopeks.

9. Peones en Lugar de Números

Solamente después de lo indicado, es fácil comprender que los números se pueden representar no solamente con ayuda de cifras, sino también con cualesquiera otros signos y aún objetos: lápices, pluma, reglas, gomas, etc. Basta con atribuir a cada objeto el valor de una cifra cualquier determinada. Se puede inclusive, por curiosidad, con ayuda de tales cifras objetos, representar las operaciones con los números: sumar, restar, multiplicar, dividir.

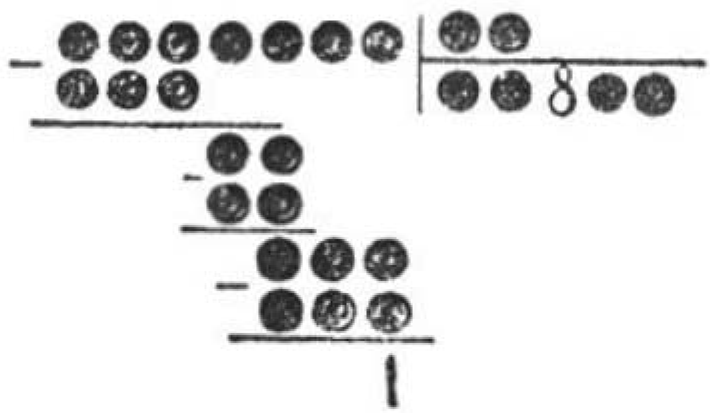


Figura 10. Representación del problema publicado por una revista de ajedrez, donde casi todas las cifras están substituidas por peones.

En una revista de ajedrez fue presentado un problema: determinar el verdadero significado del ejemplo de división de números, representado en la fig. 10, en el cual casi toda, las cifras están substituidas por peones. De 28 cifras, sólo 2 son conocidas: el 8 en el cociente y, el 1 en el residuo. Los otros 26 signos son peones de ajedrez, por lo que probablemente parecerá que el problema no tiene sentido. Sin embargo ahora veremos una manera de solucionar el problema, basándonos en el proceso de la división.

La segunda cifra del cociente es, naturalmente; cero, ya que al residuos de la primera resta le añadimos no una cifra sino dos. De la misma manera, después de que añadamos la primera cifra, formamos un número menor que el divisor; también en tales casos la cifra siguiente del cociente es cero.

Exactamente por lo mismo; razonamientos, establece que la cuarta cifra del cociente es, también cero.

Fijando la atención en la disposición de los peones, observamos que el divisor de dos cifras, al ser multiplicado por 8 da un número de dos cifras; al multiplicarlo por la primera cifra (aún desconocida) del cociente, se obtiene un número de tres cifras. Es decir, esta primera cifra del conciente es mayor que 8; tal cifra puede ser, solamente, el 9.

Por el mismo método, establecemos que también la última cifra del cociente es 9.

Ahora, el cociente está completo; es: 90 809. Obtengamos hora el divisor. Como se ve en la figura 10, consta de dos cifras; además, la disposición de los peones indica que este número de dos cifras, al multiplicarse por 8, da un número de dos cifras; el resultado de multiplicarlo por nueve, consiste en un número de tres cifras. ¿Cuál es este número? Realicemos, las pruebas empezando con el menor número de dos cifras: el 10.

10 * 8 = 80.
10 * 9 = 90.

El número 10, como vemos, no satisface las condiciones requeridas: ambos productos son números de dos cifras. Probemos con el siguiente número de dos cifras, el 11:

11 * 8 = 88
11 * 9 = 99

El número 11 tampoco sirve, pues los dos productos tienen otra vez dos cifras. Probemos ahora con el 12:

12 * 8 = 96
12 * 9 = 108

El número 12 satisface todas las condiciones. Pero, ¿no habrá otros números que también las satisfagan? Probemos con el 13:

13 * 8 = 104
13 * 9 = 117

Ambos productos son números de tres cifras, por lo que el 13 no sirve. Está claro que tampoco servirán todos los números mayores que 13.
Así, el único divisor posible es el 12. Conociendo el divisor, el cociente y el residuo, fácilmente podemos encontrar el dividendo, invirtiendo el proceso de la división.
Así, dividendo

90 809 * 12 + 1 = 1 089 709

Finalmente tenemos, por consiguiente, el ejemplo dado de división con residuo:

1	0	8	9	7	0	9	/1	2			
−1	0	8					9	0	8	0	9
			9	7							
		−	9	6							
				1	0	9					
			−	1	0	8					
						1					

Como vemos, con dos cifras conocidas hemos, pedido encontrar el valor de 26 cifras desconocidas.
Volver

10. La Aritmética en el Desayuno

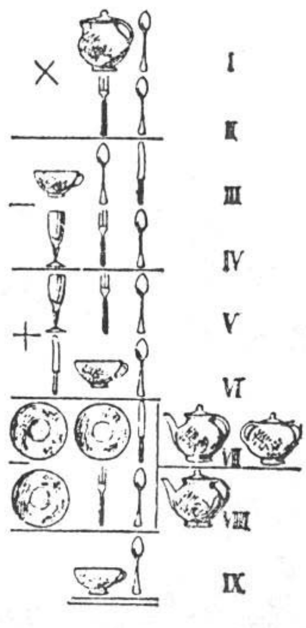


Figura 11 ¿A qué números corresponden estos símbolos aritméticos?

Ante nosotros hay una serie de operaciones con números, representados por los objetos de servicio de una mesa (fig. 11): El tenedor, la cuchara, el cuchillo, la jarra, la tetera, el plato; todos éstos son signos, cada uno de los cuales substituye a una cifra determinada.
Observando este grupo de cuchillos, tenedores, vajilla, etc., cabe preguntar: ¿Cuáles son, precisamente, los números representados aquí?
A primera vista, el problema parece ser muy difícil: como si se tratara de descifrar jeroglíficos, tal y como lo hizo hace algún tiempo Champolion[5]. Pero este problema es mucho más sencillo: ustedes saben que los números, aunque aquí están representados por cuchillos, cucharas, tenedores, etc, están escritos conforme al sistema decimal de numeración, es decir, que sabemos que el plato colocado en segundo lugar (leyendo desde la derecha), es una cifra de las decenas, así como el objeto que está a su derecha es una cifra de las unidades, y el que está a su izquierda es la cifra de las centenas. Además, ustedes saben que la disposición de todos estos objetos tiene un determinado sentido, el cual surge de la esencia de las operaciones aritméticas, realizadas con los números denotados por ellos. Todo esto, puede, en gran medida, facilitar a ustedes la resolución del problema presentado.
¿Con qué números se realizan las operaciones aritméticas, aquí indicadas?
Veamos cómo se pueden encontrar los valores de los objetos aquí dispuestos. Considerando los tres primeros renglones en nuestro dibujo, verán que cuchara, multiplicada por cuchara, da cuchillo; y de los renglones 3, 4 y 5, vemos que cuchillo menos cuchara da cuchara es decir, cuchara + cuchara = cuchillo. ¿Qué cifra da el mismo resultado al multiplicarse por sí misma que al duplicarse? Esta puede ser únicamente el 2, porque 2 * 2 = 2 + 2. Así, sabemos ya que cuchara = 2 y, por lo tanto, cuchillo = 4.

[5] Champolion (1790-1532). Famoso filólogo francés fundador de la egiptología o, ciencia que estudia el idioma la historia y la cultura del Egipto antiguo y de los países con frontera común con él.

Ahora, sigamos, adelante, ¿Qué cifra está representada por el tenedor? Lo averiguaremos por las primeras 3 líneas, conde el tenedor aparece multiplicando, y por los renglones III, IV y V, donde aparece el tenedor en la substracción. En el grupo de la substracción vemos que, en el orden de las decenas, al restar tenedor de cuchara, obtenemos tenedor, es decir, en la substracción 2 - tenedor, obtenemos tenedor. Esto puede ser en dos casos: o tenedor = 1, y por lo tanto, 2-1=1, o tenedor = 6, y entonces substrayendo 6 de 12 (una unidad de orden superior se representa por taza), obtenemos 6. ¿Cuál elegir: 1 ó 6?
Probemos el 6 para el tenedor en otras operaciones. Dirijamos la atención a la multiplicación de los números que se hallan en los renglones I y II. Si tenedor = 6, entonces en el segundo renglón está el número 62 (ya sabemos que cuchara = 2). No es difícil entender, que en tal caso, en el primer renglón deberá estar el número 12, y la jarra representará la cifra 1. En verdad, si la jarra denotara la cifra 2 o cualquier otra cifra mayor, el producto de los números de los renglones I y II sería un número de cuatro cifras, y no de tres, como debe ser. Así, si tenedor = 6, en el primer renglón está el número 12, y en el 11, el 62. Por lo tanto, su producto es 12 * 62 = 744.
Pero esto es imposible, porque la cifra de las decenas de este producto es cuchara, es decir, 2, y no 4 como habíamos obtenido. Esto quiere decir, que tenedor no es igual a 6 como se suponía, y por lo tanto es necesario considerarlo igual a uno.
Conociendo por tales, búsquedas, en verdad bastante largos, que el tenedor denota la cifra 1, en adelante ya iremos más rápida y certeramente. De la operación de la substracción, en los renglones III y IV, vemos que taza puede ser 6, o bien 8. Pero el 8 no puede ser, porque implicaría que la copa fuera 4, y sabemos que la cifra cuatro esta denotarla por el cuchillo. Así, la taza representa a la cifra 6 y, por lo tanto, la copa a la cifra 3.
¿Cuál es la cifra que está representada por la jarra en el renglón 1? Esto es fácil de saber, si nos es dado el producto (III renglón, 624) y uno de los factores (II renglón, 12). Dividiendo 624 entre 12, obtenemos 52. Por lo tanto, la jarra = 5.
El valor del plato se determina fácilmente: en el VII renglón, plato = tenedor + taza = copa + cuchillo, es decir, plato = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.
Ahora, sólo falta descifrar el valor numérico de la tetera y de la azucarera en el VII renglón. Puesto que para las cifras 1, 2, 3, 1, 5, 6 y 7 los objetos ya han sido encontrados, queda solamente elegir entre 8, 9 y 0. Substituyendo en la operación de división, representarla en los tres último renglones, en lugar de los objetos las cifras; correspondientes, obtenemos la disposición siguiente (con las letras *t* y *a* se denotan, respectivamente, la tetera y la azucarera):

$$\begin{array}{rl} 774 & : ta = \quad 1 \\ -\ 712 & \\ 62 & \end{array}$$

El número 712, como vemos, es el producto de los dos números desconocidos, *ta* y *t* que no pueden ser, naturalmente, ni cero, ni terminados en cero: es decir, ni *t*, ni *a* son cero. Entonces, quedan ya sólo dos alternativas: *t* = 8 y *a* = 9 o bien, *t* = 9 y *a* = 8. Pero multiplicando 98 * 8 = 712 no obtenemos 712; por consiguiente, la tetera representa al 8, y la azucarera al 9 (efectivamente: 89 * 8 = 712).
Así, por medio de sencillos cálculos aritméticos desciframos la inscripción jeroglífica de los objetos de servicio de una mesa:

tenedor	1

cuchara	2
copa	3
cuchillo	4
jarra	5
taza	6
plato	7
tetera	8
azucarera	9

Y toda la serie de operaciones aritméticas, representada por este original servicio de mesa, adquiere, sentido:

```
  52
 *12
 624
-312
+462
 774  :89=8
-712
  62
```

Volver

11. Charadas Aritméticas

Lo que denomino charadas aritmética constituye un juego recreativo: la adivinanza de determinada palabra por la resolución de un problema al estilo del que resolvimos en el párrafo anterior. El adivinador piensa una palabra de 10 letra, diferentes (no repetidas). Por ejemplo: terminado, acostumbre, impersonal. Tomando letras de la palabra concebida, por cifras, representará por medio de estas letras cualquier caso de división. Si la palabra proyectada es *terminados*, se puede dar un ejemplo de división así:

t	e	r	m	i	n	a	d	o	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 4517820 = *mitades*; divisor: 87890 = *dados*

```
  4517820 : 87890 = 51        mitades : dados = it
– 4394500                   – mromis
  -----------------           ------------------
   123320                      terres
–   87890                   –   dados
  -----------------           ------------------
    35430                        rimrs
```

Se pueden tomar también otras palabras:

dividendo: 8945673 = *dominar*; divisor: 45670 = *minas*

$$
\begin{array}{rl}
\textit{dominar} & : \ \textit{minas} \ = \ \textit{toi} \\
-\quad \textit{minas} & \\
\hline
\textit{mradna} & \\
-\quad \textit{mttsrs} & \\
\hline
\textit{endrar} & \\
-\quad \textit{eedris} & \\
\hline
\textit{msser} &
\end{array}
$$

La representación literal de un determinado caso de división, se confía a un adivinador, quien conforme a ésto, en una primera ojeada sobre el conjunto de palabras incoherentes, deberá adivinar la palabra concebida. Como se debe tratar de descubrir el valor numérico de las letras en semejantes casos, ya lo sabe el lector: lo explicamos durante la resolución del problema del párrafo anterior. Con cierta paciencia, se pueden descifrar estas charadas aritméticas, a condición únicamente de que el ejemplo sea bastante largo y proporcione el material necesario para las suposiciones y pruebas. Si son escogidas palabras que den casos excesivamente cortos de la división, por ejemplo:

a	c	o	s	t	u	m	b	r	e
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 21411 = *casas*; divisor: 9053 = *reto*

$$
\begin{array}{rl}
\textit{casas} & : \ \textit{retos} \ = \ \textit{c} \\
-\quad \textit{abaeu} & \\
\hline
\textit{ooeb} &
\end{array}
$$

entonces, la adivinación es muy laboriosa. En semejantes casos, es necesario solicitar, del adivinador, la continuación de la división hasta centésimos o milésimos, es decir, obtener en el cociente, aún, dos o tres fracciones decimales. He aquí un ejemplo de división hasta centésimos:

i	m	p	e	r	s	o	n	a	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 21039 = *milpa*; divisor: 2939 = *mapa*

$$\begin{array}{rccc} \textit{milpa} & : & \textit{mapa} = \textit{ois} \\ -\ \textit{mlrop} & & \\ \hline \textit{essl} & & \\ -\ \textit{mapa} & & \\ \hline \textit{iomil} & & \\ -\ \textit{iospe} & & \\ \hline \textit{ros} & & \end{array}$$

Si en este caso nos limitásemos a la parte entera (o), la clave de la palabra propuesta sería poco probable.
En cuanto a las palabras empleadas en calidad de "clave" para semejantes charadas, su elección no es tan difícil como parece; además de las antes indicadas se pueden utilizar las palabras: *futbolista, inyectarlo, esquivador, profetizas, reticulado, esculpidor*
Volver

12. Descubriendo un Número de Tres Cifras
Veamos aún otro acertijo aritmético de distinto carácter. Un número desconocido consiste de tres cifras diferentes: *A, B, C*. Lo escribimos, condicionalmente, así: *ABC*, teniendo en mente, que *C* es la cifra de las unidades, *B* la de las decenas y *A*, la de las centenas. Es necesario hallar este número, si es sabido que:

$$\begin{array}{lr} & ABC \\ \times & BAC \\ \hline & **** \\ + & **A \\ & ***B \\ \hline & ****** \end{array}$$

Los asteriscos denotan cifras desconocidas. Procedamos a encontrar todas:
Ante todo, establezcamos que ni *A*, ni *B*, ni *C* son cero, pues de lo contrario no se podrían obtener tres renglones de productos parciales.
Observemos además que:

el producto *C* X *A* termina en *A*
el producto *C* X *B* termina en *B*

de donde deducimos que *C* puede ser 1 ó 6. Para la unidad, nuestra consideración es evidente; para el 6 se aclara con los ejemplos:

6 X 2 = 12;
6 X 8 = 48;
6 X 4 = 24.

Otras cifras no poseen semejante propiedad. Pero si *C* fuera 1, el primer producto parcial no sería de cuatro cifras, sino solamente de tres. Queda, por consiguiente, una posibilidad: *C* = 6.
Nos convencemos ahora de que *C* = 6 y que, por lo tanto, *A* y *B* pueden ser solamente 2, 4 u 8; pero como el segundo producto parcial consiste solamente de tres cifras, entonces *A* no puede ser ni 4 ni 8, y por lo tanto *A* = 2.
Para *B* quedan dos posibilidades: *B* = 4, y *B* = 8. Si con *A* = 2, *B* fuera 4, el último producto parcial consistiría de tres cifras y no de cuatro; luego, *B* = 8.

Así tenemos, *A* = 2, *B* = 8, *C* = 6. El número buscado es 286, y la multiplicación queda como sigue:

$$
\begin{array}{lr}
 & 286 \\
\times & 826 \\
\hline
 & 1716 \\
+ & 572 \\
 & 2288 \\
\hline
 & 236236
\end{array}
$$

Volver

13. El Sistema Decimal de Los Armarios de Libros
El sistema de numeración decimal halla, de paso, aplicación allí donde no era de esperarse, como en las bibliotecas en 1a distribución de libros conforme a secciones.
En algunas bibliotecas masivas se utiliza tal sistema de clasificación de los libros, en la cual un libro tiene, en todo lugar, idéntica notación numérica ("clave"). Este sistema se denomina decimal y libra al lector de la necesidad de consultar el catálogo al requerirse libros de una u otra sección.
El sistema es sencillo y muy conveniente. Su esencia consiste en que, a cada rama del conocimiento se le da una notación numérica en tal forma, que las cifras que la componen informan acerca del lugar que ocupa dicha rama en la organización general de las materias:
Todos los libros se distribuyen, ante todo, conforme a diez secciones principales, que se denotan por las cifras del 0 al 9:

0 Obras de carácter general.
1 Filosofía.
2 Historia de la religión y literatura antirreligiosa.
3 Ciencias sociales. Derecho.
4 Filología. Lenguas.
5 Ciencias, físico-matemáticas y naturales
6 Ciencias aplicadas (la medicina, la técnica, la agricultura, etc.)
7 Bellas Artes.
8 literatura.
9 Historia, geografía, biografías.

La primera cifra de la clave (es decir, de la notación numérica) conforme a este sistema, indica directamente a cual de las secciones de libros enumeradas se refiere. Todo libro de filosofía tiene una clave que empieza con 1, de matemáticas con 5, de técnica con 6, etc. Si la clave empieza, por

ejemplo, con la cifra 4, entonces, sin necesidad de revisar los libros, ustedes saben con anticipación que se trata cae la sección de lingüística.
Además, cada una de las secciones, a su vez enumerada se subdividen en 10 subsecciones, que también se denotan por las cifras del 0 al 9; estas cifras ocupan, en la clave, el segundo lugar. Por ejemplo, la 5a. sección que contiene libros de ciencias físico-matemáticas y naturales, se subdivide en las siguientes subsecciones:

50	Obras generales de ciencias físico-matemáticas naturales
51	Matemática.
52	Astronomía. Geodesia.
53	Física. Mecánica Teórica.
54	Química. Mineralogía.
55	Geología.
56	Paleontología.
57	Biología; Antropología. Antropología.
58	Botánica.
53	Zoología.

En forma semejante se dividen, también, las otras secciones. Por ejemplo, en la sección de ciencias aplicadas (6), a la subsección de medicina le corresponde el número 61, a la de agricultura el 63, al comercio y vías de comunicación.
Volver

Los signos y denominaciones aritméticas en diversos pueblos
Cabe pensar que los signos aritméticos, hasta cierto grado, son internacionales, y que son idénticos en todos los pueblos de cultura europea. Esto es cierto sólo con relación a la mayoría de los signos, pero no con relación a todos. Los signos + y -, los signos *x y*: se utilizan con el mismo sentido entre los alemanes, franceses e ingleses. Pero el punto como signo de multiplicación se aplica de diferente forma entre diversos pueblos. Mientras que algunos escriben 1a multiplicación 7.8, otros la denotan como 7·8, elevando el punto a la mitad de la cifra. También el punto decimal se escribe de muy diversas maneras: mientras algunos, como nosotros (se refiere a los soviéticos), escribimos 4,5, otros escriben 4.5, y unos terceros 4·5, colocando el punto arriba de la mitad. Además, cuando se trata de escribir un número decimal que no tiene parte entera, los norteamericanos y los ingleses omiten el cero, lo que no sucede en ningún lugar de Europa Continental. En libros norteamericanos, frecuentemente se pueden hallar notaciones como .725, ·725. o aún ,725 en vez de 0,725 (en México se escribe 0.725). La descomposición de un número en clases se denota, también, en diversas formas. Así, en algunos países se separan las clases con puntos (15.000.000), en otros con comas (15,000,000), y en otros se acostumbra dejar espacio libres, sin signo alguno entre clase y clase (15 000 000). Es instructivo observar, después de eso, cómo se modifica el método de denominación de un mismo número al pasar de una lengua a otra. E1 número 18, en ruso se dice vociemnadtsat es decir, primero se pronuncian las unidades (8) y luego las decenas (10), mientras que en español es a la inverso. En alemán, ese mismo número en la misma sucesión, se lee achtzhen, es decir, ocho diez; en francés, se dice diez ocho (dix-huit). En la siguiente tabla vemos hasta qué punto son distintos, en diversos pueblos, los métodos de denominación del mismo número 18:

en ruso 8 10

en alemán 8 10
en francés 10 8
en armenio 10 + 8
en griego 8 + 10
en latín menos 2 , 20
en neozelandés 11 + 7
en lituano 8 arriba de 10

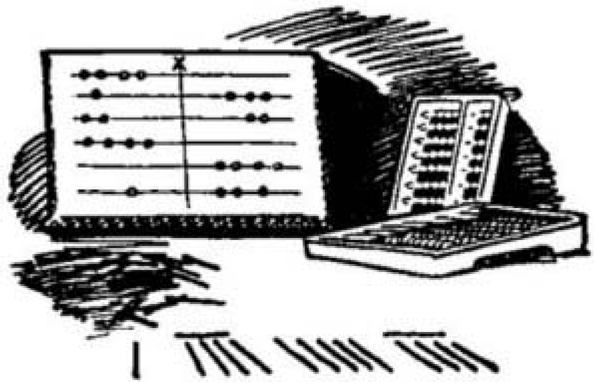
También es curiosa la voz groenlandesa: "del otro pie tres". Esto es, una abreviatura de la suma de los dedos de las manos, de los de un pie, y tres del otro pie. Veamos el sentido que tiene:

número de dedos en ambas manos	10
número de dedos en un pie	5
número de dedos del otro pie	3
Total	18

La voz completa para el número dieciocho sería: "todas mis manos, 3, mi mano", sin tomar en cuenta los dedos de los pies (es decir, 10 + 3 + 5).

Curiosidades Aritméticas:

100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 x 9
100 = 1 + 2 x 3 + 4 x 5 - 6 + 7 + 8 x 9
100 = 1 + 2 x 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9
100 = 1 x 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9
Volver



Capítulo Segundo
El Abaco Antiguo y sus Descendientes.

Contenido:

1. El Rompecabezas de Chéjov

Ahora veremos un ameno problema aritmético, tal y como lo planteó el estudiante de séptimo año, Ziberov, del cuento de Chéjov "el Repetidor".
"Un comerciante compró 138 arshins (1 arshin = 80 cm) de tela negra y azul por 540 rublos. Me pregunto, ¿cuántos arshin compró de cada una, si la tela azul costaba 5 rublos por arshin, y la negra, 3 rublos?"
Con gran humor, Chéjov relata cómo trabajaron sobre este problema tanto el repetidor de 7º año como su alumno Pedrito, de 12 años, mientras éste no fue rescatado por su padre:
"Pedrito observó el problema y, sin decir una palabra, empezó a dividir 540 entre 138.
- ¿Para qué divide Ud.? ¡Deténgase! O... continúe... ¿Aparece un residuo? Aquí no puede haber residuo. ¡Permítame!
- Probablemente no se trate de un problema aritmético, pensó, y vio la respuesta: 75 y 63-. Hmm!, dividir 540 entre 5 + 3? no, no.
- Bien, ¡resuélvalo ya! - concluyó, ordenando a Pedrito.
- ¿Qué tanto piensas? Ese problema te quitará todo el tiempo - dijo a Pedrito su padre, Udodov. Se necesita ser tonto. Resuélvalo Ud. por esta vez, Egor Aliékseich.
Egor Aliékseich, coge el pizarrín y se dispone a resolverlo; tartamudea, enrojece. Palidece.
- Este problema debe ser algebraico – dijo -. Se puede resolver con ayuda de la x y de la y, Por otra parte, también así se puede resolver: Yo aquí he dividido...¿Comprende? Ahora es necesario restar. ¿Entiende?...o si no. . . Lo mejor será que me lo traiga resuelto mañana… Piénselo !
Pedrito sonrió. Udodov también sonrió. Ambos comprendían la confusión del maestro. El estudiante de VII grado se confundió aún más, y empezó a pasear de extremo a extremo de la habitación.
Al fin, Udodov dijo:
- Sin álgebra también se puede resolver - y agregó dirigiéndose hacia un ábaco- helo aquí, mire...
Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser.

- Esto está hecho a nuestra manera… no científica".
Esta historia con el problema que había sembrado la confusión en el repetidor, plantea por sí misma tres nuevos problemas, a saber:

1. ¿Cómo hubiera el repetidor resuelto el problema algebraicamente?
2. ¿ Cómo debió haber resuelto el problema Pedrito ?
3. ¿Cómo se lo resolvió su padre a Pedrito con el ábaco, en forma "no científica"?

A las primeras dos cuestiones, podemos responder probablemente sin trabajo alguno. La tercera no es tan simple. Pero vayamos en orden.

1. El repetidor de séptimo año hablaba de resolver el problema "con la ayuda de la *x* y de la *y*", y decía que el problema debía ser "algebraico". Formar dos ecuaciones con dos incógnitas para el problema dado no es difícil; hela aquí:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 138 \\ 5x + 3y = 540 \end{array}\right]$$

donde *x* es el numero de arshins de tela azul, e *y*, el de tela negra.

2. Sin embargo se resuelve fácilmente, también, en forma aritmética. Suponiendo que toda la tela hubiera sido azul, los 138 arshins de tela azul hubieran costado 5 * 138 = 690 rublos; esto es, 690 - 590 = 150 rublos más del costo en la realidad. Para que el precio sea 150 rublos menor, basta considerar que la diferencia de precios entre un arshin de tela azul y uno de tela negra es de 5 - 3 = 2 rublos: dividiendo 150 entre 2, obtenemos 75 arshins de tela negra; restándolos de los 138 originales, obtenemos 138 - 75 = 63 arshins de tela azul. Así debió haber resuelto el problema Pedrito.

3. Queda aún la tercera pregunta: ¿Cómo resolvió el problema Udodov?
En el relato, se dice bien poco: "Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser".
¿Cuáles son los métodos de resolución de un problema con la ayuda del ábaco?
El ábaco sirve para efectuar operaciones aritméticas tal y como se hace en el papel (fig. 13).
Udodov conocía muy bien el ábaco y pudo hacer las operaciones muy rápido, sin la ayuda del álgebra como quería el repetidor, ni "de la *x* y de la *y*". Veamos ahora las operaciones que el padre de Pedrito debió hacer en el ábaco.

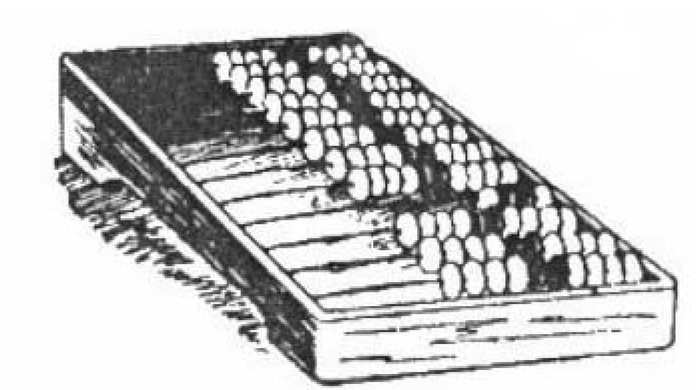
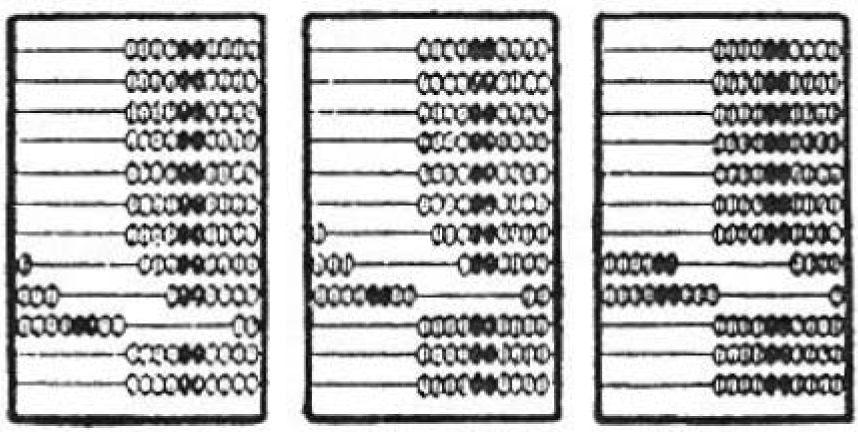


Figura 13. Abaco al estilo ruso.

La primera operación debió haber sido, como sabemos, multiplicar 138 por 5. Para eso, conforme a las reglas de las operaciones en el ábaco, primeramente multiplicó 138 por 5, es decir, simplemente movió el número 138 una hilera hacia arriba (ver la figura 14, a, b) y luego dividió este número entre dos, sobre el mismo ábaco. La división se empieza por abajo: se separan la mitad de bolitas colocadas en cada alambre; si el número de bolitas es impar en un alambre dado, se elimina la dificultad, "partiendo" una bolita de este alambre en 10 inferiores.



138 (a) | 138 × 10 = 1380 (b) | 1380 : 2 = 690 (c)

*Figura 14. Primero se muestra, en el ábaco, 138 * 10, es decir el número 138 (a), sometido a la operación (b), y luego se muestra el resultado anterior dividido entre dos (c)*

En nuestro caso, por ejemplo, 1380 se divide por la mitad en la forma siguiente: en el alambre inferior, donde existen 8 bolitas, se separan 4 bolitas (4 decenas), en el alambre intermedio de las 3 bolitas se separa 1, pero se conserva una, y la otra se substituye mentalmente por 10 inferiores y se dividen a la mitad, añadiendo o decenas a las bolitas inferiores; en el alambre superior se "parte" una bolita agregando 5 centenas a las bolitas del alambre intermedio. En consecuencia, en el alambre superior no hay bolitas, en el intermedio 1 + 5 = 6 centenas y en el inferior 4 + 5 = 9 (Fig. 14, c). En total 690 unidades. Todo esto se efectúa rápida y automáticamente.
Después, Udodov debió restar 540 de los 690. Sabemos cómo se hace en el ábaco.
Finalmente quedaba tan sólo dividir por la mitad la diferencia obtenían: 150; Udodov apartó 2 de las 5 bolitas (decenas), entregando 5 unidades a la fila inferior de bolitas; después de 1 bolita en el alambre de las centenas, entregó 5 decenas a la fila inferior: obtuvo 7 decenas y 5 unidades, es decir, 75.
Naturalmente, estas sencillas operaciones se efectúan más velozmente en el ábaco, que como aquí son descritas.
Volver

2. Cómo Calculaban en la Remota Antigüedad

Desde hace mucho tiempo, la gente ya sabía contar. Los dedos de las manos constituyeron el primer instrumento natural para contar. De ahí vino la idea de un sistema decimal de numeración en muchos pueblos antiguos. Debemos decir que las operaciones aritméticas con los dedos sirvieron mucho tiempo como medio práctico para algunos pueblos, inclusive para los antiguos griegos. No debemos creer que con los dedos sólo se puede contar hasta diez. Por documentos de la literatura griega antigua que han llegado hasta nosotros, sabemos que ya en los siglos V y IV antes de nuestra era se habían desarrollado considerablemente las operaciones con los dedos cuyos resultados llegaban a miles.

Posteriormente, entre los egipcios, griegos, romanos y chinos, y en otros pueblos antiguos, aparece un aparato para calcular que, de acuerdo a su idea, recuerda nuestro ábaco. Su forma en distintos pueblos era diferente. Así, el ábaco griego era en sí, un tablero (mesa) con cuadro, dibujados (fig.15), en el cual se desplazaban fichas especiales que hacían el papel de las bolitas de los ábacos de nuestro tiempo. El ábaco romano tenía la forma de un tablero de cobre con canales (con cortes), en los que se desplazaban botones.

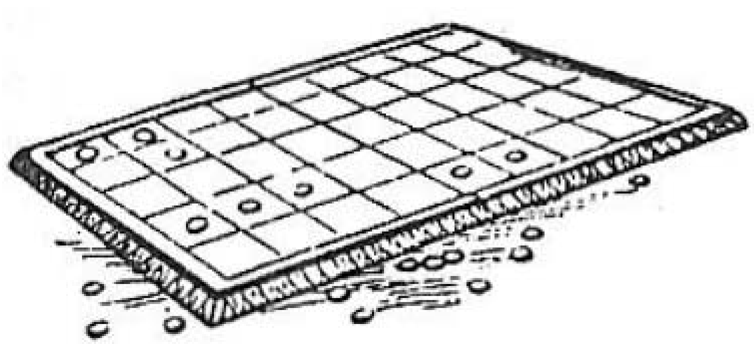


Figura 15. Tablero y fichas utilizadas para efectuar operaciones aritméticas, antes del aparato ábaco

En la antigua China, para la representación de los números en el tablero de cálculo, se empleaban palitos con una longitud de 10 cm. y un espesor de 1 cm. Ya cerca del año 150 de nuestra era, eran ampliamente conocidos en China los métodos para efectuar, en el tablero de calcular, las cuatro operaciones aritméticas.

Había dos maneras de representar las cifras en el tablero de operaciones chino. Ambas están reproducidas en la fig. 16.

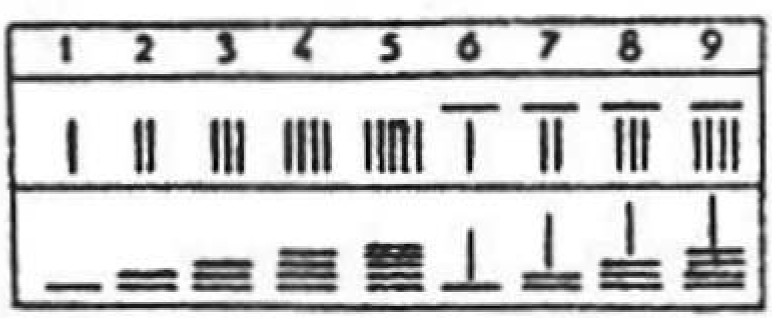


Figura 16. Dos métodos de formación de cifras, en la tabla de operaciones china

En la escritura de loa números en el tablero, se seguía el siguiente proceso: la primera cifra (leyendo de derecha a izquierda) se representaba por el primer método; la siguiente, por el segundo; la tercera cifra de nuevo se representaba por el primer método, y la cuarta por el segundo método, y así sucesivamente. En otras palabras, todas las cifras de un número, que ocupaban lugares impares (leyendo de derecha a izquierda), se representaban por el primer método, y aquellas que se encontraban en los lugares pares, eran representadas por el segundo método. Por ejemplo, los números 78639, 4576 y 1287 se representaban en el tablero de calcular como se ve en la fig. 17.

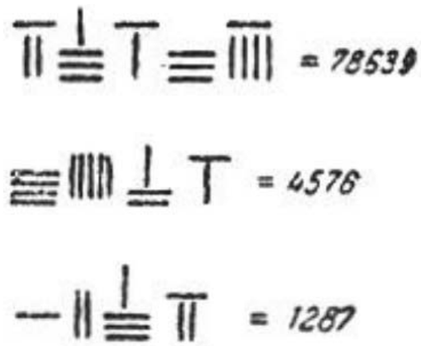
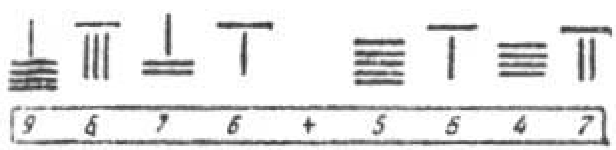


Figura 17. Ejemplos de construcción de algunos números en la tabla china de operaciones (o cálculos)

Ahora veremos cómo se llevaban a cabo, de acuerdo con este tablero de calcular, las operaciones de la adición, y de la multiplicación.

Adición. Consideremos que se desea hallar la suma de los dos números 9876 y 5647. Primeramente se les representa en el tablero de operaciones:

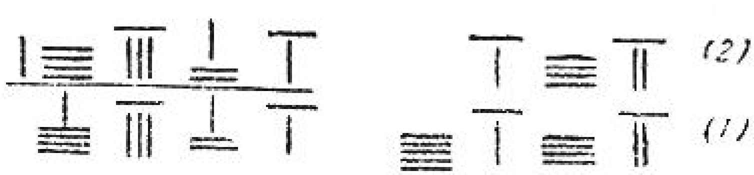


Cuadro 8

La adición se realizaba empezando con los órdenes superiores, es decir, desde la izquierda.
1er Paso: Sumemos los millares

$$9 + 5 = 14$$

Representamos esto así:



Cuadro 9

es decir. sobre los sumandos formamos un segundo renglón y a la izquierda, arriba de la cifra 9, escribimos 14 en tal forma, que la cifra 4 esté estrictamente arriba de la cifra 9, y parte restante del primer sumando la transcribimos sin modificaciones. Sobre el segundo sumando repetimos todas sus cifras, excepto la cifra 5 ya utilizada.

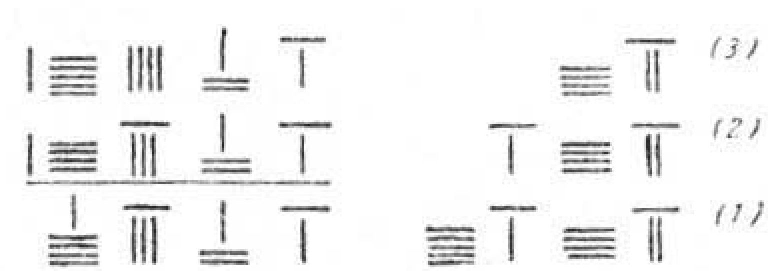
2do Paso: Sumemos las centenas

$$8 + 6 = 14$$

y puesto que obtenemos en la adición una unidad de mayor orden, la agregarnos a la suma anteriormente obtenida.

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 4 \\ 1 & 4 & \\ \hline 1 & 5 & 4 \end{array}$$

así, el tercer renglón quedará (los primeros dos se repiten intactos)



Cuadro 10

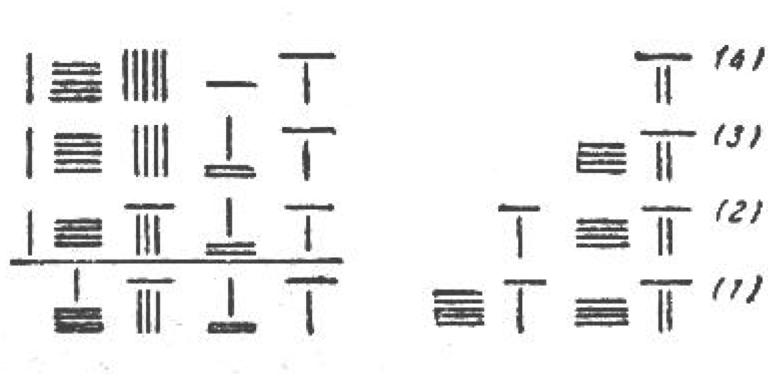
en el tercer renglón a la izquierda se escribe 154, y después se repiten las dos últimas cifras (76) del primer sumando: a la derecha están repetidas las dos últimas cifras (47) del segundo sumando (sus cifras restantes ya han sido utilizadas).
3er. Paso: Sumemos las decenas

$$7 + 4 = 11,$$

con lo que e1 siguiente resultado es

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & 4 & \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 1 \end{array}$$

el número 1551 se escribe a la izquierda, en el cuarto renglón:



Cuadro 11

4º Paso: ahora, falta solamente sumar las unidades

6 + 7 = 13

y la suma de los dos números dadas se determina : es igual a 15523:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 5 & 1 & \\ & & & 1 & 3 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

el número 15523 obtenido, está escrito en el quinto renglón de la columna izquierda, y el esquema de la adición, finalmente, tiene el aspecto representado en la fig. 18

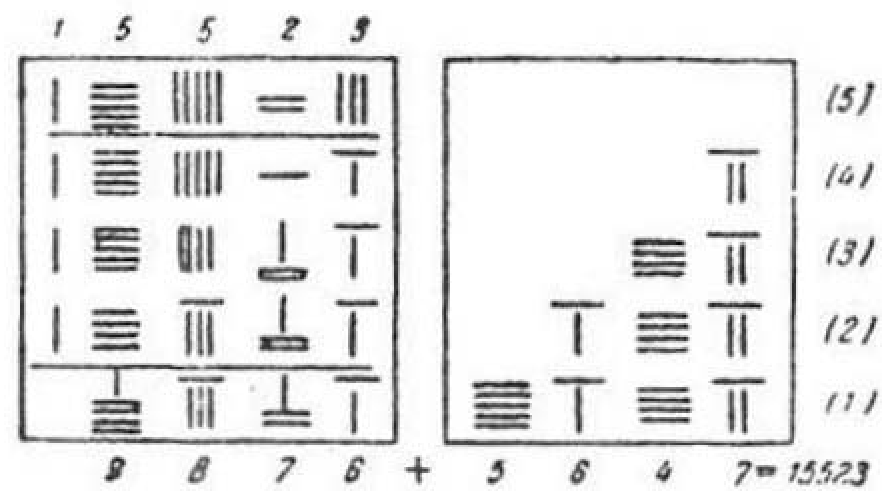


Figura 18. En este dibujo se representa la suma de dos números, 9876 y 5647, según el tablero chino de cálculo

Multiplicación. En el tablero de operaciones de la antigua China, la multiplicación se iniciaba con las cifras de orden superior, pasando gradualmente a las cifras de órdenes menores. Además, ya se empleaban las tablas de multiplicar.

