INSTITUTO SUPERIOR DE DISEÑO

MECÁNICA TEÓRICA

Lic. Antonio Berazaín Iturralde
Profesor Auxiliar

DEPARTAMENTO DE DISEÑO INDUSTRIAL

ÍNDICE

Nota Introductoria 2

Tema I ESTÁTICA 4

I Estática de la partícula 4
Introducción al curso 4
Fuerzas sobre una partícula 5
Vectores. Suma de vectores 5
Componentes rectangulares. Suma de fuerzas 6
Partícula en equilibrio. 7
Problemas resueltos 7
Problemas propuestos 10
II Estática del cuerpo rígido 13
Cuerpo rígido. Fuerzas externas e internas 13
Momento de una fuerza respecto a un punto 13
Teorema de Varignon 14
Momento de una fuerza respecto a un eje 15
Problemas resueltos 15
Problemas propuestos 17
III Sistemas de fuerzas 21
Pares de fuerzas. Momento de un par 21
Equivalencia de pares 21
Sistemas de fuerzas equivalentes 22
Problemas resueltos 23
Problemas propuestos 25
IV Cuerpo rígido en equilibrio 28
Definición. Diagrama de cuerpo libre 28
Ligaduras. Tipos de ligaduras 29
Equilibrio de un cuerpo rígido en 2D 30
Cuerpo sometido a dos y tres fuerzas 31
Problemas resueltos 31
Problemas propuestos 34
V Centro de gravedad 38
Centro de gravedad, centro de masa y centroides 38
Cálculo de centros de gravedad por simetría 40
Cálculo por descomposición 40
Centros de gravedad conocidos 41
Problemas resueltos 42
Problemas propuestos 45
VI Rozamiento 48
Rozamiento seco. Leyes del rozamiento 48
Rozamiento por rodadura 50
Problemas resueltos 51
Problemas propuestos 54

Tema II CINEMÁTICA 57

VII Cinemática de la partícula 57
Magnitudes fundamentales 57
Movimiento rectilíneo 58
Movimiento curvilíneo. 59
Problemas resueltos 61
Problemas propuestos 64
VIII Cinemática del cuerpo rígido 67
Tipos de movimiento de un cuerpo rígido 67
Traslación 67
Rotación alrededor de un eje fijo 68
Movimiento general en un plano 68
Centro instantáneo de rotación 69
Problemas resueltos 71
Problemas propuestos 73

Tema III DINÁMICA 76

IX Dinámica de la partícula 76
Segunda Ley de Newton 76
Ecuaciones de movimiento 77
Fuerza centrípeta 77
Trabajo de una fuerza 78
Energía cinética. 79
Energía potencial 79
Conservación de la energía mecánica 80
Problemas resueltos 81
Problemas propuestos 84
X Dinámica del cuerpo rígido 87
Ecuaciones del movimiento de traslación 87
Ecuaciones de movimiento de rotación. 87
Movimiento general en un plano 89
Energía cinética de rotación 89
Problemas resueltos 89
Problemas propuestos 92

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS 95

ANEXOS 99
Pasos para la resolución de problemas 100
Sistema de conocimientos 102
Bibliografía general 109

NOTA INTRODUCTORIA

Estos apuntes pretenden brindar al alumno una bibliografía mínima para enfrentar el estudio de la Mecánica Teórica, pues aunque existen numerosos libros sobre el tema, están dirigidos a la formación de especialidades de Ingeniería o de Ciencias. La necesidad de un texto para estudiantes de Diseño Industrial motivó que escribiera el contenido de las conferencias que durante varios cursos he impartido en el ISDI con la esperanza de que su imperfección no impida el logro de su propósito.

En su tarea de proyectar objetos, el diseñador debe tener presente los aspectos mecánicos y estructurales del mismo. De modo que el estudio de la Mecánica cobra particular importancia, toda vez que cualquier producto requiere de un soporte mecánico. Además, el carácter multidisciplinar de la profesión demanda de conocimientos y del lenguaje técnico que le permita la comunicación con otros especialistas.

En lo esencial, el curso va dirigido al caso bidimensional, o sea, fuerzas coplanares en la Estática y movimiento en un plano en Cinemática y Dinámica. Sin dejar de reconocer la importancia del dominio del espacio para el diseñador industrial, las limitaciones matemáticas y de tiempo reducen el alcance de la asignatura en ese sentido. No obstante, hay que destacar que esto no implica que los cuerpos de estudio sean bidimensionales y por ende, multitud de problemas prácticos pueden ser resueltos dentro de este enfoque.

El material está ordenado según el programa de la asignatura, en temas y capítulos que corresponden a las clases de conferencias, puesto que en éstas se presenta el sistema de conocimientos (principios, leyes, conceptos, modelos, relaciones matemáticas) Como es usual, la Estática ocupa un mayor peso. Su comprensión es importante para emprender el estudio de la Cinemática y la Dinámica. Se hace énfasis en el modelo de sólido rígido dado el interés que despierta para el diseñador industrial, así como en el movimiento de rotación.

De vital importancia resulta el desarrollo de habilidades de cálculo a través de la resolución de problemas, por lo que al final de cada capítulo el alumno dispone de 3 problemas resueltos y 10 problemas propuestos. La fuente de estos problemas son los ya existentes en los textos de Mecánica, y que se adecuan más otros creados por el propio autor. El material incluye las respuestas de todos los problemas propuestos.

Es necesario que el alumno estudie los problemas resueltos del texto ya que algunas cuestiones teóricas de marcado interés práctico (como son los convenios de signos) se exponen aquí y no dentro del contenido teórico.

Un interés especial ha sido contextualizar los problemas en correspondencia con la actividad profesional del diseñador industrial. Dentro de esto, se ha tratado de introducir problemas de enunciado "abierto", en los que el alumno acota las condiciones de solución.

Esto último no siempre ha sido posible de forma inmediata y se alcanzará plenamente como resultado de un proceso de trabajo científico-metodológico. También están incluidos problemas que se han aplicados en evaluaciones de cursos anteriores, creados por el autor.

Con toda intención se ha señalado en negrita los principios y conceptos que corresponden al sistema de conocimientos, para así facilitar su identificación al lector.

Al final aparece un anexo que incluye consideraciones de cómo resolver problemas, el sistema de conocimientos de la asignatura y la bibliografía general que el estudiante puede consultar para profundizar.

Espero que estas cuartillas puedan ser de utilidad a mis alumnos y que con sus oportunas sugerencias su contenido pueda ser mejorado. Agradezco a Yaneitsy Martínez, Ernesto Moreno, Nayeli San Juan y Ramiro Zardoya su colaboración en ese sentido. Al estudiante de Diseño Informacional Adrián Berazaín por el diseño del texto y a Rubiel García, de la carrera de Diseño Industrial, por su esforzada labor en la realización de los gráficos y en el trabajo de edición.

A. B.

Junio de 2006

Tema I Estática

I ESTÁTICA DE LA PARTÍCULA

Introducción al curso

La Mecánica estudia el más simple de los movimientos: el movimiento mecánico. Por **movimiento mecánico** se entiende el cambio de la posición de un cuerpo con respecto a otro, lo cual ocurre en el transcurso del tiempo.

Desde el punto de vista histórico la Mecánica fue la primera rama de la Física en completar su desarrollo tanto teórico como experimental. Sus orígenes se remontan a las civilizaciones más antiguas, cuyas obras evidencian el conocimiento de la Mecánica; nombre por cierto, introducido por Aristóteles. Como fundador de la Mecánica merece considerarse a Arquímedes, por sus innumerables aportes a la misma como Ciencia precisa.

Siglos más tarde, los trabajos de Galileo fueron enriquecidos por Newton, quien estructuró su cuerpo teórico a partir de leyes, amén del descubrimiento de la ley de Gravitación Universal. Posteriormente Lagrange y Hamilton desarrollaron la Mecánica Analítica, basada en nuevas formulaciones matemáticas. Las aplicaciones de la Mecánica crearon nuevas Ciencias: la Ingeniería, la Astronomía, etc.

Isaac Newton (1642 - 1727).

Un estadio superior de la Mecánica fue alcanzado tras la Teoría de la Relatividad de Einstein, quien mostró las limitaciones de la Mecánica de Newton para los casos de velocidades cercanas a la de la luz.

En este curso seguiremos la Mecánica Newtoniana, perfectamente aplicable a las situaciones físicas que abordaremos. Los conceptos básicos empleados son los de **espacio, tiempo, masa y fuerza.**

Estos conceptos son bastantes intuitivos y muy ligados a nuestra experiencia. **El concepto de espacio se asocia con la posición de un punto**, dado por un sistema de coordenadas. Por otra parte, para definir un acontecimiento no basta indicar su posición, es necesario conocer el instante de **tiempo** en que transcurre.

La **masa** es una característica que sirve para comparar los cuerpos ante la variación de su estado de movimiento o reposo. **La fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro; es una medida de la interacción entre los cuerpos**. La aplicación de la fuerza puede provocar dos cosas: la variación del estado de reposo o movimiento del cuerpo o su deformación. Este último caso no será objeto de nuestro estudio sino de la asignatura Resistencia de los materiales.

En lo adelante utilizaremos dos modelos a para describir los cuerpos de estudio. **Si las condiciones del problema permiten prescindir de las dimensiones del cuerpo**, tomaremos el **modelo de punto material o partícula**.

Si esto no es posible, hablaremos de **cuerpo rígido**, como aquel en que **la distancia entre las partículas que lo conforman es invariable.** En la práctica, tanto el modelo de partícula como el de cuerpo rígido son de gran ayuda en la solución de problemas.

El contenido está dividido en tres temas: Estática, que estudia las condiciones de equilibrio de los cuerpos; Cinemática, que estudia el movimiento de los cuerpos desde el punto de vista geométrico, sin analizar sus causas, y Dinámica, que estudia la dependencia entre los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre ellos. En cada tema se estudiará lo concerniente a la partícula y al cuerpo rígido. Se utilizará el Sistema Internacional de unidades (SI)

Fuerzas sobre una partícula

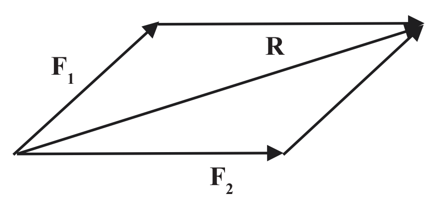
La fuerza se caracteriza por: punto de aplicación, módulo, dirección y sentido. Está claro que en el caso de la partícula ella misma será el punto de aplicación. La dirección está dada por la **línea de acción**, que es la recta a lo largo de la cual actúa la fuerza y que se puede orientar por un ángulo respecto a un eje. La unidad de medida de la fuerza es el **Newton (N)**

La fuerza se representa como un segmento sobre la línea de acción. Su longitud se relaciona con el módulo y una saeta representa el sentido. Se llaman **concurrentes a las fuerzas que actúan sobre un punto**. Evidentemente, las fuerzas sobre una partícula son concurrentes.

La experiencia demuestra que las fuerzas sobre una partícula no se suman como los números ordinarios, sino de acuerdo a **la regla del paralelogramo**, tal y como se muestra en la figura. De manera que:

$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$

Las magnitudes que cumplen esto, como es el caso de la fuerza, son magnitudes vectoriales.

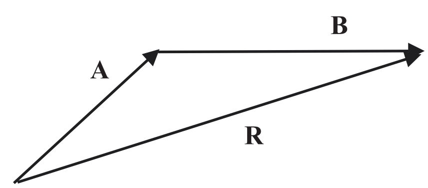


Regla del paralelogramo.

Vectores. Suma de vectores

Los vectores se definen como expresiones matemáticas que tienen módulo, dirección y sentido y que se suman de acuerdo a la regla del paralelogramo. Ejemplo de ellos son: la velocidad, la aceleración y en nuestro caso, la fuerza. Otras magnitudes sólo requieren del módulo para caracterizarla y son las llamadas magnitudes escalares como la masa, la temperatura, etc. Dado un vector **a** su módulo es a.

Aparte de la regla del paralelogramo, los vectores se pueden sumar por la **regla del triángulo**. Para efectuar la suma **R = A + B** se coloca el inicio de un vector en el extremo del otro. El vector resultante va desde el inicio del primero a la saeta del último.



Regla del triángulo.

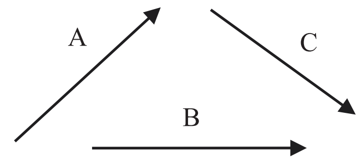
La suma de vectores es conmutativa, o sea:

A + B = B + A

Para el caso de varios vectores coplanares, (que se encuentran en el mismo plano) podemos sumarlos por pares de forma consecutiva o aplicar continuamente la regla del triángulo, que de esta forma se convierte **en regla del polígono** (sólo para el caso bidimensional) .

Esto implica que la suma de vectores es también asociativa. O sea:

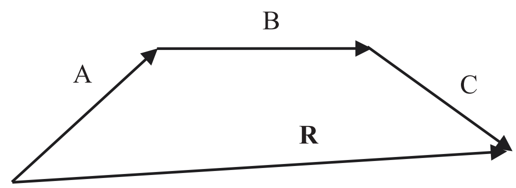
(**A** + **B**) + **C** = **A** + (**B** + **C**)



Vectores coplanares.

Para definir la resta basta con considerar **- B** como un vector igual a **B** pero de sentido contrario. Así:

A - B = **A** + (**-B**)



Regla del polígono.

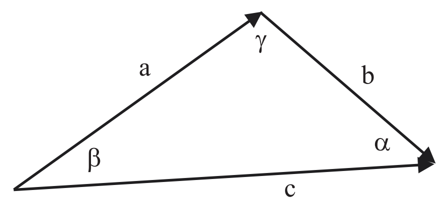
El producto de un vector **A** por un escalar k se define como k**A**, es decir, un vector que está en la misma dirección y sentido que **A,** pero cuyo módulo es kA.

Estos métodos de suma son gráficos. Para hallar soluciones analíticas se pueden utilizar dos expresiones. Una es la llamada **Ley de los cosenos** (o Teorema de de Pitágoras generalizado):

$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\,bc\cos\alpha$

Y la **Ley de los senos:**

$\text{sen}\,\alpha / a = \text{sen}\,\beta / b = \text{sen}\,\gamma / c$



Triángulo de fuerzas. Sus ángulos interiores y sus lados son las variables de la Ley de los cosenos y la Ley de los senos.

Componentes rectangulares

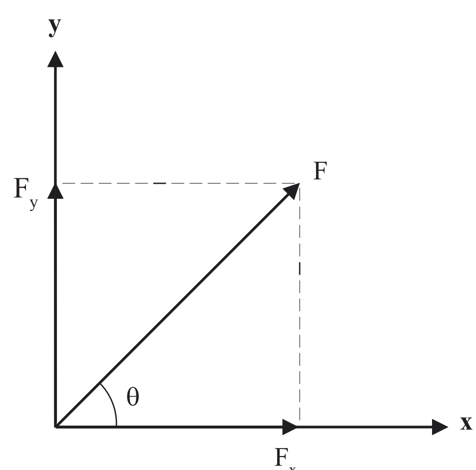
En ocasiones resulta conveniente descomponer una fuerza se dos componentes que sean perpendiculares entre sí. De modo que:

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$

$\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son las componentes rectangulares del vector **F**. Nótese que son vectores también. Para encontrar los módulos de estas componentes, o sea, las componentes escalares, utilizamos la trigonometría.

Sean F_x y F_y las componentes escalares. Entonces:

$F_x = F\cos\theta$
$F_y = F\,\text{sen}\,\theta$
$\tan\theta = F_y / F_x$
$F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2}$



Componentes rectangulares del vector fuerza

Si sobre una partícula inciden varias fuerzas, es posible hallar la resultante descomponiendo cada una de ellas y luego sumando las componentes según cada eje, obteniendo:

$R_x = \Sigma F_x$
$R_y = \Sigma F_y$
$R^2 = R_x^{\,2} + R_y^{\,2}$
$\tan\theta = R_y / R_x$

Existe otra formulación matemática que utiliza los vectores unitarios **i** y **j** definidos para los ejes (x, y) respectivamente. Estos vectores tienen módulo unitario, de manera que es posible representar a la fuerza como: $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$

Partícula en equilibrio. Diagrama de cuerpo libre

De acuerdo con la primera Ley de Newton ***si la resultante de fuerzas sobre la partícula es cero, ésta se mueve con movimiento rectilíneo uniforme o está en reposo***. Este último es nuestro caso de interés. De modo que si la resultante de las fuerzas sobre la partícula es cero, entonces está en equilibrio.

Sea **R** la resultante de las fuerzas de modo que $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$. La condición de equilibrio $\mathbf{R} = 0$ implica que:

$$\Sigma F = 0 = \Sigma F_x + \Sigma F_y$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que la partícula esté en equilibrio son:

$$\Sigma \mathbf{F_x} = \mathbf{0}$$
$$\Sigma \mathbf{F_y} = \mathbf{0}$$

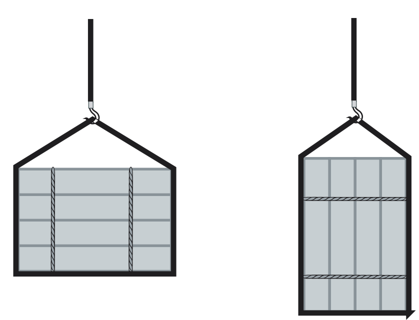
En la resolución de problemas resulta cómodo utilizar el diagrama de cuerpo libre, o diagrama de fuerzas, en el que se representan todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. En particular, hay un tipo de fuerza que es la fuerza de gravedad, que actúa sobre todos los cuerpos y que consideraremos igual al producto mg, siendo m su masa y g el valor de la intensidad del campo gravitatorio o aceleración de la gravedad, que tomaremos a los efectos prácticos como $10 m/s^2$. Como se conoce del curso de Física de los Productos, el peso del cuerpo es igual a la reacción del soporte. En el caso de la Estática, el peso y la fuerza de gravedad coinciden, por lo que utilizaremos los términos indistintamente.

Problemas resueltos

1) Una caja de sección rectangular será izada por una grúa mediante una eslinga. Para una mayor seguridad de la operación ¿por cuál lado será más conveniente izar la caja?

Solución:

Para entender el problema es conveniente hacer un esquema. En la figura se muestran las dos variantes de izaje. Es obvio que la conveniencia tiene que ver con la seguridad de la operación, por lo que debemos analizar en cuál caso la cuerda está sometida a una



Problema resuelto 1.

menor tensión. Asumimos que la longitud de la cuerda es la misma.

Hacemos el diagrama de cuerpo libre. El punto a considerar es la unión entre la cuerda y el cable de la grúa, en el cual se tiene la tensión T_g. Trazamos un sistema de coordenadas. El paso siguiente es plantear las ecuaciones de equilibrio. Para ello descomponemos las tensiones en la cuerda según las componentes rectangulares.

De acuerdo al gráfico, se tiene:

$\Sigma F_x = T_{2x} - T_{1x} = 0$

$\Sigma F_y = T_g - T_{1y} - T_{2y} = 0$

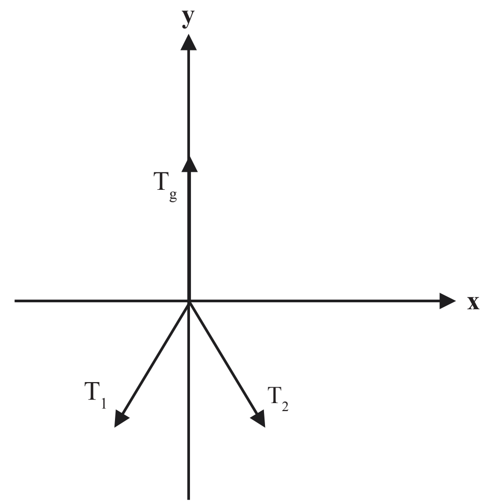


Diagrama de fuerzas.

Donde, como es usual, se ha tomado como positivo el sentido hacia arriba y hacia la derecha.

De la primera ecuación se tiene:

$T_{1x} = T_{2x}$

Pero $T_x = T\text{sen}\theta$ donde por simetría se observa que el ángulo θ es igual para cada cuerda, por lo que:

$T_1\text{sen}\theta = T_2\text{sen}\theta$

$T_1 = T_2 = T$

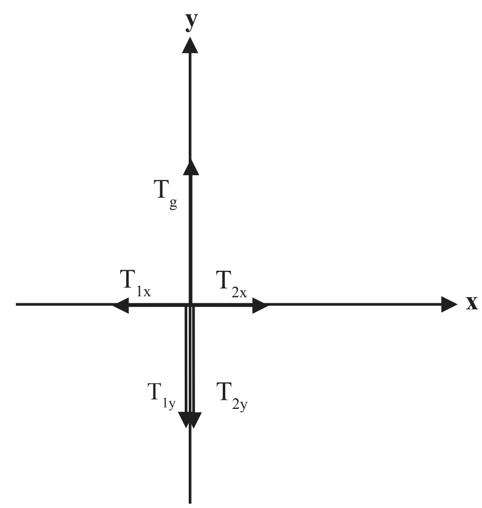


Diagrama de fuerzas en componentres rectangulares.

Y se concluye que las tensiones en cada cuerda son iguales. La segunda ecuación nos dice que:

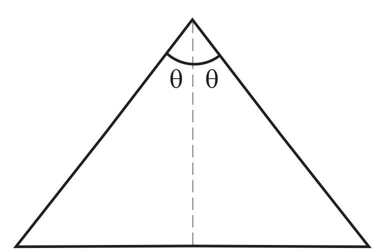
$T_g = T_{1y} + T_{2y} = T_1\cos\theta + T_2\cos\theta = 2T\cos\theta$

Relacionemos la tensión en el cable de la grúa con el peso de la caja P. Si consideramos la caja un punto, sobre el mismo actuarían dos fuerzas: T_g y P, iguales y de sentido contrario. Por tanto, escribiremos la segunda ecuación:

$P = 2T\cos\theta$

Y queda en función de un dato asequible, el peso de la caja. La tensión en la cuerda es:

$T = P/2\cos\theta$



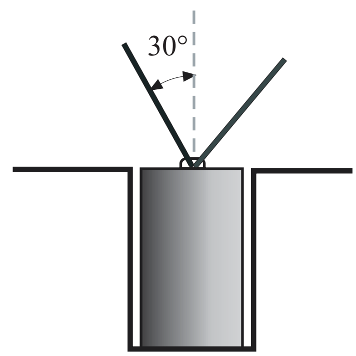
El coseno del ángulo θ aumenta cuando θ se hace menor.

Nótese que si cosθ aumenta, la tensión T disminuye. Por tanto la mayor seguridad en el izaje, esto es, la menor tensión está asociada a valores altos de cosθ. Pero el cosθ aumenta con la disminución de θ. El valor del ángulo θ depende de cómo se coloque la caja. Como se parecia en el gráfico, mientras menor sea el lado en cuestión, menor será el ángulo θ, y mayor cosθ.