Supongamos, a título de ejemplo, que se trata de multiplicar 346 por 27. El proceso de la multiplicación en la tabla de operaciones observado en nuestras notaciones, tomaba aproximadamente el siguiente aspecto:

```
3 4 6
x 2 7
---------
  6
  2 1
    8
    2 8
    1 2
      4 2
---------
  9 3 4 2
```

Primeramente, multiplicamos 3 por 2 y obtenemos 6; es decir, la cifra del orden más alto del producto (número de millares). Después, multiplicamos, 3 por 7 y 4 por 2, obteniendo 21 y 8 centenas; los escribimos debajo de la cifra 6, considerando los órdenes, como está indicado. Luego, multiplicamos 4 por 7 y 6 por 2 (esto nos da los números de 28 y 12), y finalmente, multiplicamos 7 por 6 para obtener 42 unidades: sumando las anteriores cantidades, obtenemos 9342.

El tablero de calcular y los métodos de operar con él, se conservaron en China hasta el siglo XIII. En esta época se empezó a emplear el cero, el que con ayuda de los palitos de calcular se representaba en forma de cuadrado.

Entonces, ya se podían representar también las fracciones decimales en el tablero de calcular. Por ejemplo, los números 106 368 y 6312 se representaban aproximadamente como se muestra en la finura 19.

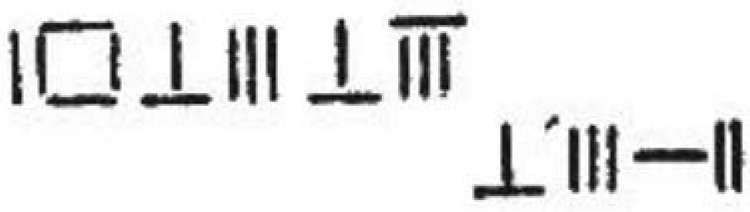


Figura 19. Ejemplo de construcciones en la tabla de operaciones china. La combinación de los números 106 368 y 6312

En el siglo XV, en China y Japón ya se empleaba, para las cuatro operaciones aritméticas, un ábaco de siete bolitas en cada alambre (llamado en China "suang-pang"[1], y en Japón "Soroban") (ver la fig. 20). Estos aparatos de calcular se han conservado hasta nuestros días y su empleo es muy popular.

[1] El ábaco suang pang se llegó a construir en miniaturas (17 mm. x 8 mm.), y también se construyeron de 6 bolitas de cinco de un lado y una del otro: el número de alambres, (o renglones) llegaba a 21.

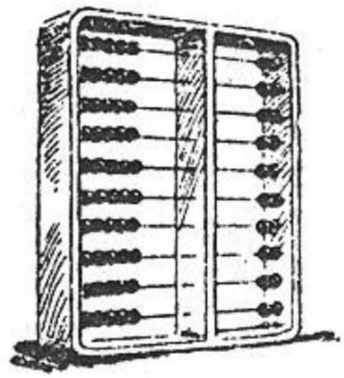


Figura 20. Abaco usado en China y Japón, con siete bolitas de marfil en cada alambre

He aquí por ejemplo, la opinión de un científico japonés: A pesar de su antigüedad, el sorobán supera a todos los aparatos de cálculo modernos, gracias a su facilidad de manejo, a lo simple del dispositivo y a su bajo costo.

El Abaco Ruso

Hay algunos objetos útiles que no valoramos lo suficiente debido a su constante manejo, lo que los ha convertido en objetos demasiado comunes de uso doméstico. Al grupo de tales objetos insuficientemente estimados pertenece nuestro ábaco: aparato de cálculo popular ruso que representa en sí, una modificación del famoso "ábaco" o "tablero de cálculo", de nuestros remotos antecesores.

Mientras tanto, Occidente casi no sabe acerca de los ábacos, y únicamente en las escuelas superiores existen enormes ábacos: Un medio práctico escolar en la enseñanza de la numeración.

Tenemos razón al enorgullecernos de nuestros ábaco de calcular, puesto que gracias a su dispositivo sorprendentemente sencillo, y con base en los resultados que pueden lograrse en ellos, pueden competir, en ciertos aspectos, inclusive con máquinas calculadoras. En unas manos hábiles, este sencillo aparato hace con facilidad, verdaderas maravillas. Un especialista que trabajó antes de la revolución en una gran firma rusa vendedora de maquinas calculadoras, me contó que en más de una ocasión tuvo oportunidad de observar la admiración que despertaban los ábacos ruso en extranjeros importadores de modelos de mecanismos calculadores complicados.

En vez de multiplicar por 7, multiplíquese el multiplicando por 10 y luego réstese el mismo tres veces.

La multiplicación por 8 da el mismo resultado que, restar el doble del multiplicando al producto de la multiplicación por diez.

Para multiplicar por 9, multiplíquese por diez y réstese el multiplicando.

Para multiplicar por 10, basta elevar todo el número un renglón.

El lector, probablemente ya por sí mismo, comprende cómo es necesario proceder en la multiplicación por números mayores de 10 y qué clase de substituciones resultan las más convenientes. Así, en vez de 11 se usará 10 + 1, en vez de 12, 10 + 2.

Consideremos algunos casos especiales para multiplicadores de la primera centena:

20 = 10 x 2	32 = 22 + 10
22 = 11 x 2	42 = 22 + 20
25 = (100:2):2	43 = 33 + 10

26 = 25 + 1	46 = 50 - 5
27 = 30 – 3	63 = 33 + 30 etc.

Como se ve, con ayuda de los ábacos es más sencilla la multiplicación por 22, 33, 44, 55, etc., que por otros números: por tal razón, es necesario tratar de aprovecharse, en la descomposición de los multiplicadores, de número, semejantes con idénticas cifran.
A método similares se recurre también en la multiplicación por números mayores que 110. Si tales métodos artificiales resultan agotadores, siempre podremos recurrir a multiplicar, con ayuda de los ábacos, conforme a una regla general que consiste en multiplicar cada cifra del multiplicador, y escribir los productos parciales. Esto, desde luego, proporciona una reducción de tiempo.

La División en el Abaco
Naturalmente, la división en el ábaco es más difícil que la multiplicación; para esto es necesario recordar una serie de métodos especiales, a veces bastante complicados. A quienes se interesen en ellos, les sugerimos, que consulten un manual especializado. Aquí indicamos sólo lo referente a un ejemplo de los métodos adecuados de la división por números de la primera decena (excepto el número 7, con el cual el método de división es demasiado complicado).
Sabernos ya cómo dividir entre 2 lo cual es muy simple.
El método de división entre 3 es más complicado y consiste en multiplicar por la fracción periódica infinita 0.3333... (se sabe que 0.333...=1/3). Sabemos multiplicar, con ayuda del ábaco, por 3; también podemos disminuir en 10 veces; así pues, es necesario solamente, trasladar el dividendo un alambre hacia abajo. Después de breves ejercicios, este método de división entre 3 a primera vista muy largo se muestra muy adecuado en la práctica.
La división entre 4, naturalmente, equivale a dividir 2 veces entre 2.
Más fácil aún es la división entre 5: basta duplicar, y dividir entre 10.
Entre 6, hay que seguir dos pasos: dividir entre 2, y luego entre 3
La división entre 7 es muy complicada con el ábaco, por lo que aquí no hablaremos de ella.
La división entre 8 equivale a dividir tres veces entre 2.
Es muy interesante la división entre 9. Sabemos que 1/9 = 0.11111... Está claro aquí que, en lugar de la división entre 9 se pueden sumar sucesivamente 0.1 del dividendo + 0.01 del mismo x 0.001 ... etc.[2]
Como se ve es muy fácil dividir entre 2, 10 y 5, y naturalmente entre sus números múltiplos 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Estos casos de la división, no representan obstáculo incluso para el que tiene poca experiencia en el manejo del ábaco.
Volver

3. Ecos de la Antigüedad
Cierto vestigios de la antigüedad, tanto en el lenguaje, como en las costumbres están relacionados con los más remotos antecesores de nuestros ábacos de calcular. Pocos sospechan, por ejemplo, el origen de lo que a veces hacemos "para la memoria" al anudar un pañuelo.
Con esto, repetimos lo que con sentido común hacían antiguamente nuestros antecesores, "escribiendo" sobre cordeles el total de un cálculo. Una serie de correas o cuerdas con nudos efectuados a lo largo de ella, representaba en sí un aparato de calcular (fig. 21) en principio, análogo al ábaco. Esto constituye el "ábaco de cuerda" peruano denominado “quipos”. Un nudo

[2] Este método es útil también para la división oral entre 9

hecho una sola vez sobre la cuerda, denotaba 10: dos veces, 100: tres veces 1000, y así sucesivamente.

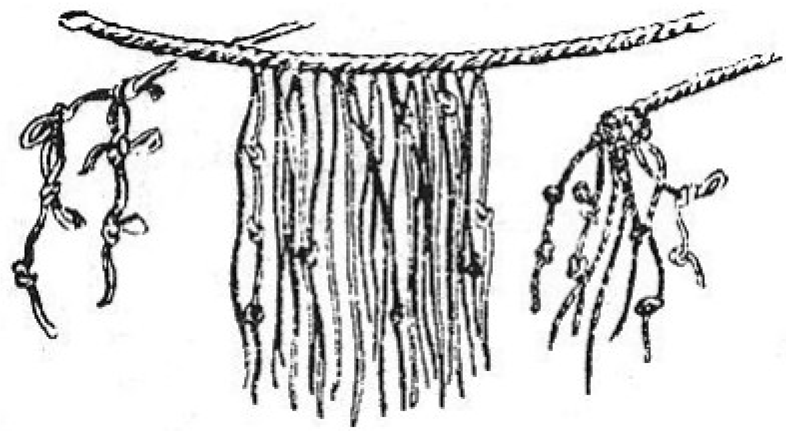


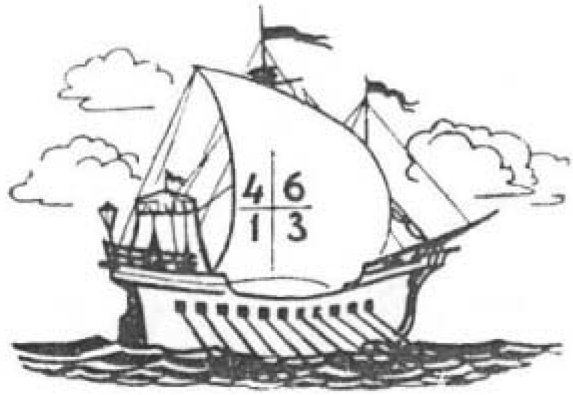
Figura 21. Aparatos de calcular usados por los antiguos peruanos, llamados "quipos"

Palabras como "banco" y "cheque" tan difundidas actualmente están relacionadas con el ábaco. En alemán "bank" significa banco, escaño, silla.
¿Qué hay de común entre la institución financiera "bank" en el sentido moderno de la palabra y el banco o escaño?. Lo que aquí se señala, está lejos de ser una simple coincidencia de nombres. El ábaco en forma de banco tuvo una amplia difusión en los círculos comerciales de Alemania en los siglos XV y XVI; cada banco de cambio u oficina bancaria, se caracterizaba ante todo por la presencia de un "banco de contabilidad".
Una relación más indirecta con el ábaco, tiene la palabra "check" (cheque); es de origen inglés y procede del verbo "checker" (registrar, revisor) ; "checkered" (registrado, cotejado) se llamaba a una servilleta de cuero rayado, en forma de ábaco, que en los siglos XVI y XVII los comerciantes ingleses portaban consigo en forma enrollada, y en el caso que se necesitase efectuar cuentas, la desplegaban sobre una mesa. Las formas para los cálculos se rayaban según el modelo de esto, ábacos enrollados, y no es extraño que fuera transferido a ellas, en forma abreviada, el nombre de estos aparatos de calcular: de la palabra "checkered" se originó la palabra "check".
Es curioso que de aquí se haya originado la expresión "se quedó con un palmo de narices" la cual la aplicamos actualmente al hombre que ha perdido todo su dinero. Esto también se relaciona con la época en que todos los cálculos monetarios se realzaban sobre el ábaco, por medio de habichuelas que substituían a las cuentas de nuestros ábacos. En la abra "El Estado del Sol" de Campanella (1602) leemos: "Uno calcula con piedrecillas, el otro con habichuelas. Un hombre, habiendo perdido su dinero, se quedaba con unas habichuelas que representaban la suma de su pérdida: de aquí precisamente el correspondiente giro del lenguaje.
Volver

4. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$
$$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$$
$$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$$

Volver



Capítulo Tercero
Algo de Historia

Contenido:

1. "Las divisiones es un asunto difícil"

Hemos visto que la división en general es más complicada que la multiplicación y aunque ahora podemos resolverla con gran facilidad, no siempre fue así.
En la antigüedad se consideraba "sabio" a quien hacia correctamente y con rapidez las divisiones; cada "maestro en división" (algo así como especialista) debía comunicar a los demás el resultado de determinados casos de esta operación.
Algunas veces, encendiendo un cerillo con un movimiento habitual, todavía reflexionamos sobre cuánto trabajo costó a nuestros antecesores, inclusive no muy remoto, la obtención del fuego. Empero pocos sospechan que a los actuales métodos de realización de las operaciones aritméticas tampoco fueron, en su origen, así de sencillos y cómodos para que en forma tan rápida y directa condujeran al resultado.
Nuestros antepasados emplearon métodos mucho más lentos y engorrosos, y si un escolar del siglo XX pudiera trasladares tres o cuatro siglos atrás, sorprendería a nuestros antecesores por la rapidez y exactitud de sus cálculos aritméticos. El rumor acerca de él recorrería las escuelas y monasterios de los alrededores, eclipsando la gloria de los más hábiles contadores de esa época, y de todos lados llegarían gentes a aprender del nuevo gran maestro el arte de calcular.
Particularmente difíciles y complejas eran en la antigüedad las operaciones de la multiplicación y la división: esta última en mayor escala. "La multiplicación es mi martirio, y con la división es la desgracia" decían entonces. Pero aún no existía, como ahora, un método práctico elaborado para cada operación. Por el contrario, estaba en uso simultáneamente casi una docena de diferentes métodos de multiplicación y división con tales complicaciones que su firme memorización sobrepasaba a las posibilidades del hombre medio. Cada "maestro de la división" exaltaba su método particular al respecto.

En el libro de V. Belustino: "Cómo llegó la gente gradualmente a la aritmética actual" (1911), aparecen 27 métodos de multiplicación, y el autor advierte: "es muy posible que existan todavía métodos ocultos en lugares secretos de bibliotecas, diseminados fundamentalmente en colecciones manuscritas" : y todos estos métodos de multiplicación : "ajedrecístico o por organización", "por inclinamiento", "por partes", "por cruz pequeña", "por red", "al revés", "por rombo", "por triángulo", "por cubo o copa", "por diamante", y otros[1], así como todos los métodos de división, que tenían nombres no menos ingeniosos, competían uno con otro tanto en voluminosidad como en complejidad. Dichos métodos se asimilaban con gran trabajo y solamente después de una prolongada práctica. Inclusive se consideraba que para poder dominar la multiplicación y la división de números de varias cifras significativas con rapidez y exactitud, era necesario un talento natural especial, capacidad excepcional: sabiduría que para los hombres sencillos era inaccesible.
"Asunto difícil es la división"(dura cosa e la partida) decía un antiguo refrán italiano; acertado refrán si se toman en cuenta los agotadores métodos con que se realizaban entonces: no importa que estos métodos llevaran a veces nombres demasiado festivos: bajo ellos se ocultaba una larguísima serie de complicadas manipulaciones. Así, en el siglo XVI se consideraba el método más corto y cómodo el de división por "lancha o galera". El ilustre matemático italiano de esa época. Nicolás Tartaglia (siglo XVI), escribió en su extenso manual de aritmética lo siguiente respecto a dicho método:

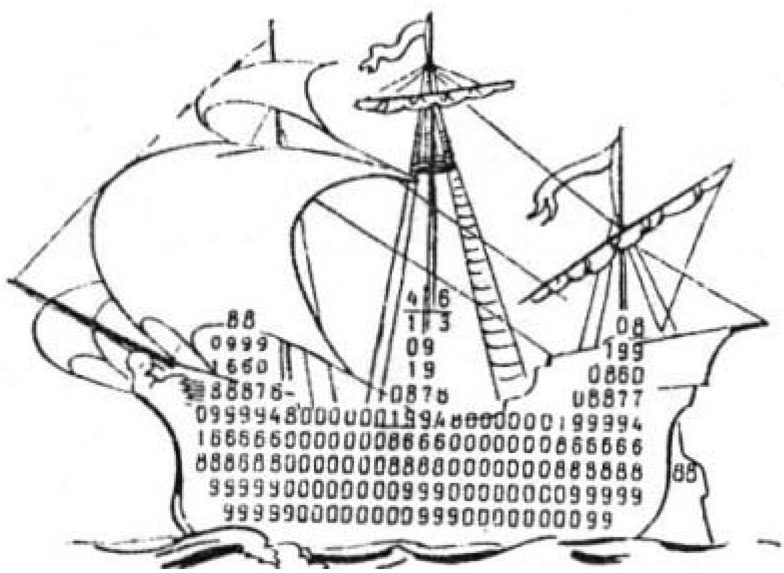


Figura 22. División de números a la manera antigua, por el método de "galera"

"El segundo método de división se llama en Venecia, por lancha o galera, debido a que en la división de ciertas clases de números se forma (ver fig. 22) una figura parecida a una lancha, y en la de otras, a una galera que a veces se obtiene tan bien terminada, que se muestra provista de todos sus elementos principales tales como popa y proa, mástil, velas y remos".
Esto parece muy divertido, pero aunque el antiguo matemático recomienda precisamente dicho método como "elegante, fácil, exacto, usual y el más general de los existentes, útil para la división de todos los números posibles", yo no me decido a desarrollarlo aquí por el temor de que

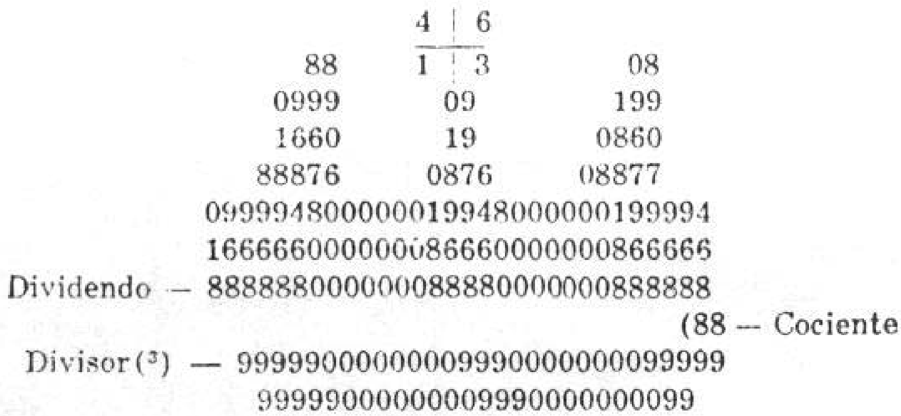
[1] Los ejemplos de multiplicación enunciados se especifican en la antigua "Aritmética" de Nicolas Tartaglia. Nuestro método moderno de la multiplicación se describe allí con el nombre de "ajedrecístico".

hasta un lector paciente cierre el libro en ese aburrido lugar y no lea más adelante. Sin embargo, este agotador método fue, efectivamente, el mejor en esa época.

Figura 23. Grabado de la "Aritmética" de Magnitski (editada en el año 1703). El dibujo representa el Templo de la Sabiduría. La Sabiduría está sentada en el trono de la Aritmética y en los escalones están los nombres de las operaciones aritméticas (división, multiplicación, sustracción, adición, cálculo). Las columnas son las ciencias en que la aritmética encuentra aplicación: geometría, estereometría, astronomía, óptica (conocimientos adquiridos por "vanidad"), mercatoria (es decir cartografía), geografía, fortificación, arquitectura (conocimientos adquiridos por "estudio"). Bajo las columnas dice, también en eslavo antiguo: "La Aritmética que se apoya en las columnas, lo abarca todo"

En Rusia, se usó hasta la mitad del siglo XVIII: entre los seis métodos que presenta León Magnitski[2] en su "Aritmética" (de los cuales ninguno es semejante al contemporáneo) el autor describe éste, y lo recomienda especialmente; a lo largo de su voluminoso libro (640 páginas de gran formato) Magnitski se sirve exclusivamente del "método de galera", no empleando, por otra parte, esta denominación.
Por último, mostramos al lector la siguiente "galera" numérica, aprovechando un ejemplo del mencionado libro de Tartaglia[3]:

[2] Antiguo manual ruso de matemática, que engloba todas sus ramas conocidas en esa época (incluyendo informaciones de astronomía náutica). Este es uno de los dos libros que Lomonósov denominó "las puertas de mi erudición".
[3] Los últimos dos nueves se agregan al divisor durante el proceso de la división.



Cuadro 13

Llegando después, de múltiples trabajos al final de una operación aritmética, nuestros antecesores consideraron absolutamente necesario comprobar este total obtenido con el sudor de su frente, ya que los métodos voluminosos provocaron, como es lógico, desconfianza hacia sus resultados; es muy fácil perderse en un camino, lardo y sinuoso que en el recto camino de los métodos modernos. Naturalmente, de aquí surge la antigua costumbre de comprobar toda operación aritmética efectuada, encomiable regla que aún hoy se practica.

El método favorito de comprobación era el llamado "método del nueve", el cual frecuentemente se describe en algunos manuales contemporáneos de aritmética.

La comprobación por el nueve se basa en la "regla de los residuos" que dice: el residuo de la división de una suma entre cualquier número, es igual a la suma de los residuos de la división de cada sumado entre el mismo número. En la misma forma, el residuo de un producto es igual al producto de los residuos que al dividir entre 9 la suma de las cifras del mismo número. Por ejemplo, 758 entre 9 da como residuo 2: el mismo 2 se obtiene como residuo de la división de 7 + 5 + 8 entre 9.

Comparando ambas propiedades indicadas, llegamos al método de comprobación por nueve, es decir, por división entre 9. Mostraremos con un ejemplo en qué consiste dicho método[4].

Se desea comprobar la justeza de la adición de la siguiente columna:

38932	7
1096	7
+ 4710043	1
589106	2
5339177	8

Realicemos la suma de las cifras de cada sumando y al mismo tiempo, en los números de dos cifras obtenidas, sumemos también las cifras (esto se hace en el proceso mismo de adición de las cifras de cada sumando), hasta obtener en el resultado final un número de una cifra. Estos resultados (residuos de la división entre nueve), los escribimos como se indica en el ejemplo, al lado del correspondiente sumando. A1 sumar todos los residuos (7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8), obtenemos 8. Igual deberá ser la suma de las cifras del total (5339177) si la operación está

[4] Se aclara en forma apropiada en la deducción de la prueba de divisibilidad entre 9.

efectuada correctamente: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7, después de todas las simplificaciones resulta igual a 8.
La comprobación de la substracción se realiza en la misma forma si se considera al minuendo como suma, y al substraendo y la diferencia como sumandos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 6913 \\ \underline{-\ 2587} \\ 4326 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{-\ 4} \\ 6 \end{array}$$

4 + 6 = 10; 1 + 0 = 0

Este método es en especial conveniente si se aplica para comprobar la operación de multiplicación, como lo vemos en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 8713 \\ \underline{\times\ 264} \\ 34852 \\ 52278 \\ \underline{17426} \\ 2300232 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{\times\ 3} \\ 3 \end{array}$$

Si en tal comprobación fuera descubierto un error del resultado, entonces, para determinar precisamente dónde tiene lugar dicho error, se puede verificar por el método del nueve cada producto parcial por separado; y si el error no se encuentra aquí, queda solamente comprobar la adición de los productos parciales.
¿Cómo se puede comprobar la división conforme a este método?. Si tenemos el caso de una división sin residuo, el dividendo se considera como el producto del divisor por el cociente. En el caso de una división con residuos se aprovecha la circunstancia de que dividendo = divisor x cociente + residuo.
Por ejemplo:

$$\underbrace{16201387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8} ;\ \text{residuo}\ \underbrace{192}_{3}$$

suma de cifras: 1 2 8 3

$2 \times 8 + 3 = 19;\quad 1 + 9 = 10;\quad 1 + 0 = 1$

Cuadro 14

De la "Aritmética" de Magnitski cito una disposición conveniente para la comprobación por el nueve:

<u>Para la Multiplicación</u>:

$$\begin{array}{rr} 365 & 5 \\ \underline{\times\, 24} & \underline{\times\, 6} \\ 1460 & 30 \\ \underline{730\ \ } & \\ 8760 & \end{array}$$

Para la División

- del cociente 8
- del dividendo 1
- del divisor 2
- del residuo 3

$$2 \times 8 + 3 = 19$$
$$1 + 9 = 10$$
$$1 + 0 = 1$$

Semejante comprobación de las operaciones sin duda no deja que desear en cuanto a rapidez y como comodidad. Pero en lo referente a su seguridad, no es posible señalar lo mismo: el error no es, inevitable en dicho comprobación. En efecto, una y la misma suma de cifras puede tener diferentes números; no solamente la disposición de las cifras, sino algunas veces también la substitución de unas cifras por otras quedan encubierta en dicha comprobación. Escapan también al control los ceros y nueves superfluos, porque ellos no influyen sobre la suma de las cifras. Nuestros antecesores reconocían lo anterior, y no se limitaban a una sola comprobación por medio del nueve, sino que efectuaban inclusive una comprobación complementaria por medio del siete. Este método está basado en la "regla de los residuos", pero no ea tan conveniente como el método del nueve, porque la división entre 7 se tiene que efectuar completamente, para así hallar los residuos (y además son polos errores, en la, operaciones del propio método).
Las dos comprobaciones, por nueve y por siete--, resultan ya un control mucho más seguro: lo que escapa a una, será captado por la otra. El error queda oculto solamente en el caso de que la diferencia entre el resultado verdadero y el obtenido sea el número 7 x 9 = 63 o uno de sus múltiplos. Puesto que semejante casualidad siempre es posible, tampoco la doble verificación proporciona una seguridad total en la veracidad del resultado.
Además, para cálculos ordinarios, donde se yerra frecuentemente en 1 ó 2 unidades, basta con la comprobación por el nueve. La verificación complementaria del siete es demasiado abrumadora. Tengamos en cuenta que solamente es bueno aquel control que no obstaculiza el trabajo.
Sin embargo, efectuando un cálculo importante se procura, con objeto de tener seguridad, realizar una doble corrección, para lo cual, en lugar del divisor 7 es mejor hacer uso del divisor 11. Además, la cuestión se puede simplificar en gran medida, aplicando la siguiente prueba conveniente de la divisibilidad entre 11: el número se descompone en partes, de derecha a izquierda, cada una con dos cifras (la parte izquierda extrema puede incluir sólo una cifra) ; las partes se suman y la suma obtenida será "congruente" con el número examinado conforme al divisor 11: la suma de las partes da en la división entre 11, el mismo residuo que el número examinado.

Aclaremos lo indicado con un ejemplo. Se desea hallar el residuo de la división 24716 entre 11. Descompongamos el número en partes y sumémoslas:

$$2 + 47 + 16 = 65$$

Puesto que 65 en la división entre 11 como residuo da 10, también el número 24716, en la división entre 11, da el mismo residuo. La fundamentación de este método se proporciona en mi libro "Matemáticas Recreativas".
Yo propongo este método porque, simultáneamente, da justo el número congruente con el examinado, también conforme al divisor 9. De esta manera, tenemos la posibilidad de realizar en forma conveniente la comprobación por medio de dos divisores: 9 y 11. A tal comprobación puede escapar solamente un error, múltiple de 99, lo que lo hace muy poco probable.
Volver

2. ¿Multiplicamos Bien?
Los antiguos métodos de multiplicación eran torpes e inadecuados, ¿pero acaso es tan bueno nuestro actual método como para que ya no le sea posible ninguna clase
le mejora posterior? No cabe duda que nuestro método no es perfecto; se pueden inventar todavía más rápidos o aun más seguros. De varias mejoras propuestas indique en tanto, sólo una que aumenta, no la rapidez de la realización de la operación, sino su seguridad; consiste en que, teniendo un multiplicador de varias cifras, se comienza la multiplicación triplicación no con la última cifra, sino con la primera cifra del multiplicador. La multiplicación 8713 × 264, efectuada anteriormente, además adopta la forma:

$$\begin{array}{r} 8713 \\ \underline{\times\, 264} \\ 17426 \\ 52278 \\ \underline{34852} \\ 2300232 \end{array}$$

Como vemos, la última cifra de cada producto parcial se escribe debajo de aquella cifra del multiplicador, por la cual se multiplica.
La ventaja de semejante disposición consiste en que las primeras cifras de los productos parciales , que determinan las cifras más importantes del resultado, se obtienen al principio de la operación, cuando la atención todavía no se pierde y, por consiguiente disminuye la probabilidad de cometer un error. (Además, este método simplifica la aplicación de la llamada multiplicación "abreviada", sobre la cual no podemos extendernos).
Volver

3. Método Ruso de Multiplicación
No se pueden realizar multiplicaciones de números de varias cifras, así sean de dos cifras, si no se recuerdan de memoria todos los resultados de la multiplicación de los dígitos, es decir, lo que es la tabla de multiplicación. En la antigua "Aritmética" de Magnitski, que ya hemos mencionado, la

necesidad de un conocimiento sólido de la tabla de multiplicación está expresada en los versos (extraños para el oído moderno) siguientes[5]:

Aún no ha existido quien,
ignorando las tablas de multiplicación,
quede exento de tropiezos
que finalmente lo derroten
en todas las ciencias.
Y aún más, sí habiéndolas
aprendido las olvida,
no habrá obtenido ningún beneficio.

El autor de estos versos, evidentemente, no sabía o no tomaba en consideración que existe un método de multiplicar números en que no es necesario el conocimiento de la tabla de multiplicar. Este método, que no es semejante a nuestros métodos escolares, fue heredado y empleado corrientemente por el pueblo ruso desde la remota antigüedad. Fundamentalmente consiste en que la multiplicación de dos números cualesquiera, lleva a una serie de divisiones consecutivas de un número por la mitad y, a un duplicamiento del otro número. He aquí un ejemplo:

$$\begin{aligned} 32 &\times 113 \\ 16 &\times 26 \\ 8 &\times 52 \\ 4 &\times 104 \\ 2 &\times 208 \\ 1 &\times 416 \end{aligned}$$

La división por la mitad se prosigue hasta que en el cociente se obtenga 1, duplicando paralelamente el otro número. El número último duplicado da precisamente el resultado buscado. No es difícil comprender sobre qué está basado este método: el producto no varia si uno de los factores disminuye a la mitad, y el otro aumenta al doble. Es claro, por tal razón, que en el resultado de la repetición múltiple de esta operación se obtiene el producto buscado:

$$32 \text{ x } 13 = 1 \text{ x } 416$$

Sin embargo ¿cómo proceder cuando se requiera dividir un número impar por la mitad?
El método popular fácilmente sale de esta dificultad.
La regla dice que es necesario, en el caso de un número impar, restarle una unidad y dividir el resto por la mitad; pero en compensación, será necesario sumar el último número de la columna derecha, con todos los números de dicha columna que se hallan en el mismo renglón de un número impar de la columna izquierda: esta suma nos dará el producto buscado. Cuando se lleva a la práctica este método, se acostumbra tachar todos los renglones con números pares a la izquierda, quedando únicamente los renglones que contienen un número impar a la izquierda. Proporcionemos un ejemplo:

[5] Los aludidos verso, se encuentran escritos en ruso antiguo por lo que, para dar al lector una clara idea de su contenido se ha hecho de ellos una traducción libre y equivalente, guardando fidelidad a la idea que expresan.

$$\begin{array}{r} 19 \times 17 \\ 9 \times 34 \\ \cancel{4 \times 68} \\ \cancel{2 \times 136} \\ 1 \times 272 \end{array}$$

Sumando los números no tachados, obtenemos el resultado preciso:

$$17 + 34 + 272 = 323.$$

¿En qué está fundado este método?
La justeza del método se torna evidente, si se toma en cuenta que

$$19 \times 17 = (18 + 1) \times 17 = 18 \times 17 + 17,$$
$$9 \times 34 = (8 + 1) \times 34 = 8 \times 34 + 34, \text{ etc.}$$

Es claro que los números 17, 34, etc., perdidos en la división del número impar por la mitad, se necesitan, sumar al resultado de la última multiplicación, para obtener el producto.
Volver

4. Del País de las Pirámides
Es muy probable que el método anteriormente descrito llegará hasta nosotros desde la más remota antigüedad y de un lejano país: Egipto. Poco sabemos acerca de cómo realizaban las operaciones aritméticas los habitantes del antiguo país de las pirámides, pero se conserva un interesante documento: un papiro donde están escritos ejercicios aritméticos de un alumno de una de las escuelas de agrimensura del Egipto antiguo; es el llamado "Papiro de Rhind que pertenece a una época entre los años 2000 y 1700 antes de nuestra era[6], y que representa, en si, una copia de un manuscrito todavía más antiguo, transcrito por un tal Ajmes. El escriba[7] Ajmes, al encontrar "el cuaderno del escolar" de esta lejanísima época, transcribió cuidadosamente todos los ejercicios aritméticos del futuro agrimensor, incluyendo sus errores y las correciones del profesor, y dió a su copia un título solemne, que ha llegado hasta nosotros en la siguiente forma incompleta:
Precepto para, cómo alcanzar el conocimiento de todas las cosas desconocidas ... de todos los secretos ocultos en las cosas.
Elaborado por el escriba Ajmes durante la época del faraón Ra, para uso del Alto y Bajo Egipto, conforme a los cánones de las obras antiguas del tiempo del faraón "Ra - en - mata ".

El papiro de Rhind terminaba con consejos muy originales:

[6] El papiro, encerrado en un estuche metálico, Fue encontrado por el egiptólogo inglés Henry Rhind. En formar desplegada tiene 20 m. de longitud y 30cm. de ancho. Se conserva en el Museo Británico, en Londres.
[7] El título "escriba" pertenecía a la tercera clase de los sacerdotes egipcios; en su administración se encontraba "todo lo referente a la parte constructiva de un templo y a su propiedad agraria". Su especialidad principal, la constituían los conocimientos matemáticos, astronómicos y geográficos (V Bobynin).

"Cazadores de reptiles y ratones, hagan fuego contra la mala yerba; cobren abundantes presas. Rueguen al Dios Ra del calor, del viento y de la alta agua".

Uno de los papiros matemáticos egipcios se encuentra en Moscú, en el Museo de Bellas Artes A. S. Pushkin. El académico B. A. Turaiev lo empezó a descifrar en 1914, tarea concluida por el académico V. V. Struve en el año 1927.
En el, papiro de Rhind, ese interesante documento que ha perdurado cerca de 40 siglos, y que testimonia sobre una antigüedad aún más, remota, encontramos cuatro ejemplos de multiplicación efectuados conforme a un método que hace recordar vivamente al método popular ruso. He aquí estos ejemplos (los puntos delante de los números simbolizan el número de unidades del multiplicador; con el signo +, señalamos los números que están sujetos a la adición):

(8 × 8)
. 8
.. 16
.... 32
:::: 64

(9 × 9)
. 9 +
.. 18
.... 36
:::: 72 +
Total 81

(8 × 365)
. 365
.. 730
.... 1460
:::: 2920

(7 × 2801)
. 2801 +
.. 5602 +
.... 11201 +
Total 19607

Como se ve de estos ejemplos, ya varios milenios antes de nuestra era, los egipcios empleaban un método de multiplicación muy semejante al popular ruso (fig. 24), y que por caminos desconocidos fue trasladado del antiguo país de las pirámides a la época moderna.

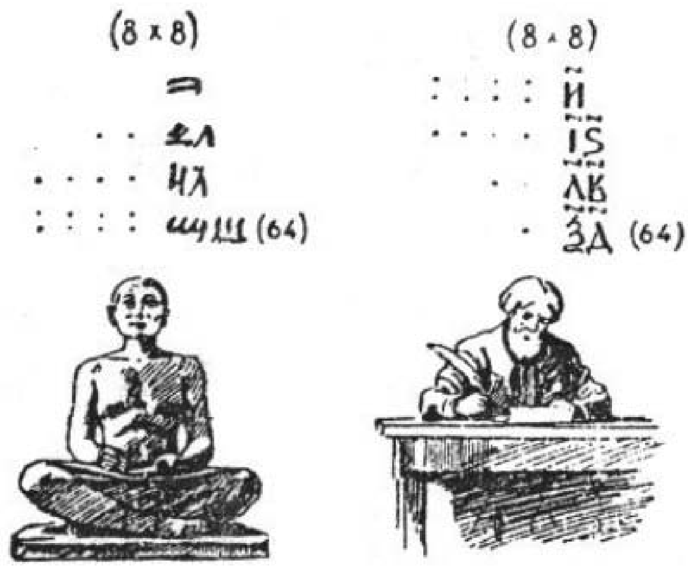


Figura 24. El razonamiento de las operaciones aritméticas llegó a Rusia del antiguo Egipto

Si a un habitante de la tierra de los faraones se le propusiera multiplicar, por ejemplo. 19 × 17, efectuaría estas operación en la siguiente forma: escribiría una serie de duplicaciones sucesivas del número 17:

$$
\begin{array}{rl}
1 \rightarrow 17 & + \\
2 \rightarrow 34 & + \\
4 \rightarrow 68 & \\
8 \rightarrow 136 & \\
16 \rightarrow 272 & +
\end{array}
$$

y después sumaría los números que están seguidos por el signo +, es decir, 17 + 34 + 272. Obtendría, finalmente el resultado correcto: 17 + (2 x 17) + (16 x 17) = 19 x 17. Es fácil ver que semejante método, en esencia, es muy afín al popular ruso (la substitución de la multiplicación por una serie de duplicaciones sucesivas).

Es difícil decir si alguno de nuestros campesinos participaron en el traspaso de este antiguo método de multiplicación; los autores ingleses lo denominan precisamente "método campesino ruso"; en Alemania, en alguna parte, aunque los campesinos se aprovechan de él, sin embargo lo llaman "ruso".

Sería sumamente interesante obtener, por parte de los lectores, informaciones sobre lugares donde se emplea hoy día este antiguo método de multiplicación que ha tenido tan largo y original pasado.

En general, se ha seguido con gran atención lo referente a la matemática popular: penetrar en los métodos de cálculo y de medición empleados por el pueblo, recopilar y registrar estas memorias de la creación matemática popular, que han llegado hasta nuestra época desde las profundidades de la más remota antigüedad.

Sobre esto, hace tiempo, llamó la atención el historiador de la matemática, V. V. Bobynin, quien inclusive propuso un breve programa de recopilación de las memorias de la matemática popular. Quizás no esté de más proporcionar aquí la enumeración por él compuesta, para saber con precisión lo que conviene recopilar y registrar:

1. Numeración y cálculo.
2. Métodos de medida y de peso.
3. Conocimientos geométricos y sus expresiones en las edificaciones y ornamentos.
4. Métodos de agrimensora.
5. Problemas populares.
6. Proverbios, enigmas, y en general, producciones de la filología popular que tienen, relación con los conocimientos matemáticos.
7. Memorias de la matemática popular antigua, que se encuentran en manuscritos, museos, colecciones, o hallados en excavaciones de túmulos, tumbas o vestigios de una ciudad.