De manera que nuestra respuesta al problema es colocar la eslinga por el lado menor de la caja.

Una forma de verificar el resultado es considerar el valor extremo de θ = 0 (el lado de la caja es absolutamente estrecho); en ese caso el coseno vale 1 y T = P/2, que es un resultado esperado: la tensión en cada cuerda es la mitad del peso que sostienen.

2) Se requiere izar verticalmente el pistón del motor de un barco de 200kg de masa utilizando dos cables concurrentes en un punto sobre el pistón. Uno de los cables forma un ángulo de 30° con la vertical. a) Halle la dirección del segundo cable de modo que la tensión sea mínima. b) Halle el valor de la tensión.



Problema resuelto 2.

Solución:

De acuerdo al planteamiento del problema, partimos de las siguientes consideraciones:

- La tensión T debe ser mínima
- La resultante es vertical y su valor es el peso del pistón
- m = 200Kg
- $\theta = 30°$

Tomando, como es usual, $g = 10m/s^2$, entonces el peso es:

$P = mg = 2000N$.

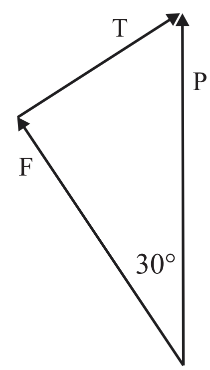


Diagrama de fuerzas.

Es obvio que la fuerza necesaria para mover el pistón es igual a P pero dirigida hacia arriba.

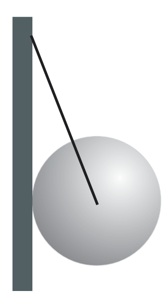
De modo que se tiene un triángulo de fuerzas. Nótese que la tensión T forma un ángulo de 90° respecto a F puesto que siendo de valor mínimo, ésa es la menor distancia entre la recta F y el punto extremo de P.

Entonces, el valor de la tensión será:

$T = P\text{sen } 30° = (2000)(0,5) = 1000N$

Por otra parte, siendo **F** y **T** perpendiculares, el ángulo que **T** forma respecto a la vertical será de 60°.

3) Halle la fuerza que la bola de radio r y peso P ejerce contra la pared si la longitud del cable es L.



Problema resuelto 3.

Solución:

Tenemos las siguientes consideraciones:

- La bola está suspendida de modo que la prolongación del cable pasa por su centro.
- El hecho de que no se mueva horizontalmente es porque existe una reacción de la pared sobre la bola.
- Los datos de la bola son su radio r, su peso P y la longitud del cable L.

De acuerdo al diagrama de fuerzas, hay tres fuerzas aplicadas a la bola: la tensión del cable, la fuerza de gravedad, (que ya se ha dicho que en Estática es igual al peso) y la reacción N de la pared sobre la bola.

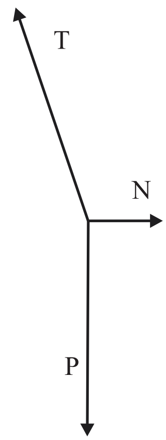


Diagrama de fuerzas.

Descomponemos la tensión en sus componentes rectangulares, quedando el diagrama como se observa en la figura. Si llamamos θ al ángulo que forma T con la horizontal, entonces:

$T_x = T \cos\theta$
$T_y = T \operatorname{sen}\theta$

Planteando las ecuaciones para el punto donde concurren las fuerzas, tomando el convenio de signo acostumbrado:

$\Sigma F_x = T_x - N = 0 \quad (1)$
$\Sigma F_y = T_y - P = 0 \quad (2)$

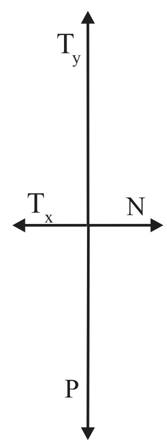


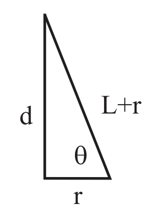
Diagrama de fuerzas en componentes rectangulares.

Dividiendo la ecuación (2) sobre (1), se obtiene que:

$\tan\theta = P/N$

Pero de acuerdo al triángulo de longitudes que se muestra,

$\tan\theta = d/r$



Triángulo de longitudes.

Y según el teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{(L+r)^2 - r^2}$

Entonces,

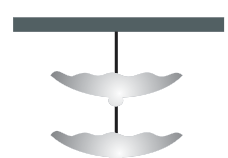
$N = Pr / \sqrt{(L+r)^2 - r^2}$

Que numericamente es igual a T_x, que es la fuerza que la bola ejerce sobre la pared.

Problemas propuestos

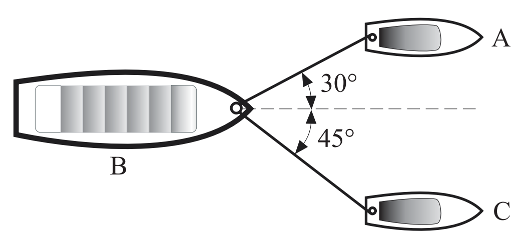
Fuerzas en una sola dirección

1) Una lámpara doble cuelga del techo. ¿En cuál de los dos tramos del cable la tensión es superior?


Problema 1.

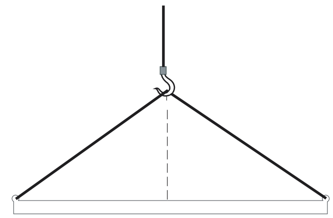
Fuerzas en el plano. Ley de los senos. Ley de los cosenos

2) Dos remolcadores A y C arrastran un barco B. La tensión en el cable AB es de 4000N y la resultante de las dos fuerzas aplicadas en B está dirigida a lo largo del eje del barco. Determine la tensión en el cable BC y la valor de la fuerza resultante en B.



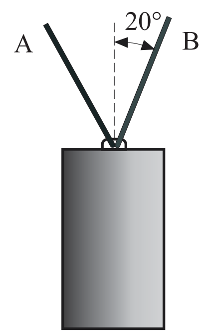
Problema 2.

3) Una viga de longitud conocida se sostiene por sus extremos con un cable colgado del gancho de una grúa. Halle la longitud del cable para que su tensión sea de un 90% del peso de la viga.



Problema 3.

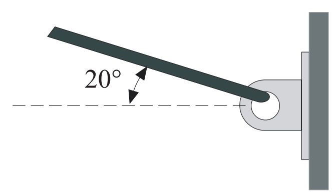
4) Un cilindro cuyo peso es de 900N esta sujeto por dos cables. Si la tensión en el cable B es de 600N, determine el valor y dirección de la tensión en el cable A de modo que la resultante sea una fuerza vertical mínima capaz de levantarlo.



Problema 4.

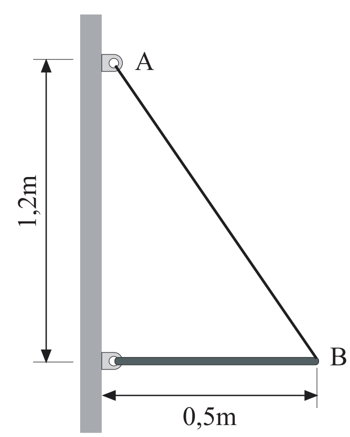
Fuerzas en el plano. Componentes rectangulares

5) Una fuerza de 2.5kN se aplica por medio de un cable al soporte como se indica en la figura. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de esa fuerza?



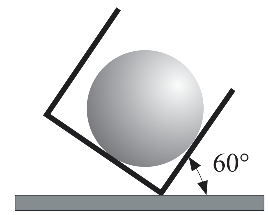
Problema 5.

6) La tensión en el cable AB es de 650N. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador en A.



Problema 6.

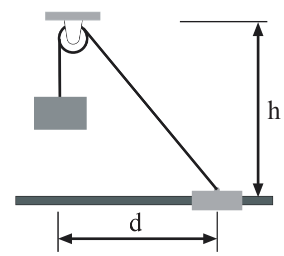
7) Una bola de 10kg de masa se coloca entre dos lados de una caja que forma un ángulo de 60 grados con la horizontal. Halle la fuerza sobre cada lado de la caja.



Problema 7.

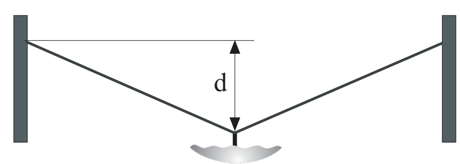
Párticula en equilibrio

8) El collar de la figura puede deslizar libremente en la barra horizontal lisa. Determine el valor de la fuerza horizontal necesaria para mantener el equilibrio. El peso de la caja es P, h la altura de la que cuelga y d es la distancia entre la caja y el collar.



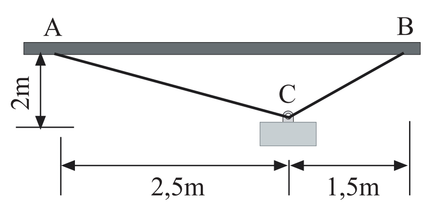
Problema 8.

9) Una lámpara de peso P cuelga en el punto medio de un cable que va de pared a pared entre dos puntos de igual altura, descendiendo una distancia d respecto a la horizontal. Halle la tensión en el cable si la distancia entre las paredes es L.



Problema 9.

10) Dos cables están unidos en C y cargados tal y como se indica en la figura. Determinar la tensión en AC y BC. El peso de la caja es de 200N



Problema 10.

II ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

No es posible en todos los problemas modelar al cuerpo de estudio como un punto material y debe considerarse más bien como un conjunto de partículas. Un caso especial de tal conjunto es **el cuerpo rígido**, que es aquel en el que la distancia entre **las partículas que lo constituyen es invariable.** Dicho en otras palabras, el cuerpo rígido no se deforma. En este capítulo se introduce el concepto de momento de una fuerza, de suma importancia dentro de este curso de Mecánica.

Fuerzas externas e internas

Las fuerzas sobre un cuerpo rígido pueden ser:

- **Externas:** que representan la acción de otros cuerpos y que hacen que se mueva o permanezca en reposo.
- **Internas:** que son las fuerzas que mantienen unidas las partículas que constituyen al cuerpo.

En lo que sigue tendremos en cuenta solamente las fuerzas externas. Si sobre un cuerpo rígido actúa una fuerza en una dirección, todas las partículas se moverán en esa dirección de modo que sus trayectorias serán paralelas. Ese es el caso de un **movimiento de traslación**. Si las trayectorias de las partículas son circunferencias concéntricas, es el caso de un **movimiento de rotación**. De manera que el efecto de las fuerzas externas sobre un cuerpo rígido es provocar un movimiento de traslación o de rotación (o una combinación de ambos)

En las condiciones de la Estática los cuerpos no se mueven, así que siempre habrá una oposición a las fuerzas que pudieran hacerlo trasladar o rotar. Por tal motivo hablaremos de tendencia a trasladarse o tendencia a rotar.

De importancia práctica y conceptual resulta el **principio de trasmisibilidad**. Se refiere a que las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido no se modifican si la fuerza **F** aplicada en un punto se reemplaza por otra fuerza **F´** de igual valor y dirección, que actúa sobre un punto diferente, siempre sobre la misma línea de acción. Se dice que estas fuerzas son **equivalentes** ya que provocan el mismo efecto sobre el cuerpo. Sin embargo, hay que aclarar que este principio sólo es válido dentro del modelo de cuerpo rígido, lo cual se aprecia en el siguiente ejemplo.

La barra de la figura está sometida a fuerzas de igual módulo. De acuerdo con el principio de trasmisibilidad se han intercambiado y no se pierde la condición de equilibrio. Sin embargo, están sometidas a diferentes esfuerzos: tracción y compresión. Si el cuerpo es deformable el efecto final es totalmente diferente.

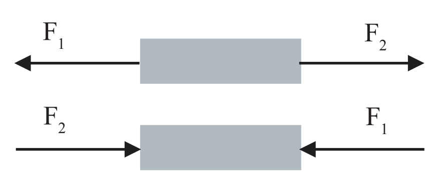


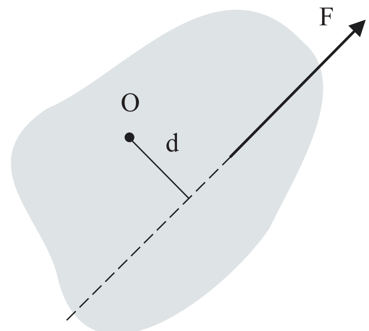
Ilustración del principio de trasmisibilidadad.

Momento de una fuerza respecto a un punto

En el caso de un cuerpo rígido el efecto de una fuerza puede ser tender a trasladar el cuerpo o a hacerlo rotar. Esto último depende de su punto de aplicación. Para estudiar este efecto se define el **momento de la fuerza respecto a un punto.**

El momento de una fuerza **F** respecto a un punto O se determina por el producto del módulo de la fuerza por la longitud d de la línea perpendicular trazada desde O hasta la línea de acción de la fuerza. La longitud d también es conocida como brazo de la fuerza. De manera que el momento M queda expresado como:

$M_0 = Fd$



Momento de la fuerza F respecto al punto 0.

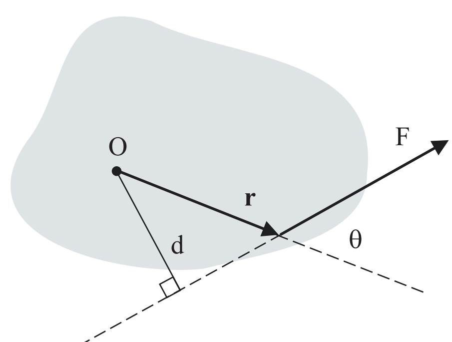
El momento M_0 es una medida de la tendencia del cuerpo a rotar alrededor de un eje que pasa por O perpendicular al plano que forma la línea de acción de **F** y el segmento d. También es una magnitud vectorial, siendo su módulo Fd. **La dirección del vector momento de la fuerza es siempre perpendicular al plano que contiene a la línea de acción de la fuerza y a la distancia d.** El sentido viene dado de la siguiente manera: si el cuerpo tiende a rotar en sentido opuesto a las manecillas del reloj, el vector momento sale del plano y se considera positivo. Si tiende a rotar en sentido horario, entra al plano y se considera negativo. Este resultado puede obtenerse con la regla de la mano derecha: los dedos envuelven el sentido de rotación y el pulgar señala el sentido del momento. En el SI el momento se expresa en Nm.

Si la línea de acción de la fuerza pasa por el punto respecto al cual queremos calcular el momento éste será nulo (pues d es cero), indicando que no habrá tendencia a rotar respecto a ese punto.

Una definición más general del momento de una fuerza sería:

$\mathbf{M_0} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Aquí $\mathbf{M_0}$ es el vector momento de la fuerza **F** respecto al punto O y **r** es el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza respecto a O. La x representa el producto vectorial entre los vectores **r** y **F**. El módulo del vector momento es **rFsen**θ, siendo θ el ángulo entre los vectores. La dirección y sentido se halla por la regla de la mano derecha: **r** envuelve a **F** y el pulgar nos da la dirección y sentido del momento. Obsérvese que rFsenθ no es más que Fd, pues d = rsenθ, que es la distancia entre la línea de acción de la fuerza y el punto 0. $\mathbf{M_0}$ es siempre perpendicular al plano formado por los vectores **r** y **F**.



Momento de la fuerza F respecto al punto O expresado según un producto vectorial.

Teorema de Varignon

Si se desea calcular el momento de la fuerza F respecto al punto O, y F_x y F_y son sus componentes, se puede hallar el momento M_A como:

$\mathbf{M_0 = M_{Fx} + M_{Fy}}$

Este resultado se conoce como Teorema de Varignon, donde M_{Fx} y M_{Fy} son los momentos de las componentes F_x y F_y respecto al punto O, es decir:

$M_{Fx} = F_x\, y$
$M_{Fy} = F_y\, x$

El momento total $\mathbf{M_0}$ es, por supuesto, la suma vectorial de $\mathbf{M_{Fx}}$ y $\mathbf{M_{Fy}}$. En el ejemplo que se muestra en la figura, $\mathbf{M_{Fx}}$ y $\mathbf{M_{Fy}}$ son positivos. El Teorema de Varignon es válido para fuerzas concurrentes en general.

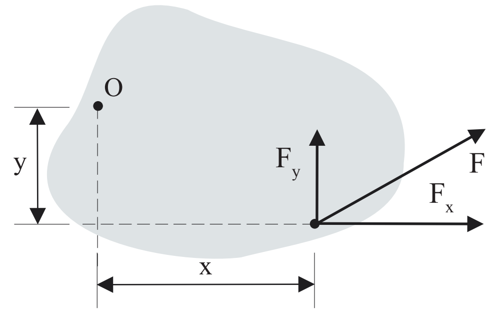


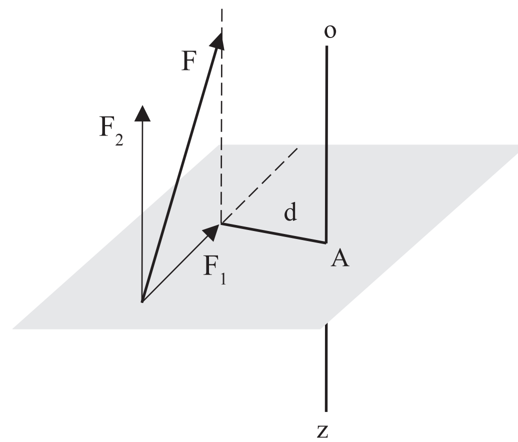
Ilustración del Teorema de Varignon.

Momento de una fuerza respecto a un eje

Como que las fuerzas están en el plano XY, los momentos estarán en la dirección perpendicular a dicho plano, ya sea entrando o saliendo, a lo cual hemos asignado signos negativo y positivo respectivamente. Puede ocurrir, sin embargo, que se desee conocer el momento respecto a un eje oz que no sea perpendicular al plano en que está la fuerza F. Es posible predecir el significado físico de dicha magnitud: **indicará la tendencia del cuerpo a rotar alrededor de eje oz debido al efecto de la fuerza F.**

Para encontrar el valor de ese momento trazamos un plano perpendicular a oz y que pase además por el punto de aplicación de la fuerza F. La fuerza se descompone en dos componentes: F_1, ubicada en el plano y F_2, paralela a oz. La componente F_2 que es paralela a oz no crea momento respecto a ese eje. En cambio F_1 sí. El momento de F respecto al eje oz coincide con el momento de F_1 respecto a A y será igual, como se sabe, a $F_1 d$. El sentido del vector momento sigue el mismo convenio visto. En el caso del ejemplo, será en el sentido oz.

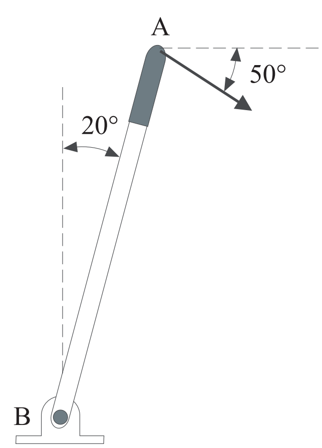
Por consiguiente, para determinar el momento de una fuerza respecto a un eje, hay que proyectar la fuerza sobre un plano perpendicular al eje y hallar el momento de la proyección de la fuerza respecto del punto de intersección del eje con dicho plano.



Momento de una fuerza F respecto a un eje oz.

Problemas resueltos

1) Una fuerza de 150N se aplica a la palanca de control A, que forma un ángulo de 20° con la vertical. Sabiendo que la distancia AB es de 250mm, calcular el momento de la fuerza respecto al punto B.



Problema resuelto 1.

Solución:

Se sabe que el momento respecto al punto B se halla por la expresión: $M_B = Fd$, siendo d la distancia entre el punto B y la línea de acción de la fuerza F, que en el diagrama sería la distancia BC. Esta distancia puede calcularse por:

BC= AB sen (BAC)

Ya que ABC es un triángulo rectángulo. Para hallar el valor del ángulo BAC, tenemos en cuenta que DAB vale 70°, y α = 50°, por lo que:
BAC = 180° - 120° = 60°

Y BC = (0,25m) sen (60°) = 0,21m
El momento respecto al punto B es entonces:
M_B = (150)(0,21) = 31,5Nm

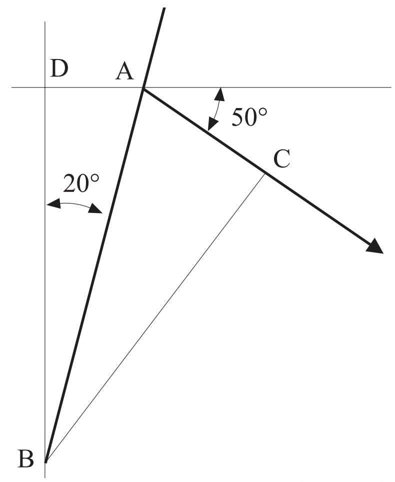
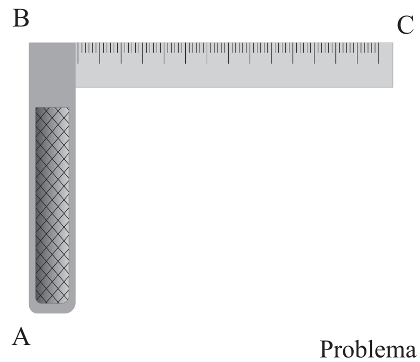


Diagrama del problema resuelto 1.

2) Se tiene una escuadra. Sobre un extremo se aplica una fuerza perpendicular al plano que forman los brazos de la llave. ¿Cuál será el momento de esa fuerza F respecto a cada uno de los ejes colineales a los brazos?

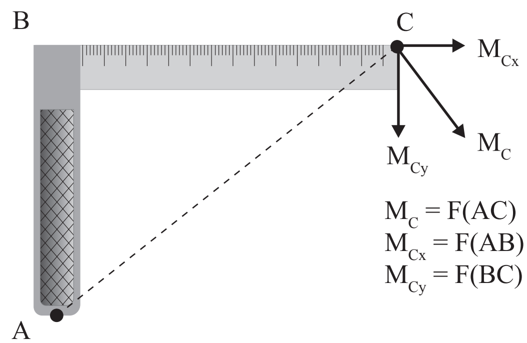


Problema resuelto 2.

Solución:
Si la fuerza se aplica en A hacia adentro del plano de la hoja, el momento respecto al eje BC será justamente F(AB) pues (AB) es la distancia del punto de aplicación de la fuerza al eje BC. De acuerdo a la regla de la mano derecha, el sentido del momento es hacia la derecha. Respecto a un eje colineal a AB pero que pase por C, el momento será F(BC) y su sentido hacia abajo. Respecto a un eje colineal a la fuerza es cero.

Nótese que si calculamos directamente el momento de F respecto al punto C, sería F(AC) y su sentido perpendicular a la línea AC hacia abajo y la derecha.

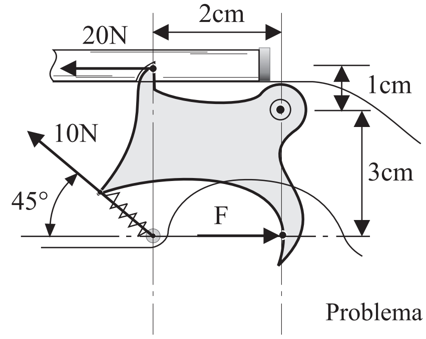
Está claro que si descomponemos F(AC) según los ejes perpendiculares ubicados en C encontramos el resultado inicial. o sea, que **el momento de una fuerza respecto a un eje es también la proyección del momento total respecto al eje en cuestión.**



3) La figura muestra el gatillo de una escopeta de caza submarina, capaz de rotar alrededor del pasador P. Se han señalado las fuerzas que actúan. Una es causada por el resorte (10N) y la otra debido a la acción de la muesca del arpón (20N) ¿Cuál será la fuerza mínima F que habrá que aplicar al gatillo para efectuar el disparo?

Solución:

El momento de la fuerza F debe ser al menos igual y de sentido contrario a la suma de los momentos de las otras fuerzas:



Problema resuelto 3.

$\Sigma M_P = M_1 + M_2$

Los momentos se calculan respecto a P. Pero:

$M_1 = (20N)(0{,}01m) = 0{,}2Nm$

El momento M_2, asociado a la fuerza de 10N, que llamaremos F_2, se halla como la suma de los momentos de sus componentes (Teorema de Varignon). Tendremos que $F_{2x} = F_2 \cos 45º$ y $F_{2y} = F_2$ sen45º

$M_2 = F_{2x}\,(0{,}03) + F_{2y}\,(0{,}02)$

$= -\,(10)(0{,}71)(0{,}03) - (10)(0{,}71)(0{,}02) = -\,0{,}35Nm$

Por tanto, $\Sigma M_P = 0{,}2 - 0{,}35 = -\,0{,}15Nm$

El signo menos significa que el momento debido a F ha de ser en sentido contrario (positivo). Pero a su vez, $M_F = F\,(0{,}03)$ de donde se concluye:

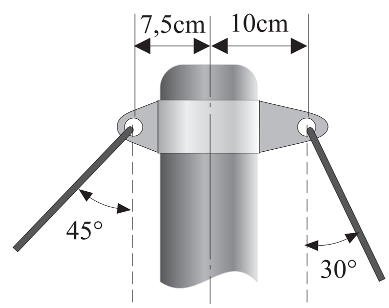
$F = M_F\,/(0{,}03) = 0{,}15/0{,}03 = 5N$

Problemas propuestos

Momento de una fuerza respecto a un punto

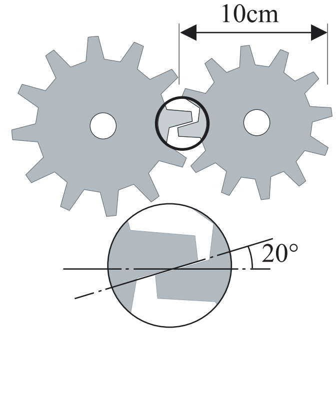
1) En el problema resuelto 1), determine la dirección en la que deberá actuar la fuerza de 150N para que el momento sea máximo con respecto a B. Halle el valor del momento.

2) Un mástil se sujeta por dos cables (vientos) que forman 45° y 30°con la vertical que están conectados a un ajuste asimétrico de 7,5cm y 10cm respectivamente. Halle la tensión T del cable derecho si el cable izquierdo está sometido a 500N, de modo que se anule el momento en el punto central del mástil a la altura de las conexiones.



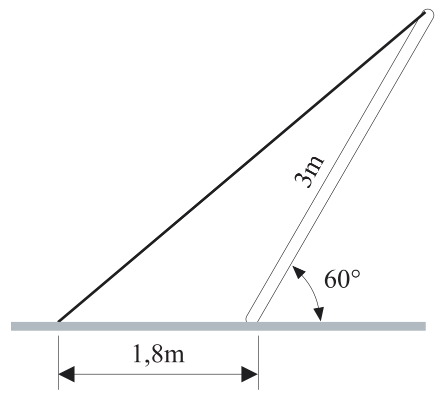
Problema 2.

3) Dos ruedas dentadas están conectadas y poseen un ángulo de presión de 20° entre los dientes. Una posee un diámetro de 10 cm. y transmite un momento de 5kNm respecto a su eje. Halle la fuerza de contacto.



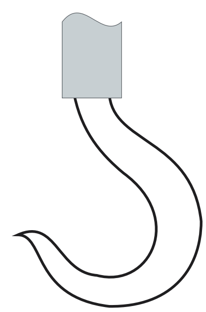
Problema 3.

4) Un mástil de 3m se sostiene a 60° con la horizontal mediante un cable sujeto al piso a 1,8m del punto de apoyo. Halle la tensión si el momento respecto al punto de apoyo necesario para sostenerlo es 4500Nm.



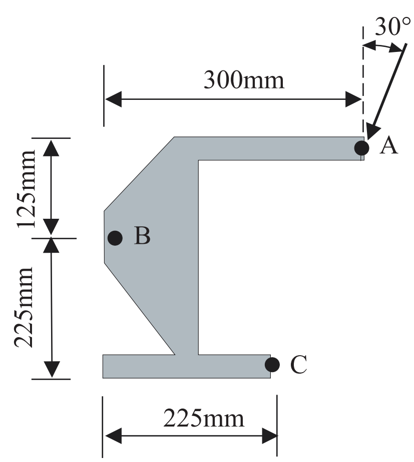
Problema 4.

5) El gancho de una grúa debe soportar 100kN. Diseñe el gancho de modo que el momento máximo a que esté sometido sea de 10kNm.



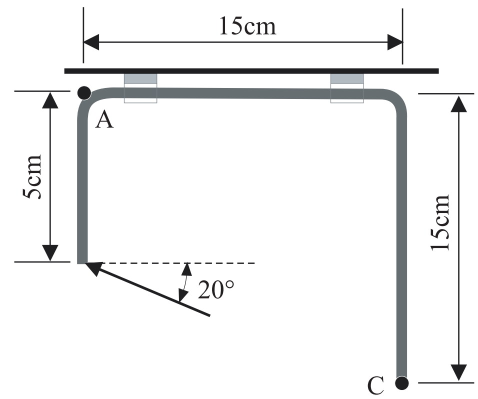
Problema 5.

6) Una fuerza de 450N es aplicada en A formando 30° con la vertical. Determinar: a) el momento de la fuerza con respecto a B b) el valor y sentido de la fuerza horizontal que aplicada en C ejerce el mismo momento con respecto de B c) la fuerza mínima que aplicada en C ejerce el mismo momento respecto a B.



Problema 6.

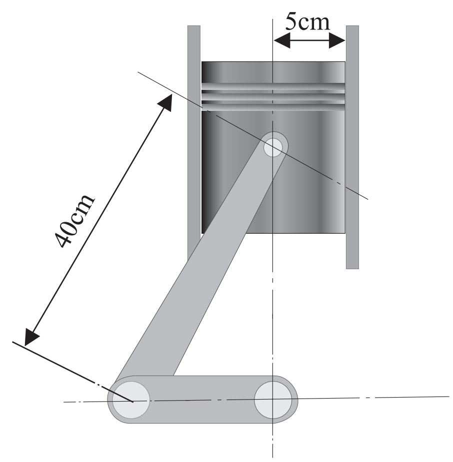
7) Calcular el momento de una fuerza de 100N con respecto a los puntos A y C. Las medidas son en cm.



Problema 7.

Momento de una fuerza respecto a un eje

8) Un pistón de un motor de combustión interna de 5cm de radio está sometido a una diferencia de presión de 300kPa. Posee una carrera de 20cm y está unido a una biela de 40cm. Asuma que se encuentra a mitad de su recorrido. Calcule el momento respecto al cigueñal debido a la fuerza que se trasmite a lo largo de la biela.

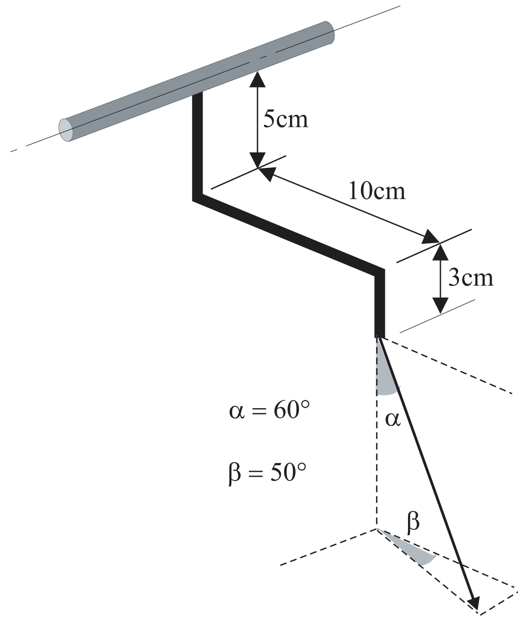


Problema 8.

9) Halle el momento de una fuerza aplicada a una llave para ajustar una rueda de carro respecto a la tuerca y al eje de la rueda. Asuma el máximo de fuerza que usted puede aplicar, así como los datos geométricos que requiera.

Problema 9.

10) Halle el momento de la fuerza respecto al eje. En el gráfico se muestra una vista en un plano perpendicular al eje, en el que la proyección de la fuerza forma 50° con la prolongación que se muestra. A su vez, la fuerza de 500N forma 60° respecto a la vertical.



Problema 10.

III SISTEMAS DE FUERZAS

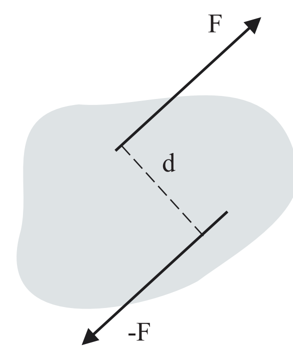
En ocasiones sobre el cuerpo de estudio actúa más de una fuerza. Bajo determinados requisitos que estudiaremos es posible sustituir ese conjunto de fuerzas por otro que produce los mismos efectos, incluso reducir varias fuerzas a una sola sin alterar las condiciones del problema. Estamos hablando de sistemas de fuerzas equivalentes.

Pares de fuerzas. Momento de un par.

Un **par de fuerzas**.es un sistema formado por dos fuerzas iguales y paralelas, dirigidas en sentidos opuestos y que no se encuentran sobre la misma recta.

Nótese que aunque la fuerza resultante sobre el cuerpo es nula, éste no se encuentra en equilibrio. El hecho de que la fuerza resultante sea cero hace que no exista tendencia a la traslación, de ahí que si el par tiende a mover al cuerpo sea entonces según una rotación pura. Esta capacidad de hacer girar al cuerpo la brinda **el momento del par** que es igual al producto del módulo de una de las fuerzas (recordar que son iguales) por la menor distancia entre las líneas de acción de las fuerzas del par. O sea:

$$\mathbf{M_p = Fd}$$



Par de fuerzas.

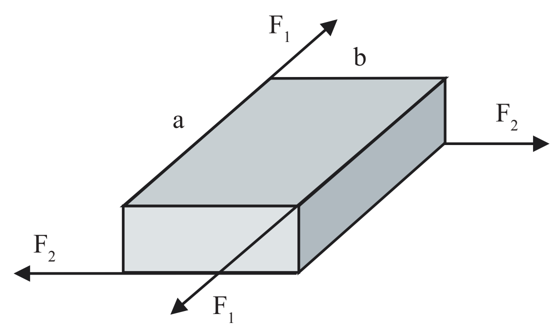
La distancia d también se conoce como brazo del par. Luego, el momento del par es el producto del valor de una de sus fuerzas por su brazo. Como vector, el momento del par está en la dirección perpendicular al plano que contiene a las fuerzas del par. Su sentido es saliendo del plano (positivo) si el cuerpo tiende a girar en sentido antihorario y viceversa. Las unidades son Nm.

Hay una diferencia de esencia entre el vector momento de una fuerza y el vector momento de un par, y es que este último no está asociado a un punto de aplicación. Es lo que conoce como **vector libre**. En realidad es así: en cualquier punto que se aplique el momento del par el efecto sobre el cuerpo será el mismo. En otras palabras, el par de fuerzas puede trasladarse en su plano de acción a cualquier posición.

Si sobre un cuerpo se aplican varios pares contenidos en planos paralelos, el **par resultante** es la suma algebraica de los pares respectivos.

Equivalencia de pares

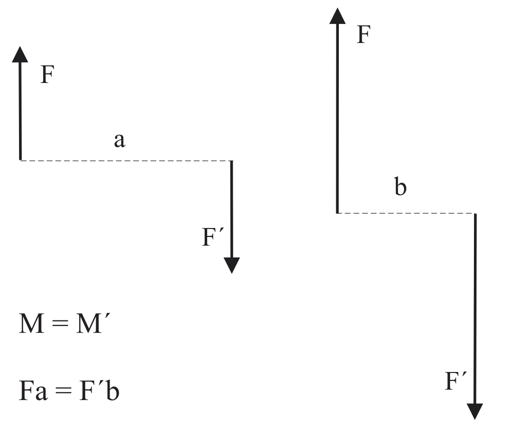
Dos pares son **equivalentes si producen el mismo efecto sobre el cuerpo**, es decir, si sus momentos son iguales, aún cuando los pares no estén en el mismo plano. De acuerdo a la figura, si se cumple que:



Pares de fuerzas equivalentes.

$F_1b = F_2a$,

Ambos pares son equivalentes, pues están en la misma dirección y sentido, aunque aplicados en planos paralelos. De hecho, producen la misma tendencia a rotar.



Pares equivalentes, ya que sus momentos son iguales.

Sistemas de fuerzas equivalentes

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si y solamente si las sumas de las fuerzas y de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto dado O de los dos sistemas son, respectivamente, iguales. O sea:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}'$$

$$\Sigma \mathbf{M}_0 = \Sigma \mathbf{M}_0'$$

Queda claro que los sistemas de fuerzas equivalentes tienden a impartir la misma traslación y la misma rotación al cuerpo. Es decir, el efecto sobre el cuerpo es el mismo, no hay forma de diferenciar por les resultados un sistema de otro.

En muchos problemas prácticos es conveniente pasar de un sistema de fuerzas a otro equivalente que puede resultar más sencillo. Veamos dos casos.

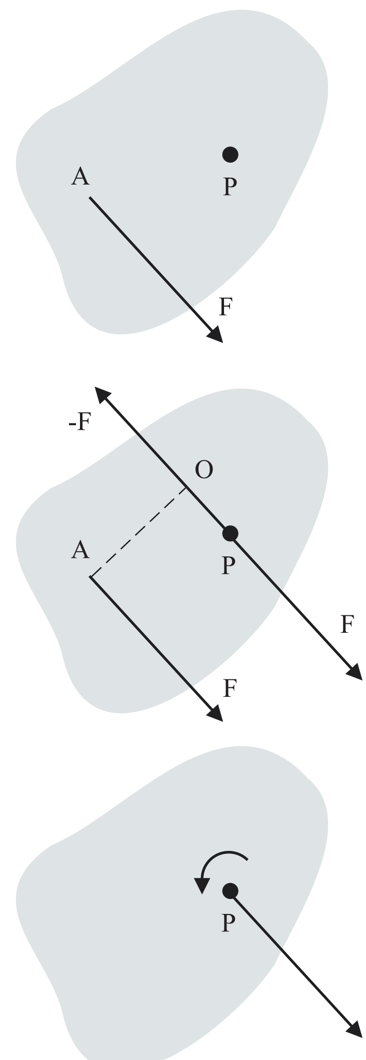
Un sistema formado por una fuerza puede transformarse en un sistema formado por una fuerza y un par, conocido como **sistema fuerza-par**. Sea **F** una fuerza aplicada en el punto A y supongamos que se desea ubicar un sistema fuerza-par en otro punto P. Es posible aplicar en dicho punto simultáneamente la fuerza **F** y su inversa **-F** sin alterar el estado del cuerpo. Entonces, se tiene una fuerza **F** aplicada en el nuevo punto P y un par formado por **F** aplicado en el punto original **A** y **-F** en P, cuyo valor es Fd.

De manera que al final lo que tenemos en el punto P es una fuerza **F** y un par de momento Fd.

La forma práctica de hacer esto es considerando que el momento del par no es más que el momento de la fuerza respecto al punto en el que se desea ubicar el sistema fuerza-par. d es la distancia entre las líneas de acción.

Este resultado puede generalizarse: **un sistema de varias fuerzas aplicadas sobre un cuerpo puede transformarse en un sistema formado por una sola fuerza y un par**. Habría que encontrar la resultante de las fuerzas, dada por la suma vectorial, así como la resultante de los momentos de las fuerzas respecto al punto donde se va a colocar el sistema fuerza-par. La fuerza resultante será la fuerza del nuevo sistema y el momento del par será el momento resultante.

Obsérvese que al sustituir una fuerza por un sistema fuerza-par es como situar en el punto dado los efectos de la fuerza de forma separada: el efecto de traslación lo da la fuerza y el de rotación el momento del par.



Transformación de un sistema de fuerzas aplicado sobre un cuerpo en un sistema fuerza-par.

Por otra parte, un sistema formado por un par y una fuerza (siempre que el momento del par sea perpendicular a la fuerza) puede transformarse en otro equivalente dado por una fuerza única. En efecto, si en un punto O está aplicada una fuerza **F** y hay un par de momento $\mathbf{M}_p$, entonces habrá que desplazar la fuerza **F** desde O hasta un punto A en el que el momento de **F** respecto a O sea igual al momento del par inicial $\mathbf{M}_p$. La distancia OA debe ser tal que se cumpla la condición que:

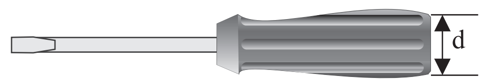
$M_p = F(OA)$

En el caso de fuerzas coplanares, que es el que nos ocupa, un sistema de fuerzas puede sustituirse por otro equivalente constituido por una sola fuerza. Para ello se encuentra la resultante de las fuerzas como la suma vectorial de todas ellas. Se halla el momento resultante de todas las fuerzas respecto a un punto arbitrario. Para que sean equivalentes el sistema inicial y el formado por una sola fuerza el momento de ésta debe ser igual al momento resultante del sistema inicial. Esto permite hallar la distancia a la que debe aplicarse la fuerza resultante respecto al punto de referencia arbitrario.

La situación más simple es la de un sistema de fuerzas concurrentes, donde es suficiente hallar la resultante de las fuerzas, ya que el momento resultante respecto al punto de concurrencia es obviamente cero. Otro caso particular es un sistema de fuerzas paralelas, que también es posible reducir a una sola fuerza.

Problemas resueltos

1) Para aflojar un tornillo es necesario vencer un momento de par de 4Nm. La paleta del destornillador mide 0,8cm y coincide con el diámetro de la cabeza del tornillo. Calcule al valor mínimo del diámetro del cabo del destornillador, si la fuerza tangencial efectiva que puede aportar la mano es de 150N. Compare esta fuerza con la que mantiene ajustado al tornillo.



Problema resuelto 1.

Solución:

Del análisis del problema se desprende que el momento del par creado por la fuerza tangencial de la mano debe ser al menos igual que el momento necesario para aflojar el tornillo. Hagamos las siguientes consideraciones:

- El cabo del destornillador tiene forma cilíndrica
- La fuerza de la mano está aplicada sobre el cabo en dos puntos sobre un diámetro formando un par
- El diámetro de la cabeza del tornillo es igual al diámetro del mismo.

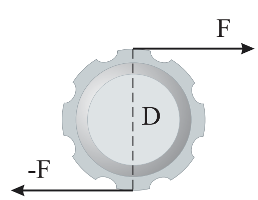


Diagrama de fuerzas sobre el cabo del destornillador.

De manera que igualando:

$4Nm = F_m D$

Donde F_m es la fuerza de la mano y D el diámetro del cabo. Sustituyendo los valores, se tiene que D = 2, 6 cm

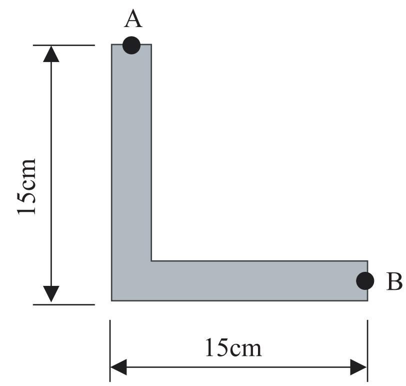
Para hallar la fuerza que mantiene ajustado al tornillo, considerando que actúa tangencialmente como un par:

$4Nm = F_t\, d$

Siendo F_t la fuerza en cuestión y del diámetro del tornillo. Como que d = 0,008m, la fuerza será de $F_t = 500N$

Nótese que el ancho apropiado del cabo permite aflojar el tornillo con una fuerza menor, como era de esperar.

2) Una pieza en L tiene aplicada una fuerza de 100N en un extremo, perpendicular al plano formado por los brazos iguales de 15cm. Sustituya la fuerza por un sistema fuerza-par colocado en el otro extremo. Si se quiere sujetar la pieza mediante un remache por ese punto, investigue cuál sería la dirección más conveniente para colocarlo.



Problema resuelto 2.

Solución:

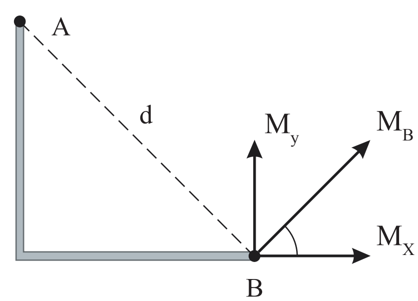
Para resolver este problema asumimos que la fuerza F está aplicada en el punto A, saliendo del plano del papel. Un sistema fuerza-par situado en B tendrá una fuerza igual a F y un par del mismo valor que el momento de F respecto a B. Como:

$M_B = F\, d$

Se tiene que $d = \sqrt{(0{,}15)^2 + (0{,}15)^2} = 0{,}21m$

Y: $M_B = (100)(0{,}21) = 21Nm$

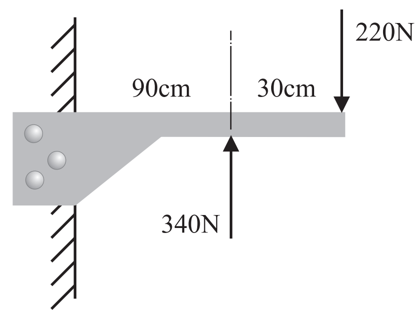
De la propia construcción geométrica se observa que $\theta = 45°$



Sistema fuerza-par situado en B.

Para investigar cómo colocar el remache, se descompone el vector M_B es sus componentes M_X y M_Y. La existencia de esas componentes se interpreta como la posibilidad de rotar alrededor de esos ejes por la aplicación de la fuerza F. Como no existen componentes perpendiculares al plano del papel, esa será la dirección correcta para colocarlo.