En resumen, proporcionó una breve información acerca de cuándo aparecieron por vez primera los signos, ahora generalmente empleados, de las operaciones aritméticas, la notación de la fracción, del exponente etc:

+ y –	en los manuscritos de Leonardo da Vinci (1452-1519)
×	en la obra de Guillermo Oughtred (1631)
. y :	en la obra de Godofredo W. Leibniz (1046-1716)
a/b	en la obra de Leonardo Pisano (Fibonacci) (1202)
an	en la obra de Nicolás Chuquet (1484)
=	en la obra de Roberto Recorde (1557)
> y <	en la obra de Tomás Harriot (1631)
() y []	en la obra de Alberto Girard (1629)

Si el lector está interesado en profundizar sobre la historia de la aritmética, conviene que consulte el libro de V. Belustino "Cómo llegó la gente gradualmente hasta la aritmética actual" (1914), que puede ser encontrado en las bibliotecas o librerías de libros antiguos.

5. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 123 + 45 - 67 + 8 - 9$$
$$100 = 123 - 45 - 67 + 89$$
$$100 = (1 + 2 - 3 - 4) \times (5 - 6 - 7 - 8 - 9)$$

Volver

Capítulo Cuarto
SISTEMAS NO-DECIMALES DE NUMERACION

Contenido:

1. Autobiografía enigmática
Me permito iniciar este capítulo con un problema que yo imaginé hace tiempo para los lectores de una antigua revista de gran difusión[1], en calidad de "problema con premio". Helo aquí:

En los papeles de un matemático original fue hallada su autobiografía. Esta empezaba con las siguientes líneas:
"Acabé el curso de la universidad a los 44 años de edad. Pasó un año y siendo un joven de 100 años, me casé con una muchacha de 34 años".
"La insignificante diferencia de edades, sólo 11 años- que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 10 niños. Yo obtenía en total, al mes, 200 rublos, de los cuales, 1/10 parte se consagraba a mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 130 rublos al mes", y así sucesivamente.

¿Qué aclara las extraña contradicciones en los números de este fragmento?
La resolución del problema se sugiere por el nombre de este capítulo: un sistema no decimal de numeración; he aquí la causa singular, de las aparentes contradicciones de los números citados. Procediendo sobre la base de este pensamiento, no es difícil darse cuenta del sistema de numeración en que están representados los números del original matemático. El secreto se releva por la frase: "después de un año (luego de los 44 años de edad) como un hombre joven de 100 años"...; si a partir de la adición de una unidad el número 44 se transforma en 100, significa que la cifra 4 es la mayor en este sistema (como el 9 lo es en el decimal), y por consiguiente, la base del sistema es el 5. Al excéntrico matemático se le ocurrió la fantasía de escribir todos los números de su biografía en el sistema quinario[2] de numeración, es decir, aquel en el cual la unidad de un orden superior no es 10 veces, sino 5 veces mayor que la unidad de un orden inmediato inferior: en el primer lugar de la derecha se hallan, en él, las unidades simples (no mayores que el cuatro), en el segundo, no las decenas, sino las "quinarias"; en el tercero no las centenas, sino las "vigesimoquinarias" y así sucesivamente. Por tal razón, el número "44" representado en el texto de la escritura denota, no 4 x 10 + 4, como en el sistema decimal sino 4 x 5 + 4, es decir, veinticuatro. En la misma forma, el número "100" en la autobiografía representa

[1] “La naturaleza y los hombres".
[2] El sistema quinario de numeración tiene cinco cifras básicas (0,1,2,3, y 4) y se caracteriza porque el número 5 es ya un número de dos cifras, que se representa por, la unidad en el orden de las "quinarias" y, el cero en el orden de las unidades, (N. del T.)

una unidad de tercer orden en el sistema quinario, es decir, 25. Los restantes números de la escritura denotan correspondientemente[3]:

"34"	= 3 × 5 + 4	= 19
"11"	= 5 + 1	= 6
"200"	= 2 × 25	= 50
"10"	= 5	= 5
"1/10"	= 1/5	= 1/5
"1.130"	= 25 + 3 * 5	= 40

Restituyendo el significado verdadero de los números de la escritura, vemos que en ellos no existen contradicciones de ningún tipo.

"Acabé mis estudios en la universidad a los 24 años. Después de un año, siendo un joven de 25 años, me casé con una muchacha de 19 años. La insignificante diferencia de edades, 6 años, que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 5 niños. De salario percibía en total, al mes, 50 rublos, de los cuales 1/5 parte la empleaba mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 40 rublos al mes".

¿Es difícil representar los números en otros sistemas de numeración? En absoluto. Supongamos que se desea representar el número 119 en el sistema quinario. Se divide 119 entre 5, para saber cuántas unidades de primer orden caben en él:

119 : 5 = 23, residuo 4.

Lo que significa que el número de unidades simples será 4. Además, 23 "quinarias" no pueden estar totalmente en el segundo orden, puesto que la cifra mayor en el sistema quinario es el cuatro, y unidades más grandes que cuatro no pueden existir en un solo orden. Luego, dividamos 23 entre 5:

23 : 5 = 4, residuo 3.

Esto muestra que en el segundo orden ("de los cincos") estará la cifra 3, y en el tercero ("de los veinticincos") el 4.

Así, 119 = 4 × 25 + 3 × 5 + 4, o, en el sistema quinario "434".

Las operaciones realizadas, para comodidad, se disponen en la forma siguiente:

$$\begin{array}{r|l|l}
119 & 5 & \\ \hline
4 & 23 & 5 \\ \cline{2-3}
 & 3 & 4
\end{array}$$

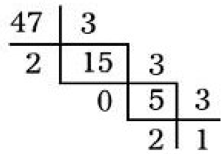
Cuadro 16

Las cifras en negritas (en la escritura se las puede subrayar) se escriben de derecha a izquierda y, simultáneamente, se obtiene la representación buscada, del número en otro sistema.

Pongamos aún otros ejemplos:

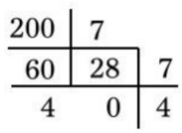
[3] De aquí en adelante, los números escritos en un sistema no decimal de numeración se ponen entre comillas.

Ejemplo 1: Representar 47 en el sistema ternario.
Resolución:


Cuadro 17

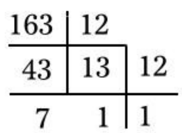
Respuesta: "1202".
Verificación: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

Ejemplo 2: Representar 200 en el sistema septenario.
Resolución:


Cuadro 18

Respuesta: "404".
Verificación: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$,

Ejemplo 3: Representar el número 163 en el sistema duodecimal:
Resolución:


Cuadro 19

Respuesta: "117".
Verificación: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Ahora el lector no tiene dificultad en representar cualquier número en un sistema de numeración deseado. El único obstáculo puede surgir, solamente, a consecuencia de que en ciertos casos no se encontraran notaciones para las cifras. En efecto, en la representación de números en sistemas con una base mayor que diez, por ejemplo, en el duodecimal puede presentar la necesidad en las cifras "diez" y "once". Fácilmente se sale de esta dificultad eligiendo, para las nuevas cifras, cualesquiera signos o letras condicionales, por ejemplo, las letras K y L que se hallan en los lugares 10° y 11° en el alfabeto ruso[4]. Así, el número 1579 en el sistema duodecimal[5] se representa en la forma siguiente:

[4] En el alfabeto español, los lugares 10º y 11º estás ocupados por las letras I y J. (N. del T.)
[5] En el sistema duodecimal las cifras básicas con: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, 10 y 11. Por lo tanto, es necesario introducir dos nuevos símbolos para denotar las "cifras" diez y once. (N. del T).

```
1579 | 12
12     131  12
 37     11  10
  19
   7
```

Cuadro 20

Respuesta: "(10) (11)7", o IJ7 (según el alfabeto castellano).
Verificación: 10 × 149 + 11 × 12 + 7 = 1579.

* * *

Problema 1: Escribir el número 1926 en el sistema duodecimal.[6]
Problema 2: Escribir el número 273 en el sistema duodecimal.
Volver

2. El sistema de numeración más sencillo.

Sin trabajo podemos notar que, en cada sistema, la mayor cifra que se utiliza es menor en una unidad que el número base del sistema. Así, en el sistema decimal, la mayor cifra es el 9; en el de base 6, el 5; en el ternario, el 2; en el de base l5, el 14, etc.

El sistema de numeración más sencillo es, naturalmente, aquel para el cual se requiere el menor número de cifras. En el sistema decimal son necesarias 10 cifras (considerando, también, al cero), en el quinario, 5 cifras, en e1 ternario, 3 cifras (0, 1 y 2), en el binario únicamente 2 cifras (1 y 0). ¿Existe un sistema "unitario"? Naturalmente: este sistema es aquel en el cual las unidades de todos los órdenes tienen idéntico valor. Este mismo "sistema" rudimentario lo empleaba el hombre primitivo, efectuando cortes en un árbol de acuerdo a1 número de objetos contados. Pero entre él y todos los otros sistemas de cálculo existe una enorme diferencia: carece de la principal ventaja de nuestra numeración (el llamado, valor posicional de las cifras). En efecto, en el sistema "unitario" un signo que se halle en el 3° ó 5° lugares, tiene el mismo valor que el que se encuentre en el primer lugar. Mientras que, aún en el sistema binario, la unidad en el 3er, lugar (desde la derecha) es ya 4 (2 × 2) veces mayor que en el 1er. lugar, y en el 5° lugar, 16 veces (2 × 2 × 2 × 2) mayor. Para la representación de cualquier número en el sistema "unitario" son necesarios exactamente tantos signos, como objetos sean contados: para escribir cien objetos, son necesarios cien signos: en el binario solamente siete ("1100100"); en el quinario, en total, tres ("400").

Es por esto que al sistema "unitario" es muy dudoso que se le pueda llamar "sistema"; por lo menos, no se le puede colocar junto a los restantes, puesto que se distingue fundamentalmente de ellos, en que no proporciona ninguna economía en la representación de los números. Si se le hace a un lado, entonces el sistema más sencillo de numeración resulta ser el sistema binario, en el que se emplean, en total, dos cifras: 1 y 0. ¡Por medio de la unidad y del cero se puede representar todo un conjunto infinito de números!

Para una numeración escrita y fija, este sistema es poco conveniente: se obtienen números excesivamente largos[7]. El sistema binario es muy a adecuado en una serie de investigaciones

[6] Las respuestas a los problemas están al final del libro. E indica: Resultado Problema 1: "1146"; Resultado Problema 2: "1109"

teóricas. En los últimos tiempos el papel del sistema binario ha tornado gran preponderancia, puesto que se halla en la base de la producción de cálculo, en las máquinas computadoras electrónicas. Dicho sistema posee ciertas interesantes particularidades inherentes que a propósito, se pueden emplear para la realización de una serie de trucos matemáticos efectivos, sobre los cuales hablaremos detalladamente en el capítulo "Trucos sin engaño".
Nos hemos habituado a tal grado a las operaciones aritméticas, que las efectuamos automáticamente, casi sin reflexionar en lo que hacemos. Pero las mismas operaciones exigen de nosotros gran esfuerzo si deseamos aplicarlas a números escritos en un sistema no decimal. Probemos, por ejemplo, efectuar la adición de los dos siguientes números, escritas conforme al sistema quinario.

$$\begin{array}{r} \text{"4203"} \\ +\text{"2132"} \\ \hline \end{array}$$

Sumemos conforme a los órdenes, empezando con las unidades, es decir, de la derecha: 3 + 2 es igual a cinco; pero no podemos escribir 5, porque tal cifra no existe en el sistema quinario; el cinco es ya una unidad de orden superior. Es decir, en la suma no hay unidades; escribimos 0, y el cinco, o sea, la unidad del siguiente orden, lo conservamos en la mente. Además, 0 + 3 = 3, más la unidad conservada en la mente, nos da en total 4 unidades de segundo orden. En el tercer orden obtenemos 2 + 1 = 3. En el cuarto, 4 + 2 es igual a seis, es decir, 5 + 1; escribimos 1, y al 5, o sea la unidad del orden superior- lo trasladamos más a la izquierda. La suma buscada = "11340":

$$\begin{array}{r} \text{"4203"} \\ +\text{"2132"} \\ \hline \text{"11340"} \end{array}$$

Damos al lector la posibilidad de comprobar esta adición, trasladando, previamente, los números entre comillas al sistema decimal.
Exactamente igual se realizan también las otras operaciones. Como ejercicios, ofrecemos aún una serie de problemas[8] , cuyo número el lector puede aumentar por su cuenta, a voluntad:
En el sistema quinario:
Problema 3:

$$\begin{array}{r} \text{"2143"} \\ -\text{"334"} \\ \hline \end{array}$$

[7] En cambio como veremos después para tal sistema se simplifican al máximo las tablas de adición, de multiplicación.

[8] Las respuestas a los problemas se encuentran al final del libro.
Resultados:
Problema 3.-"1304".
Problema 4.- "1144".
Problema 5.-"2402".
Problema 6.-"2010".
Problema 7.-"10210".
Problema 8.-"110".
Problema 9.-"10" residuo "11".

Problema 4:

"213"
×"3"

Problema 5:

"42"
×"31"

En el sistema ternario:

Problema 6:

"212"
+"120"

Problema 7:

"122"
×"20"

Problema 8:

"220"
÷"2"

Problema 9:

"201"
÷"12"

En la realización de esa, operaciones, primero representamos mentalmente en nuestro familiar sistema decimal a los números escrito, y obtenido el resultado, de nuevo los representamos en el sistema no decimal deseado. Pero también se puede proceder en otra forma: constituir "la tabla de adición" y "la tabla de multiplicación" en aquellos sistemas en los que estén dados los números, y emplear directamente las tablas.

Por ejemplo, la tabla de adición en el sistema quinario tiene la siguiente forma:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Por medio de esta tabla podemos sumar los números "4203" y "2132", escritos en el sistema quinario, esforzando la atención mucho menos que con el método aplicado anteriormente.

Como es fácil comprender, la realización de la substracción también se simplifica.

Formemos la tabla de multiplicar ("pitagórica") para el sistema quinario:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Teniendo esta tabla ante los ojos, se puede reducir, en sí, el trabajo de la multiplicación (y de la división) de los números en el sistema quinario, como es fácil persuadirse, aplicándola a los arriba. Por ejemplo, en la multiplicación.

$$\begin{array}{r} "213" \\ \times "3" \\ \hline 1144 \end{array}$$

Razonamos así: tres por tres (de la tabla) da "14", escribimos 4 y conservamos en la mente el uno para el siguiente orden. Tres por uno, tres, mas uno del orden anterior, 4; de la tabla, 3 × 2 da "11", con lo que el resultado final será "1144".
Cuanto menor es la base de un sistema, tanto menores son, también, las correspondientes tablas de adición y de multiplicación. Por ejemplo, las dos tablas para el sistema ternario son:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla de la adición para el sistema ternario

1	2
2	11

Tabla pitagórica para el sistema ternario

Dichas tablas se pueden, simultáneamente, memorizar y emplear para la realización de las operaciones. Las tablas de adición y multiplicación más breves corresponden al sistema binario.

0	1
1	10

Tabla de la adición para el sistema binario

$1 \times 1 = 1$

Tabla de multiplicación para el sistema binario

¡Por medio de "tablas" tan sencillas se pueden efectuar, en el sistema binario, las cuatro operaciones! Las multiplicaciones en este sistema, como tales, en esencia no existen, pues multiplicar por la unidad equivale a dejar el número sin modificación; La multiplicación por "10", "100", "1000" (es decir, por 2, por 4, por 8) conduce a un sencillo agregado, a la derecha del correspondiente número de ceros. Por lo que toca a la adición, para su realización, es necesario recordar solamente que, en el sistema binario, 1 + 1 = 10.
¿No es cierto que nosotros, con una fundamentación completa, llamamos anteriormente al sistema binario el más sencillo de todos los posibles? La gran longitud de los números de esta aritmética singular, se compensa por la sencillez; de realización de todas las operaciones aritméticas con ellos.
Se desea, por ejemplo, multiplicar

$$\begin{array}{r} \text{"1001011101"} \\ \times\text{"100101"} \\ \hline \text{"1001011101"} \\ +\text{"1001011101"}\cdot \\ \text{"1001011101"}\cdots\cdots \\ \hline \text{"101011101110001"} \end{array}$$

La realización, de la operación conduce únicamente a una transcripción de los números dados en una disposición ordenada: esto requiere esfuerzos mentales comparativamente menores que la multiplicación de tales números, en el sistema decimal (605 × 37 = 22 385). Si fuera adaptado por nosotros el sistema binario, el estudio de la numeración escrita requeriría una mínima tensión mental (a cambio de una máxima cantidad de papel y tinta). Sin embargo, en la numeración oral la aritmética binaria, por lo que se refiere a la comodidad de realización de las operaciones, cede en gran medida, ante nuestro decimal.

Proporcionemos también un ejemplo de la operación de división efectuada en el sistema de numeración binario:

$$\begin{array}{lll} 10000010 & :111 & =10010 \\ 111\cdots\cdots\cdot & & \\ \hline \;\;1001\cdots\cdot & & \\ \;\;\;\;111\cdots\cdot & & \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;100 & & \end{array}$$

En nuestro familiar sistema decimal, esta operación tendría la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} 130 & :7 & =18 \\ \;7\cdot\cdot & & \\ \hline \;60 & & \\ \;56 & & \\ \hline \;\;4 & & \end{array}$$

El dividendo, el divisor, e1 cociente y el residuo en ambos casos son, en esencia idénticos, aunque las cuentas intermedias sean diferentes.

Volver

3. ¿Par o impar?

No viendo el número, naturalmente resulta difícil saber si es par o impar. Pero desde luego, nos resulta fácil decirlo apenas percibido un número dado. Por ejemplo, ¿el número 16 es par o impar?

Si sabemos que está escrito en el sistema decimal, se está en lo justo al afirmar que dicho número es par. Pero cuando se escribe en cualquier otro sistema, ¿se puede estar seguro de que él representa, infaliblemente, un número par?

Evidentemente no. Si la base es, por ejemplo, siete, "16" denota 7 + 6 = 13, un número impar, Exactamente será, también, para toda base impar. (Porque todo numero impar + 6 es también un número impar).
De aquí la conclusión de que la divisibilidad entre dos (la última cifra par) conocida por nosotros, útil incondicionalmente sólo para el sistema de numeración decimal, para otros sistemas no lo es siempre. A saber, es justa solamente para sistemas de numeración con base par: de base seis, ocho, etc. ¿Cuál es la divisibilidad entre 2 para los sistemas de base impar? Es suficiente una corta reflexión para establecerla: la suma de las cifras deberá ser par. Par ejemplo, el número "136" es par en todo sistema de numeración, inclusive también con base impar; en efecto, en el último caso tenemos: un numero impar[9] + un numero impar + un par = número par,
Con la misma precaución es necesario referirse al problema: ¿Siempre es divisible el número 25 entre cinco? En el sistema de base siete u ocho, el número así representado no es divisible entre 5 (porque es igual a diecinueve o a veintiuno). En la misma forma, la bien conocida divisibilidad entre 9 (de acuerdo a la suma de las cifras) es justa, únicamente, para el sistema decimal. Por el contrario, en el sistema quinario se aplica la divisibilidad para el 4, y, por ejemplo, en el de base siete, para el 6. Así, el número "323" en el sistema quinario es divisible entre 4, porque 3 + 2 + 3 = 8, y el número "51" en el de base siete, es divisible entre 6 (es fácil convencerse de ello trasladando los números al sistema decimal): obtenemos respectivamente, 88 y 36). El lector mismo puede darse cuenta de por qué esto es así, si profundiza bien en la deducción de la divisibilidad entre 9 y aplica los mismos razonamientos, correspondientemente modificados, por ejemplo, al sistema de base siete para la deducción de la divisibilidad entre 6.
Es más arduo demostrar por un medio puramente aritmético, la legitimidad de las siguientes tesis:

$$121 : 11 = 11$$
$$144 : 12 = 12$$
$$21 \times 21 = 441$$

en todos los sistemas de numeración (en donde se tengan las cifras correspondientes).
Para los entendidos con los rudimentos del álgebra, es fácil hallar la base, que explique la propiedad de estas igualdades. Los restantes lectores las pueden experimentar para diversos sistemas de numeración.
Volver

4. Problemas instructivos.

1. ¿Cuándo $2 \times 2 = 100$?[10]
2. ¿Cuándo $2 \times 2 = 11$?[11]
3. ¿Cuándo 10 es número impar?[12]
4. ¿Cuándo $2 \times 3 = 11$?[13]
5. ¿Cuándo $3 \times 3 = 14$?[14]

[9] Un número impar multiplicado por sí mismo (es decir, por un impar), siempre da un número impar (por ejemplo, $7 \times 7 = 49$, $11 \times 11 = 121$, etc.)
[10] $2 \times 2 = 100$ cuando "100" está escrito en el sistema binario.
[11] $2 \times 2 = 11$ cuando "11" esta escrito en el sistema ternario.
[12] "10" es impar cuando está escrito en el sistema quinario, y también en los sistemas con base 3, 7 y 9.
[13] $2 \times 3 = 11$ cuando "11" está escrito en el sistema quinario.

Las respuestas a estas preguntas no deben dificultarse al lector que ha estado al corriente de este capítulo.
Volver

5. Fracciones sin denominador

Estamos habituados: al hecho de que, solamente las fracciones decimales se escriben sin denominador. Por tal razón, a simple vista, al parecer, no es posible escribir directamente sin denominador la fracción 2/7 ó 1/3. Sin embargo la cuestión se nos presenta en otra forma si pensamos en que son posibles las fracciones sin denominador en otros sistemas de numeración. ¿En el sistema quinario, qué denota, por ejemplo, la fracción "0.4"? Naturalmente, 4/5. En el sistema septenario la fracción "1.27" denota 1 2/7. ¿Y qué denota en el mismo sistema septenario la fracción 0.33"? Aquí el resultado más complicado: 3/7 + 49 = 24/49.
Consideremos aún, algunas fracciones no decimales sin denominador ¿A qué es igual

1. "2.121" en el sistema ternario?
2. "1.011" en el sistema binario?
3. "3.431" en el sistema quinario?
4. "2.(5)" en el sistema septenario?

Respuestas:

1. 2 + 1/3 + 2/9 + 1/27 = 2 16,27.
2. 1 + 1/4 + 1/8 = 1 3/8.
3. 3 + 4/5 + 3/25 + 1/125 = 3 116/125.
4. 2 + 5/7 + 5/49 + 5/343 + ... = 2 5/6.

El lector puede darse cuenta fácilmente de la justeza de la íntima igualdad si prueba aplicar al caso dado con la modificación correspondiente los razonamientos que se refieren a la transformación de fracciones decimales y periódicas a ordinarias.
Para concluir el capítulo, consideremos algunos problemas de índole especial (ver las respuestas al final del libro):

Problema 10. ¿En qué sistema de numeración está efectuada la siguiente adición?:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ +\,2456 \\ 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Problema 11. En qué sistema de numeración está efectuada la división:

[14] 3 × 3 = 14, cuando 14 está escrito en el sistema quinario.

$$
\begin{array}{rll}
4415400 & :4532 & =543 \\
40344\cdots & & \\
\hline
34100\cdots & & \\
-31412\cdots & & \\
\hline
22440\cdot\cdot & & \\
-22440\cdot\cdot & & \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

Problema 12. Escriba el número "ciento treinta" en todos los sistemas de numeración del binario a1 decimal, inclusive.

Problema 13. ¿A qué es igual el número "123" si se le considera escrito en todos los sistemas de numeración, hasta el nonario inclusive? ¿Es posible escribirlo en el sistema binario? ¿Y en el sistema ternario? Si está escrito en el sistema quinario, ¿se puede saber si es divisible exactamente entre dos, sin transcribirlo en el sistema decimal? Si está escrito en el sistema de base nueve, ¿es divisible exactamente entre cuatro?
Volver

6. Curiosidad Aritmética

$$2^5 \times 9^2 = 2592$$

Volver

[1]

Capítulo Quinto
Galería de Maravillas Numéricas

Contenido:

1. Museo De Curiosidades Aritméticas

En el mondo de los números, como también en el mundo de loa seres vivos, se encuentran maravillas auténticas, ejemplares únicos, que poseen propiedades singulares. A partir de tales números no ordinarios de dicha especie, pudo ser constituido un museo de rarezas numéricas: el presente "museo de curiosidades aritméticas". En sus vitrinas hallaremos el lugar, no solamente de los gigantes numéricos sobre los que charlaremos aún más en un capítulo especial, sino también de los números de dimensiones discretas que, en compensación, se distinguen de la serie de los otros por ciertas propiedades no habituales. Algunos de ellos atraen la atención ya, por 1a

[1] En el dibujo de esta página dice, de arriba a abajo, respectivamente: ¿10 ó 12?; pie = 12 pulgadas: metro = 10 decímetros.

apariencia; otros descubren sus particularidades singulares solamente con un conocimiento más profundo.
Las particularidades interesantes de ciertos números representados en nuestra "galería", no tienen nada en común con algunas singularidades imaginarias que, los aficionados a lo misterioso, perciben en otros números. Como ejemplo de semejantes supersticiones numéricas, puede servir la siguiente reflexión aritmética, expresada sin cautela por el conocido escritor francés Víctor Hugo:
"El tres es un número perfecto. La unidad es al número 3, lo mismo que el diámetro al círculo. El número 3 es el único que posee centro. Los demás números, son elipses que tienen dos focos. De aquí, se sigue una particularidad propia, exclusiva del número 3. Al sumar las cifras de cualquier número múltiplo de 3, la suma es divisible exactamente entre 3".
En esta vaga y aparentemente profunda revelación, todo es inexacto; lo que no es frase, carece de sentido o es un absurdo. Solamente es justa la observación sobre la propiedad de la suma de las cifras, pero dicha propiedad no surge de lo señalado, y por lo mismo no representa una particularidad exclusiva del número 3: por ella se distingue en el sistema decimal, también el número 9, y en otros sistemas, los números menores, en una unidad, que la base.
Las maravillas de nuestra "galería" son de otro tipo: en ellas no hay nada misterioso ni indescifrable.

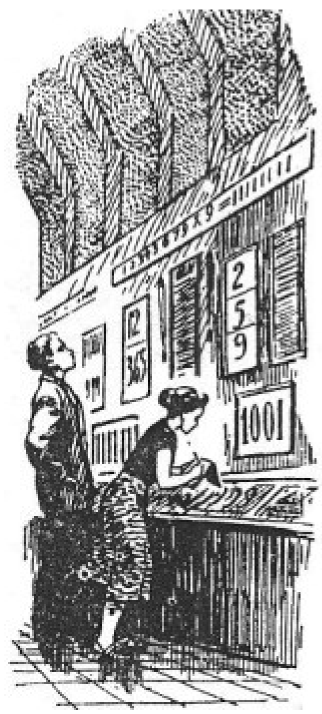


Figura 25. Vitrina de maravillas aritméticas

Invito al lector a realizar una excursión por la galería de tales maravillas numéricas y a entablar conocimiento con algunas de ellas.
Pasemos, sin detenernos, delante de las primeras vitrinas que encierran números cuyas propiedades son bien conocidas de nosotros. Sabemos ya por qué se hallaba el número 2 en la

galería de maravillas: no porque sea el primer número par[2] sino porque es la base de un interesante sistema de numeración.[3]
No será inesperado para nosotros encontrar aquí el número 9, también naturalmente, no como un "símbolo de constancia"[4] sino como el número que nos asegura la comprobación de todas las operaciones aritmética. Pero aquí está la vitrina; veamos a través de su cristal.
Volver

2. El Número 12
¿Qué tan admirable es?. Es el número de meses en el año y el número de unidades en la docena. Pero, en esencia, ¿qué hay de particular en la docena?. Por pocos es conocido que el 12 es el antiguo y derrotado rival del número 10 en la lucha por el puesto honorífico de base del sistema de numeración. Un pueblo de gran cultura del Antiguo Oriente, los babilonios, y sus predecesores sumerios, realizaban los cálculos en el sistema duodecimal de numeración. Hasta ahora, hemos pagado algo de tributo a este sistema, no obstante la victoria del decimal. Nuestra afición a las docenas y las gruesas[5], nuestra división del día en dos docenas de horas, la división de la hora en 5 docenas de minutos, la división del minuto en otros tantos segundos, la división del círculo en 30 docenas de grados, y finalmente, la división del pie en 12 pulgadas ¿no atestigua todo esto (y muchas otras cosas) sobre la gran influencia, en nuestros días, del antiguo sistema?
¿Es conveniente que en la lucha entre la docena y la decena halla triunfado esta última?. Naturalmente, por las intensas ligas de la decena con los diez dedos, nuestras propias manos han sido y continúan siendo máquinas calculadoras naturales. Pero si no fuera por esto, entonces convendría, incondicionalmente, dar la preferencia al 12 antes que al 10. Es mucho más conveniente realizar los cálculos en el sistema duodecimal que en el decimal. Esto se debe a que el número 10 es divisible entre 2 y 5, mientras que el 12 es divisible entre 2, 3, 4 y 6. En 10 hay, en total, dos divisores; en 12, cuatro. Las ventajas del sistema duodecimal se tornan claras si se considera que en este sistema un número que termina con cero, es múltiplo de 2, 3, 9 y 6: reflexiónese: ¡qué tan cómodo es dividir un número cuando precisamente 1/2, 1/3, 1/4 y 7/6 deben ser números enteros!
Si el número expresado en el sistema duodecimal termina con dos ceros, deberá ser divisible entre 144, y por consiguiente, también entre todos los multiplicadores de 144, es decir, entre la siguiente serie de números:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Catorce divisores, en lugar de los ocho que tienen los números escritos en el sistema decimal, si terminan con dos ceros (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100). En nuestro sistema solamente fracciones de la forma 1/2, 1/4, 1/5, 1/20 etc., se convierten en decimales finitos; en el sistema duodecimal se pueden escribir: sin denominador mucho más diversas fracciones y ante todo: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6,

---
[2] Como primer número par se puede, por otra parte, considerar, no al 2, sino al 0.
[3] Se refiere al sistema binario de numeración que se aplica para representación de los números y la realización de las operaciones en la generalidad de las máquinas computadoras aritméticas. La utilización de dicho sistema permite el empleo, en la construcción y análisis de esquemas funcionales de la lógica matemática y asegurar una simplificación substancial de la estructura de los dispositivos aritméticos y de memoria, en comparación con los casos en que se usan otros sistemas de numeración.
[4] Los antiguos (discípulos de Pitágoras) consideraban el 9 como un símbolo de constancia, "puesto que todos los números múltiples de 9, tienen como suma de las cifras, un múltiplo de 9".
[5] Una gruesa son 12 docenas. 144 objetos de un mismo genero constituyen una gruesa.

1/8, 1/9, 1/12, 1/16, 1/18, 1/24, 1/36, 1/48, 1/72, 1/144, las que respectivamente se representan así:

0.6: 0.4; 0.3: 0.2; 0.16; 0.14: 0.1; 0.09; 0.08; 0.06; 0.04: 0.03: 0.02; 0.01.

Por otra parte, sería un gran error pensar que la divisibilidad de un número puede depender del sistema de numeración en que esté representado. Si unas nueces contenidas en un saco, pueden ser separadas en 5 montones idénticos, entonces esta propiedad de ellas, naturalmente, no se modifica a causa de que nuestro número de nueces esté expresado en uno u otro sistema de numeración o dispuesto en un ábaco, o escrito con letras, o representado por cualquier otro método. Si el número escrito en el sistema duodecimal es divisible entre 6 o entre 72, entonces, al ser expresado en otro sistema de numeración, por ejemplo en el decimal, deberá tener los mismos divisores. La diferencia consiste únicamente en que, en el sistema duodecimal la divisibilidad entre 6 o entre 72 es fácil de descubrir (el número termina en uno o en dos ceros).

Ante tales ventajas del sistema duodecimal, no es entraño que entre los matemáticos se corriera la voz en favor de un traslado total a este sistema. Sin embargo, estamos ya demasiado acostumbrados al sistema decimal como para resolverse por tal sistema.

El gran matemático francés Laplace emitió la siguiente opinión respecto a dicho problema: "La base de nuestro sistema de numeración no es divisible entre 3 ni entre 4, es decir, entre dos divisores muy empleados por su sencillez. La incorporación de dos nuevos símbolos (cifras) daría al sistema de numeración esta ventaja; pero tal innovación sería, sin duda, contraproducente. Perderíamos la utilidad que dio origen a nuestra aritmética que es, la posibilidad de calcular con los dedos de las manos".

Por el contrario, procedía, por uniformidad, pasar también a los decimales en la medición de los arcos, de los minutos y de los grados.

Dicha reforma se intentó realizar en Francia, pero no llegó a implantarse. No había otro, aparte de Laplace que fuera un ardiente partidario de esta reforma. Su célebre libro "Exposición de un sistema del mundo" sucesivamente realiza la subdivisión decimal de los ángulos; llama grado, no a la noventava, sino a la centésima parte de un ángulo recto, minuto a la centésima parte de un grado, etc. Inclusive, Laplace emitió su opinión sobre la subdivisión decimal de las horas y de los minutos. "La uniformidad del sistema de medidas, requiere que el día esté dividido en 100 horas, la hora en 100 minutos, el minuto en 100 segundos" escribió el eminente geómetra francés.

Se ve, por consiguiente, que la docena tiene por sí misma, una larga historia, y que el número 12. no sin fundamento se encuentra en la galería de las maravillas numéricas. Por el contrario su contiguo, el número 13, figura aquí no porque sea notable, sino más bien por no serlo, aunque precisamente se emplea por una gloria sombría: ¿no es extraordinario que no habiendo nada que distinga al número, pudiera éste llegar a ser "peligrosa" pera las gentes supersticiosas?.

La forma en que fue propagada esta superstición (que se originó en la antigua Babilonia) es evidente por el hecho de que en la época del régimen zarista, en el dispositivo del tranvía eléctrico en Petersburgo no se decidieron a introducir la ruta número 13, omitiéndola y pasando a la número 14. Las autoridades pensaban que el público no querría viajar en vagones con tal "siniestro" número. Es curioso que en Petersburgo los alojamientos que atendían 13 cuartos, estuvieran solitarios... En los hoteles, generalmente no existía la habitación número 13. Para la lucha contra esta superstición numérica, sin fundamento, en algunas partes de Occidente (por ejemplo, en Inglaterra) se han constituido inclusive "Clubes del número 13" especiales.

En la siguiente vitrina del museo de maravillas aritméticas vemos ante nosotros al número 365.

Volver

3. Número 365
Es notable, ante todo, porque denomina el número de días en el año. Además, en la división entre 7 da, en el residuo, 1: por ser un residuo tan insignificante, esta propiedad del número 365 adquiere un gran significado para nuestro calendario de siete días.
Otra propiedad del número 365 no relacionada con el calendario, es

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

es decir, que el número 365 es igual a la suma de los cuadrados de tres números consecutivos, empezando por el 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

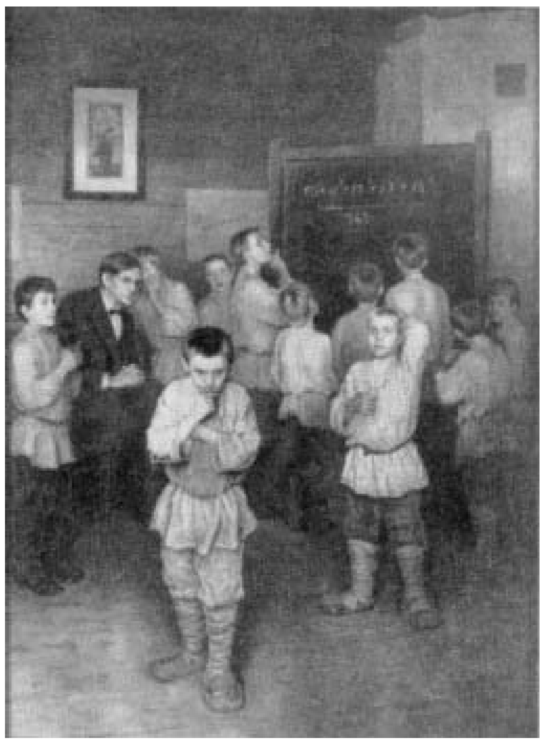


Figura 27. Viñeta del famoso cuadro del artista Bogdánov-Bielski, titulado "Un Problema Difícil"

Pero además, es igual a la suma de los cuadrados de los dos siguientes números, 13 y 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

En esta propiedad del número 365 se basa el conocido problema de S. A, Rachinsky que inspiró el famoso cuadro de Bogdánov-Bielsky. "problema difícil" (figura 27)

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} =$$

Pocos números de esta índole reúnen en nuestra galería de maravillas aritméticas.
Volver

4. Tres Nueves
En la siguiente vitrina está, expuesto el mayor de todos los números de tres cifra: el 999. Dicho número, sin duda es mucha más extraordinario que su imagen volcada 666, el famoso "número bestial" del Apocalipsis que ha inspirado un temor absurdo entre algunas gentes supersticiosas que, conforme a las propiedades aritméticas nada hay que lo distinga de los demás números.

Figura 28. Un número por el cual es fácil multiplicar

Una propiedad interesante del número 999 se manifiesta en su multiplicación con cualquier otro número de tres cifras. Entonces se obtiene un producto de seis cifras: sus tres primeras cifras constituyen el número multiplicado, disminuido de una unidad, y las tres cifras restantes (inclusive la última) son el "complemento" al 9, de las primeras. Por ejemplo:

573:

573 x 999 = 572 427

Basta, solamente, echar una ojeada al siguiente renglón, para entender el origen de esta particularidad:

573 x 999 = 573 x (1000-1) = 573 000 – 573 = 572 427

Conociendo esta particularidad, podemos multiplicar "instantáneamente" cualquier número de tres cifras por 999:

917 x 999 = 966 083,
509 x 991 = 508 491,
981 x 999 = 980 019
.

Y puesto que 999 = 9 x 111 = 3 x 3 x 3 x 37, se pueden, otra vez con la rapidez de un rayo, escribir colonias enteras de números de seis cifras, múltiplos de 37; no conocidas las propiedades del número 999, naturalmente no se está en situación de hacer esto. Hablando brevemente, se pueden organizar ante profanos, pequeñas funciones de "multiplicación y división instantáneas".
Volver

5. El Número de Scheherazada
El que sigue en turno es el número 1001, el célebre número de Scheherazada. Pocos sospechan, probablemente, que en la denominación misma de una colección de cuentos encantados árabes se

encienta una especie de maravilla, que podría exaltar la imaginación del sultán del cuento, no en menor grado que algunas otras maravillas de Oriente, si él hubiera sido capaz de interesarse por las maravillas aritméticas.

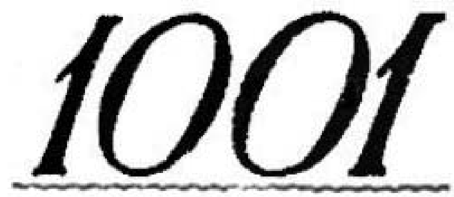


Figura 29. El número de Scheherazada

¿Qué tan notable es el número 1001? En aspecto, al parecer es muy ordinario. Inclusive, no pertenece al escogido orden de los llamados números "primos". Dicho número es divisible entre 7, 11 y 13, es decir, entre: tres números primos consecutivos, el producto de los cuales resulta ser el mencionado número. Pero la maravilla no consiste en que el número 1001 = 7 x 11 x 13, ya que aquí no hay nada de mágico. Lo mas notable es que al multiplicar un número de tres cifras por dicho número, se obtiene un resultado que consiste del mismo número multiplicado, sólo que escrito dos veces, por ejemplo:

873 x 1001 = 873 873,
207 x 1001 = 207 207,

Y aunque esto era de esperarse, puesto que

873 x 1001 = 873 x 1000 + 873 = 873 000 + 873,

aprovechando la señalada propiedad "del número de Scheherazada" se pueden lograr resultados completamente inesperados, por lo menos para el hombre no preparado.
Ahora, aclaremos en que forma.
Se puede sorprender a un grupo de camaradas no iniciados en los misterios aritméticos, con el siguiente truco, Supóngase que alguno escribe en un pedazo de papel, en secreto, el número de tres cifras que desee, y que enseguida le agrega el mismo número.
Se obtiene un número de seis cifras que se compone de tres cifras repetidas. Se le propone al mismo camarada o a su vecino dividir este número, en secreto, entre 7; además, con anticipación se predice que en la división no se obtendrá residuo. El resultado se transmite al nuevo vecino, quien de acuerdo con la proposición, lo divide entre 11, y aunque no se conoce el dividendo, uno puede afirmar que también ese número se divide sin residuo. El resultado obtenido se proporciona al siguiente vecino, al cual se le solicita que divida este número entre 13, y conforme a lo predicho de antemano, la división no dará ningún residuo. El resultado de la tercera división. sin ver el número obtenido se traslada al primer camarada con las palabras:

- *¿Este es el número que Ud. Pensó?*
- *Así es, Ud. acertó, le contestarán sin duda alguna.*

¿Cuál es la clave del truco?