3) Halle el punto de aplicación de la fuerza equivalente. La distancia entre la pared y la primera fuerza de 340N es de 90cm; y entre ésta y la fuerza de 220N es de 30cm.



Problema resuelto 3.

Solución:

Se trata de reducir el sistema de fuerzas existente por una sola fuerza. Ambos sistemas de fuerzas han de ser equivalentes, por lo que deben cumplir que las sumas de las fuerzas y los momentos son iguales, o sea:

$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}'$
$\Sigma \mathbf{M}_0 = \Sigma \mathbf{M}_0'$

Hallemos la fuerza y el momento resultante del sistema inicial. Calcularemos el momento respecto al punto O.

$R_y = \Sigma F_y = 340N - 220N = 120N$
$M = \Sigma M_0 = -(220N)(1{,}2m) + (340N)(0{,}9m)$
$= -264Nm + 306Nm = 42Nm$

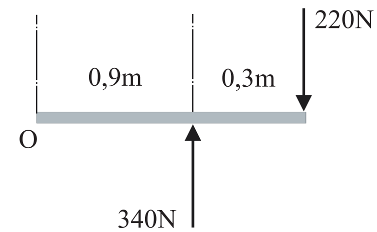


Diagrama de fuerzas del problema resuelto 3.

Aquí los signos de los momentos están dados por la regla usual. El hecho de que el momento resultante es positivo indica que la pieza tiende a girar en sentido antihorario.

La fuerza resultante de 120N dirigida hacia arriba estará aplicada en un punto tal que su momento respecto a 0 es de 42Nm.

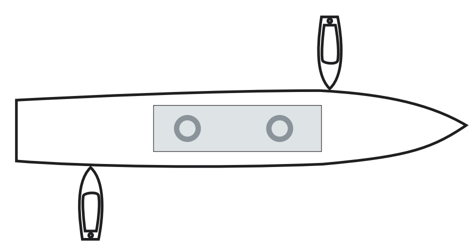
Como $M_0 = Fd$ esto implica que:
$d = M_0/F = 42Nm/120N = 0{,}35m$

Por tanto, se reduce el sistema inicial a uno equivalente de una sola fuerza de 120N aplicada a 0,35m a la derecha del punto 0.

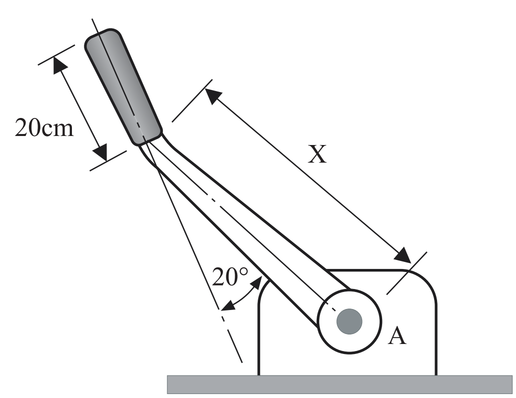
Problemas propuestos

Par de fuerzas

1) Un barco que posee dos hélices idénticas, cada una capaz de generar una tracción de 300kN, pierde el control al girar una hélice contraria a la otra y solicita ayuda de dos remolcadores. Encontrar la fuerza que debe ejercer cada remolcador para mantener el barco en posición. Proponga las distancias que requiera.

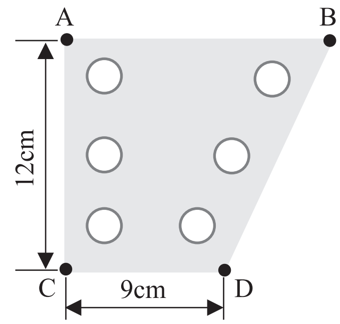

Problema 1.

2) Una palanca de mando está sometida a un par de momento 65Nm en sentido antihorario ejercido por un eje en A, y debe ser diseñada para funcionar con una tracción de 100N. Encuentre la dimensión X si el mango mide 20cm y la fuerza se aplica perpendicularmente.



Problema 2.

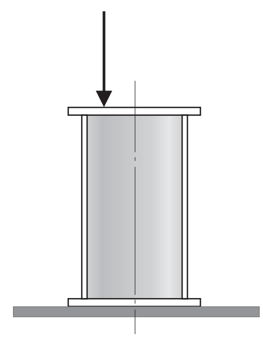
3) Un taladro múltiple abre simultáneamente seis orificios en la placa de acero de la figura. Cada broca ejerce sobre la placa un par de 40Nm en sentido horario. Determinar el par equivalente formado por las fuerzas del mínimo valor posible que actúen: (a) en A y C (b) en A y D. Las medidas está dadas en cm.



Problema 3.

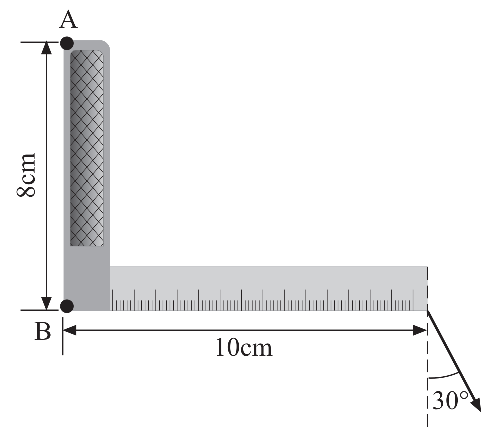
Sistema fuerza-par

4) La acción de la carga de 2kN sobre la columna se puede analizar considerando que produce una compresión a lo largo de la línea central y un par de 150Nm. Halle el punto de aplicación de la fuerza respecto al centro de la columna.



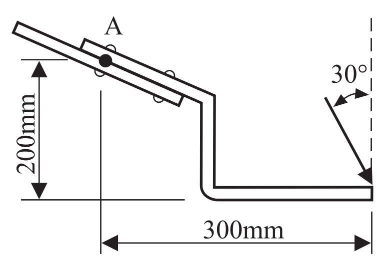
Problema 4.

5) A la escuadra de la figura se le aplica una fuerza de 50N que forma 30° con la vertical. Determinar: a) Un sistema equivalente fuerza par en B. b) Dos fuerzas horizontales en A y B que formen un par equivalente al par encontrado en a).



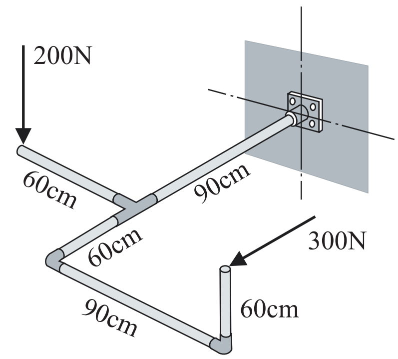
Problema 5.

6) Se aplica una fuerza de 400N a una placa, como se ilustra en la figura, formando 30°con la vertical. Determinar el sistema fuerza-par equivalente en A.



Problema 6.

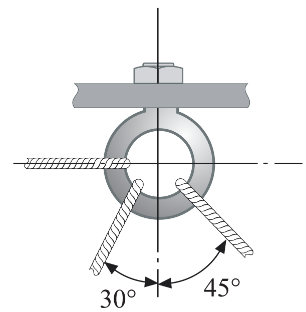
7) Determine si en la tubería de la figura, se aprieta o se afloja la rosca que se inserta en la pared debido a la acción de las fuerzas aplicadas.



Problema 7.

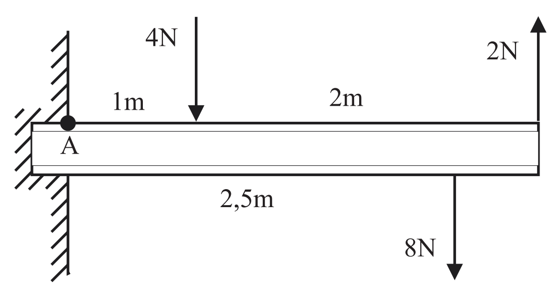
Reducción a una sola fuerza

8) La argolla soporta las tensiones de tres cables. Se quieren sustituir por un cable único. Determine su tensión y dirección. Los dos cables inferiores forman 30º y 45º con la vertical y un valor de 50N y 180N respectivamente. La otra fuerza ejerce 300N.



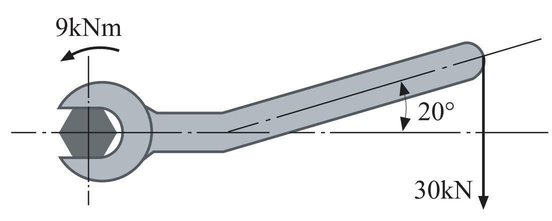
Problema 8.

9) Determine la distancia del punto A a la línea de acción de la fuerza equivalente.



Problema 9.

10) Sustituya el par de 9kNm y la fuerza de 30 kNm por una fuerza única aplicada en un punto ubicado en el brazo. El brazo forma un ángulo de 20 grados con la horizontal. Localice el punto a partir del extremo del brazo.



Problema 10.

IV CUERPO RÍGIDO EN EQUILIBRIO

Una vez introducidos los conceptos de momento de una fuerza y de fuerzas equivalentes, podremos emprender el estudio de los cuerpos rígidos en equilibrio. Para ello es necesario conocer todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Estas fuerzas pueden ser de al menos cuatro tipos: fuerzas ocasionales sobre el cuerpo, fuerzas de ligadura o de reacción debido a los otros cuerpos que rodean a cuerpo de estudio; fuerzas de gravedad, debido a la interacción terrestre; y fuerzas de rozamiento. En este capítulo estudiaremos las distintas fuerzas de ligaduras; en los que siguen se tratarán la fuerza de gravedad y la de rozamiento.

Definición. Diagrama de cuerpo libre

Un cuerpo rígido está en equilibrio cuando las fuerzas externas que actúan sobre él forman un sistema de fuerzas equivalentes a cero. O sea:

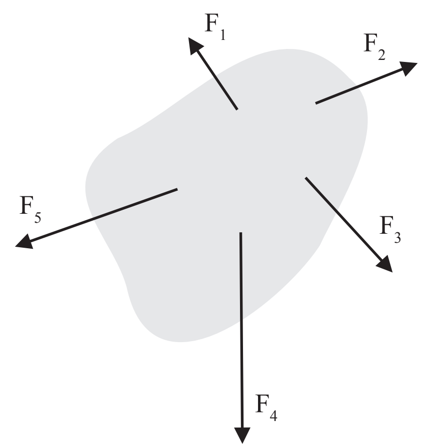
$\mathbf{R} = \mathbf{0}$

$\mathbf{M_0} = \mathbf{0}$

La resultante de las fuerzas y el momento son nulos. Este sistema de fuerzas no impartirá ni traslación ni rotación al cuerpo rígido considerado.

Un primer paso en la solución de este tipo de problema es hacer un **diagrama de cuerpo libre, o diagrama de fuerzas,** en el que se señalan todas las fuerzas externas que actúan sobre él. Aquí se incluyen fuerzas aplicadas específicamente sobre el cuerpo y la fuerza de gravedad, que supondremos aplicada en un punto llamado centro de gravedad.

Existe otro tipo de fuerza dado por las **reacciones** de los cuerpos que soportan al cuerpo de estudio y que de alguna manera limitan o ligan su movimiento. Estas fuerzas aparecen en los puntos donde el cuerpo se apoya o conecta con los que lo rodean y son consecuencia de la Tercera ley de Newton: ***la interacción entre dos cuerpos transcurre con fuerzas de igual valor pero de sentidos opuestos.*** En otras palabras, sobre el cuerpo aparece una fuerza igual pero de sentido contrario a la que él ejerce sobre su apoyo. Por ejemplo, en el caso de un libro sobre una mesa, ésta limita su movimiento vertical impidiendo que caiga, lo cual viene dado por la reacción de la mesa sobre el libro. De modo que para realizar el diagrama de cuerpo libre hay que conocer esas reacciones.



Si y solo si la suma de las fuerzas y de los momentos es cero, el cuerpo estará en equilibrio.

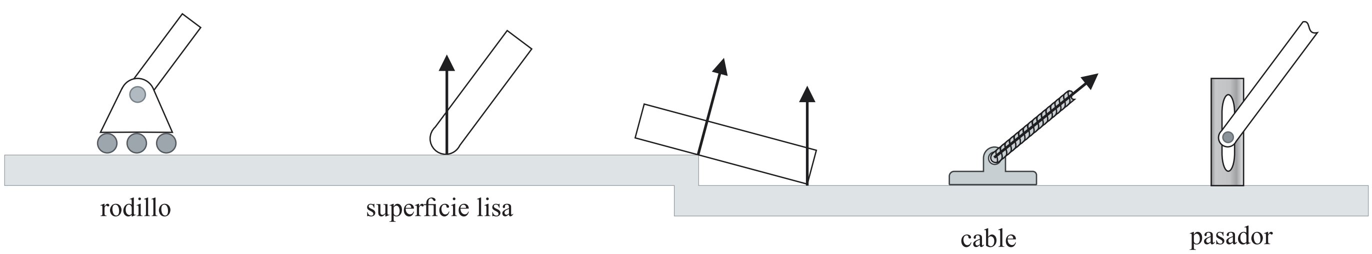
Ligaduras. Tipos de ligaduras en 2 dimensiones

Cuando un cuerpo puede desplazarse sin restricciones en el espacio se dice que es libre, de lo contrario está ligado. Todo lo que restringe el movimiento del cuerpo en el espacio se llama **ligadura**. Algunos textos le llaman conexiones, enlaces, constricciones, etc.

Una caja sobre el piso o una puerta con bisagras son ejemplos de cuerpos con ligaduras. Las ligaduras serían la superficie del piso (que impide que la caja se desplace verticalmente hacia abajo) y las bisagras (que impiden que la puerta se aleje del marco). La fuerza que restringe el movimiento del cuerpo es la **reacción o fuerza de ligadura**.

Los tipos de reacciones dependen del tipo de conexión.

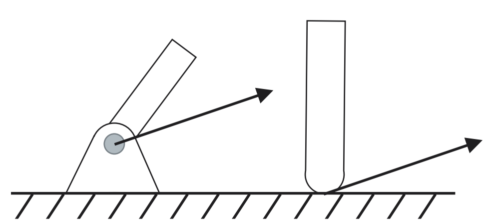
- **Reacciones equivalentes a una fuerza cuya línea de acción es conocida**. Aquí entran: rodillos, balancines, superficies lisas, eslabones, cables, collarín sobre varilla lisa, pasador en ranura lisa. Todos estos apoyos impiden el movimiento en una dirección. La reacción está dirigida en sentido opuesto a la dirección en que la conexión impide el desplazamiento del cuerpo.



Reacciones equivalentes a una fuerza cuya línea de acción es conocida.

Esto hace que en estos casos haya sólo una incógnita, es decir, el módulo del vector reacción, ya que su dirección y sentido se conoce. Si la conexión es de una superficie y un punto, la reacción siempre estará normal a la superficie.

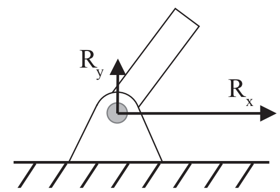
- **Reacciones equivalentes a una fuerza de dirección desconocida.** Aquí se consideran pasadores lisos, bisagras y superficies rugosas. Estas ligaduras sólo permiten el movimiento de rotación en un plano (caso de pasadores y bisagras) o aparece una fuerza normal y otra tangencial (superficie rugosa). En todo caso la reacción está en un plano, y se tienen dos incógnitas: el módulo y la dirección. Esto también se puede expresar por las dos componentes rectangulares de la reacción: una normal y otra tangencial.



Reacciones equivalentes a una fuerza de dirección desconocida.

Existen otros tipos de ligadura, por ejemplo, cuando existe un apoyo fijo (empotramiento) en que la ligadura es total. En este caso hay tres incógnitas y se acostumbra a reducir a una fuerza y un par. En lo adelante no trataremos este caso.

Hay que decir que no siempre el sentido de la reacción es evidente. En principio se adopta uno y al final, al resolver el problema, el signo obtenido nos indicará si la selección *a priori* es correcta o no. Un valor negativo indicaría que el sentido real es el contrario al tomado de inicio.



La reacción en el pasador es de segundo tipo y puede representarse como dos componentes rectangulares.

Equilibrio de un cuerpo rígido en 2D

Puesto que las fuerzas estarán contenidas en el plano (x,y), el momento estará dirigido en la dirección perpendicular al plano. Las condiciones necesarias y suficientes para que el cuerpo esté en equilibrio son:

$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma M_A = 0$

Son tres ecuaciones que permiten encontrar hasta tres incógnitas. Está claro que A es un punto arbitrario respecto al cual se calcula el momento. Es posible encontrar una nueva ecuación ($\Sigma M_B = 0$) donde B es otro punto. Sin embargo esta no es una ecuación independiente de las otras que permita hallar una nueva incógnita, aunque puede utilizarse para alguna comprobación. No obstante, puede utilizarse para reemplazar a alguna y quedar:

$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma M_A = 0$
$\Sigma M_B = 0$

O incluso:

$\Sigma M_A = 0$
$\Sigma M_B = 0$
$\Sigma M_C = 0$

Estos sistemas son equivalentes y deben ser utilizados según el problema. Hay casos en que no hay fuerzas aplicadas en un eje, y la ecuación correspondiente es trivial ($0 \equiv 0$), por lo que hay que sustituirla por alguno referida al momento.

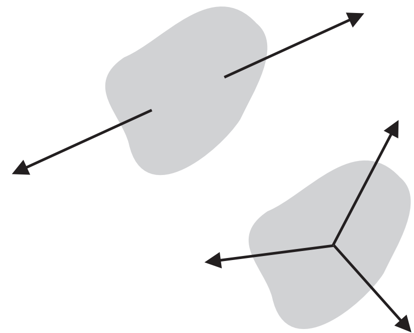
Lo recomendable es escoger el punto respecto al cual se hallan los momentos de manera que estén aplicadas fuerzas incógnitas; en tal caso los momentos correspondientes son nulos y se simplifica la ecuación.

El problema tiene solución cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y se dice entonces que las reacciones son determinadas. Si hay más incógnitas que ecuaciones, entonces el problema es indeterminado y no puede resolverse. Si hay más ecuaciones que incógnitas, no se cumplen las condiciones y el sistema no está en equilibrio. De manera que para que haya equilibrio debe haber tantas ecuaciones como incógnitas.

Cuerpo sometido a dos y tres fuerzas

Se demuestra que si un cuerpo sometido a la acción de dos fuerzas está en equilibrio, las dos fuerzas deben tener el mismo módulo, la misma línea de acción y sentidos opuestos.

Se demuestra también que si un cuerpo está sometido a la acción de tres fuerzas, éstas son concurrentes en un punto. Estas propiedades se obtienen resolviendo casos particulares pero su aplicación de forma directa resulta útil.



Cuerpos sometidos a dos y tres fuerzas.

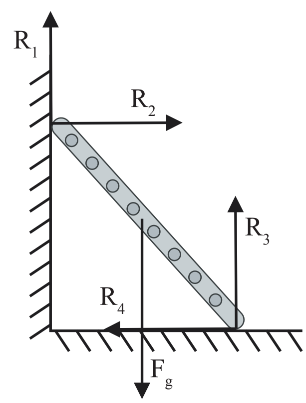
Problemas resueltos

1) Represente las fuerzas sobre: a) una escalera colocada contra una pared rugosa sobre una superficie rugosa. b) una escalera colocada contra una pared lisa sobre una superficie rugosa. c) una escalera colocada contra una pared rugosa sobre una superficie lisa. d) una escalera colocada contra una pared lisa sobre una superficie lisa. Analice en cada caso las posibilidades de lograr el equilibrio.

Solución:

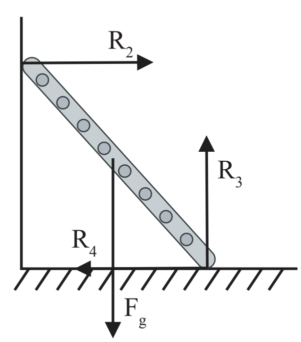
En cada caso consideraremos a la escalera como un cuerpo homogéneo y se hace el diagrama de cuerpo libre. La posibilidad de equilibrio está dada porque la suma de las fuerzas en ambos ejes sea nula. Veamos cada inciso.

a) Como la pared y el piso son rugosos, se tienen reacciones de segundo tipo, por lo que aparecen dos componentes, tal y como se observa en el gráfico. La fuerza de gravedad está colocada en el centro de la escalera por la consideración de ser un cuerpo homogéneo. Se aprecia la posibilidad de que estas fuerzas se compensen y que por tanto haya equilibrio.



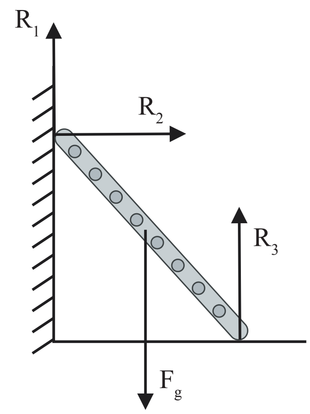
Escalera contra pared rugosa sobre superficie rugosa.

b) En la pared lisa se tiene una reacción de primer tipo perpendicular a la pared. Al observar el diagrama se evidencia la posibilidad de equilibrio, pues las fuerzas pueden compensarse.



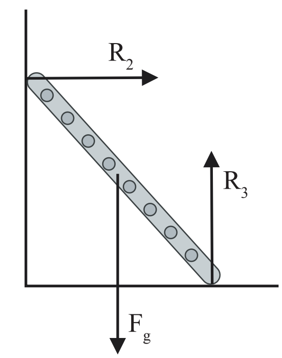
Escalera contra pared lisa sobre superficie rugosa.

c) Aquí resulta que en el piso la reacción es de primer tipo, y la fuerza de reacción está en la dirección vertical. Al observar el gráfico se puede comprobar que no hay posibilidad de lograr el equilibrio ya que la reacción horizontal de la pared no tiene otra fuerza capaz de anularla. En otras palabras, la escalera se cae.



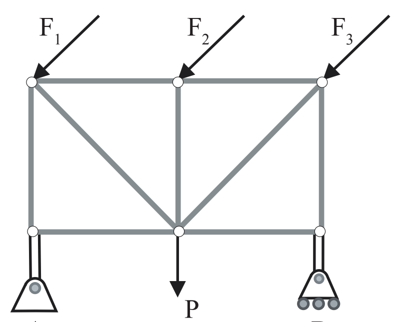
Escalera contra pared rugosa sobre superficie lisa.

d) Todas las reacciones son de primer tipo. La reacción del piso puede compensarse con el peso, no así la reacción horizontal de la pared, por lo que el equilibrio resulta imposible y la escalera se cae.



Escalera contra pared lisa sobre superficie lisa.

2) La estructura está sometida a fuerzas conocidas F_1, F_2, F_3. También se conoce el peso P aplicado en el punto que se muestra. Se pide hallar las reacciones en los apoyos.



Estructura sometida a fuerzas conocidas.

Solución:

Primeramente se realiza un diagrama de cuerpo libre de la estructura, que sabemos que está en equilibrio.

La ligadura en A es un pasador liso y en B un rodillo. De acuerdo a la clasificación vista anteriormente, en A aparecen dos componentes rectangulares y una en B.

En el diagrama de cuerpo libre las fuerzas aplicadas se han descompuesto en las componentes rectangulares. Como se ve, hay tres incógnitas, las dos componentes de las reacciones en A y la normal en B. Las ecuaciones de equilibrio serían:

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M_A = 0$

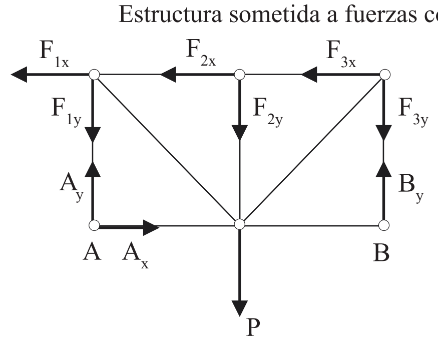


Diagrama de cuerpo libre.

O sea:

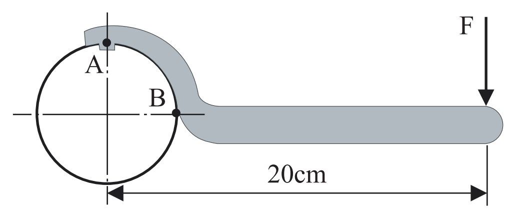
$\Sigma F_x = - F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} + A_x = 0$
$\Sigma F_y = - F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} - P + A_y + B_y = 0$
$\Sigma M_A = F_{1x} d + F_{2x} d + F_{3x} d - F_{2y} d - F_{3y} d + B_y (2d) = 0$

Donde hemos considerado que la distancia entre los nudos de la estructura es la misma e igual a **d**. Obsérvese la ventaja de haber escogido al punto A como punto para calcular los momentos, pues se anularon los momentos de tres fuerzas cuyas líneas de acción pasan por A.

Asumiendo como datos las direcciones de las fuerzas aplicadas, es posible conocer todas las componentes y las incógnitas serían justamente, A_x, A_y y B_y. Como pueden construirse tres ecuaciones, el problema es soluble. La atinada selección de A para calcular los momentos hace que en la tercera ecuación sólo se tiene una incognita, B_y, lo cual permite calcularla con facilidad. Sustituyendo ese valor en la segunda ecuación se encuentra A_y y A_x se halla por simple despeje en la primera ecuación.

Es importante tener presente que en el diagrama de fuerzas aparecen sólo las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de estudio y no las que el mismo ejerce sobre los otros cuerpos que lo rodean.

3) Una llave de gancho que se utiliza para hacer girar ejes se somete a una fuerza de 150N. Halle las reacciones en la espiga A y en el contacto liso B. El diámetro del eje es 10cm y la distancia desde la dirección de la fuerza centro del eje es de 20cm.



Problema resuelto 3.

Solución:

Para resolver el problema consideramos el punto A como un pivote. Por tanto, al construir el diagrama de fuerzas, la reacción en A será de segundo tipo tal y como se muestra. Consideramos además que la llave apoya en B y la reacción es perpendicular de modo que coincide con la dirección horizontal. Se sitúa también la fuerza F.

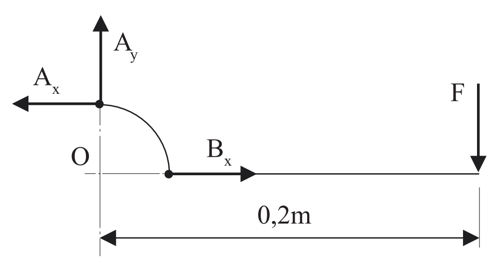


Diagrama de fuerzas.

Nótese que al analizar estas fuerzas se comprende mejor la consideración de A como un pivote. Es de esperar que en ese punto la reacción esté en una dirección que forma un ángulo con los ejes coordenados.

Se plantean las ecuaciones de equilibrio. Para las fuerzas, como es usual, se toma el sentido positivo hacia arriba y la derecha. Como punto 0 para el cálculo del momento se toma el centro del eje:

$\Sigma F_x = 0$
$\Sigma F_y = 0$
$\Sigma M_0 = 0$

Es decir:

$R_x - A_x = 0$ (1)
$A_y - F = 0$ (2)
$- F\,(0,2) + A_x\,(0,05) = 0$ (3)

Es importante destacar que el signo menos del momento de F no tiene nada que ver con el signo menos de la fuerza F en la ecuación de las fuerzas según el eje vertical. Se refieren a dos direcciones y sentidos diferentes. El signo menos de la fuerza vertical indica que está en esa dirección dirigida hacia abajo. El signo menos del momento significa que entra perpendicular al plano del papel y que F tiende a rotar a la llave en sentido horario.

Sustituyendo el valor de F en la tercera ecuación y despejando,

$A_x = (150)(0,2)/(0,05) = 600N$

Esto implica, de acuerdo a la primera ecuación que $R_x = 600N$

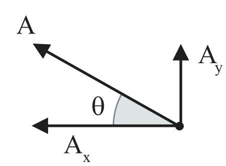
De la ecuación en el eje y se desprende que $A_y = 150N$

De modo que la reacción A se calcula por:

$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} = \sqrt{(600)^2 + (150)^2} = 618\ N$

La dirección, o sea, el ángulo respecto al eje x se halla por:

$\tan\theta = A_y/A_x = 150/600 = 0,25$ por lo que $\theta = 14°$

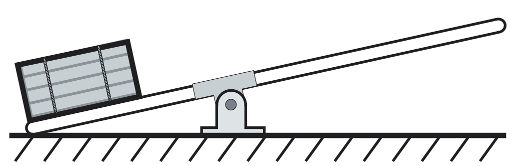


Reacción en el punto A y sus componentes

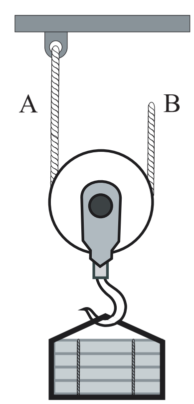
Luego, la reacción en B es horizontal hacia la derecha, de 600N, y la reacción en la espiga A es de 618N y forma 14° con la horizontal.

Problemas propuestos

1) Calcule dónde colocar el punto de apoyo de una palanca de longitud L para mover una carga de 2P con una fuerza P.


Problema 1.

2) Encuentre la tensión en cada cable. Sobre el cable B se aplica una fuerza F. El cuerpo que pende de la roldana posee un peso P. Solucione el problemas por dos vías: a) colocando el punto 0 para el cálculo del momento en el centro de la roldana. b) colocando el punto 0 en el punto de contacto del cable A con la roldana.

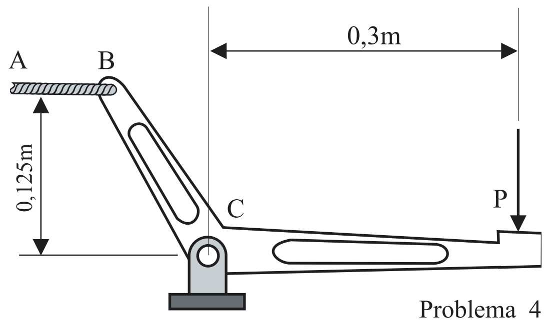


Problema 2.

3) Hallar la distancia desde el eje delantero al centro de gravedad del camión. Se sabe que dicho eje soporta 7 KN y los otros 8KN respectivamente. La distancia entre el eje delantero y el segundo es de 3, 25m y entre el segundo y el tercero de 1,2m.

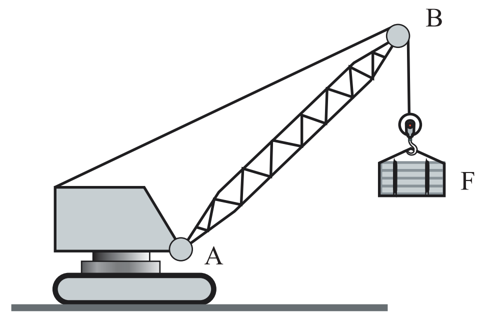
Problema 3.

4) La tensión requerida en el cable AB es de 1200N. determinar la fuerza vertical P que se debe aplicar al pedal y la reacción correspondiente en el pivote C.



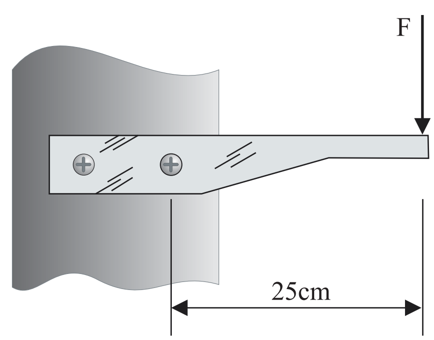
Problema 4

5) El brazo de una grúa pesa 2kN y la distancia del eje A al centro de gravedad del brazo es de 6m. Para la posición indicada, determinar la tensión T en el cable y la reacción en A. La carga F es de 5kN; el ángulo del brazo con la horizontal es de 30°; el ángulo entre el brazo y el cable es de 10°.



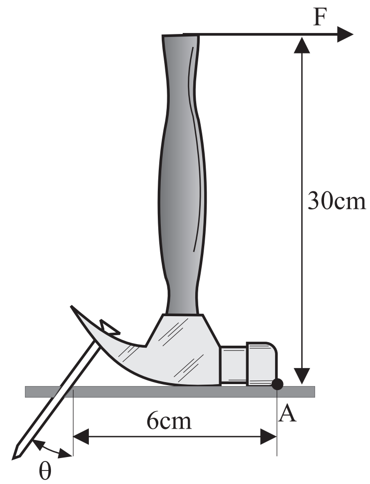
Problema 5.

6) El soporte se diseña para una carga de 7500N y los tornillos resisten hasta 25000N. Halle la distancia mínima posible entre los tornillos.



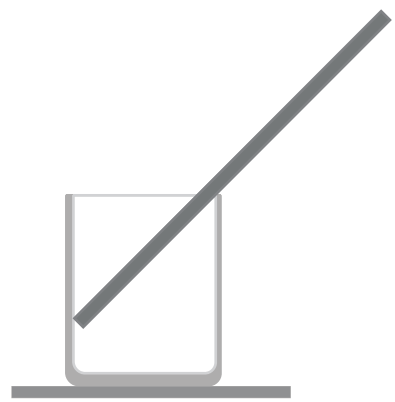
Problema 6.

7) Cuál será la tracción sobre el clavo por las orejas del martillo y la fuerza total R ejercida sobre el punto A por el borde de la cabeza del martillo. Considere que la superficie es rugosa. La fuerza F es de 250Ny el ángulo θ de 30°.



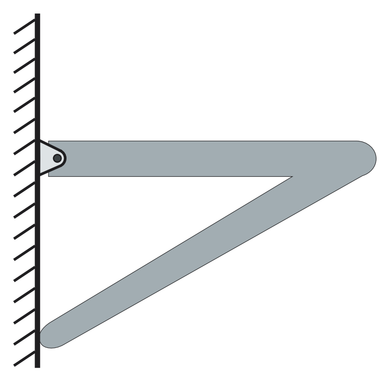
Problema 7.

8) Halle la longitud de una varilla que se apoya en un cilindro pulido de 7,1cm de radio, formando un ángulo de 45°.



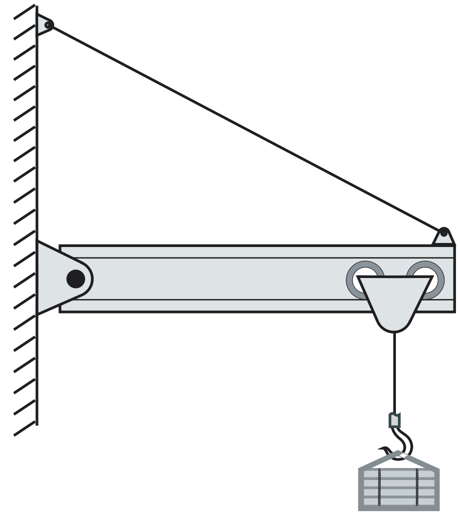
Problema 8.

9) El soporte de la figura, de unos 10kg, puede girar sobre el pasador y se apoya contra una pared muy pulida. Se coloca un tanque de 200kg y 1,2m de diámetro de modo que su centro de gravedad está en el plano del soporte. Si el pasador solo soporta una reacción total de 5000N, halle la máxima distancia a la que se puede separar el tanque de la pared. La distancia entre el pasador y el apoyo del soporte es de 60cm.



Problema 9.

10) Se tiene una viga en I de 90 Kg/m. Si se desea diseñar una grúa como la de la figura que soporte 10kN, ¿cuánto debe ser capaz de resistir el cable y el pasador? Proponga las dimensiones.

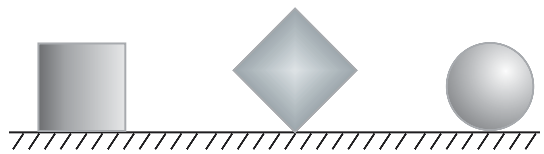


Problema 10.

V CENTRO DE GRAVEDAD

En los capítulos anteriores se ha asumido la existencia de un punto llamado centro de gravedad en el cual suponemos aplicada la fuerza de gravedad del cuerpo. Ya sabemos que en el caso de la Estática, la fuerza de gravedad coincide con el peso, entendido como la reacción sobre el cuerpo. Tanto el peso como su punto de aplicación, o sea, el centro de gravedad, tienen gran importancia para las condiciones de equilibrio.

La figura muestra tres objetos y en principio en los tres casos existe equilibrio, ya que la línea de acción de la fuerza de gravedad coincide con la de la reacción. Sin embargo el tipo de equilibrio es diferente. El primer caso es estable, el segundo inestable y el tercero indiferente. Quiere decir que si desviamos ligeramente de su posición de equilibrio, en el primer caso regresa a su posición inicial, en el segundo se aleja definitivamente y en el tercer caso se queda ahí. Todo esto está dado por los pares formados por el peso y la reacción, que tienden a rotar el cuerpo en uno u otro sentido. En el caso del cilindro no se forma ningún par, por eso permanece en la posición alcanzada.


Diferentes tipos de equilibrio.

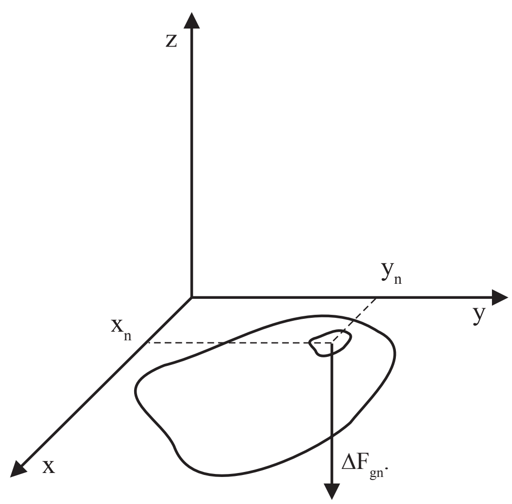
En lo que sigue estudiaremos cómo calcular el centro de gravedad de cuerpos bidimensionales. Este conocimiento nos servirá para cuerpos volumétricos si sus caras son paralelas al plano de estudio.

Centro de gravedad, centro de masa, centroide

Sea un cuerpo en forma de lámina y fijemos un sistema de coordenadas. Dividamos el cuerpo en fracciones de masa Δm. Sobre cada una de ellas actúa la fuerza de gravedad ΔF_g donde $\Delta F_g = \Delta mg$ siendo g la aceleración de la gravedad. Asumiremos que las fuerzas ΔF_g son paralelas. Esto es factible ya que aunque en realidad son concurrentes en el centro de la tierra, el valor del radio de esta y las dimensiones del cuerpo permiten hacer tal consideración. La tarea consiste en sustituir a todas esas fuerzas por una sola equivalente aplicada en un punto de coordenadas **X, Y.**

Siendo fuerzas paralelas, se tiene que la fuerza resultante es:

$F_g = \Sigma\, \Delta F_{gn}$.



Coordenadas del centro de gravedad del enésimo elemento en que se divide la lámina.

La n se refiere al enésimo elemento en que se divide la lámina.

Hallemos la componente según (y) del momento debido a cada ΔF_g. Está claro que es la suma de los momentos de cada fuerza de gravedad correspondiente a cada uno de los elementos:

$M_y = x_1\Delta F_{g1} + x_2\Delta F_{g2} + x_3\Delta F_{g3} + \ldots = \Sigma\, x_n\Delta F_{gn}$

De la misma manera, el momento respecto al eje x será:

$M_x = \Sigma\, y_n\Delta F_{gn}$

Como ambos sistemas son equivalentes, los momentos deben ser iguales, es decir, los momentos del sistema compuesto por una sola fuerza y el dado por todas las fuerzas de gravedad sobre cada elemento. O sea:

$\mathbf{X}F_g = \Sigma\, x_n \Delta F_{gn}$
$\mathbf{Y}F_g = \Sigma\, y_n F_{gn}$

De modo que las coordenadas del **centro de gravedad** son:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta F_{gn}/F_g$
$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta F_{gn}/F_g$

Pero sabemos que $\Delta F_{gn} = \Delta m_n g_n$ y que $F_g = \Sigma\, m_n g_n$. Aquí g_n es la aceleración de la gravedad en cada elemento, suponiendo que en principio g varía de un punto a otro del espacio. Sustituyendo:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta m_n g_n / \Sigma\, m_n g_n$
$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta m_n g_n / \Sigma\, m_n g_n$

Consideremos, lo cual es válido a los efectos prácticos, que el campo gravitatorio es uniforme en la región del espacio en la que se encuentra el cuerpo de estudio. Significa que g es la misma para todos los elementos. Esto permite sacar las g de las sumatorias.

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta m_n/M$
$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta m_n/M$

Que son las llamadas coordenadas del **centro de masa**, que coinciden con el centro de gravedad si el campo es uniforme.

Si el cuerpo es homogéneo su densidad ρ es constante, y se tiene que para cada elemento:

$\rho = \Delta m/\Delta V$

Sustituyendo $\Delta V = t\Delta A_n$, donde t es el espesor del cuerpo y ΔA_n el área de un elemento:

$\rho = \Delta m/t\Delta A_n$

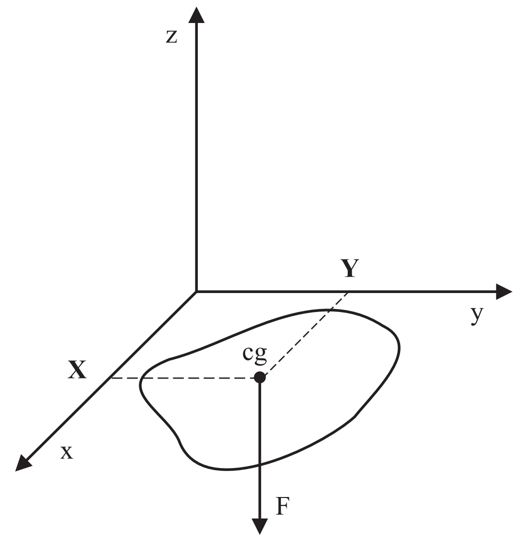
De manera que:

$\Delta m = \rho\, t\Delta A_n$

Conociendo que la masa del cuerpo es: $M = \rho t A$, donde A es el área de la lámina, se tiene que:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta A_n/A$
$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta A_n/A$

Que definen las coordenadas del **centroide** de la superficie A. El centroide es un concepto geométrico, ligado a la forma de la superficie. Obsérvese que si el campo gravitatorio es uniforme y el cuerpo es homogéneo, tanto el centro de gravedad, como el centro de masa, como el centroide coinciden.



Coordenadas del centro de gravedad del cuerpo

Salvo en algún problema específico, por lo general las situaciones que abordaremos cumpìrán lo anterior, de manera que aunque hablemos de centro de gravedad, lo que haremos será calcular el centroide.

En el límite de la división en elementos de la superficie, disminuyendo cada vez más su tamaño, llegamos a:

$\mathbf{X} = \int xdA/A$

$\mathbf{Y} = \int ydA/A$ Coordenadas del centroide

E igualmente:

$\mathbf{X} = \int xdF_g/F_g$

$\mathbf{Y} = \int ydF_g/F_g$ Coordenadas del centro de gravedad

$\mathbf{X} = \int xdM/M$

$\mathbf{Y} = \int ydM/M$ Coordenadas del centro de masas

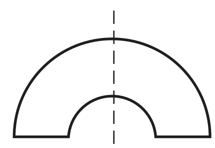
Cálculo del centro de gravedad por simetría

Se trata de aprovechar la simetría del cuerpo. Existen varias reglas:

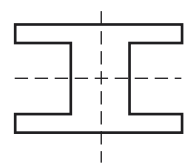
- Si el cuerpo posee un eje de simetría, el centro de gravedad está sobre el mismo.
- Si tiene dos ejes de simetría, el centro de gravedad está en el punto de intersección.
- Si tiene un centro de simetría, ése es el centro de gravedad.

Para el caso de una hoja rectangular de papel está claro que el centro de gravedad está en la intersección de las dos diagonales.

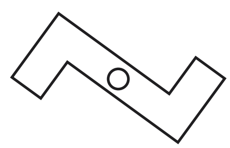
Esto puede comprobarse suspendiendo la hoja por un punto arbitrario y trazando la vertical al punto. En esa línea está la línea de acción del peso, de modo que el par peso-reacción sea nulo. Repitiendo la operación en otro punto arbitrario la intersección de ambas líneas define el cg.



un eje de simetría



dos ejes de simetría



un centro de simetria

Cálculo del centro de gravedad para cuerpos simétricos.

Cálculo del centro de gravedad por descomposición

En ocasiones es posible descomponer el cuerpo en partes que sí tienen simetría y que permiten hallar los centros de gravedad de cada una de ellas. Las coordenadas del cuerpo compuesto se hallan por:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta A_n/A$

$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta A_n/A$

A es el área del cuerpo a estudiar, ΔA_n las aéreas de las partes y x_n, y_n las coordenadas de los centros de gravedad de las partes. Para establecer las coordenadas de los centros de gravedad, se establece un sistema de coordenadas fijo al cuerpo en cuestión. De acuerdo a como se ubique pueden existir valores negativos de x_n, ó y_n.

Un caso común es un área con un hueco. En ese caso el hueco puede considerarse como una de las partes en las que se descompone el cuerpo y se le asigna un valor de área negativo. En los cálculos (en las sumatorias para hallar el área total o las coordenadas del centro de gravedad) esta área aparece con signo negativo.

Resulta conveniente, al resolver un problema de este tipo, construir una tabla que refleje los datos de cada una de las partes en las que se descompone.