Este bonito truco aritmético, que produce en los no iniciados un efecto de magia, se explica en uno forma muy sencilla: recuérdese que el agregar a un número de tres cifras el propio número, significa multiplicarlo por 1001, es decir, por el producto 7 x 11 x 13. El número seis cifras que obtiene nuestro camarada después de agregar al número dado el propio número, deberá, por esta razón, dividirse exactamente entre 7, entre 11 y entre 13; y como consecuencia de la división, consecutivamente, entre estos tres números (es decir, entre su producto 1001) se deberá naturalmente, obtener otra vez el número pensado.
La realización del truco se puede variar conforme los deseos en tal forma, que se tenga la posibilidad de encontrar el número enigmático que se obtiene en el total de los cálculos. Es sabido que el número de seis cifras sobre el cual se comienzan a hacer los cálculos, es igual al producto

(número pensado) x 7 x 11 x 13.

Por tal razón, si se pide dividir el número de seis cifras, primero entre siete, después entre 11, luego entre el número pensado entonces, con seguridad se puede encontrar como total final de todas las divisiones al 13.
Repitiendo el truco, se pide realizar las divisiones en otro orden: al principio entre 11, después entre el número pensado y entre 13. La última división deberá dar 7 como cociente. O al principio entre 13, después entre el número pensado, y luego entre 7; el total final es 11.
Volver

6. El Número 10101
Después de lo indicado sobre el número 1001, ya no será una sorpresa ver al número 10101 en las vitrinas de nuestra galería. Se adivina a qué propiedad, precisamente, está obligado este número por tal honor. El, como el número 1001, da un resultando sorprendente en la multiplicación, pero no de números de tres cifras, sino de dos cifras; todo número de dos cifras, multiplicado por 10 101, da como resultado el propio número, escrito tres veces.

Figura 30. Un número que se presta para trucos

Por ejemplo:

73 x 10 101 = 737 373
21 x 10 101 = 212 121.

La causa se aclara por el siguiente renglón:

73 x 10101 = 73 (10000 + 100 + 1) = 730000 + 7300 + 73

¿ Con ayuda de este número se pueden hacer trucos de adivinación no habitual, como con el número 1001?

Sí se puede. Aquí es posible inclusive, disponer de un truco más variado, si se tiene en cuenta que 10101 es producto de cuatro números primos:

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Proponiendo a un camarada pensar un número de dos cifras, a un segundo se le pide agregarle el propio número, a un tercero agregar el propio número una vez más. A un cuarto se le pide dividir el número de seis cifras obtenido, entre 7 por ejemplo; un quinto camarada deberá dividir el cociente obtenido entre 3; un sexto divide lo que se obtuvo entre 37 y, finalmente, un séptimo divide este resultado entre 13; las cuatro divisiones se realizan sin residuo. El resultado de la última división se transmite al primer camarada: éste es, precisamente, el número pensado por él.
En la repetición del truco se puede introducir cierta variedad, empleando cada vez nuevos divisores. A saber, en lugar de los cuatro multiplicadores 3 x 7 x l3 x 37, se pueden tomar loa siguientes grupos de tres multiplicadores:

$$21 \times 13 \times 37;$$
$$7 \times 39 \times 37$$
$$3 \times 91 \times 37$$
$$7 \times 13 \times 111.$$

Este truco es fácil de modificar en forma semejante a como fue explicado en el caso anterior (en el truco con el número 1001).
El número 101001 es, quizás aun más sorprendente que el número encantado de Scheherazada, aunque también sea menos conocido en cuanto a sus propiedades singulares. Sobre él se escribió además, ya doscientos años antes, en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo donde se proporcionan ejemplos de multiplicación, "con una cierta sorpresa". Dicho número, con mayor razón, debe incluirse en nuestra colección de maravillas aritmética.
Volver

7. El Número 10001

Con este número se pueden también hacer trucos a la manera de los anteriores, aunque quizás no tan variadas.

Figura 31. Otro número que se presta para trucos

Es que dicho número representa en sí, el producto de dos números primos solamente:

$$10\,001 = 73 \times 137.$$

Tengo confianza en que el lector, después de todo lo indicado arriba, se dará cuenta de cómo se aprovecha eso para la realización de las operaciones aritméticas "con sorpresa".

Volver

8. Seis Unidades

En la siguiente vitrina vemos una nueva maravilla del museo de curiosidades aritméticas el número que consiste de seis unidades. En virtud del conocimiento de las propiedades mágicas del número 1001, simultáneamente nos damos cuenta de que

$$111111 = 111 \times 1001.$$

Figura 32. Número útil para la adivinación

Pero 111 = 3 x 37, y 1001 = 7 x 11 x 13. De aquí se sigue que nuestro nuevo fenómeno numérico, que se compone solamente de unidades, representa en sí, el producto de cinco multiplicadores primos. Combinando estos cinco multiplicadores en todas las formas posibles, en dos grupos, obtenemos 15 pares de multiplicadores que dan como producto uno y el mismo número 111111:

$$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37037 = 111111$$
$$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 15873 = 111111$$
$$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) = 11 \times 10101 = 111111$$
$$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8547 = 111111$$
$$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3003 = 111111$$
$$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5291 = 111111$$
$$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3367 = 111111$$

Se puede, en ese caso, poner a un grupo de 15 camaradas el trabajo de multiplicación y, aunque cada uno multiplicara un distinto par de números, todos obtendrían uno y el mismo resultado original: 111111.

El mismo número 111111 es útil también, para la adivinación de números pensados, a semejanza de los medios; usados con los números 1001 y 10101. En el caso dado se propone pensar un número de una cifra, y repetirlo 6 veces. Como divisores pueden servir aquí, cinco números primos: 3, 7, 11, 13, 37 y las combinaciones obtenidas de ellos: 21, 33, 39, etc. Esto proporciona la posibilidad de variar en extremo la realización del truco.

Por ejemplo, del número 111111 el lector ve cómo se quede emplear, para los trucos aritméticos, un número que se componga de puras unidades, si se descompone en factores. Para fortuna de los aficionados a semejantes trucos, algunos números, de tal sistema, no son primos, sino compuestos.

De los primeros 17 números de esta especie solamente los dos menores, 1 y 11, son primos, los restantes son compuestos. He aquí cómo se descomponen en factores primos, los primeros diez de los números compuestos de este sistema.

$$111 = 3 \times 37$$

1.111	=	11 x 101
11.111	=	41 x 271
111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 37
1.111.111	=	239 x 4649
11.111.111	=	11 x 73 x 101 x 137
111.111.111	=	9 x 37 x 333 667
1.111.111.111	=	11 x 4l x 271 x 9091
111.11.111.111	=	21649 x 513 239
111.111.111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 87 x 101 x 9901

No todos los números aquí dados son convenientes para la adivinación.
Pero números de 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 12 unidades son más o menos útiles para este objeto. Ejemplos de su uso para adivinación, se darán al final del siguiente capítulo.
Volver

9. Pirámides Numéricas
En las siguientes vitrinas de la galería admiramos notabilidades numéricas de una especie muy particular: con semejanza a pirámides compuestas de números. Consideremos más de cerca a la primera de ellas (fig. 33).

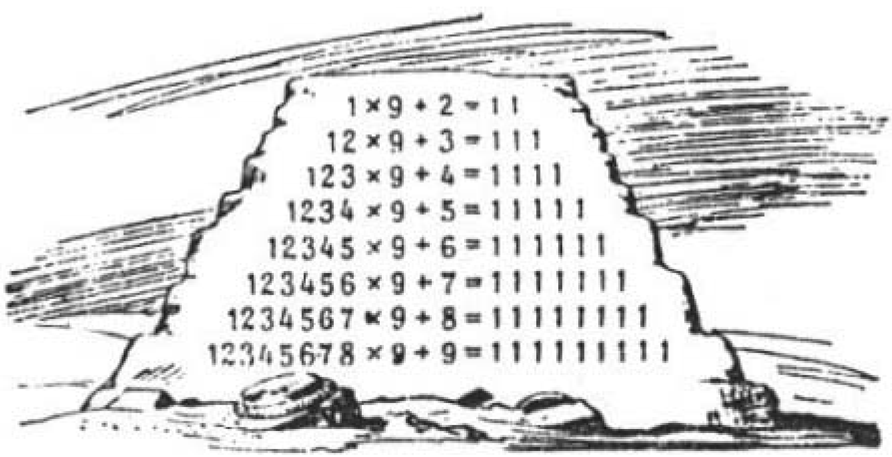


Figura 33. Primera pirámide numérica

¿Cómo explicar estos resultados singulares de la multiplicación?
Para comprender esta rara singularidad, tomemos como ejemplo cualquiera de las filas intermedias de nuestra pirámide numérica: 123456 x 9 + 7. En lugar de la multiplicación por 9, se puede multiplicar por (10-1), es decir, agregar el 0 a la derecha y restar el multiplicando:

123456 x 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = 1.111.111

Basta echar una ojeada sobre la última substracción para comprender por qué se obtiene un resultado que consiste solamente de unidades.
Podemos también explicar esto, partiendo de otros razonamientos. Para que un número de la forma 12345… se convierta en un número de la forma 11111…, es necesario restar 1 a la

segunda de sus cifras, 2 a la tercera. 3 a la cuarta, 4 a la quinta y así sucesivamente; en otras palabras, restar de él el mismo número de la forma 12345 … privado de su última cifra, es decir disminuido 10 veces y carente previamente de su última cifra.
Ahora, es comprensible que para la obtención del resultado buscado es necesario multiplicar por 10 nuestro número y agregarle la cifra que sigue, en calidad de última cifra, y restar al resultado el número original (y multiplicar por 10 y restar el multiplicando quiere decir, multiplicar por 9).
En forma análoga se explica la formación de la siguiente pirámide numérica (fig. 34), que se obtiene en la multiplicación de una determinada serie de cifras por 8 y la adición de cifras que consecutivamente aumentan.

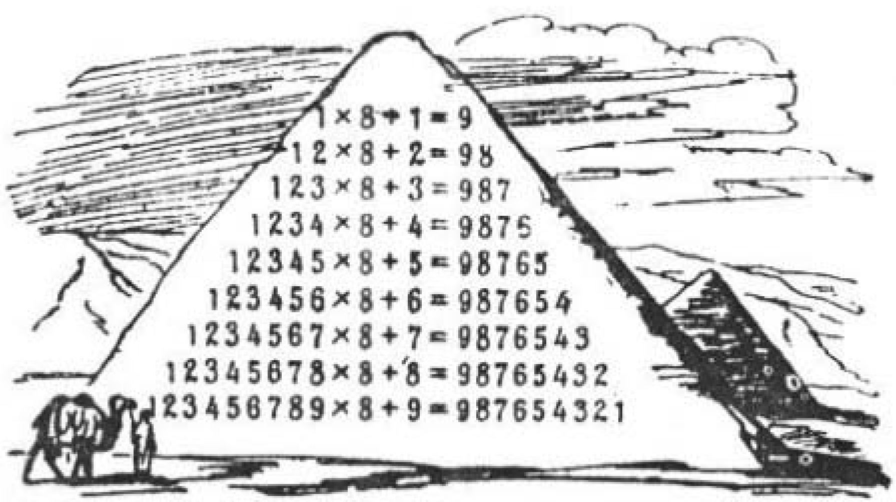


Figura 34. Segunda pirámide numérica

Particularmente interesante en la pirámide, es la última fila donde, como resultado de la multiplicación por 8 y la adición del 9, tiene lugar la transformación de la serie natural total de cifras, en dicha serie, pero con una disposición inversa.
Intentemos explicar esta particularidad.
La obtención de los extraños resultados se aclara por el siguiente renglón:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$ [6]

$$12\,345 \times 8 + 5 = 98765$$

es decir

$$12345 \times (9 - 1) \times 8 + 5 + 1 - 1 = 12345 \times 9 - 12345 - 1 = 111111 - 12\,316.$$

Pero restando del número 111111 el número 12346 compuesto de una serie de cifras crecientes, obtendremos, como es fácil de comprender, una serie de cifras decrecientes: 98765.
He aquí, finalmente, la tercera pirámide numérica, que también requiere explicación (fig. 35).

[6] Por qué 12345 x 9 + 6 da precisamente 111111, fue mostrado en la consideración de la pirámide anterior.

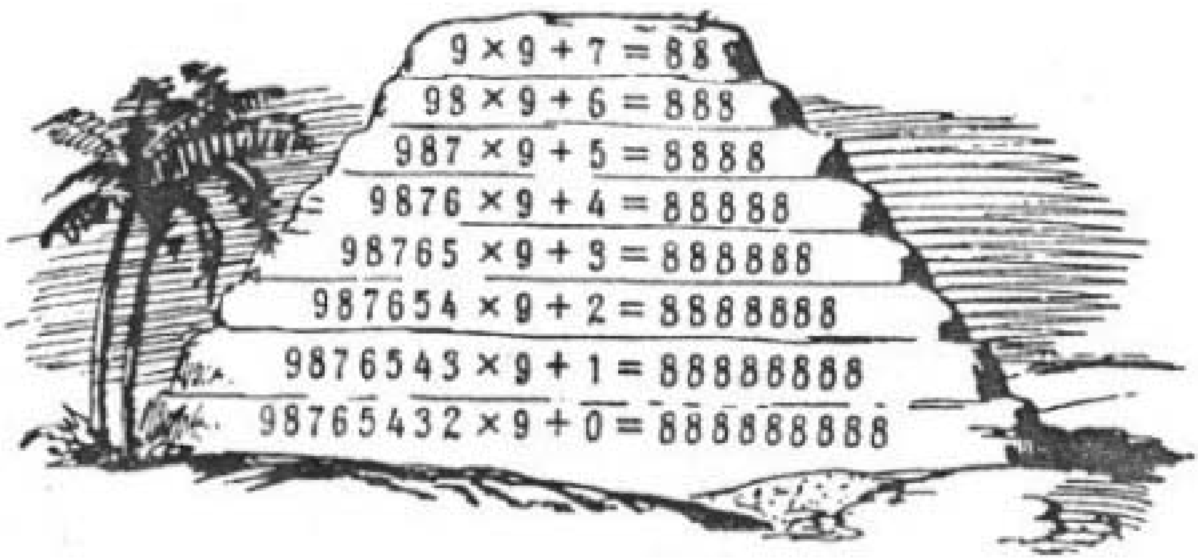


Figura 35. Tercera pirámide numérica

Esta pirámide es una consecuencia directa de las dos primeras. La relación se establece muy fácilmente. De la primera pirámide sabemos ya que, por ejemplo:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

Multiplicando ambos miembros por 8, tenemos:

$$(12\ 345 \times 8 \times 9) \times (6 \times 8) = 888888.$$

Pero de la segunda pirámide se sabe que

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

ó

$$12345 \times 8 = 98760.$$

Vale decir,

$$888888 = (12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8)$$
$$888888 = (98\ 760 \times 9) + (5 \times 9) + 3$$
$$888888 = (98\ 760 + 5) \times 9 + 3$$
$$888888 = 98\ 765 \times 9 + 3.$$

Se convence uno de que todas estas pirámides numéricas no son tan misteriosas como parece a primera vista. Pero algunos las consideran, sin embargo, no descifradas. Me tocó una vez, verlas impresas en un periódico alemán con una nota: "La causa de tan sorprendente singularidad, hasta el presente todavía nadie se la ha explicado. ..."
Volver

10. Nueve Cifras Iguales
El último renglón de la primera "pirámide" (fig. 33)

12 345 678 x 9 + 9 = 111.111.111

representa un ejemplo de un grupo completo de interesantes curiosidades aritmética en nuestro museo, reunidas en una tabla (ver fig. 36).

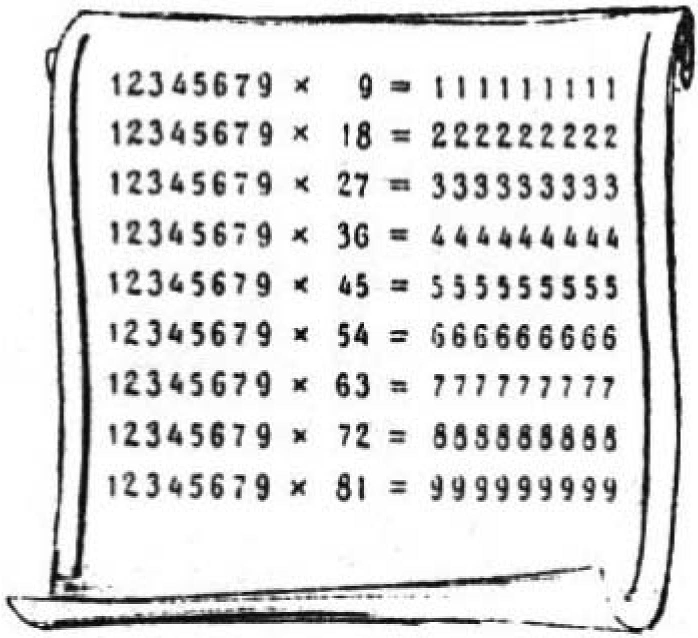


Figura 36.

¿Dónde está la tal singularidad en los resultados? Tomemos en cuenta que

12345 678 x 9 + 9 = (12345 678 + 1) x 9 = 12 345 679 x 9.

Por esta razón

12 345 679 x 9 = 111111111.

Y de aquí se sigue directamente que

12345 679 x 9 x 2 = 222222222
12345 679 x 9 x 3 = 333333333
12345 679 x 9 x 4 = 444444444

Volver

11. Escala Numérica

Es interesante determinar qué se obtiene si el número 111111111, con el cual ahora tenemos que ver, se multiplica por sí mismo. De antemano se puede sospechar que el resultado deberá ser singular, pero ¿cuál es precisamente?

Si se pasee capacidad para dibujar con claridad en la imaginación una serie de cifras, se llegará a encontrar el resultado que nos interesa, aun sin recurrir a los cálculos sobe el papel. En esencia, aquí la cuestión conduce solamente a una disposición adecuada de los productos parciales, porque al multiplicar se hace solamente de unidad por unidad. La adición de los productos parciales lleva a un sencillo cálculo de unidades[7]. He aquí el resultado de esta multiplicación, singular en su especie (en la realización de la cual no se llega a recurrir a la operación de multiplicación):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

Las cifras de este resultado disminuyen simétricamente, a partir del centro, en ambas direcciones.
Aquellos lectores que se hayan cansado de la revista de las maravillas numéricas, pueden abandonar aquí la "galería" y pasar a las siguientes secciones en donde se muestran trucos y están presentados los gigantes y enanos numéricos: deseo señalar que ellos pueden suspender la lectura de este capítulo y pasar al siguiente. Pero quien todavía desee ponerse al corriente de algunas notabilidades del mundo de los números, lo invito a visitar conmigo una pequeña serie de vitrinas cercanas.
Las maravillas numéricas sobre las cuales se hablará ahora reclaman del lector, el conocimiento de las llamadas fracciones periódicas infinitas. Aquellos lectores que no estén al corriente de ellas, les propongo transformar las siguientes fracciones ordinarias; en decimales, conforme al método bien conocido:

¼, 1/8, 1/3, 1/11

Es fácil persuadirse de que las dos primeras fracciones, al convertirse en decimales, dan un número finito de dos y tres cifras respectivamente.
Al convertir en decimales las fracciones restantes, se obtienen series infinitas de cifras que se repiten en un orden determinado:

1/3 = 0.3333333….
1/11 = 0.09090909090909…

[7] En el sistema binario de numeración, como ya fue explicado (ver Cap IV) todas las multiplicaciones son, precisamente de tal especie.

Tales fracciones se denominan periódicas, y el grupo de cifras que se repite en ellas se llama periodo.
Volver

12. Anillos Mágicos
¡Qué extraños anillos están expuestos en la siguiente vitrina de nuestra galería! Ante nosotros (fig. 37) hay tres anillos planos que giran uno con el otro.

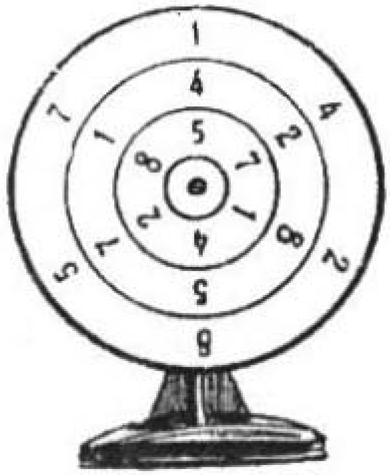


Figura 37. Anillos numéricos giratorios

En cada anillo están escritas seis cifras, en uno y el mismo orden, que forman el número: 142857. Los anillos poseen la propiedad admirable siguiente: en cualquier forma en que sean girados, en la adición de dos números escritos sobre ellos (contando a partir de cualquier cifra en la dirección de giro de las manecillas del reloj), obtenemos en todos los casos el mismo número de seis cifras (en general el resultado será de seis cifras) ¡solamente que algo adelantado! (ver fig. 37). En la posición que se representa en la fig. 37, obtenemos en la adición de los dos anillos exteriores.

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \underline{-428571} \\ 571428 \end{array}$$

es decir, otra vez la misma serie de cifras: 142857 solamente las cifras 5 y 7 se han transferido del final al principio.
En otras disposiciones de los anillos, relativas de uno con respecto a otro, tenemos los casos:

$$\begin{array}{r} 285714 \\ \underline{-571428} \\ 857142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 714285 \\ \underline{-142857} \\ 857142 \end{array}$$

Y así sucesivamente.
La excepción lo constituye el caso en que en el resultado se obtiene 999999:

$$\begin{array}{r} 714285 \\ \underline{-285714} \\ 999999 \end{array}$$

(La causa de otras desviaciones respecto de la regla indicada, el lector la podrá captar cuando termine de leer este apartado).
Además, esa misma serie de cifra, en idéntica secuencia la obtenemos también en la substracción de los números escritos en los anillos.
Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 428571 \\ \underline{-142857} \\ 285714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571\ 128 \\ \underline{-285\ 714} \\ 285\ 714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714285 \\ \underline{-142857} \\ 571428 \end{array}$$

La excepción la constituye el caso en que son puestas en coincidencia cifras idénticas; por supuesto, la diferencia es igual a cero.
Pero esto no es todo. Al multiplicar el número 142857 por 857 por 2, 3, 4, 5 ó por 6, se obtiene otra vez la misma serie de cifras, pero desplazada en una disposición circular, en una o en varias cifras:

142 857 x 2 = 285 714
142 857 x 3 = 428 571
142 857 x 4 = 571 428
142 857 x 5 = 714 285
142 857 x 6 = 857 142

¿Qué tanto están condicionadas estas enigmáticas particularidades de nuestro número?
Damos con el camino de la clave, si prolongamos un poco la última tabla y probamos multiplicar nuestro número por 7: como resultado se obtiene 999999. Vale decir, el número 142 857 no es otra cosa que la séptima parte de 999999 y, por consiguiente, la fracción 142857/999999 = 1/7
En efecto, si se transforma 1/7 en fracción decimal se obtiene:

1/7 = 0.142 857...

es decir

1/7 = 0.(142 857)

Nuestro enigmático número es el periodo de una fracción periódica infinita que se obtiene en la transformación de 1/7 en decimal. Es comprensible ahora, por qué en la duplicación, triplicación,

etc. de este número se produce solamente una nueva colocación de un grupo de cifras en otro lugar. En efecto, la multiplicación de este número por 2 lo hace igual a 2/7 y por lo tanto, equivalente a la transformación en fracción decimal, ya no de 1/7, sino de 2/7. Empezando a transformar la fracción 2/7 a decimal, se observa que la cifra 2 es uno de aquellos restos que ya obtuvimos en la transformación de 1/7: es evidente que deberá repetirse la precedente serie de cifras del cociente, pero empezando éste con otra cifra; en otras palabras, deberá obtenerse el mismo periodo, pero sólo que algunas de sus cifras iniciales se encuentran al final. Lo mismo se produce, también en la multiplicación por 3, por 4, 5, y 6, es decir. por todos los números que se obtienen en los restos. En la multiplicación por 7 deberemos obtener la unidad, o lo que es lo mismo 0.9999...
Los interesantes resultados de la adición y la substracción de los números, en los anillos hallan explicación en el hecho de que 142857 es el período de la fracción igual 1/7. En efecto, ¿qué hacemos, propiamente, girando el anillo en unas cuantas cifras?. Pasemos el grupo de cifras del principio al final, es decir, de conformidad con lo indicado, multipliquemos el número 142857 por 2, 3, 4, etc. Por lo tanto, todas las operaciones de adición y substracción de los números escritos en los anillos, llevan a la adición y substracción de las fracciones las 1/7, 2/7, 3/7 y así sucesivamente. Como, resultado debemos obtener, naturalmente fracciones de un séptimo, es decir, de nuevo nuestra serie de cifras 142857 en una u otra disposición circular. De aquí es necesario excluir solamente el caso en que se sumen, tales números de las fracciones de un séptimo, que en total den la unidad o más que 1.
Pero precisamente los últimos casos no se excluyen totalmente: ellos dan un resultado en verdad, no idéntico a los considerados pero fundamentalmente de acuerdo con ellos. Consideremos atentamente qué deberá obtenerse de la multiplicación de nuestro enigmático número con multiplicaciones mayores que 7, es decir por 8, 9, etc.
El multiplicar 142857 por 8, por ejemplo, lo podemos hacer así: multiplicar inicialmente por 7, y el producto (es decir, a 999999) agregar nuestro número:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999999 + 142\,857 =$$

$$1000\,000 - 1 - 142\,857 = 1000\,000 + (142\,857 - 1).$$

El resultado final 1.142.856 se distingue del multiplicando 142857 únicamente en que hay antepuesta una unidad, y la última cifra está disminuida por una unidad. De acuerdo a una regla similar se compone el producto de 142857 por todo número mayor que 7, como es fácil ver en los siguientes renglones:

142 857 x 8	= (142 857 x 7) + 142 857	= 1 142 856
142 857 x 9	= (142 857 x 7) + (142 857 x 2)	= 1 285 713
142 857 x 10	= (142 857 x 7) + (142 857 x 3)	= 1 428 570
142 857 x 16	= (142 857 x 7 x 2) + (142 857 x 2)	= 2 285 712
142 857 x 39	= (142 857 x 7 x 5) + (142 857 x 4)	= 5 571 423

La regla más general es la siguiente: en la multiplicación de 142857 por cualquier multiplicador, es necesario multiplicar solamente por el residuo de la división del multiplicador entre 7; se antepone a este producto el número que indica la cantidad de sietes que existen en el multiplicador ese mismo número se substrae al resultado[8]. Supóngase que deseamos multiplicar 142857 por 88. El multiplicador 88 en la división entre 7 da 12 en el cuociente, el resultado de las operaciones indicadas es:

$$12571428 - 12 = 12571416$$

De la multiplicación 142857 x 365 obtenemos (puesto que 365 en la división entre 7 da en el cuociente 52 y como resto 1):

$$52\ 142\ 857 - 52 = 52\ 142\ 805$$

Aprendiendo esta sencilla regla y recordando los resultados de la multiplicación de nuestro singular número por los multiplicadores del 2 al 6 (que es muy difícil, siendo necesario tan sólo, recordar con qué cifras comienzan), se puede sorprender a los no iniciados con la rapidez de la multiplicación de un número de seis cifras; y para no olvidar este número sorprendente, observemos que él procede de 1/7, o lo que es lo mismo de 2/14: tenemos las tres primeras cifras, de nuestro número: 142. Las tres restantes se obtienen por substracción de las tres primeras de 1999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ \underline{-142} \\ 857 \end{array}$$

Ya hemos tenido que ver con tales números precisamente cuando nos pusimos al corriente de las propiedades del número 999. Recordando lo indicado allí, nos, damos cuenta de que el número 142857 es, evidentemente, el resultado de la multiplicación de 143 por 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

Pero 143 = 13 x 11. Recordando lo observado anteriormente sobre el número 1001, igual a 7 x 11 x 13, estamos en condiciones, sin efectuar operaciones, de predecir qué deberá obtenerse de la multiplicación 142857 x 7:

$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = 999 \times 1001 = 999999$$

(todas estas transformaciones, claro está, se pueden efectuar mentalmente).
Volver

13. Una Familia Fenomenal
El número 142857 que acabamos de tratar es uno de los miembros de una familia completa de números que poseen las mismas propiedades. He aquí uno de tales números: 0 588 235 294 117 647 (el 0 antepuesto es necesario). Si se multiplica este número por 4, por ejemplo, obtenemos aquella misma serie de cifras, sólo que las cuatro primera cifran estarán colocados al final:

[8] Si el multiplicador es múltiplo de siete, el resultado es igual al número 999999, multiplicado por la cantidad de sietes en el multiplicador; tal multiplicación se efectúa mentalmente en forma sencilla. Por ejemplo, 142857 x 28 = 999999 x 4 = 4000000 - 4 = 3999996

0 588 235 294 117 647 x 4 = 2 352 941 176 470 588.

Disponiendo las cifras de este número sobre varios anillos móviles (fig. 38) como en el caso anterior, en la adición de los números de dos anillos obtendremos el mismo número, sólo que desplazado en el orden circular:

$$\begin{array}{r} 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ +\ \underline{2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588} \\ 2\ 941\ 176\ 470\ 588\ 235 \end{array}$$

Naturalmente, las tres series que se disponen en los anillos, son idénticas:

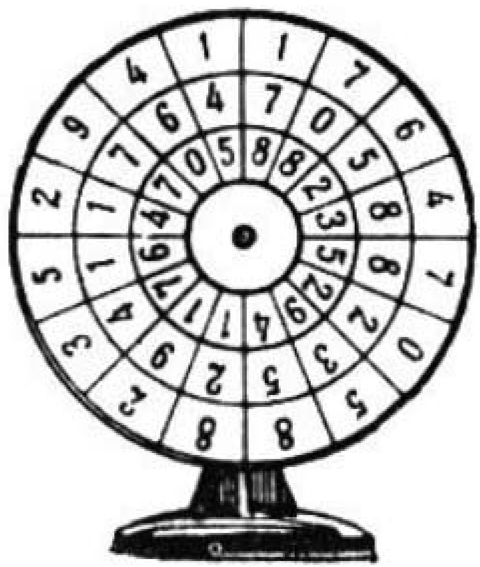


Figura 38.

De la substracción de los números de dos anillos, se obtiene otra vez el mismo círculo de cifras:

$$\begin{array}{r} 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ -\ \underline{0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647} \\ 1\ 764\ 705\ 882\ 352\ 941 \end{array}$$

Finalmente, este número, como también el considerado antes, consiste de dos mitades: las cifras de la segunda mitad son el complemento a 9 de las cifras de la primera mitad.

Tratemos de encontrar la clave de todas estas particularidades.

No es difícil darse cuenta en qué forma la serie numérica dada ha resultado ser un pariente cercano del número 142 857; el número del anillo anterior representa en sí, el período de una fracción infinita igual a 1/7; el nuevo número es, probablemente, el período de cualquier otra fracción: y en efecto, nuestra larga serie de cifras no es otra cosa, que el período de la fracción infinita que se obtiene de la transformación de la fracción simple 1/17 a fracción decimal:

1/17 = 0 (0 588 235 294 117 647).

He aquí por qué, en la multiplicación de este número por tus multiplicadores del 1 al 16, se obtiene aquella misma serie de cifras en la cual, solamente una o varias cifras iniciales están transferidas al final del número. Y por el contrario, al transferir una o varias cifras de la serie, del comienzo al final, aumentamos el número en varias veces (del 1 al 16 inclusive). Sumando dos anillos girados, uno con relación al otro, producimos la adición de dos números multiplicados, por ejemplo, por tres y por diez, y naturalmente, se obtiene el mismo anillo de cifras, debido a que la multiplicación por 3 + 10, es decir, por 13, motiva solamente una transferencia insignificante del grupo de cifras en la disposición circular.
Con una cierta posición de los anillos se obtienen, sin embargo, sumas que difieren un poco de la serie inicial. Si, por ejemplo, giramos un anillo en tal forma que se sume un número multiplicado por seis con uno multiplicado por 15, en la suma se deberá obtener un número multiplicador por 6 + 15 = 21. Y tal producto, como es fácil darse cuenta, es algo distinto del producto por un multiplicador menor que 17. En efecto, nuestro número, período de una fracción igual a 1/17, al multiplicarse por 17 deberá dar 16 veces (es decir, tantos como cifras existan en el período de nuestra fracción periódica), o el 1 con 17 ceros menos 1. Por esta razón, en la multiplicación por 21, es decir por 4 + 17, deberemos obtener nuestro número cuadruplicado antepuesto al cual se halla el 1, y del orden de las unidades se resta 1. El número cuadruplicado empieza con las cifras que se obtienen en la transformación de la fracción siempre 4/17 en fracción decimal:

4 : 17 = 0.23 . . .

El orden de las cifras restantes es conocido: 5291... Vale decir, nuestro número, multiplicado por 21 será:

2 352 941 176 470 587.

Lo mismo se obtiene de la adición de los círculos de cifras con una disposición correspondiente. En la substracción de los anillos numéricos de tal caso, no se puede.
De números semejantes a los dos con que hemos entablado conocimiento, existe una infinidad. Ellos constituyen una familia completa, puesto que están ligados por un origen común: a partir de la transformación de las fracciones simples en fracciones decimales infinitas. Pero no todo período de una fracción decimal tiene la interesante propiedad, anteriormente considerada, de dar en la multiplicación una transferencia circular de cifras. Sin entrar en sutilezas de la teoría, observamos que esto tiene lugar, solamente para aquellas fracciones en que el número de cifras de su periodo es menor en una unidad, al denominador de la fracción simple correspondiente.
Así, por ejemplo

1/7 da en el período 6 cifras
1/17 da en el período 16 cifras
1/19 da en el período 13 cifras
1/23 da en el período 22 cifras
1/29 da en el período 28 cifras

Si la condición indicada ahora (relativa al número de cifras del periodo) no se satisface, entonces el correspondiente período da un número que no pertenece a la interesante familia numérica que nos ocupa. Por ejemplo, 1/13 da una fracción decimal con seis (y no con 12) cifras en el período:

$$1 /13 = 0.076923$$

Multiplicando por 2, obtenemos un número completamente distinto.

$$2 /13 = 0.153846$$

¿Por qué? Porque entre los restos de la división 1 / 13 no estaba el número 2. De los diferentes restos existen tantos, como cifras hay en el periodo, es decir, 6; de los diversos multiplicadores para la fracción 1 / 13 tenemos 12, por consiguiente, no todos los multiplicadores estarán entre los restos, sino únicamente 6. Es fácil darse cuenta de que estos multiplicadores son los siguientes: 1, 3, 4, 9, 10, 12. La multiplicación por estos 6 números da una nueva colocación circular (076 923 x 3 = 230 769), no siendo así en la multiplicación por los números restantes. Esta es la razón por la cual de 1/13 se obtiene un número útil sólo en parte para el "anillo mágico".
Volver

14. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 91 + \dfrac{5823}{647} \\ 94 + \dfrac{1578}{263} \\ 96 + \dfrac{1428}{357} \end{cases}$$

Capítulo Sexto
Trucos sin Engaños

Contenido:

1. El Arte del calculista Hindú
Los trucos aritméticos son trucos sin engaño, honestos. Aquí no se pretende engañar, ni se trata de adormecer la atención del espectador. Para realizar un truco aritmético no son necesarios ni una milagrosa destreza de manos, ni una sorprendente agilidad De movimientos, ni cualesquiera otras capacidades artísticas que, algunas veces, requieren prácticas de varios años. Todo el secreto del truco aritmético consiste en el estudio minucioso y la utilización de las propiedades interesantes de los números, con un íntimo conocimiento de sus particularidades. Quien conoce la

clave de un truco, se lo representa sencillo y claro, mientras que, para quien desconoce la aritmética, una operación ordinaria le parece, inclusive, una especie de truco.
Antiguamente, cuando la capacidad de efectuar aun las operaciones aritméticas ordinarias con grandes números, conocidas ahora por todo escolar, constituía el arte de unos cuantos, para los demás se mostraba como una capacidad excepcional. En la antigua narración hindú "Nal y Damaianti"[1] encontramos un eco de tal punto de vista sobre las operaciones aritméticas.

Nal, que sabía manejar perfectamente caballos, acompañado en una ocasión del calculista virtuosa Ritupern pasó delante del frondoso árbol de Vibitaka. De repente el contador vio a los lejos el árbol Vibitaka de espeso follaje. "Escucha, dijo, en la tierra nadie tiene todos los conocimientos: en el arte de guiar caballos tú eres el primero, en cambio, yo lo soy en el arte de calcular..."
Y en demostración de su arte el calculista instantáneamente determinó el número de hojas en el frondoso Vibitaka. Al pedirle Nal, sorprendido, que le confiriera el secreto de mi arte, Ritupern accedió.
"...lo que había hecho Ritupern, tal y como le dijo a Nal, consistía en contar las hojas ramas, de Vibitaka, y multiplicar los números..."

El secreto arte consistía, como puede suponerse, en que el cálculo directo de las hojas, que requiere cierto tiempo y paciencia, se substituía por el cálculo del número de hojas de una sola rama y, por la multiplicación de este número por el número de ramas de cada ramificación, y después por el número de ramificaciones del árbol (suponiendo que todas las ramificaciones se constituían idénticamente por ramas, y las ramas por hojas).
La clave de la generalidad de los trucos aritméticos es tan sencilla como el secreto del "truco" de Ritupern. Basta sólo saber en qué consiste el secreto del truco, e inmediatamente se aprende el arte de realizarlo, a la manera que aprendió el legendario Nal por el sorprendente arte del cálculo rápido. En la base de todo truco aritmético se halla una determinada particularidad interesante de los números, por lo que el conocimiento de trucos semejantes resulta tanto instructivo, como recreativo.
Volver

2. Sin Abrir los Monederos
El prestidigitador esparce sobre la mesa un montón de monedas por la suma de 3 rublos, y presenta el problema: distribuir el dinero en 9 monederos, de tal modo que se pueda pagar cualquier suma hasta 3 rublos, sin abrir los monederos.
Esto puede parecer completamente irrealizable. Pero no se piense que el prestidigitador preparó una trampa a partir del juego de palabras o de su inesperada, interpretación.

[1] Traducción libre al ruso de Zhúkovsky. Este episodio, sobre el que se habla adelante, se encuentra en el capítulo VIII de dicho relato.

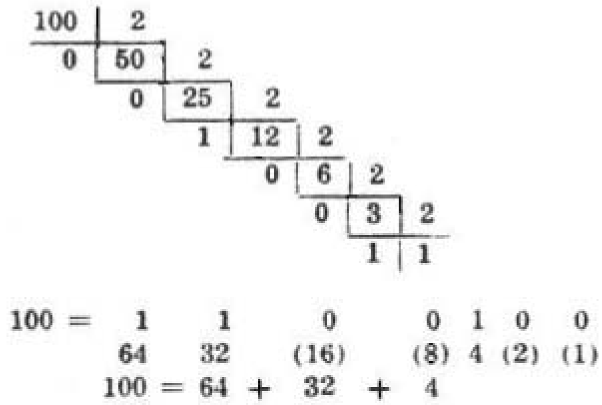


Figura 39.

Obsérvese: el propio prestidigitador se pone a trabajar. Distribuyendo las monedas en los monederos, y sujetando a cada uno, una etiqueta con la designación de la cantidad colocada (ver fig. 39), él propone que se determine cualquier suma que no exceda los 3 rublos.
Se nombra la primera que viene a la mente: 2 rudos 69 kopeks.
Sin tardanza, el prestidigitador elige y entrega 4 monederos. Al abrirlos se halla:

en uno	64 k
en otro	45 k
en un tercero	1r.28 k
en un cuarto	32 k
Total	2r.69 k

Uno está predispuesto a sospechar del prestidigitador en cuanto al hábil cambio, de monederos, y reclama la repetición del truco. Para esto, se ponen todos los monederos bajo nuestra custodia, y cuando se nombra una nueva suma, por ejemplo, 1 rublo, ó 7 kopeks, ó 2 r. 93 k., aquel indicara rápidamente cuáles de los monederos, que se tienen bajo el brazo se deberán tomar, para que se forme la suma enunciada. A saber:

- Para un rublo, 6 monederos (32 kopeks, 1k., 45k., 16k., 2 k., 4 k.,)
- Para 7 kopeks, 3 monederos (1 k., 2 k., 4 k.)
- Para 2 rublos 93 kopeks, 6 monederos (1r. 28 k., 32 k., 8 k., 45 k., 64 k., 16 k.)