Este método también puede emplearse en el caso de que en vez del área se conozca la masa de las partes en que se ha descompuesto el cuerpo y las coordenadas de los centros de gravedad respectivos. En este caso las ecuaciones que se utilizan serían:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta m_n / M$

$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta m_n / M$

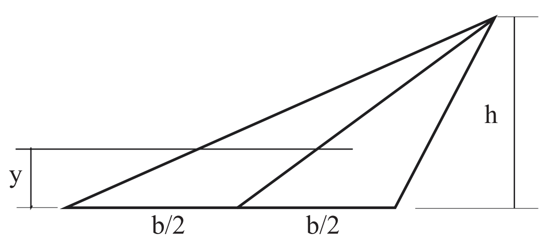
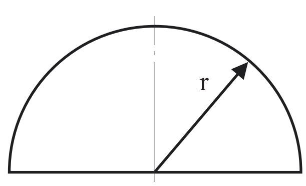
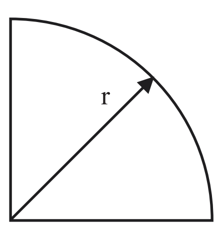
En la tabla se sustituye los valores de área por el valor de las masas.

	Área 1	**Área 2**	**Área 3**
$\mathbf{x_n}$	x_1	x_2	x_3
$\mathbf{y_n}$	y_1	y_2	y_3
$\mathbf{A_n}$	A_1	A_2	A_3

Tabla correspondiente a un cuerpo que se ha desoompuesto en tres áreas.

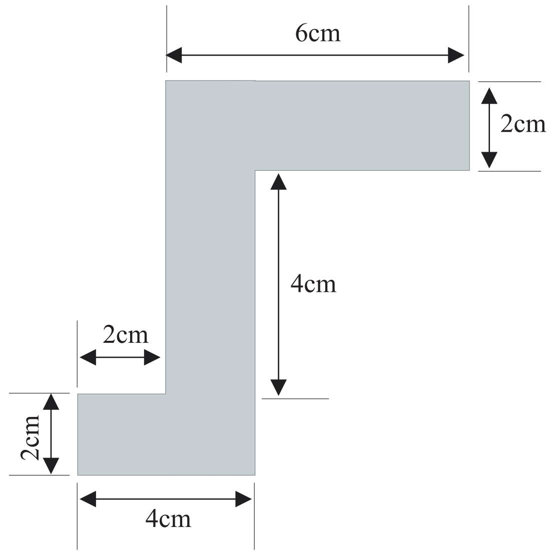
Centros de gravedad conocidos

Para enfrentar los problemas de cálculo de centros de gravedad por descomposición se brindan a continuación algunos resultados de formas geométricas de interés.

<table>
<tr><th>Forma</th><th></th><th>x</th><th>y</th><th>Área</th></tr>
<tr><td>Triángulo</td><td>
</td><td></td><td>h/3</td><td>bh/2</td></tr>
<tr><td>Semicírculo</td><td>
</td><td>0</td><td>$4r/3\pi$</td><td>$\pi r^2/2$</td></tr>
<tr><td>Cuadrante de círculo</td><td>
</td><td>$4r/3\pi$</td><td>$4r/3\pi$</td><td>$\pi r^2/4$</td></tr>
</table>

Problemas resueltos

1) Halle el centro de gravedad del cuerpo representado en la figura



Problema resuelto 1.

Solución:

Consideraremos que el cuerpo es homogéneo por lo que el cálculo del centro de gravedad se reduce al cálculo del centroide. Para ello utilizaremos el método de descomposición.

Se divide al cuerpo en tres áreas y se ubica un sistema de referencia a fin de hallar el centro de gravedad de cada una.

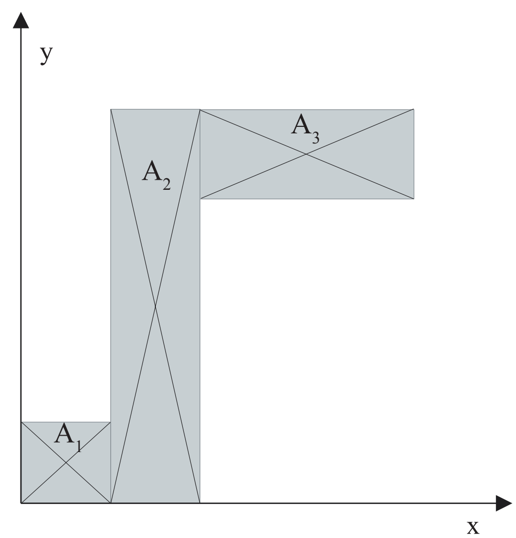
Se definen tres áreas:

$A_1 = 2x2 = 4cm^2$

$A_2 = 2x8 = 16cm^2$

$A_3 = 2x4 = 8cm^2$

Luego, el área total será: $A = 28cm^2$



Sistema de referencia y división del cuerpo en tres partes.

Se construye la tabla que se muestra, a fin de ordenar los datos.

Al aplicar las fórmulas:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta A_n / A$

$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta A_n / A$

$X = (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3)/A$

$Y = (y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3)/A$

Y sustiuir los datos de la tabla, se hallan los valores del centro de gravedad:

$\mathbf{X} = 3{,}5cm \quad \mathbf{Y} = 4{,}4cm$

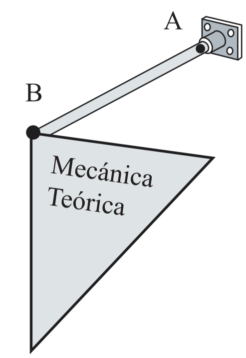
	Área 1	**Área 2**	**Área 3**
$\mathbf{x_n}$	1	3	6
$\mathbf{y_n}$	1	4	7
$\mathbf{A_n}$	4	16	8

Tabla con los valores de coordenadas de centroides y área.

Nótese que estos valores tienen sentido: el centro de gravedad se corre hacia la derecha y hacia arriba debido a la asimetría de la pieza.

Por otra parte, puede ocurrir que en algún caso el centro de gravedad está situado fuera del cuerpo. En un diagrama de cuerpo libre ése es el punto en que hay que aplicar la fuerza de gravedad.

2) El cartel de la figura tiene forma de triángulo rectángulo isósceles y us lados iguales son de 50cm. Halle el valor de la componente del momento debido al peso que pueda producir algún efecto en la rosca A. El material que compone el cartel tiene una densidad superficial de masa de 10kg/m^2.

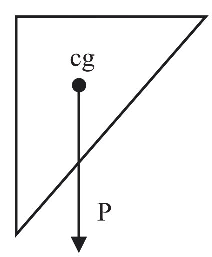


Problema resuelto 2.

Solución:

Asumimos que el cartel está formado por un material homogéneo por lo que el centro de gravedad coincide con el centroide. Las distancias OB y BF son de 50cm. El otro dato disponible es la densidad superficial de masa.

Fijamos un sistema de referencia, como se muestra en la figura. Para encontrar el centroide del triángulo es necesario hacer algunas construcciones auxiliares. El punto C divide en dos el segmento BF. El tramo DB es la tercera parte del segmento OB. El centroide estará en E, el punto donde se cortan la línea OC y la recta que pase por D paralela al eje x.



Ubicación del centro de gravedad.

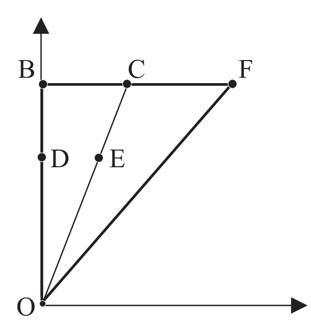
De esta manera, las coordenadas del centro de gravedad estarán dadas por:

X = DE
Y = OD

Puesto que OD es la 2/3 partes de OB, entonces OD = 33, 3cm

Para hallar DE observamos que los triángulos OBC y ODE son semejantes. Esto permite establecer la relación:

DE/BC = OD/OB



Ubicación del sistema de referencia.

Despejando y sustituyendo valores:

DE = (OD)(BC)/OB = (33,3)(25)/50
DE = 16,6cm

De manera que las coordenadas del centro de gravedad del cartel, respecto a un sistema de referencia colocado en su vértice inferior serán:

X = 16,6cm = 0,16m
Y = 33,3cm = 0,33m

Como se observa en la figura, debido a la fuerza de gravedad (o el peso P, que en este caso estático es igual) que está aplicada en el centro de gravedad, aparece un momento de fuerza M_A respecto al punto A.

Formalmente ese momento es $M_A = Pd$ siendo d la distancia entre el punto A y la línea de acción de P. La distancia d sería la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos serían AB y BG.

Sin embargo, como lo que se pide es la componente que pueda producir algún efecto en la rosca, esta sería la componente a lo largo de AB. Como ya de por sí la fuerza P está contenida en un plano que es perpendicular a AB, esta componente se calcula por:

$M_{AB} = P(DE)$

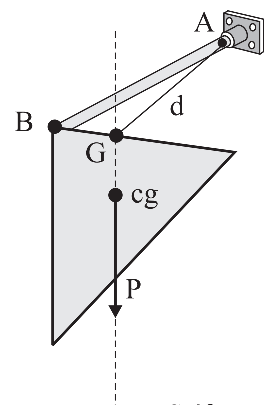


Gráfico que muestra la distancia d.

Ya que DE es la distancia entre el eje AB y la línea de acción de P. Por tanto, se hace necesario ahora calcular el valor de P.

Para ello utilizaremos el dato de la densidad superficial de masa. Este tipo de magnitud es usual en perfiles comerciales en los que una dimensión (en este caso es ancho o espesor de la plancha) es siempre la misma, por lo que resulta más cómodo trabajar en unidades de masa por superficie que masa por volumen.

La masa total del cartel será el producto de la densidad superficial por el área total del cartel. El área del cartel se halla por:

$A = ½ bh$

Siendo b la base del triángulo y h la altura. En nuestro caso quedaría como:

$A = ½ (BF) (OB) = ½ (0,5) (0,5) = 0,12m^2$

Y la masa del cartel sería:

$m = (10) (0,12) = 1,2kg$

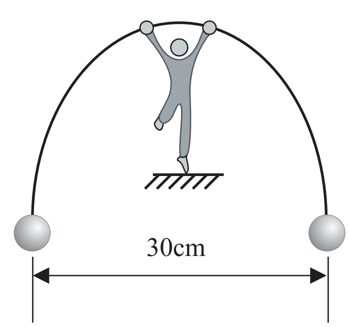
El peso P es igual a:

$P = mg = (1,2)(10) = 12N$

Por lo que: $M_{AB} = (12) (0,16) = 1,9Nm$

De acuerdo a la regla de la mano derecha, el sentido de esta componente es entrando hacia la rosca A, por lo que su efecto será de apretarla (asumiendo, como es general, que sea rosca derecha)

3) Halle el centro de gravedad del “monito equilibrista”. Las masas de las esferas son 0,3kg respectivamente, mientras que el resto de la estructura tiene una masa de 0,03kg.



Problema resuelto 3.

Solución:

Al igual que en otros problemas, haremos algunas consideraciones de inicio. El hecho de que la masa total de las esferas sea de 0,6kg, o sea, 20 veces superior a la masa del resto de la estructura, nos permite despreciar ese valor, de modo que asumiremos como masa del “monito” la masa de las esferas.

Consideraremos también, por simetría, que el centro de gravedad de las esferas se encuentra en el centro geométrico de las mismas.

Bajo estas condiciones, es posible hacer una hipótesis a priori y es que el centro de gravedad del sistema estará en la mitad de la línea que une las dos esferas.

Visto esto, resolveremos el problema utilizando las ecuaciones:

$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta m_n / M$

$\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta m_n / M$

Es decir, descomponemos el sistema no en áreas sino en masas. La figura muestra como se ha ubicado un sistema de referencia en la masa que denominamos 1, a partir de lo cual construiremos la tabla para colocar los valores que se sustituirán en las ecuaciones de las coordenadas del centro de gravedad.

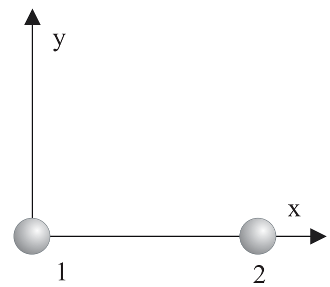
La masa total M = 0,6kg

Al sustituir en las ecuaciones de X y de Y, encontramos que:

X = ((0) (0,3kg) + (0,3m) (0,3kg)) / (0,6kg) = 0,15m

Y = ((0) (0,3kg) + (0) (0,3kg)) / (0,6kg) = 0

Que corresponde con la hipótesis inicial.



Sistema de referencia asociado a las esferas.

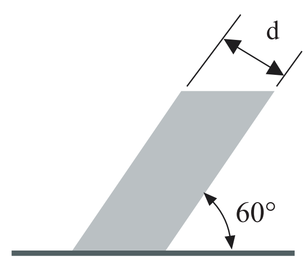
	Masa 1	**Masa 2**
$\mathbf{x_n}$	0	0,3
$\mathbf{y_n}$	0	0
$\mathbf{m_n}$	0,3kg	0,3kg

Tabla de valores.

Problemas propuestos

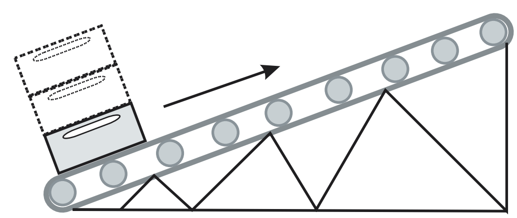
1) Encontrar el centro de gravedad del pórtico del Barrio Chino.

2) Halle el ancho mínimo (d) de esta estructura, que forma 60° con la horizontal y mide 2m de altura.



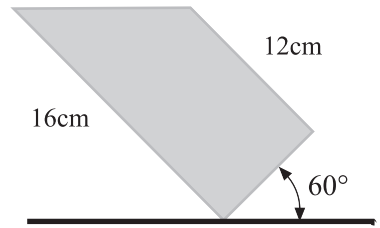
Problema 2.

3) Una estera transporta pilas de cajas de cervezas hasta un nivel superior. Calcule el número de cajas que puede tener una pila sin caer.



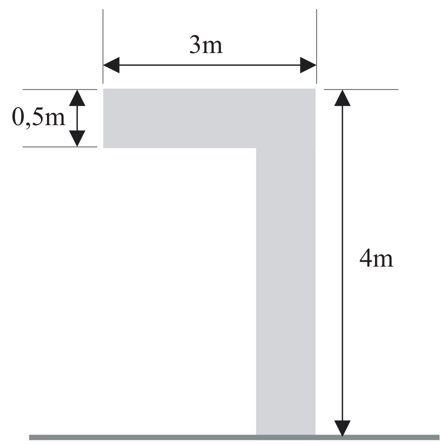
Problema 3.

4) En el gráfico que se muestra diga cual será la tendencia al movimiento del cuerpo. El ángulo de la derecha es de 60°. El ancho del cuerpo es 12cm.



Problema 4.

5) Calcule el momento del par al que esta sometida la pieza mostrada, cuya densidad superficial de masa es de 100kg/m^2, en el momento de caída inminente. Si la pieza se cuelga por el extremo superior izquierdo, ¿cuál será el ángulo que forma el brazo más corto con la vertical?



Problema 5.

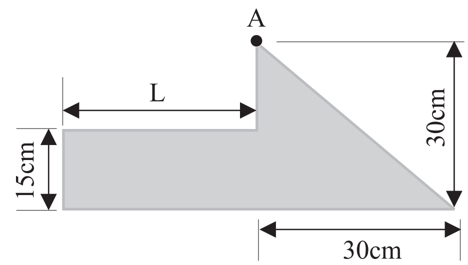
6) Encuentre por dónde colgar la pieza de la figura para que permanezca en la posición mostrada. Los radios son de 3cm y 2cm respectivamente.

Problema 6.

7) Calcule cuanto se ha desplazado el centro de gravedad de la figura respecto al centro del círculo. Los radios respectivos son de 250mm y 200mm.

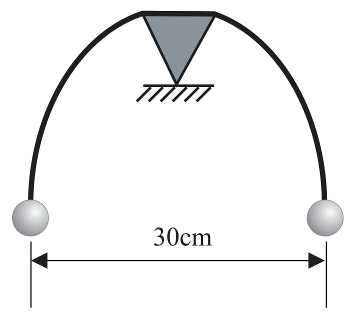
Problema 7.

8) Encuentre el valor de L para que la pieza que cuelga libremente en A permanezca en la posición mostrada.



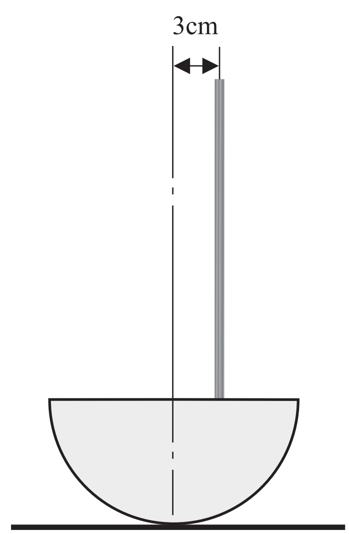
Problema 8.

9) Encuentre el centro de gravedad del sistema si las esferas tienen una masa de 0,2kg mientras que el prisma triangular mide 3cm de alto y su masa es de 0,3kg. La distancia entre el punto de apoyo del prisma y la línea que une las esferas es de 30cm.



Problema 9.

10) Encuentre el ángulo que formará con la vertical la varilla fina de 52cm de longitud y 0,2kg acoplada al semicilindro de 0,3kg y 20cm de diámetro para que pueda permanecer en posición de equilibrio inestable.



Problema 10.

VI ROZAMIENTO

En este capítulo se completan los tipos de fuerza que actúan sobre un cuerpo rígido en equilibrio. Además de las fuerzas que ocasionalmente puedan incidir sobre el cuerpo, estudiamos las distintas clases de reacciones y la fuerza de gravedad. Entre los tipos de reacciones está la correspondiente a una superficie rugosa. Como veremos a continuación, la componente tangencial en aquel caso no es más que la fuerza de fricción o de rozamiento.

Rozamiento por deslizamiento. Leyes del rozamiento

En realidad no hay superficies lisas, se trata de una idealización. Siempre, en mayor o menor grado, cuando dos superficies están en contacto aparecen fuerzas de rozamiento. Estas fuerzas poseen un valor limitado y pueden ser superadas por otras fuerzas.

En última instancia, el origen de las fuerzas de fricción es microscópico, de carácter electromagnético y lo que observamos es la contribución de todas las irregularidades microscópicas.

Existen dos tipos de **rozamiento por deslizamiento**: seco y húmedo. Este último no lo trataremos; se refiere al caso de fricción entre las capas de un fluido (viscosidad), muy relacionado con el estudio de los lubricantes. Nuestro interés será el rozamiento seco, o sea, dos superficies sólidas en contacto que deslizan una respecto a la otra. Algunos casos específicos como es el rozamiento en chumaceras (ejes) o en correas no serán tratados en el curso, pero están al alcance del alumno en otros textos.

Sea un cuerpo de peso P colocado sobre una superficie horizontal. Aparece una reacción normal N. Si aplicamos una fuerza lateral F, pequeña, el cuerpo no se moverá.

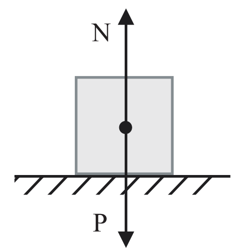
Esto indica que existe una fuerza que se opone. Esta es la fuerza de rozamiento o de **fricción estática f_s**. Si la fuerza F aumenta, también lo hará f_s y el cuerpo no se mueve. Con el incremento de la fuerza aplicada la fuerza de fricción crece hasta alcanzar un valor máximo F_S. Si F se hace mayor, el cuerpo comienza a moverse.

El cuerpo se desliza con velocidad creciente y la fuerza de rozamiento disminuye a un valor **F_k (fricción dinámica)** que se considera independiente de la velocidad. El gráfico que se muestra ilustra todo lo anterior.

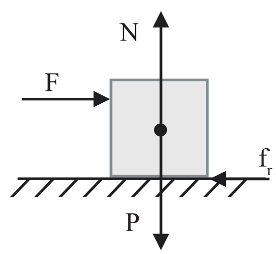
Experimentalmente se tiene que:

$F_s = \mu_s N$

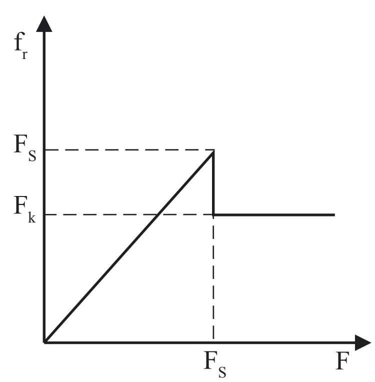
$F_k = \mu_k N$



Si se coloca un cuerpo sobre una superficie sobre el mismo actúa una reacción N.



Al aplicar una fuerza horizontal aparece la fuerza de fricción que se opone al movimiento del cuerpo.



Comportamiento de la fuerza de fricción sobre un cuerpo en función de la fuerza aplicada.

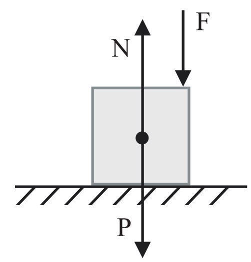
Donde μ_s y μ_k son los coeficientes de fricción estático y dinámico, *que son siempre menores que* 1. Es conveniente fijar las siguientes ideas:

- La expresión $F_s = \mu_s N$ sólo se cumple para el valor máximo de la fricción estática. En tal caso, se dice que el movimiento es inminente.
- Se cumple que en general $\mu_k < \mu_s$ Estos coeficientes dependen de la naturaleza de las superficies en contacto: grado de pulimentación y el tipo de material.
- Los coeficientes de fricción no dependen del área de la superficie en contacto.

Resumiendo: cuando un cuerpo está en contacto con una superficie horizontal, puede ocurrir que:

1) Las fuerzas aplicadas no tienden a moverlo (no hay fricción)

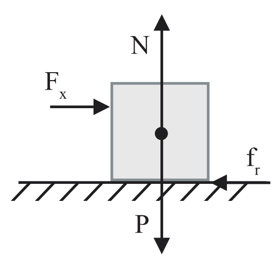
$N = F + P$



Si la fuerza aplicada no tiende a mover al cuerpo no aparece fricción.

2) Las fuerzas aplicadas no son lo suficientemente grandes para moverlo. Hay fricción, pero no hay evidencia de que sea el valor máximo y entonces la fórmula $F_s = \mu_s N$ <u>no</u> puede usarse.

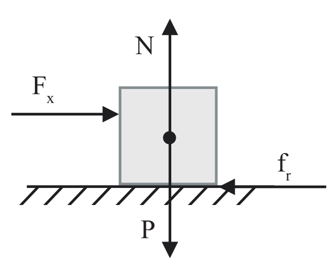
$f_r = F_x$
$f_r < \mu_s N$
$N = P$



La fuerza de fricción es igual a la fuerza aplicada. El cuerpo no se mueve.