Conforme al deseo del prestidigitador, los monederos resultan siempre adecuados para constituir cualquier suma nombrada (hasta 3 rublos). ¿Cómo se explica esto?
El secreto radica en distribuir el dinero en la siguiente forma: 1 k., 2 k., 4 k., 8 k., 16 k., 32 k., 64 k., 1 r. 28 k. el dinero restante en el último monedero, es decir, 300,

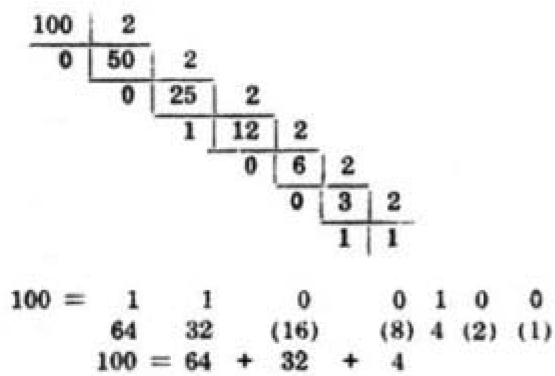
$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = 300 - 255 = 45 \text{ k.}$$

Con los primeros 8 monederos, como es fácil convencerse, se puede formar cualquier suma desde 1 hasta 255 kopeks; si se da una suma mayor, entonces se entrega el último monedero con 45 kopeks, y la diferencia se forma de los primeros ocho monederos.

Se puede verificar la utilidad de tal agrupamiento de números haciendo bastantes ensayos, y convencerse de que a partir de ellos se puede efectivamente constituir todo número que no exceda de 300. Pero quizá interese también por qué razón la serie de números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. posee tan extraordinaria propiedad. Es fácil de comprender esto, si se recuerda que los números de nuestra serie representan potencias del número 2:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^3 \text{ etc}$$ [2]

y por consiguiente se pueden considerar como órdenes del sistema binario de numeración; y puesto que todo número se puede escribir en el sistema binario, entonces es posible para todo número el que se forme en base a una suma de potencias de 2, es decir, de números de la serie 1, 2, 4, 8, 16, etc. Y cuando se toman monedas para formar, en base a ellos, el contenido del número dado, en esencia, se expresa dicho número en el sistema binario de numeración. Por ejemplo, el número 100 se forma fácilmente, si se le representa en el sistema binario:



Cuadro 26

Recordemos que, en el sistema binario, el primer lugar desde la derecha lo ocupan las unidades, el segundo los doses, el tercero los cuatros, y así sucesivamente.
Volver

3. Adivinar el Numero de Cerillos

La propiedad del sistema binario se puede utilizar también para el siguiente truco: Propóngase a cualquiera, colocar sobre una mesa una caja de cerillos, incompleta y que, en línea con ella y a su izquierda, se coloquen 7 papelillos de forma rectangular. Después, ausentándonos, pidamos que se haga lo siguiente: dejando la mitad de cerillos en la caja, que se traslade la otra mitad al papelillo más próximo; si el número de cerillos es impar, el cerillo excedente se coloca al lado del papelillo. Es necesario dividir en dos partes iguales los cerillos que se encuentran sobre el papelillo (no tocando al que se halla junto): una mitad se coloca en la caja y la otra se pone en el siguiente papelillo; en el caso de un número impar, el cerillo que queda se pone, junto al segundo papelillo. Después se procede en igual forma, restituyendo cada vez, de vuelta a la caja, la mitad de cerillos y la otra mitad poniéndola sobre el siguiente papelillo, sin olvidar colocar un cerillo a un lado cuando se presente un número impar.

[2] Aquellos que estudian álgebra saben que el número 1 se pueda considerar como el 2 elevado al exponente cero.

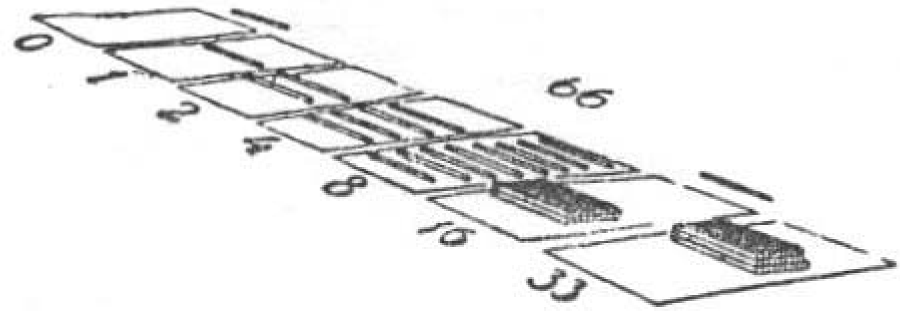


Figura 40. Adivinación del número de cerillos. Acciones sucesivas del que propone

Al final, todos los cerillos, salvo los que se hallan junto a los papelillos, se restituyen a la caja (ver figs. 40 y 41).

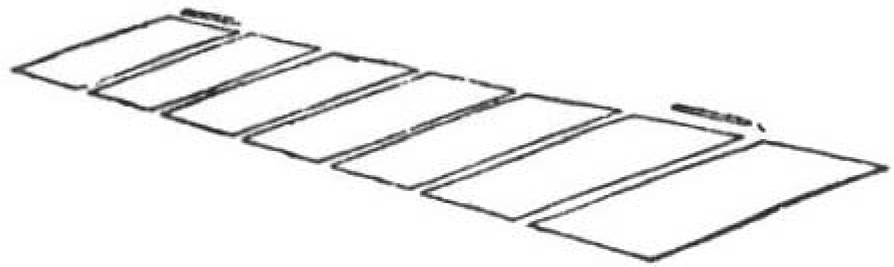


Figura 41. Continuación del truco: aspecto final de los papelillos

Cuando se haya hecho esto, uno se presenta en la habitación y, echando una mirada sobre los papelillos vacíos, nombra el número total de cerillos.
¿Cómo se puede, conforme a los papelillos vacíos y a los singulares cerillos fortuitos, adivinar el número inicial de cerillos en la caja?
Estos papelillos "vacío", en el caso dado, son muy elocuentes: conforme a ellos y a los cerillos singulares se puede literalmente leer el número buscado, porque está escrito, sobre la mesa, en el sistema binario de numeración. Aclaremos esto con un ejemplo.

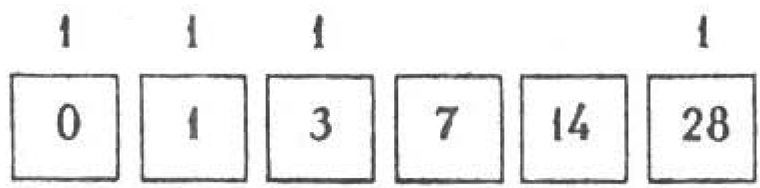


Figura 42. Otro caso de adivinación. Principio del truco

Supóngase que el número de cerillos en la caja es 66. Las operaciones sucesivas con ellos y el aspecto final de los papelillos están mostrados en los esquemas de las Figs. 40 y 41.

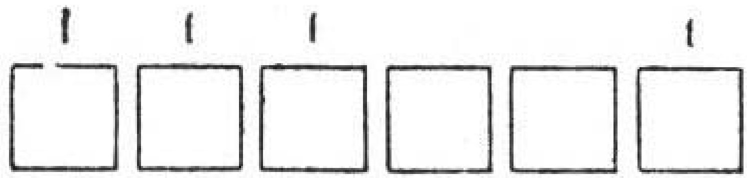


Figura 43. Final del truco

No es difícil darse cuenta de que las operaciones efectuadas con los cerillos, en esencia, son las mismas que hubiésemos realizado de haber querido determinar el número de cerillos de la caja, en el sistema binario de numeración; el esquema final representa directamente este número en el sistema binario si los papelillos vacíos se adoptan como ceros, y los papeles con un cerillo al lado, como unidades. Leyendo el esquema de izquierda a derecha, obtenemos:

1	0	0	0	0	1	0
64	32	16	8	4	2	1

en el sistema decimal:

$$64 + 2 = 66$$

Si hubiera 57 cerillos, los esquemas serían los correspondientes a las figuras 42 y 43.
El número buscado, escrito en el sistema binario es:

1	1	1	0	0	1
32	16	8	4	2	1

Y en el sistema decimal:

$$32 + 16 + 8 + 1 = 57.$$

Volver

4. "Lectura de Pensamientos" Conforme a Cerillos

La tercera variante del mismo truco representa, en sí, un método singular de adivinación de un número pensado, conforme a cerillos. El que piense el número, deberá dividirlo mentalmente por la mitad; esta mitad obtenida otra vez por la mitad, y así sucesivamente (de un número impar se quita una unidad), y en cada división debe colocar ante sí un cerillo, conforme a lo largo de la mesa si divide un número par, y transversalmente si llega a dividir un número impar. Al final de la operación se obtendrá un dibujo como el mostrado en la Fig. 44.

Figura 44. Adivinación del número pensado conforme a cerillos: lo que hace el que propone

Se fija la mirada en esta figura, y se nombra correctamente el número pensado: 137
¿Cómo se llega a saber?
El método resulta claro por sí mismo, si en el ejemplo elegido (137) sucesivamente se indica junto a cada cerillo, el número en cuya división aquel hubiese sido determinado (Fig. 45).

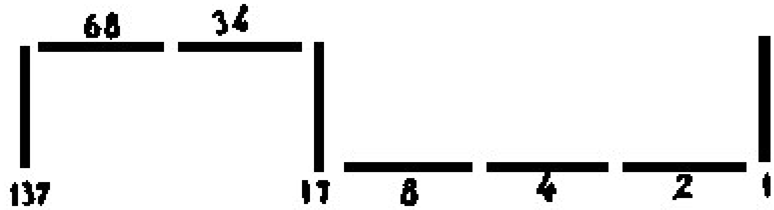


Figura 45. El secreto del truco: lo que hace el adivinador

Ahora, puesto que el último cerillo en todos los casos denota el número 1, hay que partir de él para, a través de las divisiones precedentes, llegar hasta el número inicialmente pensado. Por ejemplo, de acuerdo con la figura 46 se puede calcular que el número pensado era el 664.

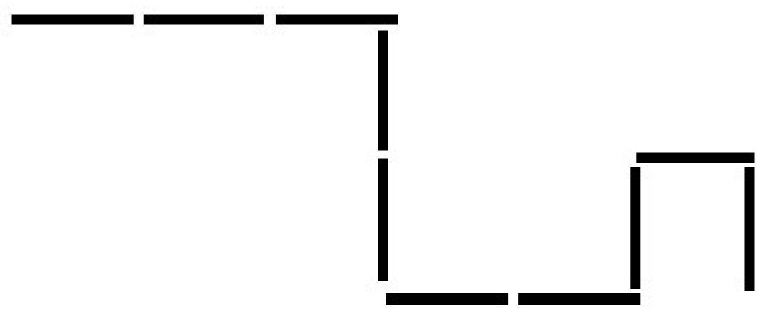


Figura 46. ¿Qué número está representado aquí?

En efecto, realizando las duplicaciones sucesivamente (empezando desde el final) y no olvidando agregar, donde sea necesario, la unidad, obtenemos el número pensado (ver Fig. 47).

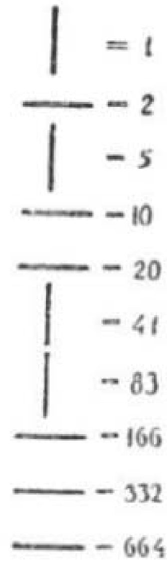


Figura 47. Respuesta al problema de la figura 46

De esta manera haciendo uso de los cerillos, se sigue el curso de los pensamientos ajenos, y se restablece toda la cadena de cálculos.

EL mismo resultado se puede obtener en otra forma considerando que, el cerillo que se halla en posición horizontal, deberá corresponder en el sistema binario al cero (la división entre 2 no da residuo), y el que se halla en posición vertical, a la unidad.

Así, en el primer ejemplo (figs. 44 y 45) tenemos el número (leyendo el dibujo de derecha a izquierda)

1	0	0	0	1	0	0	1
128	64	32	16	8	4	2	1

o, en el sistema decimal:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

Y en el segundo ejemplo (fig. 46) el número pensado se representa en el sistema binario en la forma siguiente:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

o en el sistema decimal:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

Trátese de conocer qué número se pensó si se ha obtenido el dibujo de la Fig. 48.

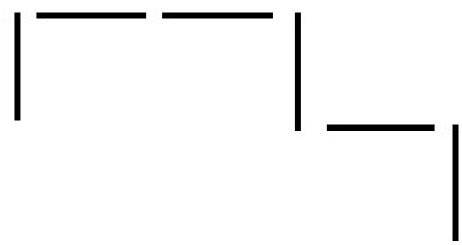


Figura 48. ¿Qué número está representado en esta figura?

Esto es fácil. Al número "100101" en el sistema binario, le corresponde en el decimal:

32 + 4 + 1 = 37

Es necesario observar que la unidad obtenida en la última división, deberá ser indicada, también, por un cerillo en posición vertical.
Volver

5. Sistema de Pesas Ideal
Quizá en ciertos lectores ya ha surgido una pregunta:
¿por qué, para la realización de las experiencias antes descritas, empleamos precisamente el sistema binario? Puesto que todo número se puede representar en cualquier sistema, entre otros también en el decimal, ¿qué explica aquí la predilección por el binario?
Esto se explica debido a que en este sistema, además del cero, se utiliza sólo una cifra más: la unidad, y por consiguiente, el número se constituye de diferentes potencias de 2, tomando sólo una cada vez. Si en el truco con los monederos distribuyéramos el dinero, por ejemplo, conforme al sistema quinario, entonces podría formarse cualquier suma sin abrir los monederos, pero solamente en el caso en que cada uno de los monederos que tenemos se repitiese no menos de 4 veces (en el sistema quinario se emplean, además del cero, 4 cifras).
Por otra parte, ocurren casos en los que, para semejantes menesteres, es más conveniente usar no el binario, sino el ternario, un poco modificado. Aquí viene al caso el antiguo famoso "problema sobre las pesas" que puede servir de tema, también, para un truco aritmético.
Supóngase que uno se ha propuesto inventar un juego de 4 pesas, por medio de las cuales sea posible pesar cualquier número entero de kilogramos, desde 1 hasta 40. EL sistema binario determina el juego:

1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg.

con el que se pueden pesar todas las cargas comprendidas entre 1 y 31 kg Pero esto, evidentemente, no satisface las condiciones requeridas, ni por lo que se refiere al número, ni por lo referente a la carga límite (31 kg en lugar de 40 kg). Por otro lado, no se ha empleado aquí la posibilidad de colocar pesas, no solamente sobre un platillo de pesos, sino sobre el otro también; es decir, además de que se pasa por la suma de pesas, también se pasa por su diferencia. Lo último da combinaciones mucho más diversas, por lo que uno se pierde completamente en búsquedas, no pudiendo poner aquellas en cualquier sistema.
Si no se tiene la suerte de caer en el camino correcto, estará uno preparado dudosamente, en general, para la resolución del problema con un número pequeño de pesas, como es cuatro.

Figura 49. Con la ayuda de estas cuatro pesas se puede pesar cualquier carga comprendida entre 1 y 40 kilogramos.

Un iniciado sale de esta dificultad, con una sencillez pasmosa, proponiendo las 4 siguientes pesas (Fig. 49)

1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg

Cualquier número entero de kilogramos, hasta 40 kg, se puede pesar con tales pesas; colocándolas en uno o en ambos platillos de pesos (ver la siguiente tabla).
No proporcionamos ejemplos, porque es fácil que cada uno por sí mismo, se dé cuenta de la completa utilidad de tal, juego de pesas, para nuestro objetivo. Analicemos con detenimiento el por qué precisamente la serie indicada posee esta propiedad. Probablemente[3], los lectores ya observaron que estos números son la serie de potencia con base 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$$

Así pues, habremos de recurrir al sistema ternario de numeración. Las pesas son cifras de este sistema ternario. ¿Pero cómo puede aprovecharse dicho sistema, cuando un peso deseado se obtiene en la forma de una diferencia de dos pesas?; ¿y cómo evitar la necesidad de retornar al duplicamiento de pesas (en el sistema ternario, además del cero, se emplean dos cifras: 1 y 2)? Lo último se logra por la introducción de cifras "negativas". El hecho conduce, sin más, a que en lugar de la cifra 2 se emplee 3 - 1, es decir, la unidad del orden superior, a la cual se le resta una unidad del orden inferior. Por ejemplo, el número 2 en nuestro sistema ternario modificado no se denota por el 2, sino por el $1\bar{1}$, en donde el signo menos, arriba de la cifra de las unidades, significa que esta unidad no se suma, sino se resta. En la misma forma, el número 5 se representa no por 12, sino por $1\bar{1}\bar{1}$ (es decir, 9, 3, 1 = 5).

[3] La unidad se puede considerar como el 3 elevado al exponente cero (en general como el resultado de elevar cualquier número al exponente cero).

Ahora está claro que, si cualquier número se puede representar en el sistema ternario por medio del cero (es decir, por el signo de carencia de número) y de una sola cifra solamente, precisamente con una unidad sumada o restada, entonces de los números 1, 3, 9, 27 se puede, sumándolos o restándolos, formar todos los números desde el 1 hasta el 40. Ciertamente, escribimos todos estos números empleando pesas en lugar de cifras. El caso de la adición corresponde, en el acto de pesar, al caso en que las pesas se colocan sobre un platillo; y el caso de la substracción, cuando parte de las pesas se ponen sobre un platillo con mercancía, y por consiguiente, el peso de estas se resta del peso de las demás pesas. El cero corresponde a la ausencia de pesas.

Como se sabe, este sistema no se emplea en la práctica. Por doquier en el mundo, donde esta adoptado el sistema métrico de medidas se usa un juego de 1, 2, 2, 5 unidades, y no de 1, 3, 9, 27, aunque con el primero se pueden pesar cargas solamente hasta 10 unidades, y en el segundo hasta 40. El juego 1, 3, 9, 27 no se usaba tampoco cuando el sistema métrico todavía no se adoptaba. ¿Cuál es la causa de la renuncia en la práctica, a este sistema de pesas que parecía el más perfecto?

La razón es que el sistema de pesas ideal es conveniente sólo en el papel, pues su empleo en la práctica es dificultoso. Si se pesara solamente un número dado de unidades de peso, por ejemplo, 400 gr. de mantequilla o, 2500 gr. de azúcar, el sistema de pesas consistente en 100, 300, 900, 2700 podría ser empleado en la práctica (aunque también allí se tendría que buscar largamente, cada vez, la combinación decisiva). Pero cuando se tenga que determinar cuánto pesa una mercancía dada, entonces semejante sistema de pesas se muestra muy inconveniente: aquí, frecuentemente, con motivo de la adición de una unidad a las pesas suministradas, se produce una substitución total de la combinación anterior, por otra nueva. Bajo tales condiciones, el acto de pesar se convierte en una cuestión extremadamente lenta y además muy fatigosa. No todos se dan cuenta rápidamente de que, por ejemplo, el peso de 19 kg, se obtiene si en un platillo se colocan las pesas de 27 kg y 1 kg, y sobre el otro platillo, 9 Kg; el peso de 20 Kg, si sobre un platillo se ponen las pesas de 27 kg y 3 kg, y sobre el otro, 9 kg y 1 kg En cada acción de pesar se puede caer en el problema de resolver rompecabezas semejantes. El sistema de pesas 1, 2, 2, 5, no conduce a tales dificultades.

Volver

6. Predecir la Suma de Números no Escritos

Uno de los "números" más sorprendentes, entre los realizados por el prodigioso calculista soviético R. S. Arrago, es la adición con la rapidez del rayo, con sólo una ojeada de una columna completa de números de varias cifras.

¿Pero qué decir sobre un hombre que puede escribir la suma, aún antes de que le sean nombrados todos los sumandos?

Esto naturalmente, es un truco, y se efectúa en la siguiente forma:

El adivinador propone escribir cualquier número de varias cifras; lanzando una mirada sobre este primer sumando, el adivinador escribe en un pedazo de papel la suma de toda la futura columna de tres sumandos, y la transmite a alguien, en depósito. Después de esto, pide al mismo, o a otro de los asistentes, escribir un nuevo sumando cualquiera. Y él mismo, enseguida, escribe rápidamente el tercer sumando. Se suman los tres números escritos y se obtiene, justamente, el resultado que fue escrito con anterioridad por el adivinador, en el papel que se ha guardado en depósito.

Si por ejemplo, se escribió en primer lugar 83267, entonces el adivinador escribe la suma futura: 183266. Después se escribe, supongamos, 27935 y el adivinador escrita el tercer sumando 72064:

I	Alguien	83.267
III	Alguien	+ 27.935
IV	EL adivinador	72.064
II	Suma	183.266

Se obtiene exactamente la suma predicha, aún cuando el adivinador no podía saber cuál seria el segundo sumando. El adivinador puede predecir también, una suma de 5 ó 7 sumandos, pero entonces él mismo escribe dos o tres de ellos. No se pueden tener sospechas sobre algún cambio del papel con el resultado, puesto que hasta el último momento se conserva en el bolsillo del depositario. Evidentemente, el adivinador emplea una cierta propiedad de los números, desconocida por uno. ¿Cuál es?
EL adivinador hace uso de la propiedad de que, de la adición de 5 nueves (99.999) a un número de cinco cifras, este número se incrementa en 100.000 - 1, es decir, antepuesta, a él aparece una unidad, y la última cifra se ve disminuida por otra unidad. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 83.267 \\ +\ 99.999 \\ \hline 183.266 \end{array}$$

Esta suma, es decir, la suma del primer número escrito por nosotros y de 99 999, el adivinador precisamente la escribe sobre el pedazo de papel que depositará como el resaltado futuro de la adición; y para que dicho resultado se justifique, él, viendo nuestro segundo sumando., elige su tercer sumando en tal forma que, conjuntamente con el segundo, constituya el 99 999: es decir, resta de 9 cada cifra del segundo sumando. Estas operaciones, fácilmente las puede uno observar en el ejemplo anterior y también en los siguientes:

I	Alguien	379.264
III	Alguien	4.873
IV	El adivinador	995.126
II	Suma	1.379.263

I	Alguien	9.035
III	Alguien	5.669
IV	El adivinador	4.330
II	Suma	19.034

Resulta difícil adivinar una suma si el segundo sumando contiene mayor cantidad de cifras que el primero, ya que el adivinador no podrá escribir un tercer sumando que, disminuyendo al segundo, sea capaz de reducir la suma para que dé el número predicho. Esto sólo sería posible recurriendo a la substracción, lo cual ya sale de los planes del truco. A causa de esto, un adivinador experimentado deberá limitar previamente, la libertad de elección para el segundo sumando, a esta condición.
El truco resulta más imponente, cuando en la invención de los sumandos participan varias personas. Después del primer sumando, por ejemplo 437.692, el adivinador ya predice la suma de

los cinco números, y escribirá 2.437.690 (aquí se agregará dos veces 999.999, es decir, 200 000 - 2). Todo lo demás es claro debido al siguiente esquema:

I	Uno escribió	437.692
III	Otro escribió	822.541
V	Un tercero escribió	263.009
IV	EL adivinador escribió	177.458
VI	EL adivinador escribió	736.990
II	Suma	2.437.690

Tomemos otro ejemplo:

I	Uno escribió	7.400
III	Otro escribió	4.732
V	Un tercero escribió	9.000
IV	EL adivinador escribió	5.267
VI	EL adivinador escribió	999
II	Suma	27.938

A los lectores les resultará interesante ahora, conocer cómo está descrito el mismo truco por el escritor soviético Shíshkov, en su novela "Los extraños":
"Iván Petrovich arrancó una hojita de su cuaderno de notas y dándosela a un chico, le preguntó.
- ¿Tienes un lápiz? Escribe un número cualquiera.
EL niño escribió. Iván Petrovich vio el número, y escribió en otro papel un número más.
- Ahora, escribe otro debajo de él. ¿Ya lo escribiste? Ahora yo escribiré un tercer número. Ahora suma los tres números.
En dos minutos quedó lista la respuesta verificada. El ingeniero Voshkin (sobrenombre del niño) mostró su cálculo:

$$\begin{array}{r} 46.853 \\ +\ 21.398 \\ \underline{78.601} \\ 146.852 \end{array}$$

- Ciento cuarenta y seis mil ochocientos cincuenta y dos, Iván Petrovich.

- Sumaste en mucho tiempo. Aquí tengo la respuesta. Yo también la sabía, pero desde que tú escribiste el primer numero. Helo aquí. Toma mi papel.
El niño vio incrédulo el papel en que Iván Petrovich había escrito el resultado, y era exactamente el 146.852".
En la novela, el truco no va acompañado de la solución, pero para uno, es completamente comprensible su sencilla hace aritmética.
Volver

7. Sorpresa Aparente.

En el año 1916, durante el apogeo de la guerra imperialista, algunos periódicos de la neutral Suiza se entretenían con una "adivinación" aritmética sobre el destino futuro de los emperadores de Alemania y Austria. "Los profetas" sumaban las siguientes columnas de números:

	Para Guillermo II	Para Francisco José
año de nacimiento	1859	1830
año de llegada al trono	1888	1888
años de reinado	28	68
edad	57	86
Suma	3832	3832

En la coincidencia de las sumas, "los profetas" vieron un sombrío augurio para los personajes coronados, y puesto que cada total representaba en sí, el doble del año 1916, a ambos emperadores se les predijo la ruina, precisamente en dicho año.
Mientras tanto, desde el punto de vista matemático la coincidencia de resultados no es sorprendente. Basta modificar un poco el orden de los sumandos, y resulta comprensible el por qué ellos dan en el total, el doble del año 1916. En efecto, repartamos los sumandos en la siguiente forma:

- Año de nacimiento
- edad
- año en que llegó al trono
- años de reinado.

¿Qué deberá obtenerse, si al año de nacimiento se le agrega la edad? Sin duda, la fecha del año en que se produce el cálculo. En la misma forma, si al año de llegada al trono se le añade el número de años de reinado, se obtiene de nuevo el año en que se realizan los cálculos. Es claro que el total de la adición de nuestros cuatro sumandos no puede ser otro, que el doble del año de realización del cálculo. Evidentemente, el futuro de los emperadores no depende en absoluto de semejante aritmética.

Puesto que de lo indicado arriba no todos se dan cuenta, se puede aprovechar esto para un truco aritmético recreativo. Propóngase a cualquiera escribir, a escondidas de uno, cuatro números:

- Año de nacimiento
- Año de ingrese a la escuela (a la fábrica, etc.)
- Edad
- Años estudiando en la escuela (trabajando en 1a fábrica, etc.)

Uno puede ponerse a adivinar la suma de estos números, aunque ninguno de ellos nos sea conocido. Para esto se duplica el año de realización del truco y se anuncia el total. Si, por ejemplo, el truco se realiza en el año 1961, entonces la suma será 3922. Para tener la posibilidad de realizar con éxito este truco varias veces, sin revelar el secreto, uno obliga a los oyentes a efectuar sobre la suma cualquier operación aritmética, encubriendo con esto, el método.
Volver

8. División Instantánea

De la numerosa variedad de trucos de este género, describamos uno basado en una propiedad, ya conocida por nosotros, del multiplicador que consiste de una serie de nueves: cuando se multiplica por él un número con varias cifras, se obtiene un resultado que consta de dos partes: la primera es, el número multiplicado disminuido en una unidad; la segunda es, el resultado de la substracción de la primera mitad respecto del multiplicador. Por ejemplo:

$$247 \times 999 = 246.753$$
$$1.372 \times 9999 = 13.718.628$$

La causa de esto se ve fácilmente del siguiente renglón:

$$247 \text{ x } 999 = 247 \text{ x } (1000 - 1) = 247.000 - 247 = 246.999 - 246.$$

Aprovechando esto, se propone a un grupo de camarada efectuar la división de números de varias cifras: a uno 68 933 106 : 6894, a otro 8 765 112 348: 9999, a un tercero 543 456:544, a un cuarto 12 948 705 : 1295, etc., y uno se pone a tomar la delantera a todo: ellos, realizando los mismos problemas. Y antes de que ellos se empiecen a ocupar del asunto, uno entrega ya a cada uno un papelillo con el resultado correcto obtenido de la división: al primero 9999, al segundo 87 652, al tercero 999, al cuarto 9999. Uno puede por si mismo, al imaginar una serie de otros procedimientos, conforme al ejemplo indicado, sorprender a tus no iniciados con la realización simultánea de 1a división: para esto se aprovechan ciertas propiedades de aquellos números que se hallan en la "Galería de las maravillas numéricas" (ver capítulo V).

Volver

9. La Cifra Favorita

Propóngase a cualquiera, que le comunique su cifra favorita. Supongamos que le han nombrado a uno la cifra 6.

-¡Es sorprendente!, exclama uno, Esta es justamente, una de las cifras significativas más notables.

- ¿Por qué dicha cifra es notable?, se pregunta el interesado interlocutor.

- Lo es, por lo que verá Ud. enseguida: multiplique la cifra dada, por algún número, por ejemplo 9; y el número obtenido (54) escríbalo como multiplicador del número 12 345 679:

$$12\ 345\ 679 \times 54$$

¿Qué se obtuvo en el producto?

Nuestro interlocutor efectúa la multiplicación, y con sorpresa obtiene el resultado, que está constituido exclusivamente por su cifra favorita:

$$666\ 666\ 666.$$

Vea que fina percepción matemática tiene Ud., concluye uno, ¡Ud. supo elegir de todas las cifras, justamente la que posee una propiedad tan notable!

Sin embargo, ¿cuál es la cuestión aquí?

Exactamente la misma refinada inclinación, se manifestaría en nuestro interlocutor, si hubiera elegido alguna otra de las nueve cifras significativas, porque cada una de ellas posee esa propiedad:

$$12\ 345\ 679 \times 4 \times 9 = 444\ 444\ 444$$
$$12\ 345\ 679 \times 7 \times 9 = 777\ 777\ 777$$
$$12\ 345\ 679 \times 9 \times 9 = 999\ 999\ 999$$

Por qué razón esto es así, uno lo comprende, si se recuerda que se habló sobre el número 12 345 679 en la "Galería de maravillas numéricas".
Volver

10. Adivinar la Fecha de Nacimiento
Los trucos que se relacionan con esta categoría, pueden ser modificados en diversas formas. Yo describo una de las especies de este truco, demasiado complicado, pero que precisamente por eso motiva un gran efecto.
Supongamos que Ud. nació el 18 de mayo y que ahora tiene 23 años. Yo, naturalmente, no conozco ni la fecha de vuestro nacimiento, ni vuestra edad. Sin embargo yo me pongo a adivinar eso, forzando a Ud. a realizar una cierta serie de cálculos,
A saber: Yo le pido a Ud. que multiplique el número de orden del mes (mayo, 5º mes), por 100; que agregue al producto el día del mes (18); que duplique la suma, al resultado le añada 8, el número obtenido lo multiplique por 5, al producto le agregue 4, multiplique el resultado por 10, le sume 4, y al número obtenido le agregue vuestra edad (23).
Cuando Ud. haya realizado todo esto, me comunica el resultado final de los cálculos. Yo resto de él 444, y la diferencia la distribuyo en grupos de derecha a izquierda, conforme a 2 cifras en cada uno: Obtengo simultáneamente tanto el día y el mes de vuestro nacimiento, como vuestra edad.
En efecto, realicemos sucesivamente todos los cálculos indicados:

$$5 \times 100 = 500$$
$$500 + 18 = 518$$
$$518 \times 2 = 1\ 036$$
$$1\ 036 + 8 = 1\ 044$$
$$1\ 044 \times 5 = 5\ 220$$
$$5\ 220 + 4 = 5\ 224$$
$$5\ 224 \times 10 = 52\ 240$$
$$52\ 240 + 4 = 52\ 244$$
$$52\ 244 + 23 = 52\ 267$$

Efectuando la resta 52 267 - 444, obtenemos el número 51 823.

Ahora, dividamos este número en grupos de dos cifras, de derecha a izquierda:

5, 18, 23,

es decir, 5º mes (mayo); número del día, 18; edad 23 años.

¿Por qué obtuvimos este resultado?
Nuestro secreto es fácil de entender tras considerar la siguiente igualdad

$$\{[(100m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = 10000m + 100t + n.$$

Aquí la letra m denota el número de orden del mes, t el día del mes, n la edad. El primer miembro de la igualdad expresa todas las operaciones realizadas sucesivamente por Uds., y el segundo miembro, lo que se obtiene, si se eliminan paréntesis y se realizan las simplificaciones posibles.
En la expresión

$$10\,000\ m + 100\ t + n$$

ni n, ni m, ni t pueden ser números con más de dos cifras; por tal razón, el número que se obtiene en el resultado, deberá siempre, en la división en grupos, con dos cifras cada uno, descomponerse en tres partes expresadas por los números buscados m, t y n.
Dejamos a la inventiva del lector el imaginar modificaciones del truco, es decir, otras combinaciones de operaciones que den un resultado semejante.
Volver

11. Una de las "Operaciones Favoritas" de Magnitski
Propongo al lector descubrir también, el secreto del siguiente sencillo truco, que fue descrito ya en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo "Sobre ciertas operaciones recreativas utilizadas en aritmética".
Consistía en dar a ocho hombres, (designados por los números del 1 al 8) un anillo, para que uno de ellos, sin mostrarlo, se lo pusiera en una de las tres articulaciones de uno de los dedos. Por ejemplo, el anillo quedaría en la segunda articulación del dedo meñique (es decir, el 5º dedo) del 4º hombre. Se preguntaba: ¿En cuál de los ocho hombres, en qué dedo y en cuál articulación del dedo se encuentra el anillo?. y enseguida, en ausencia del adivinador se debían hacer las siguientes operaciones:

Figura 50. Truco matemático de la Aritmética de Magnitski. Se ha reproducido el grabado como aparece en la obra mencionada, con las palabras escritas en ruso antiguo, y que significan sucesivamente, de arriba hacia abajo: persona: - multiplique: - sume: - multiplique: - sume el numero del dedo: - multiplique: - sume el numero 2 de la articulación

"El número del hombre que tenga el anillo, multiplicarlo por 2; al resultado, sumarle 5, y multiplicar por 5 la suma: agregar el número del dedo en que está el anillo, y multiplicar el resultado por 10; agregar el número de la articulación.
Este resultado se debe dar al hombre que no había visto lo anterior. EL, después de restar a este número 250, obtiene 452, es decir, 4^{to} hombre, 5^{to} dedo, 2^{a} articulación".
No necesitamos decir que este truco ya era conocido 200 años atrás; problemas como éste habían sido planteados por Bashede-Maziriaka en sus "Problemas numéricos instructivos y recreativos", en el año 1612; y aún antes, por Leopardo Pisano (Fibonacci) (año 1202). En general, se puede decir que muchos de los juegos matemáticos, rompecabezas y acertijos, que se practican en nuestro tiempo, tienen un origen muy antiguo.
Volver

12. Adivinación de Números

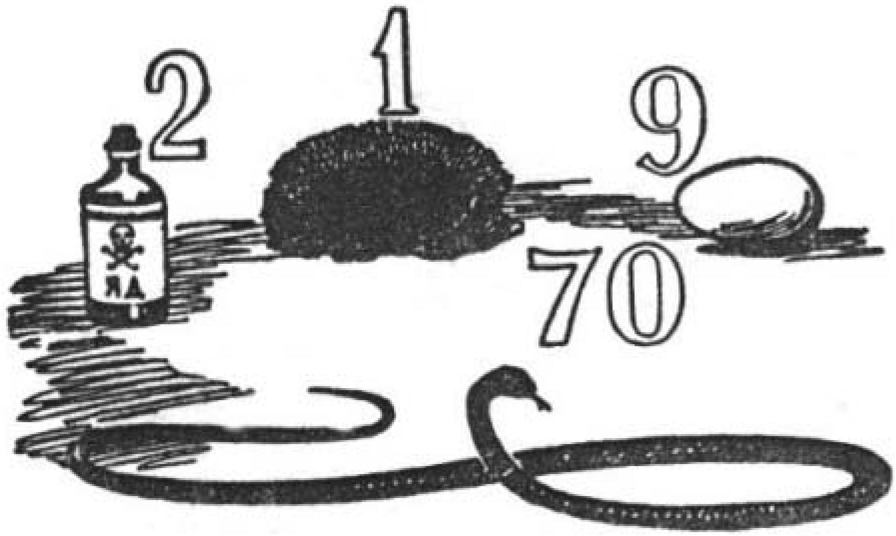
Finalmente, sin preguntarle nada a Ud., yo adivino el resultado que se obtiene en el total de cálculos efectuados con un número pensado.
Piense cualquier cifra, excepto el cero. Multiplíquela por 37. Lo obtenido multiplíquelo por 3. Borre la última cifra del producto, y el número que quede divídalo por el número pensado inicialmente no habrá resto.
Yo le puedo decir qué número obtuvo Ud., aunque todo esto lo escribí mucho tiempo antes de que Ud. procediera a la lectura del libro.
Ud. obtuvo el número 11.

La segunda vez hagamos el truco en otra forma. Piense un número de dos cifras. Escriba a la derecha de él el mismo número otra vez. El número de cuatro cifras obtenido divídalo entre el número pensado: la división se realiza sin resto. Sume todas las cifran del cociente. Ud. obtuvo 2. Si no es así, verifique cuidadosamente sus cálculos y se convencerá de que se equivocó Ud., y no yo.
¿Cuál es la clave de estos, trucos?
Clave: Nuestro lector ahora ya está suficientemente experimentado en el desciframiento de trucos, y no requiere de mis largas explicaciones. En la primera prueba de adivinación, el número pensado se multiplicó inicialmente por 37, después por 3.
Pero 37 x 3 = 111, y multiplicar una cifra por 111 equivale a constituir un número por tres cifras idénticas (por ejemplo, 4 x 37 x 3 = 444). Qué hicimos después? Borramos la última cifra y, por consiguiente, se obtuvo un número de dos cifras idénticas (44) el que naturalmente, debería dividirse por la cifra pensada, y dar 11 como cociente.
En la segunda prueba, el número pensado de dos cifras, lo escribimos dos veces: por ejemplo, pensando 29, se escribió 2929.
Esto es completamente igual a multiplicar el número pensado por 101 (en efecto, 29 x 101 = 2929). Como esto yo lo se, puedo con justeza prever que de la división de tal número de cuatro cifras entre el número pensado, se obtiene 101 y que, por consiguiente, la suma de las cifras del cociente (1 + 0 + 1) es igual a 2.
Como se ve, la adivinación está basada en las propiedades de los números 111 y 101, por lo que estamos en el derecho de colocar ambos números en nuestro museo aritmético.
Volver

13. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 1 + \\ + 24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} + \\ + 47\frac{3}{6} + 52\frac{9}{18} \end{cases}$$

Volver



Capítulo Séptimo
CALCULO RAPIDO

Contenido:

1. Fenómenos Reales y Ficticios
Quien haya asistido a sesiones de nuestro calculista soviético Arrago, puede no sorprenderse por sus enormes capacidades de cálculo. Aquí ante nosotros ya no hay trucos, sino un notable don natural. El cubo del número 4729, por ejemplo, Arrago lo calculó ante mí mentalmente en menos de un minuto (resultado: 105.756.712.489), y en la multiplicación 679.321 × 887.064, también mentalmente, empleó en total 1 1/2 minutos.
Yo he tenido la posibilidad de observar el trabajo de este fenomenal calculista, no solamente en el estrado, sino también en reuniones domésticas, a solas, y me convencí de que no emplea ningún método especial de cálculo, y calcula mentalmente, en general, como lo hacemos nosotros sobre e1 papel. Pero su extraordinaria memoria para los números lo ayuda a pararse sin la escritura de los resultados intermedios, y la rapidez de inteligencia le permite operar con los números de dos cifras tan fácilmente, como nosotros efectuamos las operaciones con números de una cifra. Gracias a esto, la multiplicación entre números de seis cifras resulta, para él, un problema de no mayor complicación que lo que para nosotros significa la multiplicación de números de tres cifras.
Tales fenómenos, como Arrago entre nosotros, o en Occidente Inodí, Diamandi, Rückle, el Dr. Fred Brauns, se cuentan con los dedos. Pero conjuntamente con ellos se consagran también, matemáticos de estrado de otro género, que fundamentan su arte en unos u otros trucos aritméticos. Usted puede haber llegado a escuchar o inclusive a asistir a "sesiones de geniales

matemáticos" que calculaban de memoria, con una rapidez sorprendente, cuántos, días, minutos y segundos tiene usted, en qué día de la semana nació, etc. Para realizar una gran parte de estos cálculos, no es necesario, sin embargo, poseer una capacidad matemática extraordinaria. Es necesario, solamente, conocer algunos secretos de estos trucos, al revelamiento de los cuales, pasamos enseguida.
Volver

2. Memorización de Números

Un calculista rápido, deberá poseer ante todo, un excelente desarrollo de la memoria para los números. Los siguientes récords muestran hasta qué refinamiento llega tal memoria en los mejores calculistas. El famoso calculista alemán Rückle se aprendió de memoria un número que se compone de 504 cifras, en el transcurso de 35 minutos, y su compatriota doctor Brauns destrozó este récord, haciendo lo mismo ¡en menos de 13 minutos!
Pero naturalmente, tal memoria fenomenal es dotada por la naturaleza en forma muy especial. Los calculistas profesionales que se consagran al estrado, no poseyendo una memoria natural para los números, se ayudan así mismos por diferentes medios artificiales (los llamados "mnemotécnicos"). En la vida diaria nosotros mismos hemos intentado emplear semejantes métodos, la mayor parte, es necesario reconocerlo, demasiado mal elegidos. Deseando, por ejemplo, recordar el número de teléfono 25-49[1] depositamos la esperanza en el hecho de que este número es fácil de reconstruir en la memoria, ya que está, compuesto de dos cuadrados exactos: $25 = 5^2$ =, $49 = 7^2$. Pero cuando es menester recordarlo en un momento dado, resulta que nos confundimos entre tantos otros números telefónicos conocidos y desconocidos:

12-25, 36-64, 25-16, 64-16, 81-25, etc.

Semejante fracaso lo concebimos también en otros casos. El teléfono número 17-53 nos proponemos recordarlo, aprovechando el hecho de que la suma de las dos primeras cifras (1 + 7) es igual a la suma de las dos últimas (5 + 3). Pero al final no resulta mejor que en el caso anterior. Y en efecto, aún falta no confundir a qué teléfono se le aplica precisamente esa, y a cuál se le aplica otra combinación. No puede sino sorprender, el ver cómo las personas intentan, con obstinación, emplear este método notoriamente inservible. La afición a este método, la ridiculizó con gran ingenio el escritor J. Hasek en sus famosas "*Aventuras del bravo soldado Sveik*"[2]:

"Sveik miró atentamente el número de su fusil y, al final, dijo:
- El número 4268. Justamente tal número estaba en una locomotora en Pées en la vía dieciséis. Era necesario llevar la locomotora a Liss para la reparación, pero esto no era tan fácil, porque el maquinista que debería conducirla allá, tenía muy mala memoria para los números. Entonces el jefe de distancia lo hizo venir al despacho y le dijo: "Sobre la vía 16 se encuentra la locomotora número 4268. Yo sé que usted tiene mala memoria para los números, y si escribe el número en un papelillo, pierde usted el papelillo. Pero si verdaderamente es tan débil para los números, entonces trate de recordar lo que yo ahora le indico, para que vea usted que es muy fácil conservar en la memoria cualquier número. El modo es el siguiente: la locomotora que es

[1] Conviene hacer notar que, en nuestra capital, un número telefónico consta de tres pares de cifras, por ejemplo: 46-44-25, 26-80-63, etc. (N. del T.)

[2] Jaroslav Hasek (nació el 30 de abril de 1883 en Praga; murió el 3 de enero de 1923 en Lipnitz) escritor satírico checoslovaco. (N. del T.)

necesario que usted conduzca al depósito, está marcada con el número 4268. Dirija precisamente la atención aquí. La primera cifra es un cuatro, la segunda un dos. Recuerde, por consiguiente, 42, es decir, dos por dos son cuatro, lo que nos da la primera cifra, y si usted la divide entre dos, obtiene de nuevo dos, y en esta forma se obtiene, junto al 4, el 2. Luego ya es sencillo. ¿Cuánto será el doble de cuatro? ocho ¿no es así?. Así usted graba en su memoria el ocho que es, la última cifra en nuestro número. Ahora ya recuerda usted que la primera cifra es el cuatro, la segunda el los y La última el ocho. Es decir, resta sólo recordar la cifra seis antes del ocho. Pero esto es completamente sencillo. La primera cifra que tenemos es el 4, la segunda el 2, y conjuntamente constituyen el 6. De esta manera el número 4268 ya se ha alojado firmemente en vuestra cabeza. Puede también llegar al resultado, por un camino más sencillo, a saber: de 8 se resta 2, y se obtiene 6. Recuerde: 6. De seis se resta 2, y se obtiene 4. Por consiguiente, tenemos ya 4 y 68. Ahora es necesario únicamente, colocar la cifra: 2 entre esos dos números y obtenemos 4268. Se puede hacer aún en otra forma, también muy fácilmente, por medio de la multiplicación. Recuerde que el doble de 42 es igual a 84. En un año hay doce meses. Es necesario reatar 12 de 84, quedando 72, y de 72 se restan los 12 meses. Se obtiene 60. Lo que tenemos aquí es, ya, el 6, porque el cero, sencillamente lo podemos dejar a un lado. Es decir, si escribimos 42-6-84 y dejamos a un lado el último 4, obtenemos inevitablemente el número 4268, es decir, el número de la locomotora que es necesario conducir".

Los métodos de los calculistas de estrado son de un género absolutamente diferente. He aquí uno de ellos, que en alguna ocasión puede llegar a servir a cada uno de nosotros. El calculista relaciona con las cifras, determinadas letras consonantes, bien aprendidas:

Cifras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	B	*D*	*G*	*J*	*K*	*P*	*S*	*R*	*W*	*X*
Letras	*C*	*F*	*H*	*Z*	*M*	*R*	*T*	*V*	*Y*	*L*

Puesto que las letras elegidas son únicamente consonantes, entonces ellas pueden, no temiendo confusiones, combinarse con vocales para constituir palabras cortas. Por ejemplo:

Para los Números	las palabras	Para los Números	las palabras
1	de	6	ese
2	ha	7	va
3	jo	8	yo
4	ama	9	ole
5	upa	0	aca

En forma análoga se constituyen las palabras, también para números de dos cifras:

11 → dedo
13 → dejo
14 → dama
16 → dato
19 → dale
2l → hada

Para recordar el número 2549, el calculista de estrado mentalmente escribe bajo las cifras, las letras correspondientes:

2 5 4 9
G P K X
H R M L

y a partir de ella, constituye, rápidamente, las palabras:

25	49
GIRO	MALO

Tal es uno de los métodos mnemotécnicos empleados entre los calculistas de estrado. Existen también otros, sobre los cuales, sin embargo, no nos detendremos, pues ahora pasaremos a los métodos de realización de algunos casos.
¿Cuántos, años tengo?, ¿cuantos días tengo?, pregunta cualquiera del publico, Y obtiene rápidamente del estrado, la respuesta.
¿Y cuántos segundos tengo, si mi edad es tal? hace la pregunta otro, y obtiene también rápida respuesta.
¿Cómo se realizan semejantes cálculos?
Volver

3. "¿Cuantos Días Tengo?"
Para determinar de acuerdo con el número de año, el número de días, el calculista recurre al siguiente método: la mitad del número de años lo multiplica por 73 y añade un cero; el resultado será, precisamente, el número buscado. Esta fórmula se vuelve comprensible si se observa que 730 = 365 x 2: Si tengo 24 años, el número de días lo obtenemos multiplicando 12 x 73 = 876 añadiendo un cero: 8760. La propia multiplicación por 73 se realiza también en forma abreviada, como veremos más adelante.
La corrección en algunos días con motivo de los años bisiestos, generalmente no se efectúa en el cálculo, aunque es fácil introducirla agregando al resultado la cuarta parte del número de años; en nuestro ejemplo: 24:4 = 6; el resultado total, por consiguiente, es 8766.
El método para el cálculo del número de minutos, no se le dificultará al lector encontrarlo por sí mismo, después de lo indicado en el párrafo que sigue.
Volver

4. "¿Cuantos Segundos Tengo?"
Si la edad del interrogador se expresa por un número par no mayor que 26, entonces se puede responder muy rápidamente sobre esta cuestión empleando el siguiente método: la mitad del número de años se multiplica por 63; después la misma mitad se multiplica por 72; este resultado queda al lado del primero y se agregan tres ceros. Si por ejemplo, el número de años es 24, entonces para la determinación del número de segundos procedemos así:

$$63 \times 12 = 756; \; 72 \times 12 = 864, \text{ resultado } 756.864.000.$$

Como en el ejemplo anterior, aquí no están tomados en cuenta los años bisiestos, un error que nadie reprocha al calculista, cuando se tiene que ver con cientos de millones (pero que se puede corregir, agregando el número de segundos que se contienen, en la cantidad de días igual a la cuarta parte del número de años).
¿ En qué se basa el método aquí indicado ?
La justeza de nuestra fórmula se explica de un modo sencillo. Para determinar el número de segundos que se contienen en un número dado de años, es necesario que los años (24 en muestro ejemplo) se multipliquen por el número de segundos en el año, es decir,

$$365 \times 24 \text{ x } 60 \times 60 = 31.536.000.$$

Luego, el factor mayor 31.536 lo separamos en dos partes (el agregado de los ceros, por sí mismo es comprensible, y en lugar de que se multiplique 24 por 31.536, se multiplica 24 por 31.500 y por 36; pero también estas operaciones, para comodidad de los cálculos las substituimos por otras, como es evidente del siguiente esquema:

$$24 \times 31.536 = \left\{ \begin{array}{l} 24 \times 31.500 = 12 \times 63.000 = 756.000 \\ 24 \times 36 = 12 \times 72 = 864 \end{array} \right\} = 756.864$$

Sólo falta agregar tres ceros, y tenemos el resultado buscado:

756.864.000.

Volver

5. Métodos de Multiplicación Acelerada
Ya indicamos antes que para realizar las diversas operaciones de una multiplicación, vital componente de cada uno de los métodos arriba expuestos, existen también métodos adecuados. Algunos de ellos son sencillos y fácil de aplicar; aligeran a tal grado los cálculos, que en general, no molesta recordarlos para su empleo práctico. Tal es, por ejemplo, el método de la multiplicación cruzada, muy conveniente en las operaciones con números de dos cifras. El método no es nuevo; se remonta a los griegos e hindúes y en la antigüedad se llamaba "método relámpago" o "multiplicación por cruz". Ahora está olvidado y no tiene ningún problema el recordarlo.
Supóngase que se requiere multiplicar 24 × 32. Mentalmente disponemos los números conforme al siguiente esquema, uno debajo del otro:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ & \times & \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Ahora, realicemos sucesivamente las siguientes operaciones:

1. 4 × 2 = 8 ésta es la última cifra del resultado.
2. 2 × 2 = 4 ; 4 × 3 = 12 ; 4 + 12 = 16 ; 6 es la penúltima cifra del resultado; recordemos mentalmente 1.

3. $2 \times 3 = 6$, más la aún conservada unidad en la mente, tenemos 7 ; ésta es la primera cifra del resultado.

Obtenemos, por consiguiente, el producto: 768.
Después de varios ejercicios este método se asimila fácilmente.
Otro método que consiste en los llamados "complementos", se aplica en forma conveniente en aquellos casos en que los números multiplicados están próximos al 100.
Supongamos que se requiere multiplicar 96×92. "El complemento" para 92 hasta 100 será 8, para 96 será 4. La operación se realiza conforme al siguiente esquema:

Factores	92	96
Complementos	8	4

Las dos primeras cifras del resultado se obtienen por la simple sustracción del "complemento" del multiplicando respecto del multiplicador o viceversa, es decir, de 92 se sustrae 4 ó de 96 se sustrae 8. Tanto en uno como en otro caso tenemos 88; a este número se le agrega el producto de los "complementos": 8 x 4 = 32. Obtenemos el resultado 8832.
Que el resultado obtenido deberá ser exacto, es indudable por las siguientes transformaciones:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88 \times (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4 \times (88 + 8) = 4 \times 8 + 88 \times 4 \end{cases}$$
$$92 \times 96 = 8.800 + 32 = 8.832$$

Veamos otro ejemplo:

Se requiere multiplicar 78 por 77.

Factores	78	77
Complementos	22	23

$$78 - 23 = 55$$
$$22 \times 23 = 506$$

$$5500 + 506 = 6006$$

Veamos un tercer ejemplo:
Multiplicar 99 x 98.

Factores	99	98
Complementos	1	2

$$99 - 2 = 97$$
$$1 \times 2 = 3$$

En el caso dado es necesario recordar que 97 denota aquí el número de centenas. Por tal razón sumamos:

$$9700 + 2 = 9702.$$

Volver

6. Para Cálculos Cotidianos

Existe un gran conjunto de métodos de realización acelerada de las operaciones aritméticas, métodos destinados no a intervenciones de estrado, sino a cálculos cotidianos. Si hubiera que exponer tan sólo los principales de dichos métodos, sería necesario escribir un libro completo. Nos limitaremos pues, a algunos ejemplos con números de uso común y corriente.

En la práctica de los cálculos técnicos y comerciales es un caso frecuente que se lleguen a sumar columnas de números muy próximos uno a otro, por lo que se refiere a la magnitud. Por ejemplo:

43
38
39
45
41
39
42

La adición de estos números se simplifica notablemente si se aprovecha el método indicado a continuación, cuya esencia es fácil de comprender

$$\begin{aligned} 43 &= 40 + 3 \\ 38 &= 40 - 2 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 45 &= 40 + 5 \\ 41 &= 40 + 1 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 42 &= 40 + 2 \end{aligned}$$

$$= 40 \times 7 + 3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2$$
$$= 280 + 7 = 287$$

De la misma manera hallamos la suma:

$$\begin{aligned} 752 &= 750 + 2 \\ 753 &= 750 + 3 \\ 746 &= 750 - 4 \\ 754 &= 750 + 4 \\ 745 &= 750 - 5 \\ 751 &= 750 + 1 \end{aligned}$$

$$= 750 \times 6 + 2 + 3 - 4 + 4 - 5 + 1$$
$$= 4500 + 1 = 287$$

En forma análoga se procede para hallar la media aritmética de números cuyo valor sea muy parecido. Encontremos, por ejemplo la media de los siguientes precios:

Rublos	kopeks
4	65
4	73
4	75
4	67
4	78
4	74
4	68
4	72

Fijemos a ojo, un precio redondeado próximo a la media: en el caso dado evidentemente es 4 r, 70 k. Escribamos las desviaciones de todos los precios con relación a la media: los excesos con el signo +, los defectos en el signo -.
Obtenemos: - 5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12

Dividiendo la suma de las desviaciones entre el número de ellas, tenemos:

$$12:8 = 1,5.$$

Así pues, el precio medio buscado es:

4 rublos 70 k + 1,5 k. = 4 rublos y 71,5 kopeks

Pasemos a la multiplicación. Ante todo indiquemos que la multiplicación por los números 5, 25 y 125 se acelera notablemente si se tiene en cuenta, lo siguiente:

$$5 = 10/2; \quad 25 = 100/4; \quad 125 = 1000/8$$

Por esta razón, por ejemplo:

$$36 \times 5 = 360/2 = 180$$
$$36 \times 25 = 3600/4 = 900$$
$$36 \times 125 = 36\,000/8 = 4500$$
$$87 \times 5 = 870/2 = 435$$
$$87 \times 25 = 8700/4 = 2175$$
$$87 \times 125 = 87\,000/8 = 10875$$

Para multiplicar por 15 se puede aprovechar que

$$5 = 10 \times 1\ 1/2$$

Por tal motivo, es fácil realizar en la mente cálculos como:

$$36 \times 15 = 360 \times 1\ 1/2 = 360 + 180 = 540$$

o sencillamente,

$$36 \times 1\ 1/2 \text{ x } 10 = 540,$$
$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1305.$$

En la multiplicación por 11 no hay necesidad de escribir 5 renglones:

$$\begin{array}{r} 383 \\ \times 11 \\ \hline 383 \\ +383\cdot \\ \hline 4213 \end{array}$$

basta con que bajo el número multiplicado se escriba él mismo, corrido una cifra:

$$\begin{array}{l} 383 \\ \underline{+383} \\ 4213 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 383 \\ \underline{+383} \\ 4213 \end{array}$$

y se efectúa la suma.
Es útil recordar los resultados de multiplicar por 12, 13, 14 y 15, como se hace con los primeros 9 números. Así, la multiplicación de números de varias cifras por tales factores se acelera en gran medida. Supóngase que se desea multiplicar

$$\begin{array}{r} 4587 \\ \underline{\times\ 13} \end{array}$$

Procedamos así. Cada cifra del multiplicando multipliquémosla mentalmente, a la vez, por 13:
1. 7 × 13 = 91; escribimos el 1, y memorizamos 9
2. 8 × 13 = 104; 104 + 9 = 113; escribimos el 3 y memorizamos 11
3. 5 × 13 = 65; 65 + 11 = 76; escribimos el 6, y memorizamos 7
4. 4 × 13 = 52; 52 + 7 = 59.

Total: 59.631

Después de algunos ejercicios;, este método se asimila fácilmente.
Existe un método muy conveniente para la multiplicación de números de dos cifras por 11: basta con separar las cifras del multiplicando, y escribir entra ellas, su suma:

$$43 \times 11 = 473.$$

Si la suma de las cifras tiene dos cifra, entonces el número de sus docenas se suma a la primera cifra del multiplicando:

$$18 \times 11 = 4(12)8, \text{ es, decir } 528.$$

Indiquemos finalmente, algunos métodos de la división acelerada. Al dividir entre 5, multipliquemos por 2 dividendo y divisor:

3471:5 = 6942:10 = 694.2

Para dividir entre 25, multipliquemos cada número por 4:

3471:25 = 13 884:100 = 138.84

En forma parecida se procede para dividir entre 1 ½ (= 1.5) y entre 2 ½ (= 2.5)

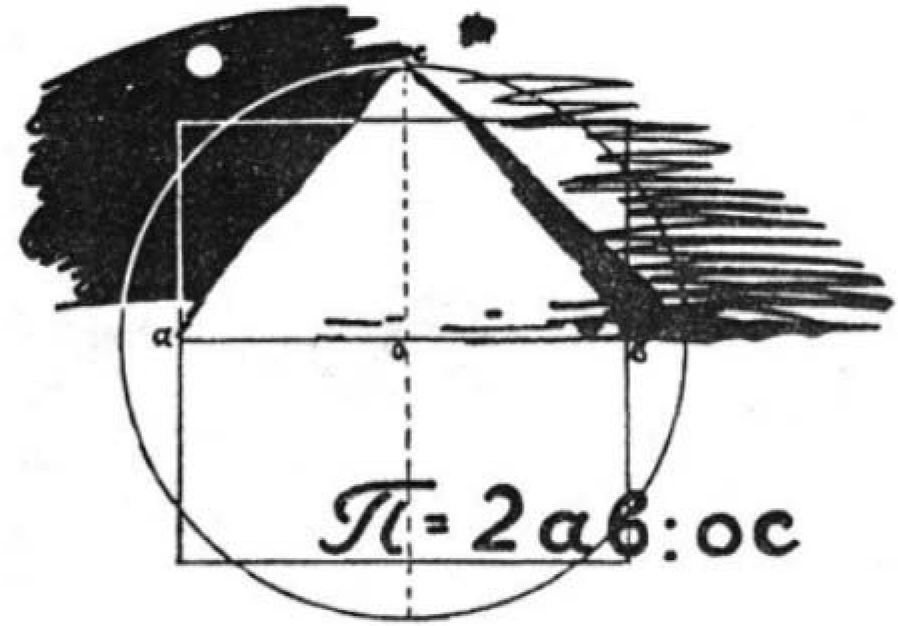
3171:1 ½ = 6942:3 = 2314,
3471:2,5 = 13 884:10 = 1388,4

Volver

7. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 1 + \\ + 74 \times \frac{3}{6} + 25 \times \frac{9}{18} + \\ + 95 \times \frac{3}{6} + 4 \times \frac{9}{18} \end{cases}$$

Volver



Capítulo Octavo

CALCULOS APROXIMADOS

Contenido

1. Enigmas Matemáticos de la Pirámide de Keops

La más alta pirámide del antiguo Egipto, la de Keops, desde hace cinco mil años azotada por el aire tórrido del desierto, representa sin lugar a dudas, la construcción más extraordinaria que se conserva del mundo antiguo (Fig. 51). Con una altura de casi ciento cincuenta metros, cubre con su base un área de 40 mil metros cuadrados y está compuesta de doscientas hileras de gigantescas piedras. Cien mil esclavos, en el curso de 30 años, trabajaron en su edificación, habiendo empleado inicialmente, 10 años en preparar el camino para el transporte de piedras desde la cantera hasta el lugar de la construcción, y posteriormente, 20 años en amontonarlas una sobre otra con ayuda de las máquinas imperfectas de ese tiempo.

Sería extraño que tan colosal construcción hubiese sido erigida con el único propósito de servir de tumba para los dirigentes del país. Por tal, razón, algunos investigadores han tratado de descubrir si el misterio de la pirámide puede revelarse por la relación de sus dimensiones.

Estos tuvieron la suerte, conforme a su juicio, de hallar una serie de sorprendentes relaciones que atestigua acerca del hecho de que los sacerdotes directores del trabajo de construcción, poseían profundos conocimientos de matemática y astronomía, los cuales fueron personificados en las formas de piedra de la pirámide.

«Cuenta Heródoto (Famoso historiador griego que visitó Egipto durante el año 300 antes de nuestra era), leemos en el libro del astrónomo francés Maurais ("Enigmas de la ciencia, 1926. Tomo I), que los sacerdotes egipcios le revelaron la siguiente relación entre la base lateral de la pirámide y su altura: el cuadrado formado por la altura de la pirámide, es exactamente igual al área de cada uno de los triángulos laterales. Esto está completamente sujeto a las más modernas mediciones. He aquí la demostración de que, en todo tiempo, la pirámide de Keops se ha considerado como un monumento cuyas proporciones han sido calculadas matemáticamente.

(*Aporto la demostración más tardía: sabemos que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es una magnitud constante, bien conocida de los escolares actuales. Para calcular la longitud de la circunferencia, basta con multiplicar su diámetro por 3.1416. O sea, por la constante pi (π).*

Los matemáticos de la antigüedad conocían esta relación solamente en una forma aproximada y muy burda.

Pero si se suman los cuatro lados de la base de la pirámide, obtenemos para su perímetro, 931.22 metros. Dividiendo este número entre el doble de la altura (2×148.208), tenemos como resultado 3,1416, es decir, la relación de la longitud de la circunferencia a su diámetro. (Otros autores de tales mediciones de la pirámide deducen el valor de π aún con mayor exactitud: 3.14159. Ya. Perelman).

Este monumento único en su género, representa en sí, por consiguiente, una personificación material del número π, que ha jugado un papel importante en la historia de la matemática. Como vemos, los sacerdotes egipcios tenían representaciones exactas conforme a una serie de cuestiones que se consideran como descubrimientos de siglos posteriores» (El valor de π, con la exactitud que se obtiene aquí, a partir de las relaciones de las dimensiones de la pirámide, fue conocido por los matemáticos europeos sólo hasta el siglo XVI.).

Existe aún otra relación más sorprendente: si el lado de la base de la pirámide se divide entre la duración exacta del año: 365.2422 días, se obtiene justamente, la diezmillonésima parte del semieje terrestre, con una exactitud de la cual pudieran sentir envidia los astrónomos modernos.

Figura 51 ¿Qué misterios matemáticos encierran las pirámides egipcias?

Además: la altura de la pirámide constituye exactamente la milmillonésima parte de la distancia de la Tierra al Sol, magnitud que fue conocida por la ciencia europea solamente a fines del siglo

XVIII. Los egipcios de 5,000 años atrás conocían, como se muestra, lo que no sabían aún ni los contemporáneos de Galileo y Kepler, ni los científicos de la época de Newton. No es de extrañar que las investigaciones de este género originaran, en Europa, una extensa literatura.
Y entre tanto, todo esto no es más que un juego con cifras. El asunto se presenta con otro aspecto por completo diferente, si se aborda con la valorización de los resultados de cálculos aproximados. Consideremos en el mismo orden, los ejemplos que hemos presentado.

- Sobre el número "Pi". La aritmética de los números aproximados afirma que si en el resultado de la operación de división deseamos obtener un número con seis cifras exactas (3.14159), debemos tener tanto en el dividendo como en el divisor, por lo menos, las mismas cifras exactas. Esto quiere decir, en la aplicación a la pirámide, que para la obtención de una "Pi" de seis cifras es necesario medir los lados de la base y la altura de la pirámide con una exactitud hasta de millonésimos del resultado, es decir, hasta de un milímetro. El astrónomo Maurais aporta para la altura de la pirámide 148.208 m., lo cual parece realizado con cuidados de exactitud hasta de 1 mm. ¿Pero quién garantiza tal exactitud de medición de la pirámide? Recordemos que en los laboratorios del Instituto de Medidas, en donde se efectúan las mediciones más exactas del mundo, en la medición de una longitud no pueden superar tal exactitud (en la medición de una longitud se obtienen solamente 6 cifras exactas). Se comprende, entonces, qué tanto más burda puede ser la medición realizada de la mole de piedra en el desierto. En verdad, en los trabajos más exactos de agrimensura (en la medición de las llamadas "bases") se puede alcanzar en una región, la misma exactitud que se logra en el laboratorio, es decir, garantizar 6 cifras en el número. Pero es imposible realizar esto en las condiciones de medición de la pirámide. Las dimensiones iniciales, verdaderas, de la pirámide, hace mucho que no existen en la naturaleza, puesto que el revestimiento de la construcción desapareció, y nadie sabe qué espesor tenía. Para ser escrupulosos, es necesario tomar las medidas de la pirámide en metros cerrados; y entonces se obtiene una π bastante burda, no más exacta que la que es conocida del papiro matemático de Rhind. Si la pirámide efectivamente es una personificación pétrea del número π, entonces esta personificación, como vemos, está lejos de ser perfecta. Pero es completamente admisible que la pirámide esté construida totalmente ajena a esta relación. Dentro de los límites de los números aproximados de tres cifras para las dimensiones de la pirámide, caben muy bien otras suposiciones. Es posible, por ejemplo, que para la altura de la pirámide fuese tomado 2/3 del filo de la pirámide o 2/3 de la diagonal de su base. También es completamente admisible la relación que fue indicada por Heródoto: que la altura de la pirámide es la raíz cuadrada del área de una cara lateral. Todas estas suposiciones son tan probables, como la "hipótesis de π".
- La siguiente afirmación se refiere a la duración del año y a la longitud del radio terrestre: si se divide el lado de la base de la pirámide entre la duración exacta del año (un número de siete cifras), obtenemos exactamente una diezmillonésima parte del eje terrestre (un número de 5 cifras). Pero como ya sabemos que en el dividendo tenemos no más de tres cifras exactas, entonces es claro que a cualquier precio, los 7 y 5 signos que se tienen aquí, están en el divisor y en el cociente. La aritmética, en este caso, se responsabiliza solamente por tres cifras en la duración del año y en el radio terrestre. El año de 365 días y el radio terrestre de cerca de 6400 kilómetros, son los números sobre los que tenernos derecho a hablar aquí.
- Por lo que toca a la distancia de la Tierra al Sol, existe un malentendido de otro tipo, Es extraño inclusive, cómo los partidarios de esta teoría no han podido notar aquí, un error lógico admitido por ellos. En efecto, si como ellos afirman, un lado de la pirámide constituye una parte

> conocida del radio terrestre, y la altura una parte conocida de la base, entonces, ya no es posible decir que la misma altura constituye una determinada parte de la distancia hasta el Sol. Es, algo de una o de otra. Y si casualmente aquí se descubre una correspondencia interesante entre ambas longitudes, entonces ella siempre ha existido en nuestro sistema planetario; y en esto no puede haber mérito alguno de los sacerdotes.

Los partidarios de la teoría considerada van aun más lejos: afirman que la masa de la pirámide constituye exactamente una milcuatrillonésima parte de la masa de la esfera terrestre. Esta relación, conforme a su opinión, no puede ser casual, y testimonia sobre el hecho de que los antiguos sacerdotes egipcios conocían, no solamente las dimensiones geométricas de nuestro planeta, sino que mucho tiempo antes de Newton y Cavendish calcularon su masa, "pesaron" la esfera terrestre. Aquí existe la misma falta de lógica que en el ejemplo considerado de la distancia de la Tierra al Sol. Es completamente absurdo decir que la masa de la pirámide está "elegida" en una correspondencia determinada con la masa de la esfera terrestre. La masa de la pirámide se determina desde aquel momento en que sea elegido su material y fijadas las dimensiones, de su base y de su altura. No es posible ajustarse simultáneamente a la altura de la pirámide, con una base que constituya una determinada parte del radio terrestre, y que independientemente de ello, se ponga a su masa en relación con la masa de la Tierra. Una se determina por la otra. En ese caso, deberán ser eliminados todos los pensamientos anteriores sobre el conocimiento que de la masa de la esfera terrestre poseían los egipcios. Esto no es más, que un equilibrismo numérico. Operando hábilmente con los números, apoyándose en coincidencias casuales, se puede demostrar, quizás, todo lo que se desee.
Vemos sobre qué bases tan vacilantes reposa la leyenda referente a la inconcebible sabiduría de los sacerdotes arquitectos de la pirámide. Al mismo tiempo, tenemos aquí precisamente una clara demostración de las ventajas de esa rama de la aritmética que se ocupa de los números aproximados.
Volver

2. Números Aproximados

A quien desconozca las reglas de las operaciones con los números aproximados, probablemente le será interesante el ponerse al corriente de ellas brevemente, tanto más que el conocimiento de estos sencillos métodos se muestra prácticamente útil, economizando trabajo y tiempo en los cálculos.
Aclaremos, ante todo, qué es un "número aproximado" y de dónde se obtienen tales números.
Los datos, que intervienen en los cálculos técnicos, se obtienen por medio de la medición. Pero ninguna medición puede ser efectuada en una forma completamente exacta. En principio, inclusive las propias medidas que se emplean para las mediciones, habitualmente encierran en sí un error. Fabricar reglas métricas, pesas de kilogramos, botellas de un litro es bastante difícil, y la ley admite en su fabricación un cierto error. Por ejemplo, en la fabricación de una regla métrica, por ley, se admite un error hasta de un milímetro; para una cadena o cinta decamétrica para agrimensura hasta 1 centímetro; para una pesa de un kilogramo, hasta 1 gramo; (Además del error en las pesas, la ley admite también el error en el dispositivo de los pesos, que alcanza, en los pesos de masa, hasta 1 gramo por cada kilogramo de carga pesada.) para juegos de pesas pequeñas, de 1 gramo, hasta, 0.01 de gramo; para una botella de un litro, hasta 5 cm^3.
Además, la realización de la medición también introduce inexactitudes. Supóngase que se mide una distancia cualquiera, por ejemplo, el ancho de una calle. La medida, el metro, se comprende en su anchura supongamos, 13 veces, y queda aún una parte menor que un metro. Se puede decir que la anchura de la calle es de 13 metros; sin embargo ella es igual a 13 metros completos y todavía un

cierto número de partes decimales, centesimales, etc. del metro, las cuales no se tomaron en cuenta. Por consiguiente, el resultado de nuestra medición se puede expresar así:

anchura de la calle = 13. ? ? ? metros,

en donde los signos de interrogación denotan cifras desconocidas, de fracciones decimales, centesimales, etc.

Si se deseara medir la anchura de la calle más exactamente, se sabe cuántos decímetros (décimas partes de un metro) se contienen en la parte que queda. Supongamos que los decímetros que se contienen sean 8 y que aún exista un cierto residuo menor que un decímetro. El resultado de la, nueva medición, 13.8 m., será más exacta que la anterior, pero tampoco es estrictamente exacta, porque además de los 8 décimos del metro, en la anchura de la calle se contiene aún un cierto número desconocido para nosotros de partes centesimales, milesimales, etc. del metro. Por consiguiente, el resultado más exacto obtenido ahora, lo podemos expresar así

13.8?? metros.

En una medición más cuidadosa se toman en cuenta las centésimas partes (centímetros) de un metro, en la parte que queda; pero se desprecia el resto menor que un centímetro; en ese caso, tampoco este resultado será absolutamente exacto. En general, como no se mide con exactitud, no se puede asegurar firmemente que después de la última cifra obtenida, no se encuentren aún otras desconocidas por uno.

El hecho, naturalmente, no se modifica en absoluto, en virtud de que, en las mediciones los residuos mayores que la mitad de la unidad de medida, habitualmente se consideran como enteros. Si en la primera medición de la calle, hubiésemos considerado su anchura no como de 13 metros, sino de 14, esto también hubiera sido solamente un resultado aproximado. Se le podría expresar en la siguiente forma

14.??? metros,

donde los signos de interrogación denotan cifras negativas (es decir, indican en cuantas décimas, centésimas, etc. partes, es mayor el número 14 que la verdadera anchura de la calle).

Así, el resultado inclusive de una medición cuidadosa no puede considerarse como absolutamente exacto: él expresa la verdadera cantidad sólo más o menos aproximadamente. Tales números se llaman aproximados.

La aritmética de los números aproximados no coincide totalmente con la aritmética de los números exactos. Mostremos esta diferencia en un ejemplo.

Se requiere calcular el área de una sección rectangular, cuya longitud y anchura son respectivamente, 68 m y 42 m. Si Los números 68 y 42 fueran exactos, el área de la sección sería exactamente igual a

$$68 \times 42 = 2856 \text{ m}^2.$$

Pero los números 68 y 42 no son exactos, sino aproximados: en la longitud no hay exactamente 68 m, sino un poco más o menos, puesto que es improbable que el metro esté comprendido en ella, exactamente 68 veces. Pues también es muy poco probable que la propia longitud de la regla métrica sea igual a l m. Podemos, en conformidad con lo anterior, expresar la longitud de la sección, en metros, así:

$$68.?$$

En forma semejante, la anchura de la sección la expresamos por

$$42.\ ?$$

Realicemos ahora, la multiplicación de los números aproximados:

$$68.? \times 42.?$$

La realización de la operación es evidente del siguiente esquema

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 6 & 8 & ? & \times & 4 & 2 & ? \\
\hline
 & & & ? & ? & ? & & & & \\
 & 1 & 3 & 6 & ? & & & & & \\
2 & 7 & 2 & ? & & & & & & \\
\hline
2 & 8 & 5 & ? & ? & ? & & & &
\end{array}$$

Vemos que la cuarta cifra (de izquierda a derecha) del resultado nos es desconocida: ella deberá obtenerse de la adición de las tres cifras (? + 6 + ?), de las cuales dos son desconocidas. La tercera cifra del resultado también es incierta: nosotros escribimos 5, pero de la adición de la columna ? + 6 + ? se puede obtener un número mayor que 10 e inclusive que 20; en ese caso, en lugar de 5 puede resultar un 6 ó un 7. Las dos primera cifras (28) del resultarlo son sólo las completamente seguras. Por tal razón, deseando ser escrupulosos, deberemos afirmar sólo que el área buscada contiene cerca de 28 cientos de metros cuadrados. Las cifras de las decenas y de las unidades en el número de metros cuadrados, nos son desconocidas.

Así, la respuesta correcta a la cuestión del problema es 2800, y los ceros denotan aquí, no una ausencia a ciencia cierta de las unidades de los correspondientes órdenes, sino sólo una ausencia de conocimientos seguros sobre ellas. Hablando en otra forma, los ceros denotan, lo mismo que los signos de interrogación en las notaciones precedentes.

Es erróneo pensar que la respuesta 2856, obtenida conforme las reglas de la aritmética de los números exactos, es más correcta que la respuesta 2800, pues hemos visto que las últimas dos cifras (56) del resultado no eran dignas de confianza: no es posible dar garantía por ellas. La respuesta 2800 es preferible a 2856, porque no induce al error: ella afirma directamente que sólo son ciertas las cifras 2 y 8 en el lugar de los millares y de las, centenas, y que las cifras que van después, son desconocidas. La repuesta 2856 es engañosa: sugiere el pensamiento incorrecto de que las últimas dos cifras son tan seguras, como las dos primeras.

«Es deshonesto escribir más cifras que aquellas por las cuales se puede dar garantía... Yo, con mucho pesar, reconozco que muchos de tales números que conducen a erróneas representaciones, se encuentran en las mejores obras sobre las máquinas de vapor. . . Cuando yo estudiaba en el colegio, nos informaron que la distancia media de la Tierra al Sol es de 95 192 357 millas inglesas

(Una milla inglesa es igual a 1852 m.). Me sorprendí porque no se citaban aún, cuántos pies y pulgadas más. Las mediciones actuales más exactas, afirman solamente que esta distancia es no mayor que 93 y no menor que 92.5 millones de millas» escribió a este propósito el matemático inglés Perri.
Así, en los cálculos con números aproximados es necesario tomar en cuenta, no todas las cifras del resultado, sino solamente algunas. Hablaremos especialmente sobre cuáles cifras son las que conviene conservar en estos casos, y cuáles substituir por ceros. En principio nos detendremos sobre la forma en que es necesario redondear un número.
Volver

3. Redondeo de Números

El redondeo de un número consiste en que una o varias de sus cifras finales (de izquierda a derecha se consideran los números) se substituyen por ceros. Puesto que los ceros que se hallan después del punto no tienen valor, entonces se les deja de lado completamente. Por ejemplo:

los números	se redondea a
3734	3730 ó 3700
5.314	5.31 ó 5.3
0.00731	0.0073 ó 0.007

Si la primera de las cifras eliminadas en el redondeo es un 6, o mayor que seis, la cifra precedente se aumenta en una unidad. Por ejemplo:

los números	se redondea a
4867	4870 ó 4900
5989	5990 ó 6000
3.666	3.67 ó 3.7

Se procede igual si se elimina la cifra 5 con las cifras significativas después de ella. Por ejemplo:

los números	se redondea a
4552	4600
38.1506	38.2

Pero si se elimina sólo la cifra 5, entonces el aumentar una unidad la cifra precedente se condiciona únicamente a cuando ella es impar: una cifra par se deja sin modificación. Por ejemplo:

los números	se redondea a
735	740
8645	8640
37.65	37.6
0.0275	0.028
70.5	70
	(El cero se considera como una cifra par)

En la elaboración de los resultados de las operaciones con números aproximados se observan las mismas reglas de "redondeo".
Volver

4. Cifras Significativas y No Significativas
En el estudio de los cálculos aproximados se entienden por cifras significativas, todas las cifras excepto el cero, y también el cero en caso de que se halle entre otras cifras significativas. Así, en los números 3700 y 0.0062 todos los ceros son cifras no significativas; en los números 105 y 2006 los ceros son significativos. En el número 0.0708 los dos primeros ceros son no significativos, el tercer cero es una cifra significativa.
En ciertos casos, un cero significativo puede hallarse también al final del número: por ejemplo, redondeando el número 2.540002 obtenemos, el número 2.54000, en el que todos los ceros del final son significativos, puesto que indican a ciencia cierta la ausencia de unidades en los correspondientes órdenes. Por esta razón, si en las condiciones de un problema o en una tabla encontramos el número 4.0 ó el 0.80, éstos; se deberán considerar como de dos cifras. Redondeando el número 289.9 a 290, obtenemos también al final un cero significativo.
Volver

5. Adición y Substracción de Números Aproximados
El resultado de la adición o substracción de los números aproximados no deberá finalizar con cifras significativas si en ciertos órdenes de uno de los números dados, no existen aquellas. Si se obtienen tales cifras, conviene eliminarlas por medio del "redondeo"

$$\begin{array}{r} 3400 \\ +275 \\ \hline 3700 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28.3 \\ +146.85 \\ 108 \\ \hline 283 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 176.3 \\ -0.46 \\ \hline 175.3 \end{array}$$

(y no 3675) (y no 283.15) (y no 175.84)

No es difícil entender la base de esta regla. Supóngase que se requiere agregar 275 m. a 3400 m. En el número 3400, es evidente que se desprecian las decenas de metros; es claro que añadiendo a este número 2 centenas de metros, 7 decenas de metros y todavía 5 m. más, obtenemos como suma, no 3675 m., sino el resultado total más próximo, con otras cifras en el lugar de las decenas y de las unidades. Por tal razón, en el lugar de las decenas y de las unidades escribimos, en la suma, ceros que, en el caso dado, indican que al calculista le son desconocidas las cifras que ahí deberían hallarse.
Volver

6. Multiplicación, División y Elevación a una Potencia de los Números Aproximados
El resultado de la multiplicación y también de la división de números aproximados, no deberá contener más cifras significativas que las que se tienen en el dato más breve. (De dos números el más "breve o corto" es aquel que contiene menos cifras significativas). Las cifras excedentes se substituyen por ceros.
Ejemplos:

$37 \times 245 = 9100$ (y no 9065)
$57.8 : 3.2 = 18$ (y no 18.06)
$25:3.14 = 8.0$ (y no 7,961).

En el recuento del número de cifras no se pone atención en el punto: así, 4.57 es un número de tres cifras, etc.
El número de cifras significativas de la potencia de un número aproximado, no deberá superar al número de cifras contenidas en la base de la potencia. Las cifras excedentes se substituyen por ceros.