3) Movimiento inminente, a punto de deslizar. La fuerza de rozamiento adquiere un valor máximo F_s.

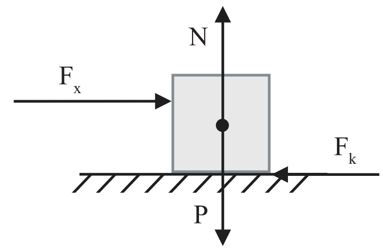
$F_s = F_x$
$F_s = \mu_s N$
$N = P$



La fuerza de fricción adquiere su valor máximo y el movimiento es inminente.

4) Deslizamiento. La fuerza de fricción ahora tiene el valor F_k y es superada por la fuerza aplicada F_x.

$F_k = \mu_k N$
$F_k < F_x$
$N = P$



La fuerza de fricción es superada por la fuerza aplicada y el cuerpo se mueve.

Para la resolución de problemas es útil contar con valores aproximados del coeficiente de fricción estática para distintas superficies en contacto. En la tabla se muestran esos valores para superficies en contacto de materiales comunes.

Superficie	**Superficie**	**Valores**
Metal	Metal	0,15 - 0,60
Metal	Madera	0,20 - 0,60
Metal	Concreto	0,30 - 0,60
Metal	Cuero	0,30 - 0,60
Madera	Madera	0,25 - 0,50
Madera	Cuero	0,25 - 0,50
Concreto	Concreto	0,40 - 0,70
Caucho	Concreto	0,60 - 0,90

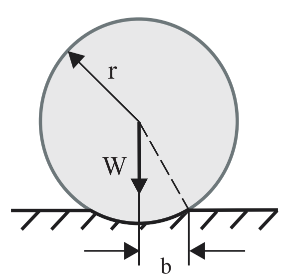
Valores del coeficiente de fricción estático para distintas superficies en contacto.

Rozamiento por rodadura

Es sabido que el uso de ruedas disminuye considerablemente el esfuerzo para mover cargas. El hecho de que el punto de contacto de la rueda con el piso no presenta movimiento respecto a éste (lo cual se conoce como rodadura pura), elimina las grandes fuerzas de fricción que aparecerían si deslizase. Sin embargo, en la práctica la rueda no es perfecta y existe alguna resistencia a su movimiento.

Una posible causa es el efecto combinado del rozamiento en el eje y de la deformación, aunque sea pequeña, que sufre la rueda. El gráfico muestra esta deformación, que hace que la rueda no apoye en un punto sino en cierta área. La fricción por rodadura queda expresada por:

$F_r = Wb/r$



Rozamiento por rodadura.

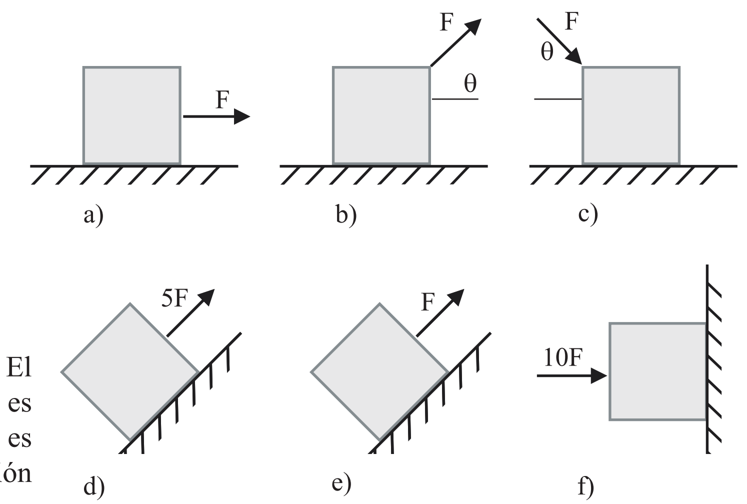
Donde W es la carga a la que está sometido el eje de la rueda, r es su radio y b es la distancia que se aprecia en la figura y que se conoce como coeficiente de resistencia a la rodadura. A diferencia de los coeficientes de fricción ya estudiados que son adimensionales, b tiene dimensiones de longitud.

Nótese como la fricción por rodadura depende del radio de la rueda, disminuyendo con el aumento de éste.

Problemas resueltos

1) Determinar la fuerza de fricción.

$F = 30N$,
$\mu_s = 0{,}8$,
$m = 20\ Kg$
$\cos\theta = 4/5$
$\text{sen}\ \theta = 3/5$

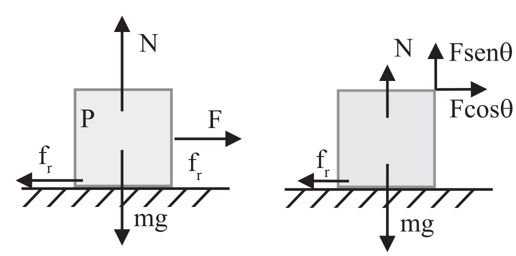


Problema resuelto 1.

Solución:

a) Hay que investigar si el cuerpo se mueve o no. El valor máximo de la fuerza de fricción estática es $F_s = \mu_s N = \mu_s mg = 160N$, por tanto la fuerza es incapaz de mover el cuerpo y la fuerza de fricción es justamente F o sea, 30N.

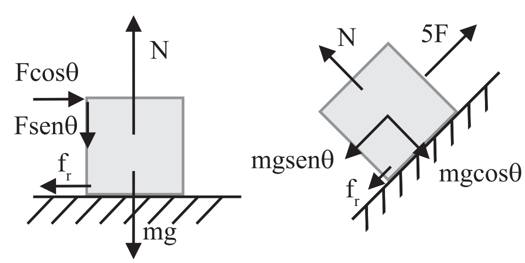
b) Ahora el cuerpo está sometido a una fuerza $F\cos\theta = 24N$. La ecuación para el eje vertical sería: $N + F\text{sen}\ \theta = mg$. Despejando, se tiene: $N = mg - F\text{sen}\ \theta$ por lo que la fricción pudiera alcanzar el valor $F_s = \mu_s N = 145{,}6N$. Entonces, el cuerpo no se mueve y la fuerza de fricción es igual a la componente horizontal $f_r = 24N$.



Diagramas de fuerzas de a) y b).

c) Al igual que en b) la fuerza sobre el cuerpo es $F\cos\theta = 24N$. En este caso, $N = mg + F\text{sen}\ \theta$. Se tiene que la fuerza de fricción máxima es $F_s = \mu_s N = 174{,}4N$, por lo que es suficiente para moverlo y la fuerza de fricción es 24N.

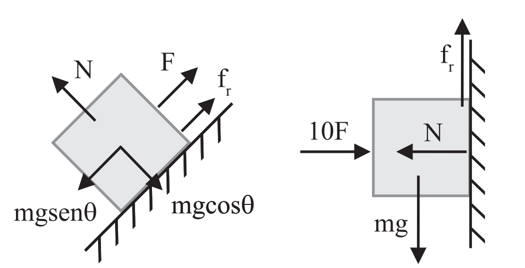
d) Del gráfico se obeerva que $N = mg\cos\theta$, y como $F_s = \mu_s N$, el máximo valor de la fricción es $F_S = 128N$. La resultante a lo largo del plano es: $5F - mg\ \text{sen}\ \theta = 30N$ que resulta insuficiente para vencer la fricción. El cuerpo no se mueve pero como la tendencia es a subir, la fuerza de fricción es hacia abajo de valor $f_r = 30N$.



Diagramas de fuerzas de c) y d).

e) La fuerza de fricción máxima coincide con la de d) $F_S = 128N$. Ahora la fuerza resultante sería: $F - mg\text{sen}\theta = -90N$, o sea, tiende a caer, por lo que la fricción ahora está dirigida hacia arriba. La fuerza de fricción es capaz de compensar la fuerza resultante de modo que el cuerpo no se mueve y la fricción tiene un valor igual a 90N.

f) Tenemos que la reacción $N = 10F$. El tope de la fricción estática es $F_s = \mu_s N = 240N$. Pero el peso del cuerpo es $mg = 200N$ por lo que la fricción impide que el cuerpo caiga y $f_r = 200N$.



Diagramas de fuerzas de e) y f).

2) Un hombre recuesta una escalera contra una pared muy pulida. ¿A qué distancia de la misma debe apoyarla para subir?

Solución:

Para resolver este problema es necesario establecer un conjunto de consideraciones:

- La escalera es un cuerpo rígido
- No hay fricción en la pared
- El hombre llega hasta el último peldaño
- El movimiento de la escalera es inminente
- El piso es de concreto y la escalera de aluminio
- El peso del hombre es de 70kg
- La altura de la escalera es de 3m

El primer paso, una vez comprendido el problema, es realizar un diagrama de cuerpo libre donde se han situado las fuerzas que actúan sobre la escalera: las reacciones R_1 y R_2 , el peso del hombre P y la fuerza de fricción estática que hemos asumido máxima pues consideramos que el movimiento es inminente. Obsérvese cómo las consideraciones se van reflejando en la solución del problema.

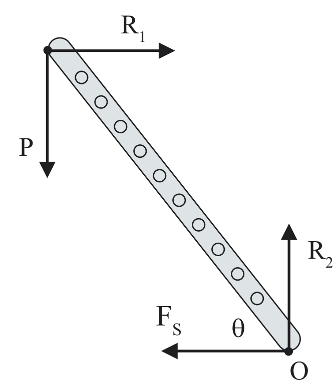


Diagrama de fuerzas del problema resuelto 2.

Se cumplen las condiciones de equilbrio:

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M_0 = 0$

Las ecuaciones de equilibrio serían:

$\Sigma F_x = R_1 - F_S = 0$ (1)

$\Sigma F_y = R_2 - P = 0$ (2)

$\Sigma M_0 = Pd - R_1 h = 0$ (3)

Donde se ha tomado como punto respecto al cual se calculan los momentos el apoyo de la escalera en el piso. d es la distancia de ese punto a la pared y h la altura a la que la escalera se apoya en la pared. Puesto que el problema pide el valor de d, comencemos a trabajar por la ecuación que la contiene, o sea, la tercera.

$Pd = R_1 h$ (4)

Por otra parte, de la ecuación (2), $R_2 = P$ y de la (1):

$R_1 = F_S = \mu_S N = \mu_S R_2 = \mu_S P$

Nótese que en la expresión $F_s = \mu_s N$, N es la reacción normal al punto donde está la fricción, que en este ejemplo es R_2. Sustituyendo en (4) queda: $d = \mu_S h$, o sea: $h/d = 1/\mu_S$

Si θ es el ángulo que forma la escalera con el piso, entonces:

$h/d = \tan\theta$

$\tan\theta = 1/\mu_S$

De manera que θ = arc $1/\mu_S$

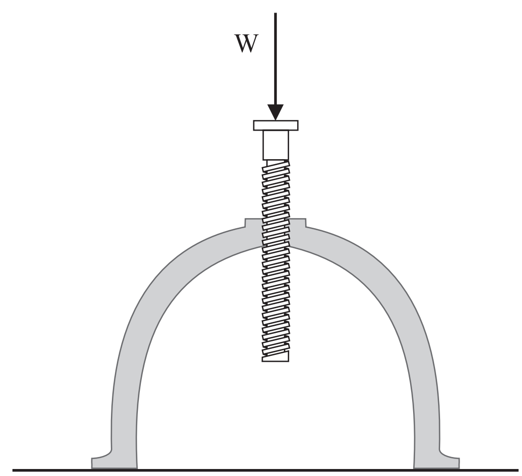
Conociendo el ángulo, podemos hallar d pues d = Lcosθ

Sustituyamos los valores numéricos. Busquemos el coeficiente de rozamiento para superficies de concreto - metal, en este caso μ_S se mueve entre 0,30 y 0,60. Podemos tomar un valor medio, digamos, 0,45, ó tomar el menor por razones de seguridad. Si hacemos esto último, $\tan\theta = 1/\mu_S = 1/0,3 = 3,33$ y arc $\tan\theta = 73,3°$.

Por tanto, $d = L\cos\theta = (3)(0,28) = 0,86m$

Es posible colocar la escalera a esa distancia de la pared sin temor a caer. Obsérvese que el peso del hombre no influye en el resultado, cosa que no es fácil de prever antes de resolver el problema.

3) Calcule el ángulo de avance de una rosca cuadrada para que un tornillo pueda soportar una carga W.



Problema resuelto 3.

Solución:

La situación del tornillo apoyado sobre la rosca se reduce al caso de un cuerpo sobre un plano inclinado, en el que su peso corresponde a la carga W y el ángulo de inclinación al ángulo de avance de la rosca.

Las consideraciones para resolver el problema serían:

- Ángulo de inclinación tal que el deslizamiento es inminente.
- Coeficiente de fricción μ_s y peso del cuerpo P,
- Prescindir de las dimensiones del cuerpo

Esto último implica no considerar la ecuación de los momentos (relacionados con las distancias). Se excluye la posibilidad de rotar (volcar) del cuerpo, y se asume que su tendencia será a deslizar. Esto es posible si la fuerza de fricción y la altura del cuerpo no son lo suficientemente grandes para que los momentos presentes provoquen tendencia a rotar antes de que el cuerpo deslice. Nótese que la posibilidad de vuelco aparece cuando el momento de la fricción iguala al de las componentes del peso. Mientras, estos momentos hacen que el cuerpo permanezca sobre el plano.

Las ecuaciones de equilibrio serían:

$\Sigma F_x = P\text{sen}\,\theta - F_s = 0$

$\Sigma F_y = P\cos\theta - N = 0$

Pero entonces: $P\cos\theta = N$ y como $F_s = \mu_s N$ se tiene que:

$P\,\text{sen}\,\theta = \mu_s N$

$P\,\text{sen}\,\theta = \mu_s P\cos\theta$

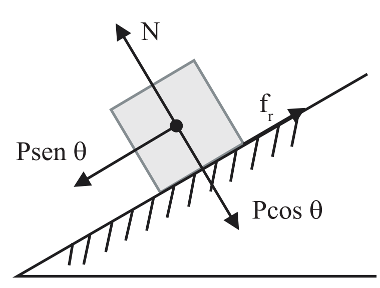


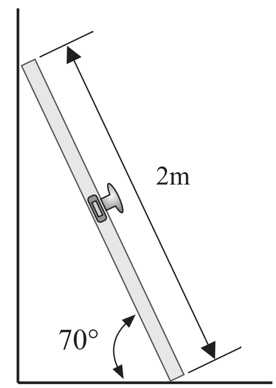
Diagrama de fuerzas de un cuerpo en un plano inclinado.

De manera que: $\mu_s = \tan\theta$. En estos casos que el coeficiente de fricción es igual a la tangente de un ángulo característico del problema en cuestión, dicho ángulo se conoce como ángulo de rozamiento. Así, el ángulo de avance de la rosca del tornillo sería:

$\theta = \text{arc}\tan\mu_s$

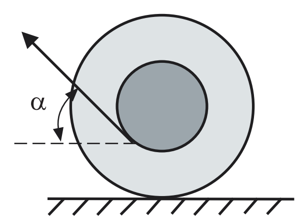
Problemas propuestos

1) Una puerta metálica de 2m de alto se apoya contra una pared pulida formando 70° con la horizontal. Un rato después, un hombre apenas la toca y la puerta cae. Investigue de qué material está hecho el piso.



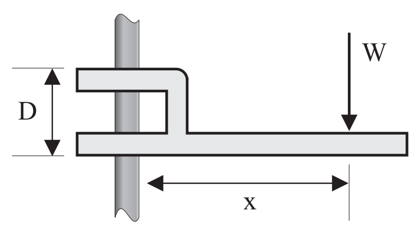
Problema 1.

2) Para valores de α pequeños, el carrete se mueve a la izquierda, para valores grandes, hacia la derecha. Halle el valor del ángulo α para el cual puede lograrse el equilibrio. El radio interior es r_1 y r_2 es el radio del cilindro exterior.



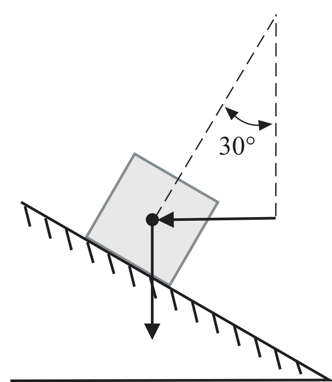
Problema 2.

3) Halle el valor mínimo x para lograr que la pieza de peso despreciable no resbale. La distancia D es de 0,25m; el diámetro del eje es de 0,05m y el coeficiente de fricción entre el eje y la pieza es de 0,2.



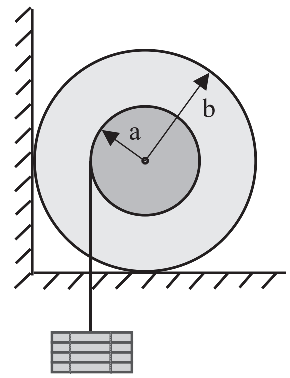
Problema 3.

4) Sobre el bloque de la figura se aplican dos fuerzas. La fuerza vertical es de 800N. Determinar: a) la fuerza horizontal requerida para que el bloque empiece a subir. b) la fuerza horizontal requerida para evitar el deslizamiento del bloque hacia abajo. Asuma que el coeficiente de fricción $\mu_S = 0{,}35$ y que el ángulo señalado es de 30°.



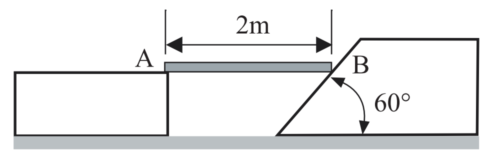
Problema 4.

5) Encuentre el valor mínimo del coeficiente de fricción para que el cilindro de masa M permanezca sin rotar, siendo M = 3m donde m es la masa de la caja. Considere que las dos superficies son iguales y que b = 2a.



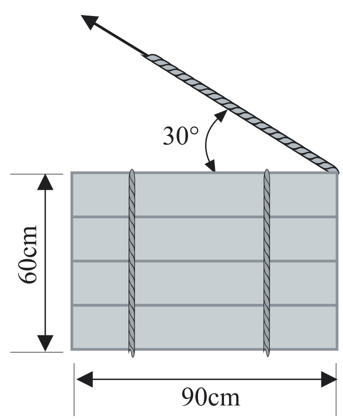
Problema 5.

6) Una barra de 2m de largo hecha de un material muy ligero descansa sobre una superficie horizontal en A y una inclinada en B. Si el coeficiente de rozamiento es 0,25 en A y B, halle la distancia máxima que puede avanzar un hombre de masa m = 70kg yendo de A hacia B. El plano inclinado forma 60° con la horizontal.



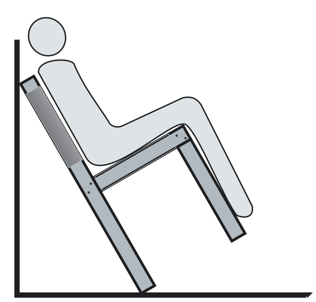
Problema 6.

7) Una caja de 30kg debe moverse al ser halado el cable. Si el coeficiente de fricción es de 0,35 y el ángulo θ = 30°, determine si la caja desliza o vuelca.



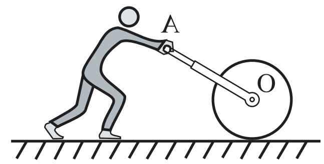
Problema 7.

8) Un guajiro de 70kg se sienta en un taburete de 5kg de masa y 1,1m de altura y se recuesta contra una pared lisa formando 60° con la horizontal. Las coordenadas (en metros) de los centros de gravedad del guajiro y del taburete son respectivamente (0,3; 0,6) y (0,4, 0,4) respecto al punto de intersección del piso y la pared. Si el coeficiente de fricción taburete-piso es de 0,2; ¿se caerá el guajiro?



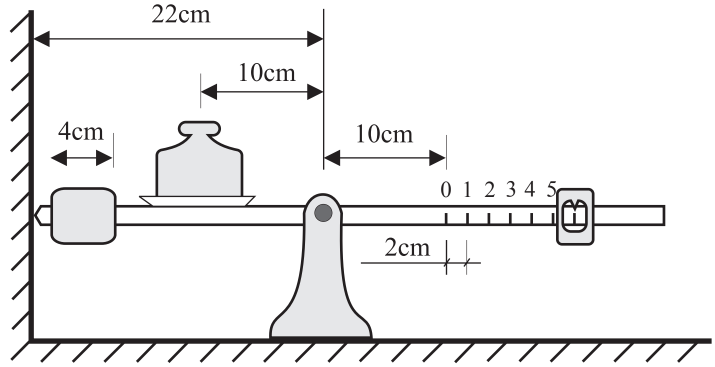
Problema 8.

9) Un operario requiere apisonar el pavimento y para ello debe mover con velocidad uniforme un cilindro de 60cm de diámetro y 3kN de peso, ejerciendo una fuerza constante en la dirección de la palanca AO. La palanca mide 1,5m y el punto A está a una altura sobre la horizontal de 1,05m. Halle el valor de la fuerza necesaria si el el coeficiente de rozamiento por rodadura es b = 0,5cm.



Problema 9.

10) Se tiene una balanza cuya estructura de aluminio muy ligera gira gracias a un pasador. La balanza roza la pared por la parte del contrapeso. Se coloca en el plato un cuerpo de 0,8kg y se equilibra la balanza colocando el pilón de 0,5kg en la marca de 0,6kg. Halle el valor de la fuerza de fricción entre el extremo de la balanza y la pared. Tenga en cuenta que la balanza funciona.



Problema 10.

Tema II Cinemática

VII CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

La cinemática estudia la geometría del movimiento. Relaciona las magnitudes cinemáticas del cuerpo: posición, velocidad, aceleración y trayectoria sin considerar las causas que provocan el movimiento. Como es ya usual en el curso, comenzaremos estudiando lo concerniente al modelo punto material o partícula y luego la cinemática del cuerpo rígido.

Magnitudes fundamentales: posición, velocidad y aceleración

Sea una partícula que describe un movimiento en el espacio. Para simplificar consideraremos que es rectilíneo, esto es, su trayectoria es una línea recta. Para describir su movimiento utilizamos un **sistema de referencia.** El sistema de referencia está conformado por un sistema de coordenadas, para fijar la posición de la partícula y un reloj, para establecer el instante de tiempo.

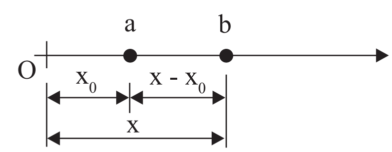
El movimiento de la partícula queda determinado por la relación:

$x = x(t)$

Que se conoce como **ley de movimiento**. Permite conocer la posición x en el instante de tiempo t.

Si en el instante t_0 la posición es x_0, y en el instante $t = t_0 + \Delta t$ la posición es $x = x_0 + \Delta x$, de modo que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta t = t - t_0$, entonces se define la **velocidad media** como:

$v_m = \Delta x/\Delta t$



En el instante t_0 la partícula se encuentra en el punto a y llega a b en el instante $t = t_0 + \Delta t$. La posición de a es x_0 y la posición de b es $x = x_0 + \Delta x$. El paso al límite consiste en acercar a y b tanto como se quiera.