Ejemplos:

$157^2 = 24\,600$ (y no 24 649);
$5.81^3 = 196$ (y no 196.122941).
Volver

7. Aplicación en la Practica
Estas reglas se relacionan solamente con los resultados finales. Si con la realización de una operación, el cálculo aún no finaliza, entonces en el resultado de esta operación intermedia se conserva una cifra significativa más que lo que requiere la regla. Efectuando, por ejemplo, el cálculo

$$36 \times 1.4 = 3.4$$

se procede así:

$$36 \times 1.4 = 50.4$$

(se conserva no dos, sino tres cifras); $50.4 : 3.4 = 15$.
En cálculos técnicos sencillos, las reglas indicadas arriba pueden ser, en casi todos los casos, aplicadas en la siguiente forma simplificada. Antes de calcular se establece, conforme al número de cifras del dato más breve, cuántas cifras certeras puede contener el resultado final. Cuando esto se haya establecido, se procede a efectuar los cálculos y en todos los cálculos intermedios se conserva una cifra más que lo establecido para el resultado final. Si, por ejemplo, en las condiciones de un problema son dados algunos números de tres cifras y uno de dos, el resultado final tendrá dos cifras certeras, y los resultados intermedios será necesario tomarlos de tres cifras.
De suerte que todas las reglas de los cálculos aproximados, en la realización de cálculos, pueden reducirse a las dos siguientes:

1. Se establecen cuántas cifras significativas existen en el, más breve de los datos del problema: las mismas cifras significativas deberán conservarse en el resultado final.
2. en los resultados de todos los cálculos intermedios se conserva una cifra más que lo establecido para el resultado final.

Las otras cifras, en todos los casos, se substituyen por ceros o se eliminan conforme las reglas de "redondeo".

Estas reglas no son aplicables a aquellos problemas (que se encuentran muy rara vez) para cuya solución es necesario efectuar sólo operaciones de adición y substracción. En tales casos se siguen otras reglas:

1. El resultado final no deberá tener cifras significativas en aquellos órdenes que no existan, aunque sólo sea en uno de los datos aproximados.
2. En los resultados intermedios es necesario conservar una cifra significativa más, que lo establecido para el final.

Si, por ejemplo, los datos de un problema, son:

37.5 m. 18.5.64 m, 0.6725 m,

y para la resolución se necesita restar el primer número de la suma de los otros, entonces en la suma

185.69 + 0.6725 = 186.3125,

como resultado intermedio, se elimina la última cifra (es decir, se conserva 186.312), y en la diferencia

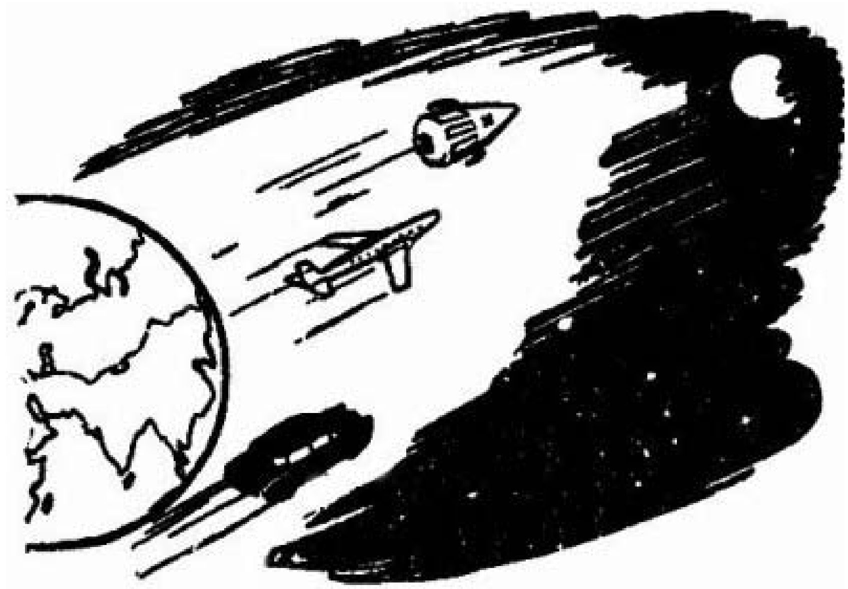
186.312 - 37.5 = 148.812

como resultado final, se conserva sólo 148.8.
Volver

8. Ahorro de Trabajo de Calculo
¿ Cómo valorizar cuánto trabajo de cálculo economizamos, empleando los métodos desarrollados? Para esto es necesario que cualquier cálculo complicado se efectúe doble: una vez, conforme a las reglas aritméticas ordinarias; la otra, aproximadamente. Y después, contar pacientemente cuantas veces llegamos, en ambos casos, a sumar, restar y multiplicar las cifras aisladas. Resulta que el cálculo aproximado requiere de tales operaciones elementales 2 1/2 veces menos, que el "exacto". Los perjuicios para la justeza resulta un motivo superfluo para motivar un error.
De suerte que los cálculos aproximados requieren cerca de 2 1/2 veces menos tiempo que los cálculos conforme a las reglas habituales. Pero el ahorro de tiempo no es la única ventaja. Cada operación superflua de cálculo, cada caso superflua de adición, substracción o multiplicación de cifras, resulta un motivo superfluo para motivar un error. La probabilidad de errar en los cálculos aproximados es 2 1/2 veces menor que en los "exactos". Y el precio de que se yerre es, efectuar el cálculo de nuevo sino totalmente por lo menos en parte. En tal caso, el ahorro de trabajo y tiempo en los cálculos aproximados se obtiene, mayor que 2 1/2 veces. El tiempo gastado en el conocimiento de ellos, se retribuye rápida y generosamente.
Volver

9. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 98\frac{3}{6} + 1\frac{27}{54} + \\ + 94\frac{1}{2} + 5\frac{38}{76} \end{cases}$$



Capitulo Noveno
GIGANTES NUMERICOS

Contenido:

1. Gigantes Numéricos de Nuestra Realidad

Son de imponente majestuosidad los gigantes numéricos: el millón, el billón. (En América Latina y en España por un billón se entiende un millón de millones; aquí tiene el significado de mil millones), el trillón, etc. Estos números, en otro tiempo inaccesibles a nuestra imaginación, surgen persistentemente en la vida diaria de la realidad socialista.

Échese una mirada, por ejemplo, a la comunicación de la Dirección Central de Estadística ante el Consejo de Ministros de la URSS sobre la producción de las formas fundamentales de la industria en e1 año 1958, y en casi cada renglón se encuentra uno de los gigantes numérico. En esta comunicación leemos que en el año 1958 se produjeron cerca de:

- 40 millones de toneladas de hierro

- 55 millones de toneladas de acero
- 43 millones de toneladas de laminado en barras
- 113 millones de toneladas de petróleo
- 33 millones de toneladas de cemento
- 356 millones de pares de calzado de piel
- 303 millones de metros de tejidos de lana
- 25 millones de relojes de todos los tipos
- 1.5 millones de cámaras fotográficas
- 1 millón de televisores
- 3.5 millones de toneladas de carne
- 1 millón de toneladas de productos de salchichonería
- 3 millones de toneladas de pescado
- 5.5 millones de toneladas de azúcar
- 68 millones de metros cuadrados de superficie habitable.

También encontramos en esta comunicación otro gigante numérico: el billón, que es 1000 veces mayor que el millón. Así, por ejemplo, en el mismo año 1958 se extrajeron cerca de:

- 30 billones de metros cúbicos de gas.
- 0.5 billones de toneladas de hulla
- 233 billones de kilowatt-hora de energía eléctrica,
- 6 billones de metros de tejidos de algodón,
- 0.8 billones de metros de tejidos de seda.
- 28 billones de ladrillos,
- 1 billones de latas de conservas,
- 8.5 puds (El pud es una antigua medida rusa de peso, que equivale a 16.28 kilogramos.) de semillas,
- 23.5 billones de huevos
- 1.1 billones de ejemplares de libros,
- y el volumen de las inversiones de capital alcanzó un total de 235 billones de rublos.

Pero tampoco el billón es el límite. También se encontró lugar en esta comunicación, para otro gigante numérico: el trillón, que es igual a 1000 billones ó 1 millón de millones.
En esta forma, en el año 1958 el movimiento de mercancías
en todos los tipos de transportes, constituyó un total de cerca de 1.6 trillones de toneladas-kilómetro de los cuales 1.3 trillones se transportaron en ferrocarril.
¡Todo esto fue producido en el año 1958 solamente! Y delante está un programa mucho más majestuoso y grandioso de desarrollo de 1a construcción del comunismo en nuestro país, trazado por el XXI congreso histórico del Partido Comunista de la Unión Soviética para el septenio de 1959 a 1965. Sobre este plan septenal de nuestro impetuoso desarrollo económico, hablaremos con detalle más adelante.
Para aquellos que no tienen un concepto preciso de la grandiosidad del millón, del billón y del trillón, no resultan perfectamente comprensibles los colosales alcances que obtuvimos ya en 1958.

Cuando Ud. lee los números citados arriba, ¿qué imágenes se manifiestan en su mente? Para percibir la grandiosidad de semejantes números, vale la pena gastar algo de tiempo en "la gimnasia aritmética" que desarrolla la capacidad de valorar correctamente las dimensiones verdaderas de los grandes números.
Volver

2. ¿Qué Tan Grande es un Millón?
Empecemos con el millón. La palabra "millón" significa un millar de miles. En el siglo XIII, el conocido viajero Marco Polo visitó China y para expresar las inmensas riquezas de este maravilloso país, inventó la palabra "millón".
Si se desea percibir las dimensiones verdaderas de un millón, pruébese el poner un millón de puntos en un cuaderno limpio. Yo no propongo a los lectores llevar hasta el final dicho trabajo (es muy dudoso que en esto se tenga paciencia), pues ya en el comienzo del mismo, su lento curso hace sentir a los lectores lo que es un millón "actual."
El naturalista inglés Alfred Russell Wallace, colaborador del célebre Darwin, dio un valor muy formal al desarrollo de la representación correcta acerca del millón. Propuso que (En el libro "*La posición del hombre en el Universo*") "en cada escuela grande se destine un cuarto o una sala, en cuyas paredes se pueda mostrar claramente qué es un millón. Para este objeto son necesarios 100 grandes pliegos cuadrados de papel, de 4 1/4 pies cada uno, para trazar cuadrados de 1/4 de pulgada, dejado igual número de espacios blancos entre las manchas negras. Después de cada 10 manchas es necesario dejar un espacio doble para separar cada cien manchas (10 × 10). De esta manera, en cada pliego habrá hasta 10 mil manchas negras, bien diferenciadas a partir del centro de la sala, y todos los cien pliegos contendrán un millón de manchas. Tal sala será, en alto grado, instructiva… Nadie puede valorar los logros de la ciencia contemporánea, que tienen que ver con magnitudes inconcebiblemente grandes o pequeñas, si es incapaz de representárselas claramente y, resumiendo en conjunto, de imaginar en sí qué tan grande es el número un millón, cuando la astronomía, la física contemporánea llegan a tener que ver con centenas, millares y aún millones de tales millones (Por ejemplo las distancias mutuas entre los planetas se miden con decenas centenas de millones de kilómetros; las distancias hasta las estrellas con millones de millones de kilómetros, y el número de moléculas en un centímetro cúbico de aire que nos rodea con millones de millones de millones). En todo caso, es muy conveniente que en cada ciudad grande se construyera una de tales salas, para mostrar claramente en sus paredes la magnitud de un millón".
Yo no sé si el deseo del naturalista fue cumplido en su país, pero yo mismo tuve ocasión de llevar a cabo su proposición en Leningrado, en el Parque Central de cultura y descanso. Aquí, en un pabellón especial de la ciencia recreativa, fueron marcados en el techo, un millón de círculos obscuros.
El inmenso campo de puntos negros produjo una intensa impresión entre los visitantes, y proporcionó, efectivamente, la posibilidad de percibir la grandiosidad de un millón.
La impresión aumentó al comparar este conjunto, con otro conjunto que desde hacia mucho tiempo se tomaba por incalculable: el número de estrellas visibles en el cielo a simple vista. No obstante la convicción propagada, el ojo normal ve en la semiesfera del cielo nocturno solamente un total de 3 ½ millares de estrellas. Este número es 300 veces menor que un millón. Un pequeño círculo celeste en el techo del pabellón citado, que ha contenido 3500 puntos obscuros, y que ha representado a1 cielo nocturno, recalcó con claridad, por sus modestas dimensiones, la grandiosidad del auténtico gigante numérico: el millón.
Quizá interese al lector conocer el método con que fue marcado el millón de puntos sobre el techo, pues cabe hacerse la siguiente pregunta ¿En cuánto tiempo debieron realizar este

monótono trabajo los pintores? El pabellón no hubiera sido rápidamente terminado si los pintores se hubiesen ocupado en poner, a mano, todos y cada uno de los puntos del millón. La obra, fue realizada mucho más fácilmente: fueron encargados papeles para tapizar, con puntitos distribuidos ordenadamente y se pegaron en el techo.
Volver

3. Un Millón en los Engranajes
En una forma completamente distinta, la inimaginable magnitud del millón está representada en la Casa de la Ciencia Recreativa en Leningrado. Esto se logra aquí por medio de un pequeño aparato cuya imagen se puede ver en la Fig. 52.
Una serie de engranes están escogidos y enlazados en este aparato, en tal forma, que cuando se gira 10 veces la manivela, la aguja del primer cuadrante realiza una vuelta. Cuando la manivela gira 100 veces, la aguja de este cuadrante recorre 10 veces el círculo y simultáneamente la aguja del segundo cuadrante efectúa una vuelta. Para hacer que gire una vez la aguja del siguiente --del tercer cuadrante- es necesario que la manivela del aparato realice 1000 vueltas. Después de 10 000 vueltas de la manivela, la aguja del cuarto cuadrante gira una vez; después de 100 000, gira la quinta aguja y, finalmente, después de 1 000 000 de vueltas de la manivela, gira una vez la última, la sexta aguja.

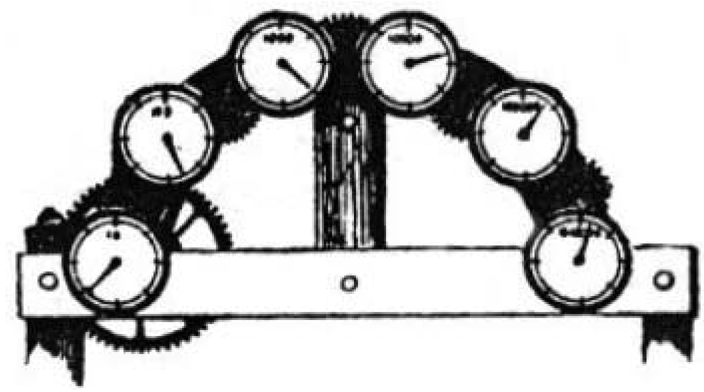


Figura 52. Es necesario girar ininterrumpidamente durante once días la manivela del aparato para que las agujas señalen 1.000.000 de vueltas

Si el millón de círculos sobre el techo sorprende a la vista, este aparato actúa directamente sobre la sensación muscular: Girando la manivela y observando qué tan lentamente se mueven las aguja en los últimos cuadrantes, directamente con nuestros brazos sentimos el peso de los seis ceros que siguen a la unidad en la representación del millón. En efecto, para alcanzar el sexto cero es necesario girar la manivela del aparato sin descanso y absolutamente sin interrupción en el transcurso de once días (considerando una vuelta por segundo).
Volver

4. Un Millón de Segundos
Aquí yo propongo, para cada método, el desarrollar en sí la representación más clara y accesible sobre la magnitud del millón. Para esto es necesario solamente, darse al trabajo de ejercitarse mentalmente en el millón por la cuenta de pequeñas, pero bien conocidas para nosotros, unidades: pasos, minutos, cerillos, vasos, etc. Los resultados que se obtienen son, frecuentemente, inesperados y extraordinarios.

Apartemos algunas ejemplos.
¿Qué tanto tiempo tomará e1 trabajo de contar un millón de objetos cualesquiera, a razón de uno cada segundo?
Resulta que contando ininterrumpidamente diez horas por día, la cuenta se terminaría en un mes. No es difícil convencerse de esto por medio de un cálculo oral, aproximadamente: en una hora hay 3600 segundos; en 10 horas, 36 000; en tres días, por consiguiente, se cuenta un total de alrededor de 100 mil objetos; y puesto que un millón es diez veces mayor, para llegar a él se necesitan 30 días (Señalamos como información, que en un año (astronómico) hay 31 558 150 segundos: un millón de segundos es exactamente igual a 11 días, 13 horas, 46 minutos, 40 segundos).
De aquí se sigue, a propósito, que el trabajo anteriormente propuesto, representar un millón de puntos en un cuaderno, requeriría algunas semanas de trabajo asiduo y continuo.
Hasta qué grado los hombres están propensos a subestimar la magnitud del millón, lo muestra el error aleccionador del propio Wallace: previniendo a otros respecto de la subestimación del millón, él termina el fragmento citado arriba, con el consejo:
"Cada uno se puede organizar esto mismo para sí, en pequeñas dimensiones: cuesta sólo obtener cien pliegos de papel grueso, rayarlos con cuadrados y colocar grandes puntos negros. Semejante representación será muy instructiva, aunque no al grado, naturalmente, de la realizada a una gran escala". El honorable autor, al parecer, confió en que este trabajo es del todo para la fuerza de un solo hombre.
Volver

5. Banda de un Millón de Cabellos

La finura de un cabello ha llegado a ser proverbial. Cualquiera puede saber qué tan fino es un cabello con sólo mirarlo. El espesor de un cabello humano es de alrededor de 0.07 mm, lo que podemos redondear a 0.1 mm. Imagínese un millón de cabellos puestos en fila, uno al lado del otro. ¿De qué anchura se obtendrá la banda? ¿podrá pagar a través de una puerta?
Si nunca se ha concebido una idea sobre tal problema, se puede garantizar que, no realizando cálculos, se dará una respuesta burdamente equivocada. Es posible que se tenga aún que disputar la respuesta correcta; a tal grado aparece inverosímil. ¿Cuál es ésta?
Resulta que el ancho de la banda de un millón de cabellos llega aproximadamente cien metros. Seria muy dificultoso que cupiera, ya no a través de una puerta, sino aún a lo ancho de una calle de una metrópoli. Esto parece improbable, pero tomándose el trabajo de hacer cuentas, uno se convence que precisamente es así

$$0.1 \text{ mm} \times 1.000.000 = 0.1 \text{ m} \times 1000 = 0.1 \text{ km} = 100 \text{ m}$$

(Nosotros efectuamos aquí la multiplicación por el siguiente procedimiento en lugar de la multiplicación de los números, substituimos dos veces la unidad de medida por otra mil veces mayor. Este método es muy conveniente para cuentas orales y conviene empleársele en los cálculos con medidas métricas.).
Volver

6. Ejercicios con un Millón

Hágase, mucho mejor sólo oralmente, una serie de ejercicios para familiarizarse en una forma conveniente con la magnitud del millón.

- La magnitud habitual de un mosquito de habitación es generalmente conocida: es de alrededor de 7 mm de longitud. ¿Pero cuál sería su longitud al aumentársele un millón de veces?

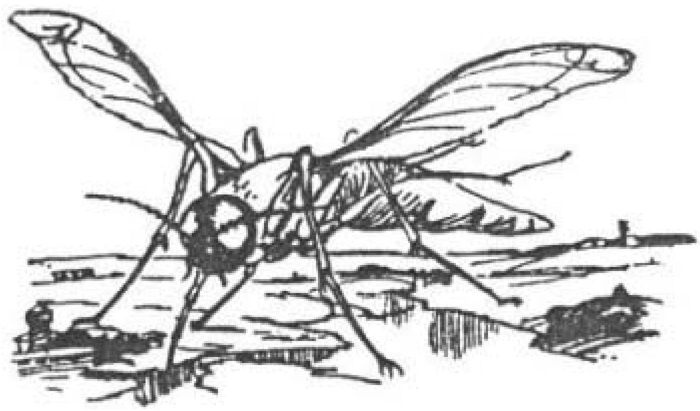


Figura 53. Mosquito aumentado en un millón de veces.

Resolución: Multiplicamos 7 mm por 1 000 000, y obtenemos 7 km; aproximadamente la anchura de una ciudad grande. Quiere decir que el mosquito aumentado linealmente en un millón de veces, podría cubrirla con su cuerpo. Inclusive un mosquito, aumentado en un millón de veces, tendría también un aspecto muy imponente (ver Fig. 53).

- Aumenten mentalmente en un millón de veces (en anchura) vuestros relojes de bolsillo y obtendrán de nuevo un resultado sorprendente; es muy dudoso que a ustedes se les ocurra anticipadamente sin cálculo. ¿Cuál es?
  Resolución: Los relojes tendrían una anchura de 50 kilómetros, y cada cifra se extendería sobre una milla geográfica (7 km).
- ¿Qué altura alcanzaría un hombre, un millón de veces más alto que la talla normal?
  Resolución. 1700 kilómetros. El seria, en total, 8 veces menor que el diámetro de la esfera terrestre. Literalmente, con un paso él podría ir de Leningrado a Moscú, y si se acostara (Fig. 54), se extenderla desde el golfo de Finlandia hasta Crimea.

Figura 54. Un hombre aumentado un millón de veces, se extendería desde el golfo de Finlandia hasta Crimea

Presento todavía algunas cuentas hechas del mismo tipo, dando al lector la posibilidad de comprobarlas:

- Caminando un millón de pasos en una misma dirección, ustedes se alejan 600 kilómetros. De Moscú a Leningrado hay un millón con pasos excedentes.
- Un millón de hombres alineados en una sola fila, hombro con hombro, se extenderían 250 km
- Un millón de puntos del carácter tipográfico de este libro, colocados muy juntos, se alargarían en una línea con una longitud de 100 metros.
- Sacando agua con un dedal un millón de veces, se vacía alrededor de una tonelada de agua.
- Un libro con un millón de páginas tendría un espesor de 50 metros.
- Un millón de letras las contiene un libro de impresión apretada con 600 - 800 páginas de formato medio.
- Un millón de días son más de 27 siglos. ¡Desde el principio de nuestra era no ha transcurrido aún un millón de días!

Haciendo ejercicios con el millón, podemos ahora con mérito, valorizar el colosal trayecto que cubrió el tercer satélite artificial soviético de la Tierra, lanzado el 15 de mayo de 1958. Durante solo un año giró alrededor de la Tierra casi 5100 veces y durante ese tiempo recorrió una trayectoria que supera los 230 millones de kilómetros. Esto constituye más de una y media veces la distancia hasta el Sol. Si nuestro explorador cósmico circulara entre la Tierra y la Luna, durante este año hubiese volado 300 veces de ida y vuelta a la Luna (La distancia media de la Tierra al Sol es igual a 150 millones de kilómetros; y de la Tierra a la Luna es igual a 389 400 kilómetros).
Volver

7. Nombres de los Gigantes Numéricos

Ya charlamos un poco sobre los millones. Antes de pasar a gigantes numéricos aún mayores, detengámonos en sus nombres admitidos en una serie importante de países.
A1 principio del libro hicimos mención a los órdenes y las clases en nuestro sistema de numeración decimal. Así, a lo indicado anteriormente añadimos ahora, que el millón es un mil de miles, es decir, es la unidad de tercera clase. Después van las decenas, y las centenas de millones. Un millar de millones forman la unidad de cuarta clase, denominada billón. De este modo 1 billón es igual a 1000 millones. Se escribe en la forma:

$$1\ 000\ 000\ 000,$$

es decir, una unidad con nueve ceros.
En América Latina y en España un billón es igual a un millón de millones. Se escribe de esta forma:

$$1\ 000\ 000\ 000\ 000,$$

es decir, una unidad con doce ceros.
Un millar de billones forman la unidad de quinta clase, que recibe el nombre de trillón. De esta manera, un trillón es igual a un millón de millones y se escribe en forma:

1 000 000 000 000,

es decir, una unidad con doce ceros.
En América Latina y en España un trillón es igual a un billón de millones. Se escribe de esta forma:

1 000 000 000 000 000 000,

es decir, una unidad con dieciocho ceros.
Si a ustedes les interesan los nombres de los supergigantes que siguen después del trillón, entonces estudien la tabla que aquí se proporciona:

Nombre del gigante numérico	Ceros después de la unidad
Cuatrillón	15
Quintillón	18
Sextillón	21
Septillón	24
Octillón	27
Nonillón	30
Decillón	33
Undecillón	36
Duodecillón	39

Después ya no se tienen nombres. Pero también estos, en esencia, casi no se usan y son muy poco conocidos.
En ciertos países se admite otro orden de los nombres de las clases, de manera que los nombres de las clase que coinciden con los admitidos por nosotros, tienen allí otros valores enteramente diferentes. Por billón se entiende allí, no un millar, sino un millón de millones, es decir, la unidad con 12 ceros; por trillón se entiende la unidad con 18 ceros, es decir, un millón de millón de millones, y por la palabra cuadrillón la unidad con 24 ceros, es decir, un millón de millón de millones, etc. Resumiendo, en estos países cada nuevo nombre más superior se le da a un millón de unidades inmediatamente inferiores (y no a un millar de ellas, como entre nosotros). Para evitar malentendidos conviene, por tal razón, acompañar siempre el nombre con las cifras.
Conviene, sin embargo, observar que en los libros científicos y en la práctica se adopta otro método de notaciones de los gigantes numéricos, que excluye cualquier posibilidad de una doble interpretación. Este método está basado en el uso de la operación de la elevación a una potencia. Por ejemplo, un trillón, es decir, la unidad con doce ceros se representa por el número 10, tomado 12 veces como factor. Esto se escribe, brevemente, así

$$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1 \times 10^{12}$$

es decir, un trillón es la unidad, multiplicada por 10 al exponente 12.
Proporcionemos un ejemplo. El número 2 cuadrillones 400 trillones, se escribe brevemente así:

$$2.4 \text{ x } 10^{15}$$

puesto que un cuadrillón es la unidad con 15 ceros (ver la tabla citada antes).
Frecuentemente se encuentra uno, en la física y la astronomía, con tal procedimiento de notación de los números muy grandes, pues así se ahorra espacio y, además, se facilita enormemente su lectura y la realización de las diversas operaciones (Ver más detalladamente sobre esto en el libro: Ya. I. Perelman "Algebra Recreativa").
Volver

8. El Billón

El billón es uno de los nombres jóvenes de los números. Entró en uso hasta el final de la guerra franco-prusiana (año 1871), cuando a los franceses se les condenó, debido a su derrota, a pagar a Alemania una contribución de 5 000 000 000 francos.
Para formarse una idea de la grandiosidad del billón, reflexiónese en que en el libro que lee ahora Ud. se encierran algo más de 300 000 letras. En tres de tales libros se encuentra un millón de letras. Y 10 billones de letras se contendrán en una pila de 30,000 ejemplares de este libro, pila que cuidadosamente compuesta, formaría una columna con una altura dos veces mayor que la Torre Eiffel de París, o sea, aproximadamente de 600 m, si el grueso del libro se considera de dos centímetros.

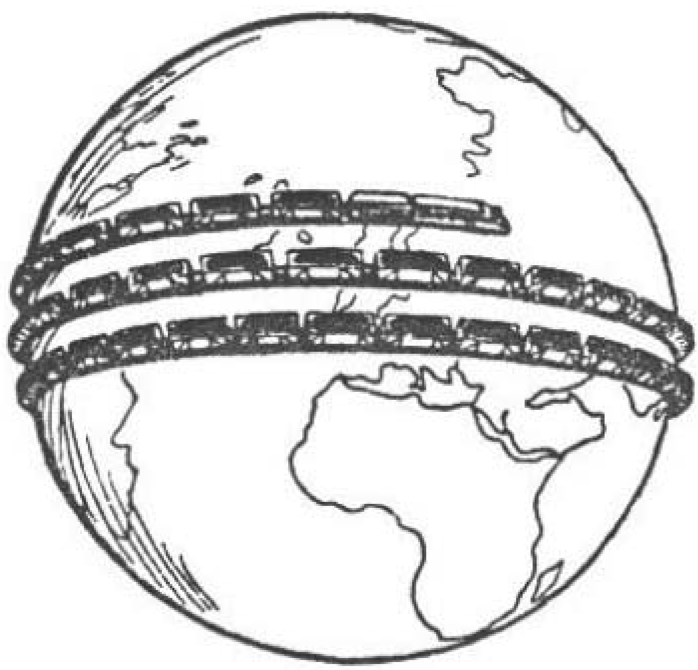


Figura 55. Un tren con el carbón que habrá de extraerse en el año 1965, podría ceñir la tierra por el Ecuador 2 ½ veces.

Ya hablamos antes sobre la pirámide de Keops, la más alta pirámide del antiguo Egipto, y ¿saben Uds. que de la hulla que se extraiga en 1965, pueden formarse 170 de tales pirámides?
Para el año de 1965 está fijado llevar la fundición de hierro hasta 65 a 70 millones de toneladas, la fundición de acero hasta 86 a 91 millones de toneladas, la producción de laminado hasta 65 a 70 millones de toneladas, la extracción de petróleo hasta 230 a 240 millones de toneladas.

Prueben calcular cuánto será producido durante cada día de 1965, y se convencerán por sí mismos, de la grandiosidad del plan.
Solamente durante 15 días de 1965 se extraerá más petróleo y se fundirá más acero, que en la Rusia zarista durante todo el año 1913.
Ejemplos mucho más sorprendentes representan en sí, las cifras de control conforme a la producción de energía eléctrica y a la extracción de gas.
De 500 a 520 billones de kilowatts-hora de energía eléctrica producirán en 1965 todas las estaciones eléctricas de nuestro inmenso país, es decir, conforme a 1.4 billones de kilowatts-hora por día. Para representarse este número gigante, proporcionemos una comparación. Un kilowatt-hora de energía eléctrica puede realizar tanto trabajo, como el que hacen dos vigorosos obreros al día. De esta manera en 1965 en nuestras fábricas, minas, yacimientos, construcciones, sovjoses, koljoces, trabajarán diariamente 2 billones 800 millones de "obreros eléctricos", es decir, tantos, como todos los hombres sobre la esfera terrestre. Queda agregar aún, que en 1966, en el transcurso de 32 horas se producirá tanta energía eléctrica, como la que fue producida en la Rusia zarista durante todo el año 1913.
Está fijado para 1965, extraer 150 billones de metros cúbicos de gas. Pero para conservar todo este gas en un balón, se necesitada construir, por ejemplo, un balón esférico cuyo diámetro superase los 6.5 kilómetros.
Ahora hablemos brevemente sobre los cereales, productos y mercancías de amplio consumo. Si nos detuviéramos a charlar detalladamente sobre todos los gigantes numéricos del plan septenal, entonces se tendría, quizás, que escribir un nuevo libro más al respecto.
En 1966 está fijado recolectar una cosecha de cereales de 10 a 11 billones de puds (en 1958 fueron recolectados 8.5 billones de puds). Tratemos de representar claramente, el peso de estos cereales. En la conversión a toneladas, esto constituye un total de 160 a 176 millones de toneladas. Para el transporte de tal cantidad de cereales se necesitarían de 40 a 44 millones de automáquinas con una capacidad de carga de 4 toneladas cada una colocadas en una sola fila, constituirían un autotren, cuya longitud superada notablemente la mitad de la distancia de la Tierra a la Luna.
Aportemos algunos de los gigantes numéricos del plan de promoción de las industrias de la alimentación y ligera en el último año del septenio. En 1965, está fijado producir

- más de 6 millones de toneladas de carne
- 1 millón de toneladas de manteca animal,
- 13.5 millones de toneladas de productos lácteos,
- 9.2 a 10 millones de toneladas de azúcar refinada,
- cerca de 8 billones de metros de tejidos de algodón,
- ½ billón de metros de tejidos de lana,
- cerca de 1 1/2 billones de metros de tejidos de seda, y más de ½ billón de pares de calzado de piel,

Proporcionemos algunas comparaciones. Si alguien deseara medir otra vez toda la producción de tejidos de algodón en 1565, conforme a un metro por segundo, deberá medir en el transcurso de más de 800 años, a razón de 10 horas diarias. Y si se presentan todas las piezas de este tejido desplegadas y unidas en una sola banda de un metro de ancho, dicha banda podría ceñir 200 veces, por el ecuador, a la Tierra. Semejante barda cabrá 20 veces entre la Tierra y la Luna (fig. 56).

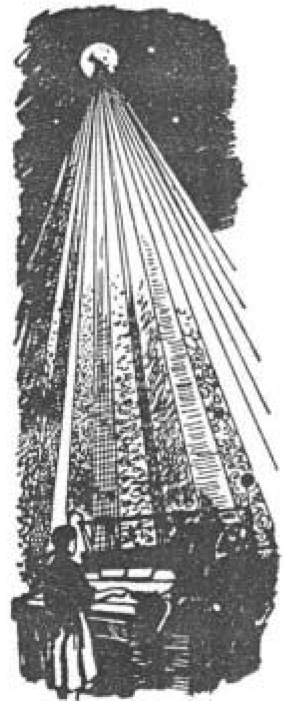


Figura 56. La banda de todos los tejidos de algodón que habrán de producirse en 1965, cabría 20 veces entre la Tierra y la Luna

En 1965 se editarán 2 billones de ejemplares de libros. La biblioteca más grande del mundo, la Biblioteca V. I. Lenin de Moscú, cuenta con 12 millones de ejemplares de libros. En esta forma, de todos los libros que se publiquen en 1965 se pueden completar 166 de tales inmensas bibliotecas. Si se considera el espesor medio de un libro aún menor que 1 centímetro, para colocar todos estos libros se necesitaría un recinto con una longitud total de 20 mil kilómetros.
Volver

9.- El trillón

Percibir la grandiosidad de este gigante numérico es difícil, inclusive para un hombre habituado a tratar con millones. El gigante-millón, es tan enano junto al super-gigante-trillón, como la unidad frente al millón. Habitualmente nos olvidamos de esta relación y en la propia imaginación no hacemos gran diferencia entre el millón y el trillón. Nos asemejamos aquí a aquellos pueblos primitivos que saben contar sólo hasta el 2 ó el 3, y todos los números arriba de esos, los designan por la palabra muchos.

En forma semejante a los botocudo (*Botocudo: tribu indígena del Brasil, casi completamente exterminada, llamada así por su deformación del labio inferior de la boca. Es interesante anotar que su sistema de numeración es binaria (N. del T.*)

que les parece insubstancial la diferencia entre el dos y el tres, así también a algunas gentes de cultura contemporánea, se les presenta insubstancial la diferencia entre un millón y un trillón. Por lo menos, no piensan en que uno de estos números es un millón de veces mayor que el otro y que, vale decir, el primero se relaciona al segundo, aproximadamente como 1a distancia de Moscú a San Francisco se relaciona al ancho de una calle.

Un cabello aumentado en espesor en un trillón de veces, tendría 8 veces el de la esfera terrestre, y una mosca con tal aumento tendría 70 veces el espesor del Sol.

En 1958 se publicaron 1.1 billones de libros; si se considera que en promedio, cada libro contiene 160 000 letras (tantas letras caben, aproximadamente en 80 páginas de un formato similar al de este libro), entonces la cantidad de letras en todos estos ejemplares de libros será igual, con un número redondo, a 150 trillones. Colocadas en hilera, muy cerca una de otra, formarían un hilo que se extendería de la Tierra al Sol.
El movimiento de mercancías de todos los tipos de transportes, será de 2.5 trillones de toneladas-kilómetros, en 1965. Esto quiere decir que, con todos los medios de transporte se transportaría en 1965 una carga de 16.5 mil toneladas en una distancia de la Tierra al Sol.
Finalmente, el gigante más grande de todos los números del plan septenal, es el volumen de las inversiones estatales de capital para 1959-1965, fijado en la suma de dos trillones de rublos. Este gigantesco número lo valen miles de fábricas, estaciones eléctricas, pozos de petróleo y gas, minas, nuevas carreteras, ciudades completamente nuevas de casas habitación.
Volver

10. Números Supergigantes
En la antigua "Aritmética" de Magnitski (siglo XVIII). sobre la cual ya hicimos mención más de una vez, se proporciona una tabla de nombres de las clases de los números hasta el cuadrillón, es decir, la unidad con 24 ceros (Magnitski retiene aquella clasificación de los números, que deja a cada nueva denominación, un millón de unidades inmediatamente inferiores (el billón es un millón de millones, etc.)
En nuestro sistema de nombres, la unidad con 24 ceros se llama septillón. En lo que sigue, en todas partes, se tiene en cuenta lo proporcionado en la tabla del sistema do nombres).
Este fue un gran paso hacia adelante en comparación con el más antiguo inventario numérico de nuestros antecesores. La antigua escalera eslava de los grandes números fue, hasta el siglo XV, excesivamente modesta, y llegó solamente hasta los cien millones. He aquí esta antigua numeración

"tysiascha"	1 000
"tma"	10 000
"legion"	100 000
"leodr"	1 000 000
"vran"	10 000 000
"koloda"	100 000 000

Magnitski en su tabla, amplió generosamente los antiguos límites de los grandes números. Pero consideraba prácticamente inútil prolongar demasiada lejos el sistema de nombres de los gigantes numéricos. Después de la tabla, el antiguo matemático señala (*En honor a la verdad, aquí Magnitski coloca unos versos alusivos al tema, pero tornando en cuenta que están en ruso antiguo y son, por tanto, casi intraducibles, loa hemos omitido pare evitar que una traducción incorrecta a ellos, falsee los pensamientos ahí contenidos. N. del T.*) que puesto que la mente humana no puede abarcar una serie infinita de números, entonces es inútil constituir números mayores que los representados en su tabla. Los números que se contienen en ella (desde la unidad hasta el septillón, es decir, hasta 1×10^{24} inclusive) son suficientes, de acuerdo a su opinión, para los cálculos de todos los objetos del mundo visible.
Es interesante que, aún en nuestros días, la mencionada tabla de Magnitski sea casi suficiente para aquellos investigadores de la naturaleza que se ocupan de los fenómenos de carácter estelar.

En la medición de las distancias hasta los más lejanos astros, apenas perceptibles con ayuda del más potente telescopio y con radiotelescopios, los astrónomos no llegan a utilizar nombres arriba del billón.
Los cuerpos celestes más alejados, conocidos por nosotros están a una distancia de la Tierra superior a un billón de "años luz" (*El "año luz" es una unidad de longitud utilizada en astronomía, es decir, es el espacio recorrido por la luz en el transcurso de un año (la luz en un segundo cubre aproximadamente, 300 000 kilómetros) N. del T.*). Si deseáramos expresar esta distancia en centímetros, obtendríamos alrededor de 10 000 septillones; en ese caso, tampoco saldríamos aún de los limites de la tabla de Magnitski.
Por otro lado, yendo al mundo de las magnitudes muy pequeñas, no sentiremos la necesidad de utilizar números superiores al septillón. El número de moléculas en un centímetro cúbico de gas, uno de los más grandes conjuntos realmente calculados, se expresa por decenas de un quintillón. El número de oscilaciones en un segundo, para las ondas electromagnéticas más cortas conocidas basta ahora, no supera a un sextillón, es decir a 1×10^{21}. Si tuviéramos la intención de contar cuántas gotas hay en el océano (igualando el volumen de una gota a 1 mm cúbico, lo que es muy poco), tampoco llegaríamos a emplear los nombres superiores al septillón, porque este número se calcula sólo por millares de septillón.
Y solamente ante e1 deseo de expresar cuántos gramos de substancia contiene todo nuestro sistema solar, se necesitaría un nombre arriba del septillón, puesto que en este número hay 34 cifras (el 2 y 33 ceros): 2×10^{33} .
Volver

11. Devoradores de Gigantes Numéricos

Finalmente, detengámonos en un gigante numérico (más exactamente, quizá, geométrico) de un género especial: la milla cúbica; tenemos en cuenta la milla geográfica que constituye una quinceava parte de un grado ecuatorial y contiene 7420 metros. Con las medidas cúbicas, nuestra imaginación se compensa muy débilmente; de ordinario subestimamos en gran medida sus magnitudes particularmente para las grandes unidades, con las que se llega a tener contacto en astronomía. Pero si nos representamos erróneamente a la milla cúbica, la más grande de nuestras medidas volumétricas, entonces, deberán ser erróneas nuestras representaciones acerca del volumen de la esfera terrestre, de los otros planetas, del Sol. Por esta razón, vale la pena consagrar algo de tiempo y atención para tratar de adquirir una representación más apropiada sobre la milla cúbica.
En lo que sigue, haremos uso de una exposición de cuadros de un semiolvidado libro "Un viaje fantástico a través del universo" (que apareció aproximadamente 100 años atrás).
"Supongamos que en una carretera recta podemos ver a una milla completa (7 ½ km.) hacia delante. Fabriquemos un mástil con una longitud de una milla y coloquémoslo en un extremo de la carretera. Ahora miremos hacia arriba y observemos qué tan alto es nuestro mástil.
Supongamos que al lado de este mástil se halla una estatua humana con la misma altura, la estatua tiene una altura de más de siete kilómetros de altura. En tal estatua la rodilla se encontrará a una altura de 1800 metros; será necesario apilar una sobre otra, 25 pirámides egipcias, para alcanzar la cintura de la estatua.
Imaginémonos ahora, que hemos colocado dos de tale mástiles con una altura de una milla, a una distancia de una milla uno del otro, y unidos por planchas; obtendríamos una pared de una milla de longitud y una de altura. Esto es una milla cuadrada.
Tenemos una pared vertical de madera. Representémonos en sí, cuatro paredes semejantes, elevadas todas como un cajón (fig. 57). Lo cubrimos encima con una tapa de una milla de

longitud y una milla de ancho. Este cajón ocupa el volumen de una milla cúbica. Observemos ahora qué tan grande es, o sea, qué tanto se puede colocar en él.

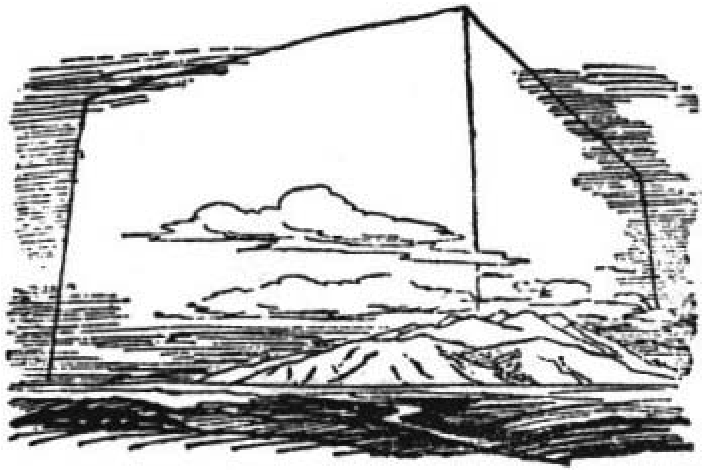


Figura 57. El cajón con un volumen de una milla geográfica cúbica, podría contener los edificios de todo el mundo, las flotas de todos los estados, todas las máquinas y construcciones de los cinco continentes, todos los habitantes del mundo, incluidos los animales, y con eso, aún no se llenaría.

Quitando la tapa, empecemos lanzando en el cajón todos los edificios de Leningrado. Estos ocupan allí muy poco lugar.

Se parte hacia Moscú, y en e1 camino cogemos todas las grandes y las pequeñas ciudades. Pero puesto que todo esto cubrió solamente el fondo del cajón, entonces para colmarlo busquemos materiales en otro lugar. Tomemos París con sus arco del triunfo y su torre Eiffel y lancémosles allí. Todo esto vuela como en, un principio: el aumento apenas es manifiesto. Agreguemos Londres, Viena, Berlín. Pero puesto que todo esto es pequeño para llenar algo el vacío del cajón, entonces empezamos a lanzar allí, indistintamente, todas las ciudades, las fortalezas, los castillos, las aldeas, los diversos edificios. Sin embargo, es poco. Lancemos allí, todo lo hecho por las manos del hombre en Europa; pero aún con todo esto, el cajón apenas se llena hasta una cuarta parte. Lancemos al cajón todas las pirámides egipcias, todos los rieles de los Viejo y Nuevo Mundos, todas las máquinas y fábricas del mundo, todo lo que está hecho por los hombres en Asia, África, América, Australia. El cajón se llena apenas a la mitad. Sacudámosle para que lado en él se arregle mas regularmente, y probemos, si es posible, completarlo con hombres.

Reunamos toda la paja y todo el algodón que existen en el mundo, y entendámoslos en el cajón; obtenemos una capa que preserva a los hombres de las contusiones inherentes a la realización de semejante experiencia. Toda la población de Alemania se acuesta en la primera capa. Cubrámosla con una suave capa de un pie de espesor y acostemos aún otro tanta. Cubramos también esta capa y colocando después capa sobre capa, coloquemos en el cajón toda la población, de Europa, Asia y África, América, Australia... Todo esto ocupa no más de 50 capas, es decir, considerando una capa de un espesor de 1 metro, en total son 50 metros. Se necesitarían decenas de veces más hombres que los que existen sobre la Tierra para llenar 1a segunda mitad del cajón…

¿Qué hacemos? Si deseamos colocar en el cajón todo lo viviente del mundo, todos los caballos, toros, burros, mulos, carneros, etc., y sobre ellos poner todas los pájaros peces y serpientes, todo lo que vuela y se arrastrar- ni aún así llenaríamos el cajón hasta los bordes sin ayuda de arena y rocas.

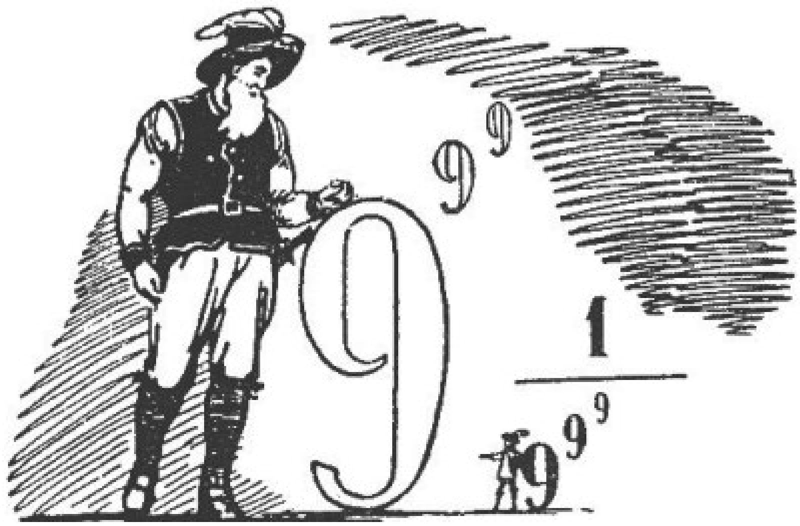
Tal es una milla cúbica. Y de la esfera terrestre pueden hacerse 660 millones de semejantes cajones. Con todo respeto para la milla cúbica, a la esfera terrestre se le llega a alimentar aún con mucho más consideración".
A lo indicado agreguemos, que la milla cúbica de granos de trigo contaría con algunos quintillones de ellos. Como se ve, este gigante cúbico es un moderno devorador de otros gigantes (Y toda la grandiosidad de este gigante cúbico disminuye significativamente si so considera que el peso del gas que se ha determinado extraer en 1965, ocuparía más de la tercera parte del volumen de este devorador de gigantes numéricos).
Volver

12. Gigantes del Tiempo
Loa inmensos intervalos de tiempo, solemos representarlos aún mucho más confusamente que los enormes volúmenes y distancias. La geología enseña que a partir del tiempo de sedimentación de las más antiguas capas de la corteza terrestre, han transcurrido cientos de millones de años. ¿Cómo sentir la inconmensurable grandiosidad de tales períodos de tiempo? Un científico propone para ello, un método
"Todo el transcurso de la historia de 1a Tierra, lo representamos por una línea recta de 500 km. Sea que esta distancia represente los 500 millones de años que transcurrieron desde el principio de la época Cambriana (una de las épocas más antiguas de la historia de la certeza terrestre). Puesto que un kilómetro representa una duración de un millón de años, entonces los últimos 500 a 1000 m. representan la duración del período glacial, y los 6000 años de la historia del mundo se reducen a 6 m.; en esta escala, 70 años de vida del hombre se representan por una línea de 7 cm. Si se obliga a un caracol a arrastrarse toda la distancia nombrada, con su velocidad normal, que es de 3.1 mm por segundo, tardaría 5 años en recorrerla; y toda la extensión desde el principio de la primera guerra mundial hasta nuestros días, la superaría en 40 segundos... Así vemos cuán insignificantes son, en la escala de la historia de la Tierra, esos breves lapsos de tiempo que el hombre puede abarcar con su propia inteligencia".
Volver

14. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} + \\ + 57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18} \end{cases}$$

Volver



Capitulo Décimo
LILIPUTIENSES NUMERICOS

Contenido:

1. De Gigantes a Enanos
Gulliver en sus viajes, habiendo abandonado a los liliputienses, se encontró entre gigantes. Nosotros viajamos en sentido inverso: una vez entabladas las relaciones con los gigantes numéricos, pasamos al mundo de los liliputienses, a los números que son tantas; veces menores que la unidad, como la unidad es menor respecto a un gigante numérico.
Hallar representantes de este mundo no constituye ningún trabajo. Para esto es suficiente escribir una serie de números recíprocos del millón, del billón, del trillón, etc., es decir, dividir la unidad entre estos números. Las fracciones resultantes

$$\frac{1}{1.000.000}, \frac{1}{1.000.000.000}, \frac{1}{1.000.000.000.000}, etc$$

son típicos liliputienses numéricos, igualmente pigmeos en comparación a la unidad, como ésta lo es en comparación con el millón, el billón, el trillón y con otros gigantes numéricos.
Como vemos, a cada número gigante le corresponde un número liliputiense y, por consiguiente, existen no menos liliputienses numéricos, que gigantes. Ya hicimos mención que los números muy grandes en las obras científicas (en astronomía, en física) se denotan así:

$$1\ 000\ 000 = 10^6$$

$$10\ 000\ 000 = 10^7$$

$$400\ 000\ 000 = 4 \times 10^8$$

$$6 \text{ cuadrillones} = 6 \times 10^{15}, \text{ etc.}$$

Correspondientemente a esto, los liliputienses numéricos se denotan en la siguiente forma:

$$1/1\ 000\ 000 = 10^{-6}$$

$$1/100\ 000\ 000 = 10^{-8}$$

$$3 / 1\ 000\ 000\ 000 = 3 \times 10^{-9}$$

¿Existe, sin embargo, una necesidad real de semejantes fracciones? ¿Se llega alguna vez, efectivamente, a tener que ver con tan pequeñas fracciones de la unidad?
Charlar sobre esto detalladamente es muy interesante.
Volver

2. Liliputienses del Tiempo

El segundo, conforme a la creencia general, es un intervalo de tiempo tan breve, que sus fracciones demasiado pequeñas no son utilizables bajo ninguna circunstancia. Es fácil escribir 1/1000 de segundo, pero ésta es una magnitud puramente de papel, porque no hay nada que pueda ocurrir en tan insignificante intervalo de tiempo.
Así piensan algunos, pero se equivocan, porque en una milésima parte de un segundo hay tiempo para que se realicen numerosos fenómenos.
Un tren que atraviesa 36 km en una hora, recorre 10 m. en un segundo y, por lo tanto, en el transcurso de una milésima parte del segundo avanza un centímetro. El sonido en el aire se traslada 33 cm en el curso de un milésimo de segundo; en el mismo lapso se traslada 70 cm una bala que dispara un cañón de fusil con una velocidad de 700 a 800 m por segundo. La esfera terrestre, en su rotación alrededor del Sol, se desplaza 30 m cada milésimo de segundo. Una cuerda que emite un tono alto completa en un milésimo de segundo, 2 a 9 y más oscilaciones; inclusive un mosquito avanza en este tiempo, al batir hacia arriba o hacia abajo sus alitas. Un relámpago dura mucho menos que un milésimo de segundo; en el curso de este intervalo surge y se convierte en un importante fenómeno de la naturaleza (el relámpago se extiende, en longitud, por kilómetros enteros).
Pero, pueden objetar, a una milésima parte de un segundo aún no es posible reconocerle como un liliputiense, puesto que nadie llama gigante numérico al millar. Si se toma una millonésima parte de un segundo, entonces ya no es posible afirmar con seguridad, que ésta sea una magnitud real, un intervalo de tiempo en el curso del cual pueda ocurrir algo. ¡Se equivocan! Aún un millonésimo de segundo, para la física contemporánea, por ejemplo, no es un intervalo excesivamente pequeño.
En el dominio de los fenómenos luminosos (y eléctricos), el científico tiene que vérselas con partes mucho más pequeñas del segundo. Recordemos ante todo, que los rayos luminosos recorren (en el vacío) 300 000 km por segundo; por consiguiente, en un millonésimo de segundo la luz se desplaza en una distancia de 300 m; aproximadamente tanto como lo que se desplaza el sonido en el aire, en el transcurso de un segundo completo.

Además, la luz es un fenómeno ondulatorio, y el número de ondas luminosas que pasan por cada punto del espacio, en un segundo, se calculan por cientos de trillones. Las ondas luminosas que al actuar sobre nuestro ojo provocan la sensación de la luz roja, tienen una frecuencia de 400 trillones de oscilaciones por segundo; esto quiere decir que en el transcurso de un millonésimo de segundo entran en nuestro ojo 400 000 000 de ondas, y una onda entra en el ojo en el transcurso de una 400 000 000 000 000 parte (1/400 000 000 000 000) de segundo. ¡Este es un auténtico liliputiense numérico!

Sin embargo, este liliputiense resulta un verdadero gigante en comparación con aún más pequeñas partes del segundo, con las cuales el físico se encuentra en la investigación de los rayos Röntgen. Estos extraordinarios rayos. que poseen la propiedad de pasar a través de algunos cuerpos opacos, representan en sí, como los rayos visibles, un fenómeno ondulatorio, pero su frecuencia oscilatoria es significativamente mayor que en los visibles: alcanza 2500 trillones en un segundo. Las ondas se siguen una después de otra, más frecuentemente que en los rayos de la luz roja visible; y como si esto fuera poco, los rayos "gamma" poseen una frecuencia todavía mayor que los rayos de Röntgen.

Así que también en el mundo de los liliputiense existen sus propios gigantes y enanos. Gulliver era doce veces más alto que los liliputienses, y ya les parecía un gigante. Aquí existe un liliputiense mayor que otro, en cinco docenas de veces y, por consiguiente, tiene todo el derecho a nombrarse gigante con relación a él.

Volver

3. Liliputienses del Espacio

Es interesante considerar ahora, cuáles son las mínimas distancias que llegan a medir y valorar los modernos investigadores de la naturaleza.

En el sistema métrico de medidas, la mínima unidad de longitud para el empleo usual es el milímetro, que es aproximadamente dos veces menor que el espesor de un cerillo. Para medir objetos visibles a simple vista, tal unidad de longitud es suficiente. Pero para la medición de bacterias y de otros objetos que sólo son visibles en potentes microscopios, el milímetro es excesivamente grande. Para tales mediciones, los científicos emplean una unidad más pequeña: el micrón, que es 1000 veces menor que el milímetro. Así, los llamados glóbulos rojos, que se calculan por decenas de millones en cada gota de nuestra sangre, tienen una longitud de 7 micrones, y un espesor de 2 micrones. Una pila de 1000 de tales glóbulos mide lo que el espesor de un cerillo.

A pesar de que nos parece pequeño el micrón, sin embargo se muestra excesivamente grande para las distancias que se llegan a medir en la física contemporánea. Las más pequeñas partículas, la molécula, de las cuales se constituye la substancia de todos los cuerpos de la naturaleza, inaccesibles inclusive al microscopio, y los aún más pequeños átomos, que constituyen a las moléculas, tienen dimensiones desde una centésima hasta una milésima parte del micrón (La más pequeña unidad de longitud empleada en la física contemporánea, es la equis: ella es igual a una diezmillonésima parte del micrón). Si tomamos un millón de granitos de esta última medida y los colocamos en línea recta, muy juntos el uno al otro, (y ya sabemos qué tan grande es un millón) ¡ocuparían en total, un milímetro!

Para representar con más claridad la extraordinaria pequeñez de los átomos, veamos el siguiente cuadro: imagínese que todos los objetos en la esfera terrestre se aumenten en un millón de veces. Entonces la cúspide de la torre Eiffel (de 300 m. de altura) se hallaría a 300 000 km en el espacio universal, o sea, en las vecindades de la órbita de la Luna. Los hombres tendrían una altura de 1700 km, es decir, 1/4 del radio terrestre. Un paso de tal hombre gigante lo llevaría a unos 600-

700 km. Los pequeños glóbulos rojos, billones de los cuales flotan en la sangre, tendrían, cada uno, más de 7 m. de diámetro. Un cabello tendría 100 m. de espesor. Un ratón alcanzaría 100 km de longitud una mosca 7 km.
¿Qué dimensiones tendrá un átomo de substancia, con tal monstruoso aumento?
Ni siquiera es de creerse: sus dimensiones se presentan ante nosotros en forma de . . . ¡un punto tipográfico de los caracteres de este libro!
¿Ya hemos alcanzado los últimos límites de la pequeñez espacial, más allá de los cuales no llega a pasar inclusive la física, con sus métodos refinados de medición?. Todavía no hace mucho se pensaba así, pero ahora está demostrado que el átomo es un mundo completo que consiste de partes mucho más pequeñas, y resulta ser el marco de la acción de poderosas fuerzas. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno consiste de un "núcleo" central y de un "electrón" que gira rápidamente alrededor de aquel. Sin entrar en pormenores, indiquemos solamente que el diámetro del electrón se mide por trillonésimas partes de milímetro. Con otras palabras, el diámetro del electrón es casi un millón de veces menor que el diámetro del átomo. Si se desea comparar las dimensiones del átomo con las dimensiones de una partícula de polvo, el cálculo mostrará que el electrón, es menor que la partícula de polvo, aproximadamente en tantas veces como la partícula de polvo es menor que, ¿adivinaron?, ¡la esfera terrestre!
Ven ustedes que el átomo, un liliputiense entre liliputienses, resulta simultáneamente, un gigante actual en comparación con el electrón que entra en su composición; un gigante semejante a como todo el sistema solar lo es, con relación a la esfera terrestre.
Se puede formar la siguiente escalera instructiva, en la que cada escalón resulta un gigante en relación al escalón anterior, y, un liliputiense con relación al posterior:

- electrón
- átomo
- polvillo
- casa
- globo terrestre
- sistema solar
- distancia a la estrella Polar
- Vía Láctea

Cada miembro de esta serie es aproximadamente un cuarto de millón de veces (Se tienen en cuenta las dimensiones lineales (y no los volúmenes), es decir, el diámetro del átomo, el diámetro del sistema solar, la altura o longitud de la casa, etc. (*Para más detalles sobre tal clase de comparaciones remito al lector a mi libro "¿Sabe Ud. Física?"*) mayor que el precedente, y otras tantas veces menor que el posterior. Nada demuestra tan elocuentemente la relatividad de los conceptos "grande" y "pequeño", como esta tabla. En la naturaleza no existen objetos incondicionalmente grandes o incondicionalmente pequeños. Todo objeto puede ser llamado aplastantemente grande o inmensamente pequeño, según cómo se mire el objeto, en relación con lo que se le compare.
Volver

4. Supergigante y Superliliputiense
Nuestras charlas sobre los gigantes y los enanos del mundo de los números serían incompletas, si no hablásemos al lector sobre una maravilla sorprendente, no nueva, pero que vale por una

docena de maravillas. Para llegar a ella, empecemos con lo que sigue, en forma de un problema muy sencillo: ¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con tres cifras, no empleando ningún signo de operación?
Se desea responder: 999, pero probablemente ustedes ya sospechan que la respuesta es otra; en efecto, la respuesta correcta se escribe así (los paréntesis se han puesto para darle mayor claridad a la expresión):

$$9^{9^9}$$

Esta expresión denota "nueve a la potencia novena a la novena potencia" (En el lenguaje de la matemática, tal expresión se llama "tercera ultrapotencia de nueve"). En otras palabras: es necesario formar el producto de tantos nueves, como unidades halla en el resultado de la multiplicación:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

Basta con principiar el cálculo, para sentir la grandiosidad del resultado esperado. Si poseen la paciencia para efectuar la multiplicación de los nueve nueves, obtendrán el número

387 420 489.

Apenas comienza el trabajo principal: ahora es necesario hallar

$$9^{387\,420\,489}$$

es decir, el producto de 387 420 489 nueves. Hay que darse ánimo para hacer, en números redondos, 400 millones de multiplicaciones …
Ustedes, naturalmente, no tendrán tiempo de llevar hasta el final semejante cálculo. Pero yo estoy privado de la posibilidad de comunicarles el resultado final, debido a tres causas que no es posible dejar de tomar en cuenta. En primer lugar, este número nunca ha sido calculado por alguien (sólo es conocido un resultado aproximado). En segundo lugar, si inclusive hubiese sido calculado, para imprimirlo se necesitarían no menos de mil libros como éste, debido a que nuestro número consiste de

369 693 061 cifras:

compuesto con caracteres ordinarios, tendría una longitud de 1000 km: ¡desde Leningrado hasta Gorki! (Fig. 58).

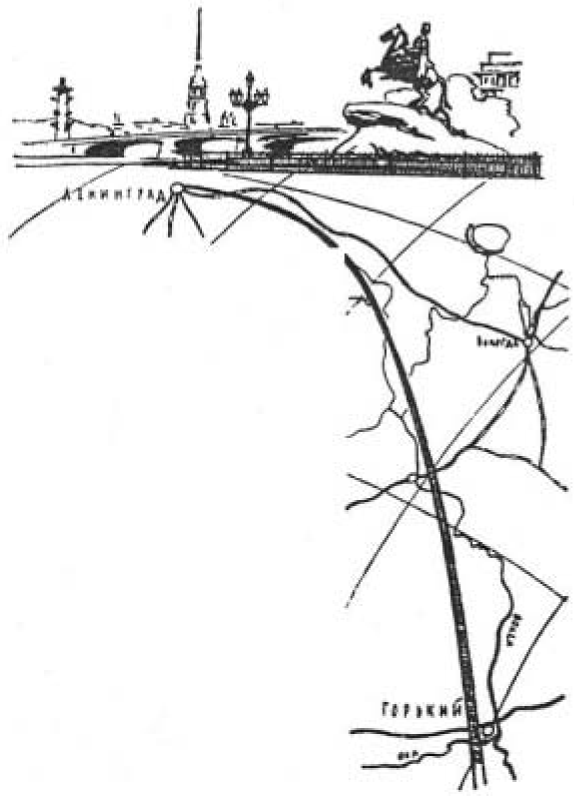


Figura 58. El número expresado por la potencia 9^{9^9}, consiste en 370 millones de cifras. Si se escriben todas estas cifras en apretada hilera, ésta se alargaría en 1000 km, que es la distancia entre Leningrado (arriba) y Gorki (abajo)

Finalmente, si yo estuviera provisto de suficiente cantidad de papel y tinta, tampoco podría satisfacer vuestra curiosidad. Ustedes, fácilmente se pueden imaginar por qué: si yo estuviera capacitado para escribir en un segundo, sin interrupción, digamos dos cifras, en una hora escribo 7200 cifras, y en un día trabajando sin interrupción día y noche, no más de 172800 cifras. De aquí se sigue que, no separándome ni un segundo de la pluma, trabajando 24 horas diarias sin reposo, yo estaría sentado durante el trabajo, no menos de 7 años, antes de que terminara de escribir este número...
Sobre este número, sólo puedo comunicarles a ustedes lo siguiente: empieza con las cifras

428 124 773 175 747 048 036 987 118

y termina en

89.

Lo que se halla entre este comienzo y el final, se desconoce (El principio del número está calculado con ayuda de logaritmos, el final está determinado por razonamiento). ¡En cuanto que allí existen 369 693 061 cifras?
Vemos que el número de cifras de nuestro resultado es inconcebiblemente grande. Ahora bien, ¿Qué tan grande es el número expresado por esta inmensa serie de cifras? Es difícil dar aunque

sea una representación aproximada sobre su magnitud, porque tal conjunto de objetos, considerando inclusive cada electrón en calidad de un objeto por separado, ¡no existe en el Universo!

Arquímedes, antiguamente, calculó cuántos granos de arena contenía en sí el Universo, si todo él, hasta las estrellas fijas, estuviera lleno por una finísima arena. Obtuvo de esto un resultado que no supera a la unidad con 63 ceros. Nuestro número consiste no de 64, sino de 370 millones de cifras; por consiguiente, éste supera inconmensurablemente al colosal número de Arquímedes.

Habiéndonos puesto en relación con este gigante enmascarado

$$9^{9^9}$$

dirijámonos a su contraposición.

El correspondiente liliputiense numérico se obtiene si dividimos la unidad entre este número. Tendremos

$$\frac{1}{9^{9^9}}$$

lo que es igual a

$$9^{1/387420489}$$

Aquí tenemos, en el denominador, un colosal número conocido por nosotros. El supergigante ha sido convertido en un superliliputiense.

Es necesario hacer una importante observación sobre el gigante de los tres nueves. Yo recibí pequeñas cartas de lectores con la afirmación de que esta expresión no es absolutamente difícil de calcular; una serie de lectores, inclusive realizó el cálculo requerido, empleando en él un tiempo comparativamente corto. El resultado se mostraba incomparablemente más sencillo que aquel sobre el cual yo había hablado. En efecto, ellos escriben

$$9^9 = 387\ 420\ 489;$$

elevando 387 420 489 a la novena potencia, obtenemos un número "en total solamente" de 72 cifras. Aunque esto no es pequeño, sin embargo llegar hasta 370 millones de cifras a partir de él, está aún muy difícil…

Los lectores quedan perplejos, mientras que su error consiste en que entienden incorrectamente el sentido de la expresión "de tres pisos" de nueves. Ellos lo entienden así:

$$(9^9)^9$$

mientras que su comprensión correcta es otra:

$$9^{9^9}$$

De aquí la enorme diferencia en los totales del, cálculo.
Ambos métodos de comprensión conducen a un idéntico resultado sólo en un caso: cuando tenemos la expresión

$$2^{2^2}$$

Aquí es indistinto cómo se efectos el cálculo: en ambos casos se obtiene un resultado: 16.
Es curioso que la expresión ahora citada, no denota en lo absoluto el número mayor que puede representarse por los tres doses. Se puede obtener un número inmensamente más grande si se disponen los doses así

$$2^{22}$$

Esta expresión es igual a

4 194 304,

es decir, es significativamente mayor que dieciséis.
Como se ve, una disposición "de tres pisos" de cifras, no en todos los casos expresa el mayor número que se pueda representar por tres cifras iguales. (Sobre esto se habla más detalladamente en "Álgebra Recreativa", Cap. I: "La quinta operación matemática".
Volver

5. Curiosidades Aritméticas

$$2 \times 2 = 2 + 2$$
$$11 \times 1.1 = 11 + 1.1$$
$$3 \times 1\ ½ = 3 + 1\ ½$$
$$21 \times 1/20 = 21 + 1\ 1/20$$

Volver

Capítulo Undécimo
VIAJES ARITMETICOS

Contenido:

1. Vuestro Viaje Alrededor del Mundo

En la juventud trabajé como secretario en la redacción de una revista de Leningrado, de gran circulación. En una ocasión, me presentaron una tarjeta de visita en la que leí un apellido desconocido, y una designación muy singular de una profesión: "el primer viajero a pie, ruso, alrededor del mundo". Por las obligaciones del servicio, más de una vez tuve ocasión de conversar con viajeros de todas partes del mundo, e inclusive con trotamundos; pero nunca había tenido noticia acerca de un "viajero a pie alrededor del mundo". Con curiosidad me apresuré a la recepción, para entablar relación con este hombre infatigable.
El notable viajero era joven y tenía un aspecto muy sencillo. A la pregunta de cuándo pensaba realizar su extraordinario viaje, "el primer trotamundos ruso, etc.", me explicó que lo estaba realizando precisamente ahora. ¿Qué itinerario?: Shuvalovo - Leningrado (Shuvalovo es una pequeña estación a 10 kilómetros de Leningrado) él deseaba consultar conmigo acerca de la continuación…
De la conversación se aclaró que los planes del "primer ruso, etc." eran demasiado vagos, pero una idea clara era, la decisión de no abandonar los límites de Rusia.

-¿Cómo realiza Ud., en tal caso, el viaje alrededor del mundo? - pregunté con asombro.
- El hecho esencial que es el de recorrer la longitud de la circunferencia terrestre, se puede hacer también en Rusia, resolvió mi duda. Ya han sido recorridos diez kilómetros, y quedan…
- En total 39 990. ¡Feliz viaje!

No sé cómo viajó "el primer, etc.", en el resto de su trayecto, pero no dudo en absoluto, que haya realizado su intención felizmente. Inclusive si hubiera suspendido su viaje para regresar al Shuvalovo original quedándose a vivir permanentemente ahí, también debió recorrer no menos de 40 mil kilómetros. Sólo que, infortunadamente, él no es el primero ni el único hombre que ha realizado tal hazaña. Usted y yo, y la mayoría de los habitantes del mundo tienen el mismo derecho de llamarse "viajeros a pie alrededor del mundo" conforme a la concepción del caminante de Shuvalovo. Porque cada uno de nosotros, por persona casera que sea, ha tenido tiempo en el transcurso de su vida, sin sospecharlo, de recorrer una trayectoria a pie aún más larga que la circunferencia de la esfera terrestre. Un pequeño cálculo les convencerá.
En el transcurso de cada día ustedes naturalmente pasan sobre los pies no menos de 5 horas caminando en la habitación, en el patio, en la calle, en una palabra, en una u otra forma dan pasos. Si tuvieran en el bolsillo un "podómetro" (aparato para contar los pasos hechos), les

indicaría que ustedes caminan no menos de 30.000 pasos diariamente. Pero también sin "podómetro" es claro que la distancia diaria recorrida por vosotros, es muy considerable. Con una marcha lenta, un hombre recorre de 4 a 5 km en una hora. Esto constituye, durante las cinco horas al día, de 20 a 25 km. Ahora falta multiplicar la marcha diaria por 360, y sabremos qué trayectoria recorre cada uno de nosotros en el curso de un año completo:

$$20 \times 360 = 7200 \text{ ó } 25 \times 360 = 9000.$$

Así, aún un hombre pesado que nunca abandone su ciudad natal recorre cada año, a pie, alrededor de 8.000 km. Y puesto que la circunferencia de la esfera terrestre tiene 40.000 km, entonces no es difícil calcular en cuántos años realizarnos e1 viaje a pie, igual a uno alrededor del mundo:

$$40.000 : 8.000 = 5.$$

En ese caso, en el transcurso de 5 años se recorre una trayectoria cuya longitud es igual a la circunferencia de la esfera terrestre. Todo muchacho de 13 años, si se considera que empezó a caminar a los dos años de edad, ha realizado ya dos veces "el viaje alrededor del mundo". Todo hombre de 25 años, ha efectuado no menos de cuatro de tales viajes. Y viviendo hasta los 60 años, damos diez veces la vuelta alrededor de la esfera terrestre, es decir, recorremos una trayectoria más larga que la de la Tierra a la Luna 380.000 km).
Tal es el resultado inesperado de la cuenta de un fenómeno tan ordinario como nuestra marcha diaria en la habitación y fuera de la casa.
Volver

2. Vuestra Ascensión Al Monte Blanco
Veamos otra interesante cuenta: Si ustedes interrogan a un cartero, que diariamente reparte cartas a destinatarios, o a un médico a domicilio, que tiene el día ocupado con las visitas a los pacientes, si han realizado una ascensión al Monte Blanco, naturalmente se sorprenderán por tal pregunta. Mientras tanto, se les podrá demostrar fácilmente que, sin ser alpinista, ellos probablemente han efectuado ya una ascensión a una altura que, inclusive, supera la más grandiosa cumbre de los Alpes. Basta con contar cuántos escalones sube el cartero diariamente, ascendiendo por las escaleras en la repartición de cartas, o el médico visitando enfermos. Resulta que el modesto cartero y el ocupado médico que, inclusive, nunca mostraron inclinación hacia las competencias deportivas, rompen los récords mundiales de las ascensiones a las montañas.
Tomemos para la cuenta, cifras medias muy discretas; admitamos que el cartero visite diariamente sólo a diez personas que viven en el segundo piso, en el tercero, en el cuarto, en el quinto, y tomemos como promedio el tercer piso. La altura del tercer piso la consideramos, en números redondos, de 10 m.; por consiguiente, nuestro cantero lleva a cabo una trayectoria diaria, por la escalera, a una altura de $10 \times 10 = 100$ m. La altura del Monte Blanco es de 4.800 m. Dividiéndola entre 100, encontramos que nuestro modesto cartero efectúa la ascensión al Monte Blanco en 48 días…

Figura 59. Un cartero, en el transcurso de un año, asciende ocho veces a la cumbre de las montañas más altas de Europa

Así, cada 48 días, o aproximadamente 8 veces al año, cartero asciende por la escalera, una altura igual a 1a de la cumbre más alta de Europa. Digan: ¿Qué deportista escala 8 veces, cada año, el Monte Blanco?

Para el médico tengo, no cifras supuestas, sino reales. Los médicos de asistencia domiciliaria en Leningrado contaban que, en promedio, cada uno de ellos durante un día de trabajo subía 2.500 escalones a casa de los enfermos.

Considerando la altura de un escalón de 15 cm,, y 300 días de trabajo al año, obtenemos que durante un año un médico asciende 112 km, es decir, realiza 20 veces la ascensión al Monte Blanco.

No es, indispensable ser cartero o médico para llevar a cabo semejantes hazañas. Yo vivo en un segundo piso, en un departamento a donde conduce una escalera con 20 escalones, un número que parece muy discreto. Cada día llego a subir corriendo esta escalera 5 veces, además de mis visitan a dos departamentos situados, digamos, a la misma altura. En promedio se puede considerar que yo asciendo diario 7 veces la escalera con 20 escalones, es decir, diario subo 140 escalones. ¿Cuánto constituye este en el transcurso de un año?

$$140 \times 360 = 50.400$$

En esta forma, cada año subo más de 50.000 escalones. En 60 años tengo tiempo para ascender a la cumbre de una escalera, fabulosamente alta, ¡de tres millones de escalones (450 km)! Cómo me hubiese sorprendido si cuando era niño me hubiesen conducido a la base de esta escalera e indicado que, en otro tiempo, yo podría alcanzar su cumbre… ¿A qué gigantescas alturas ascienden aquellos hombres que, por el tipo de su profesión se dedican básicamente a ascender alturas, como por ejemplo, los elevadoristas?

Con orgullo informamos que entre nuestros pilotos hay quienes han tenido tiempo de chocar, no solamente contra el número de kilómetros igual a la distancia de la Tierra a la Luna, sino que aún muchas veces han sobrepasado esta distancia.
Volver

3. Viaje Imperceptible al Fondo del Océano
Muy considerables viajes realizan los habitantes de locales sotaneros, los empleados de depósitos, etc. Bajando muchas veces en el día, deprisa los escalones de una es calera pequeña que conduce al sótano, en el transcurso de varios meses recorren una distancia de kilómetros completos.

Figura 60. Un trabajador de un depósito sotanero, anualmente desciende hasta el fondo del océano.

No es difícil calcular en cuánto tiempo, los empleados del depósito sotanero recorren hacia abajo, una distancia igual a la profundidad del océano. Si la escalera desciende 2 m por ejemplo, y un hombre baja por ella corriendo sólo diez veces diarias, al mes él recorre hacia abajo una distancia de $30 \times 20 = 600$ m, y en un año $600 \times 12= 7.204$ m, es decir, más de 7 km. Recordemos que la mina más profunda se extiende en las entrañas de la tierra, en total, ¡dos kilómetros y pico!
En esta forma, si desde la superficie del océano una escalera condujera a su fondo, cualquier trabajador de un local comercial sotanero alcanzaría el fondo del océano en el transcurso de un solo año.
Volver

4. Un Tractor Alrededor del Mundo
Cada tractor trabaja en los campos socialistas de nuestros koljoces y sovjoces cerca de 2.500 horas anualmente. En números cerrados, recorre en una hora 5 km. Anualmente recorrerá, pues,

$$5 \times 2500 = 12.500 \text{ km}$$

Es fácil calcular en cuántos años, un tractor corre una trayectoria igual o la circunferencia de la esfera terrestre:

40.000: 12.500 = 3.2

En el transcurso de sólo cinco años, cualquier tractor que trabaje hoy en la URSS tiene tiempo para realizar uno y medio "viajes alrededor del mundo".

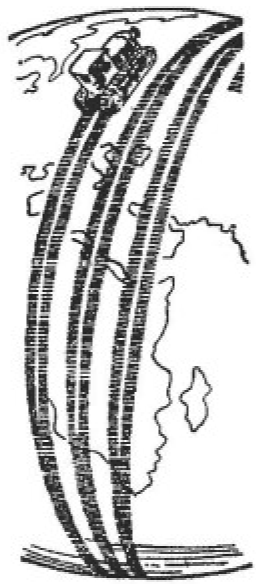


Figura 61. Un tractor, durante diez años de trabajo, da tres veces la vuelta alrededor de la esfera terrestre.

En esta relación, él sobrepasa a los caminantes, que realizamos imperceptiblemente en 5 años, sólo un "viaje alrededor del mundo"; pero en cambio cede ante la locomotora recolectora (de mercancía), la cual sobre las vías férreas de nuestra Unión, hace el recorrido "alrededor del mundo" en sólo 8 meses (la de pasajeros, inclusive, en 6 meses).
Volver

5. La Infatigable Ruedecita

También existen viajeros alrededor del mundo en muchos de nosotros: en el interior de los relojes de pulso o de bolsillo. Abran la tapa posterior de los relojes y examinen el mecanismo. Todos sus engranajes giran tan lentamente, que a primera vista parecen completamente inmóviles. Es necesario seguir largo tiempo y atentamente tras de las ruedecillas para observar su movimiento. Una excepción la constituye el minúsculo volante, llamado balancín o péndulo, que incansablemente se balancea hacia atrás y hacia adelante. Su movimiento es tan ágil, que es muy complicado contar cuántas oscilaciones realiza en un solo segundo. Cinco veces gira alternativamente en un sentido y en otro, en el transcurso de cada segundo. Además la ruedecita realiza una vuelta completa y además una quinta parte, cada vez.

Calculemos cuántas vueltas realiza ella en el transcurso de un año completo, desde luego en las manos de un hombre cuidadoso que nunca se olvida de darle cuerda oportunamente. Cada minuto la ruedecita efectúa 5 × 60 = 300 oscilaciones, y cada hora 300 × 60 = 18.000. En un día esto constituye 18.000 × 24 = 432000 oscilaciones. Considerando en un año un número redondo de 360 días, tenemos que cada año el balancín realiza

$$432.000 \times 360 = 155.520.000 \text{ oscilaciones.}$$

Pero ya se indicó que el balancín gira en una oscilación 1 1/5 vueltas. En ese caso, en el transcurso de un año gira alrededor de su eje

$$155.520.000 \times 1\ 1/5 = 186.624.000 \text{ veces,}$$

en números redondos ¡187 millones de veces!
Este colosal número resulta poco sorprendente, si se efectúa otro cálculo: calculen cuál es la trayectoria que recorrería un automóvil, si su rueda girase 187 millones de veces. El diámetro de la rueda del automóvil es de 80 cm, es decir, su circunferencia es de aproximadamente 250 cm., ó 2½ m. Multiplicando 2½ por 187 millones, obtenemos la longitud de la trayectoria que deseamos conocer: alrededor de 470.000 km.
Por consiguiente, si la rueda del automóvil fuera tan infatigable como el balancín de los relojes de bolsillo, aquel rodearía más de 10 veces la esfera terrestre anualmente, o si se desea, recorrería una trayectoria mayor que la de la tierra a la Luna. No es difícil imaginarse cuántas veces se necesitaría en tal viaje, reparar toda la máquina y cambiar las llantas del automóvil oportunamente. Y mientras tanto la pequeña ruedecita de los relojes de bolsillo, se mueve infatigablemente años enteros, sin reparaciones, sin nueva lubricación, sin cambio, y trabaja además, con sorprendente exactitud…
Volver

6. Viajeros Permaneciendo en un Sitio
Las últimas líneas del libro quiero dedicarlas a sus primeros lectores, sin cuya colaboración activa no habría salido a la luz. Me refiero, naturalmente, a los cajistas. Ellos también realizan lejanos viajes aritméticos sin salir de los límites del taller de composición, y aún, sin moverse del sitio en que están las cajas. La mano diestra del trabajador del "ejército de plomo" deslizándose cada segundo de la caja al banco (de trabajo), recorre durante un año una distancia inmensa.
Hagan la cuenta: el cajista toma, en el transcurso de un día de trabajo, 12.000 letras, y para cada letra deberá desplazar el brazo, primero para tomar, y enseguida para colocar la letra, una distancia promedio de alrededor de medio metro. Consideren 300 días de trabajo al año. Por lo tanto tenemos

$$2 \times 0.5 \times 12\ 000 \times 300 = 3.600.000 \text{ m, es decir, } 3.600 \text{ km.}$$

En ese caso, inclusive el cajista sin separarse de la caja, en 11 años de trabajo realiza un viaje alrededor del mundo. Es un ¡"viajero inmóvil alrededor del mundo"! Esto suena mucho más original que "viajero a pie alrededor del mundo".
No se halla un hombre que de una u otra manera no hubiese realizado, en este sentido, un viaje alrededor del mundo. Se puede decir que un hombre notable no es aquel que ha hecho un viaje alrededor del mundo, sino aquel que no lo ha efectuado. Y si cualquiera les llega a asegurar que él no lo ha realizado, espero que ustedes puedan demostrarle "matemáticamente" que él no constituye una excepción de la regla general.

Volver

7. Curiosidades Aritméticas

$$1 \times 1/2 = 1 - 1/2;$$
$$1/2 \times 1/3 = 1/2 - 1/3$$
$$6 \times 6/7 = 6 - 6/7$$
$$1/3 \times 1/4 = 1/3 - 1/4.$$

Volver