En el SI se da en m/s. La **velocidad instantánea** se define por el paso al límite:

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta x /\Delta t = dx/dt$

O sea, la derivada de la posición respecto al tiempo.

Tanto la posición como la velocidad son vectores. Análogamente, se define la **aceleración media** como:

$a_m = \Delta v /\Delta t$

Que en el SI se expresa en m/s^2. En el límite, la **aceleración instantánea** es:

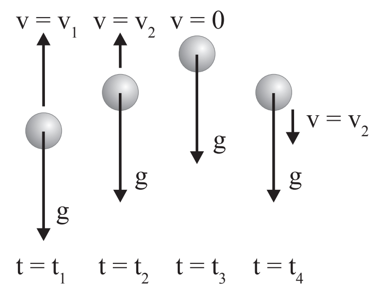
$a = dv/dt$

Que no es más que la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

De manera que la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo (d^2x/dt^2)

La aceleración está asociada a la variación de la velocidad. Puede ocurrir que la velocidad sea cero y haya aceleración (un cuerpo lanzado hacia arriba tiene velocidad nula en su punto de máxima altura y tiene aceleración – **g,** pues hay un cambio de velocidad)

De manera que el problema central de la Cinemática puede ser encontrar la velocidad y la aceleración a partir de la ley de movimiento. Es lo que se conoce como problema directo y matemáticamente corresponde a la operación de derivación. Por otra parte, si se conoce la aceleración, es posible hallar la ley de movimiento. Es el problema inverso y supone matemáticamente realizar sucesivas operaciones de integración.



Un cuerpo lanzado tiene velocidad nula en el punto de máxima altura. Sin embargo, su aceleración no es cero, indicando que la velocidad está variando como se aprecia en el gráfico.

Movimiento rectilíneo

Vamos a estudiar dos casos particulares de gran importancia. En primer lugar el llamado movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

El MRU se caracteriza porque la velocidad de la partícula es constante. Esto implica que la aceleración es cero. En resumen:

v = constante

$a = 0$

$x = vt + x_0$ donde x_0 es la posición de la partícula para $t = 0$.

Estas son las ecuaciones de trabajo para el MRU. Hay que entender que este tipo de movimiento es un modelo, pero que en muchas situaciones es una buena aproximación.

El otro caso es el MRUV **(movimiento rectilíneo uniformemente variado**) en el que la aceleración es constante. Integrando, se pueden encontrar las ecuaciones de trabajo:

a = constante

$v = at + v_0$

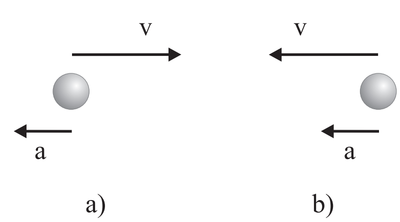
$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

Donde v_0 y x_0 son la velocidad y la posición que tiene la partícula para el instante $t = 0$. Combinando las expresiones se halla, eliminando al tiempo:

$v^2 = 2a(x- x_0) + v_0^2$

$(x- x_0)$ no es más que las distancia recorrida por la partícula.

La aceleración, se acuerdo al convenio de signos establecido, puede ser positiva o negativa, lo cual a veces se asocia a una aceleración o desaceleración, entendida como aumento o disminución de la velocidad. Realmente esto depende de si el móvil de mueve en el mismo sentido o en sentido contrario a la aceleración cualquiera que sea el signo del vector **a**.



a) El cuerpo se mueve hacia la derecha y según el convenio de signos la velocidad es positiva y la aceleración es negativa. Es un movimiento desacelerado pues la velocidad va disminuyendo como indica el sentido de la aceleración. b) El móvil se mueve con velocidad negativa, la aceleración tiene también signo negativo pero el movimiento es acelerado.

Movimiento curvilíneo. Componentes de la velocidad y la aceleración

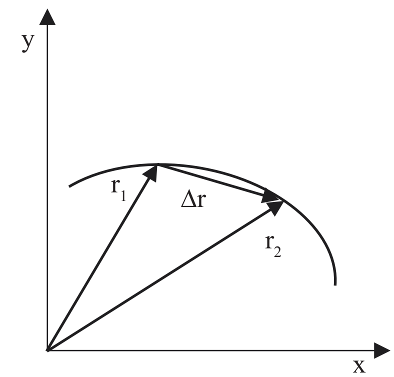
Si la trayectoria no es una recta, se dice que el movimiento es curvilíneo. La posición de la partícula se describe entonces por el vector de posición **r,** que es un vector que va dirigido del centro del sistema de coordenadas a la posición del la partícula. En un plano, su módulo estaría dado por:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Y su dirección por $\tan\theta = y/x$ donde **x** y **y** son las componentes rectangulares, o sea, las proyecciones de **r** sobre los ejes respectivos.

Si **r** varía con el tiempo, entonces: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Tomando dos puntos de la trayectoria, dados por $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ y separados por $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ la velocidad media es:

$v_m = \Delta r/\Delta t$



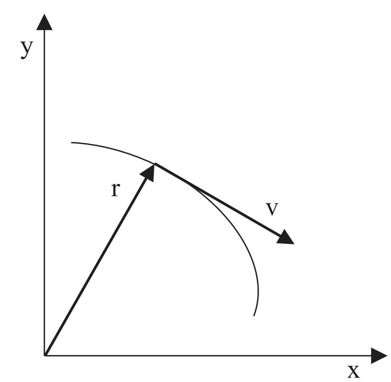
Dos puntos sobre la trayectoria separados por Δr.

De manera que la **velocidad instantánea** será:

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$

Al módulo de la velocidad $v = ds/dt$ se le llama **rapidez**

Se puede demostrar que la velocidad en cada punto es tangente a la trayectoria.



La velocidad instantánea es tangente a la trayectoria.

En el caso del movimiento en un plano, se demuestra que la aceleración en un punto de la trayectoria siempre apunta hacia el interior de la curvatura. Por tal razón es conveniente descomponer a la aceleración en dos componentes: **una tangencial y otra normal**. Se encuentra que las expresiones de ambas son:

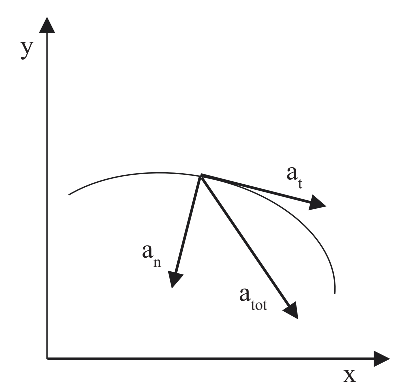
$a_t = dv/dt$

$a_n = v^2/r$

Donde r es el radio de curvatura de la curva.

El significado físico de cada componente es como sigue: la aceleración tangencial describe la variación del módulo de la velocidad y la aceleración normal la variación de su dirección. La **aceleración total** será la suma vectorial:

$a_{tot} = a_t + a_n$



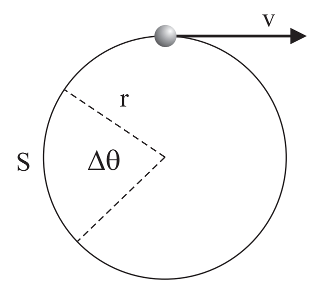
Descomposición de la aceleración en tangencial y normal.

Un caso de gran importancia es aquél en que la trayectoria es una circunferencia. Aquí R coincide con el radio de la circunferencia. Este es el llamado **movimiento circunferencial**, aunque la literatura y el uso común acostumbra llamarle movimiento circular. La velocidad de la partícula, en tanto tangencial a la trayectoria, es siempre perpendicular al radio de la circunferencia.

Sea una partícula que describe un movimiento circular con una velocidad tangencial v. En un tiempo Δt recorre un espacio S (arco de circunferencia) y barre un ángulo Δθ.

Se define la **velocidad angular media** de la partícula como:
$\omega_m = \Delta\theta/\Delta t$

La velocidad angular también es un vector y su dirección y sentido se halla por la regla de la mano derecha; los dedos señalan la dirección de movimiento y el pulgar la dirección de ω_m En el límite, la **velocidad angular instantánea** será:
$\boldsymbol{\omega = d\theta/dt}$



Particula que describe un movimiento circular con una velocidad tangencial v. S es el arco de circunferencia y$\Delta\theta$ el ángulo barrido.

La velocidad angular se expresa en rad/s (radianes sobre segundos) En la práctica es común utilizar la denominación RPM (revolución por minuto) Para convertir de una a otra forma de expresión, hay que tener en cuenta que una revolución, o sea, una vuelta a la circunferencia equivale a un ángulo barrido de 2π radianes, por lo que:
$1\ RPM = (2\pi)/(60s) = \pi/30\ rad/s \cong 0{,}1\ rad/s$

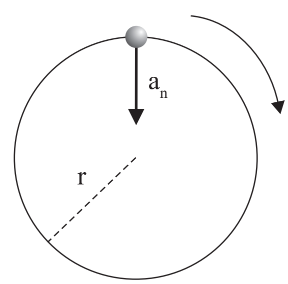
De manera que 1rad/s es aproximadamente 10 RPM.
Ahora bien, podemos relacionar la velocidad angular y la rapidez. Para el sector angular, si $\Delta\theta$ se exprese en radianes se cumple que:
$S = \Delta\theta r$

Entonces,
$v = S/\Delta t = \Delta\theta r/\Delta t$

De modo que:
$\mathbf{v} = \omega r$

Nótese que esta relación es modular, ya que como vectores la velocidad angular y la tangencial tienen direcciones diferentes, concretamente, una es siempre perpendicular a la otra.

Un caso muy importante es el **movimiento circular uniforme** (MCU) en el que tanto la velocidad angular como la rapidez son constantes. Como la aceleración tangencial se relaciona con la variación del módulo de la velocidad tangencial, vemos que en este caso se anula.



Partícula que describe un MCU. La velocidad tangencial v es constante por lo que toda la aceleración en normal.

Las ecuaciones correspondientes al MCU serían:
ω = constante
$\theta = \omega t + \theta_0$
$a_t = 0$
$a_n = v^2/r = \omega^2 r$

Donde θ es el ángulo barrido en el instante t. θ_0 se refiere a la posición angular (valor de θ) en el instante inicial t = 0.

Otro caso que también es de interés es el **movimiento circular uniformemente variado** (MCUV). Esto significa que la velocidad angular no es constante y su variación se describe con la aceleración angular. La aceleración angular media es:

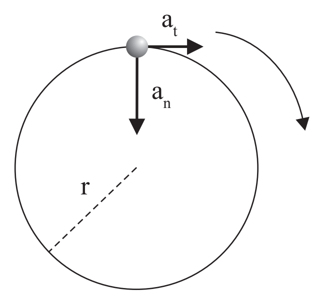
$\alpha_m = \Delta\omega/\Delta t$

La **aceleración angular instantánea** será:

$\alpha = d\omega/dt$

En el MCUV α es constante, será positiva si se incrementa la velocidad angular y negativa en caso contrario. La aceleración angular se relaciona con la tangencial a través de:

$a_t = \alpha r$



Partícula que describe un MCUV. La velocidad tangencial v varía por lo que existe también componente tangencial de la aceleración.

Para el MCUV se tiene:

α = constante

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

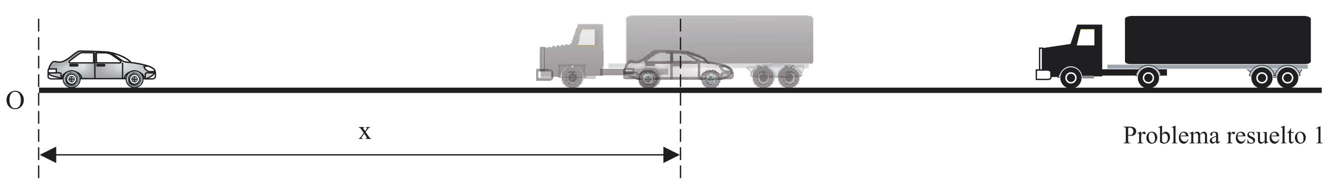
$\omega = \alpha t + \omega_0$

$\omega^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) + \omega_0^2$

Nótese la analogía entre las ecuaciones de los movimientos de traslación rectilínea y de rotación, mediante la propia analogía entre las magnitudes lineales y angulares.

Problemas resueltos

1) Un automóvil parte de un punto O con una aceleración constante de $1 m/s^2$. Un tiempo más tarde se encuentra con un camión que se mueve en sentido opuesto con una velocidad constante de 80km/h. Si el camión pasa por el punto O 25s después de haber partido de allí el automóvil, determinar cuándo y donde los vehículos pasan uno frente al otro.



Problema resuelto 1.

Solución:

Identificamos los tipos de movimiento que realizan los vehículos: el auto se mueve con MRUV y el camión con MRU. Interpretando el texto del problema, concluimos que los 25s corresponden a la suma de dos tiempos: el que empleó el auto en llegar al punto de encuentro desde O y el que empleó el camión en ir del punto de encuentro al punto O. Por tanto:

$25s = t_A + t_C$

La velocidad del camión será:

$80km/h = 80\ (1000m)/(3600) = 27{,}7m/s$

La ecuación de trabajo para el camión y el auto son, respectivamente:

$x = vt_C$

$x = \frac{1}{2}\ at_A^2 + v_0t_A$

Asumimos que el auto parte del reposo, $v_0 = 0$, y quedan las ecuaciones:

$x = vt_C$

$x = \frac{1}{2}\ at_A^2$

Igualamos las ecuaciones, ya que x, la distancia recorrida, es la misma.

$vt_C = \frac{1}{2}\ at_A^2$

Sustituyendo $t_C = 25 - t_A$

$v(25 - t_A) = \frac{1}{2}\ at_A^2$

Que conduce a una ecuación de segundo grado:

$\frac{1}{2}\ at_A^2 + 25t_A + 25v$

Sustituyendo los valores y tomando la raíz positiva (carece de sentido un valor negativo para el tiempo), la solución es:

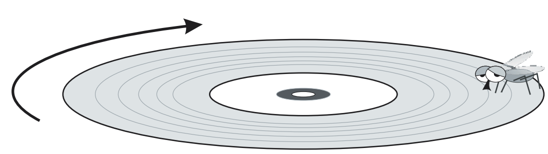
$t_A = 19{,}8s$

Conociendo el tiempo t_A sustituimos en la ecuación correspondiente y se encuentra que:

$x = 549{,}3m$

Que es la distancia a la que se encuentra de O el punto de encuentro.

2) ¿Cuál es la aceleración de una mosca posada en el borde de un disco LD?



Problema resuelto 2.

Solución:

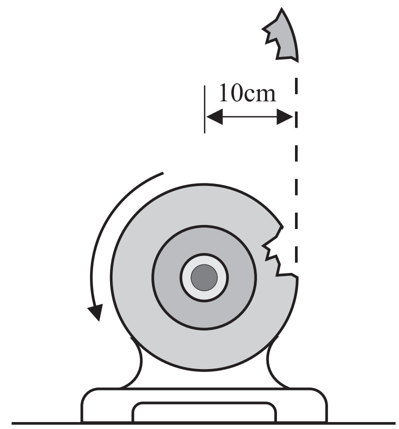
Este es un tipo de problema abierto, en el que debemos asumir algunos datos. Recordemos que estos discos giran con velocidad angular constante de 33 RPM. Por tanto se trata de un movimiento circular uniforme. El radio del disco lo tomamos como 15cm. Luego:

$\omega = 33\ RPM = (33)(0{,}1rad/s) = 3{,}3rad/s$

Como el movimiento es circular uniforme, no habrá componente tangencial de la aceleración, sólo la componente normal, dirigida a lo largo del radio hacia el centro de rotación. Entonces, la aceleración normal será:

$a_n = \omega^2 r = (3{,}3)^2\ (0{,}15) = 1{,}63rad/s^2$

3) A una rueda de amolar de 10cm de radio y que gira a 500RPM se le desprende un pequeño fragmento del borde que asciende verticalmente. Calcule la altura que alcanza el fragmento.



Problema resuelto 3

Solución:

Al analizar el enunciado, concluimos que el fragmento realiza un movimiento de caída libre, ya que la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad. Este movimiento es un MRUV, para el cual conocemos varias ecuaciones. Por otro lado, se observa que antes de salir desprendido, el fragmento realizaba un movimiento circular uniforme. La cuestión está en vincular ambos movimientos.

Esa vinculación está en la velocidad. En efecto, la velocidad tangencial del fragmento en el momento de salir despedido no es más que la velocidad inicial del MRUV. Además, la velocidad final es cero, ya que en el punto de altura máxima el fragmento se detiene.

Vamos a llamar h a la altura que alcanza el fragmento. Para el MRUV se tiene que:

$v^2 - v_0^2 = 2aS$ (1)

En este caso:

$a = -g$

$S = h$

$v = 0$

Para hallar v_0 (velocidad inicial), planteamos la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular:

$v = \omega r$

Como se sabe, la velocidad angular ω debe aparecer en rad/s. Pero como la relación es de 1RPM ≈ 0,1rad/s, entonces:

500RPM ≈ 50rad/s, y:

$v = (50)(0,1) = 5m/s$ (2)

Que coincide con la velocidad inicial. Entonces, sustituyendo en (1)

$v_0^2 = 2gh$

$h = v_0^2/2g = (5)^2/\ 2\ (10) = 1,25m$

Luego, el fragmento alcanza una altura de 1,25m.

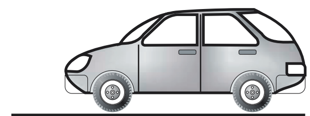
En la ecuación (2), si se hace un análisis dimensional, vemos que en principio: (rad/s)(m) debería dar rad-m/s y sin embargo no lo hemos puesto.

Esto es debido a que en realidad el radián es adimensional, ya que se define como la división entre dos longitudes. Recordemos que un radián es el ángulo que corresponde a la relación entre un arco de circunferencia y el radio de igual longitud.

Problemas propuestos

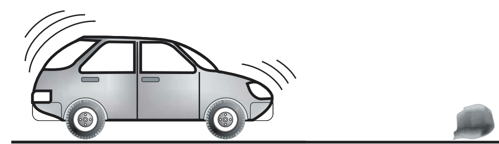
Movimiento rectilíneo

1) Un automóvil recorre 240m en 30s sometido a una aceleración constante de $0,2m/s^2$. Calcular: (a) Su velocidad inicial (b) su velocidad final (c) el espacio recorrido durante los primeros 10s.



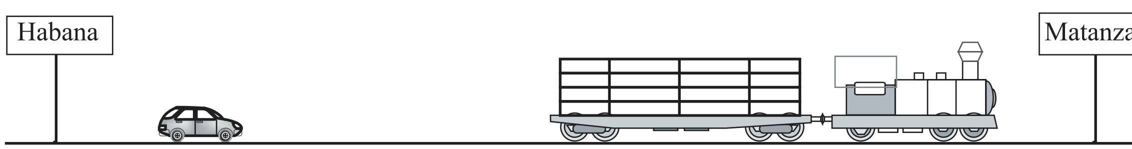
Problema 1.

2) Un auto encuentra un obstáculo en la vía. ¿Cuál es la distancia mínima a la que el chofer puede aplicar los frenos para detenerlo?



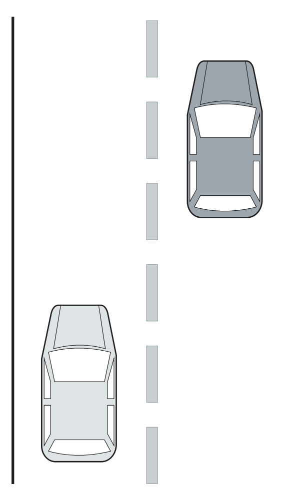
Problema 2.

3) Un tren parte hacia Matanzas. ¿Al cabo de qué tiempo el tren es inalcanzable por un auto? ¿A qué distancia de Matanzas se encuentra el tren?



Problema 3.

4) Los automóviles A y B viajan en la misma dirección por vías contiguas. El B se detiene cuando lo pasa A, el cual viaja con velocidad constante de 36km/h. Dos segundos más tarde parte el B con aceleración constante de $1,5m/s^2$. Hallar (a) Cuándo y dónde B alcanza a A (b) la velocidad de B en ese momento.



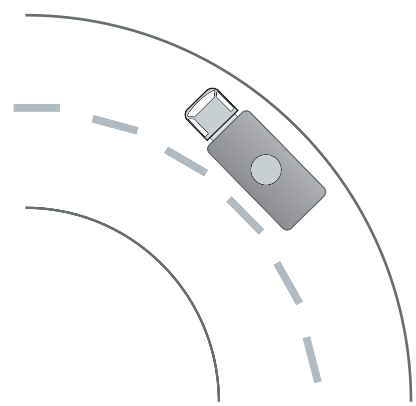
Problema 4.

Movimiento circular

5) La velocidad de un automóvil que se mueve sobre una curva de 300m de radio es de 90km/h. a) ¿Cuál es la componente normal de su aceleración? b) ¿Para qué valor de su velocidad a_n es la mitad del valor obtenido en el inciso a)?

Problema 5.

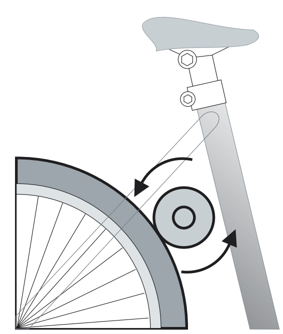
6) Un camión entra a una curva de 150m de radio con una rapidez de 90km/h. Al aplicar los frenos, disminuye su rapidez a una tasa constante de 1,5m/s^2. Halle el valor de la aceleración total del auto cuando su rapidez es de 80km/h.



Problema 6.

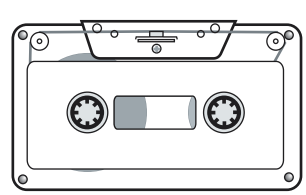
Combinación de movimiento rectilíneo y circular

7) El rodillo de un motor de bicicleta gira contra la rueda trasera. ¿Qué distancia recorre la bicicleta en un minuto?



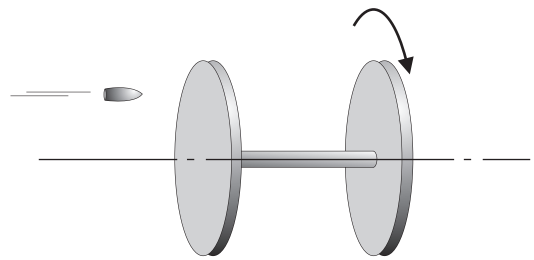
Problema 7.

8) Un audiocassette de 60 minutos requiere para su funcionamiento que la cinta pase frente al cabezal a una velocidad constante de 5cm/s. Encuentre la longitud de la cinta y la aceleración angular que deben experimentar los carretes para lograrlo.



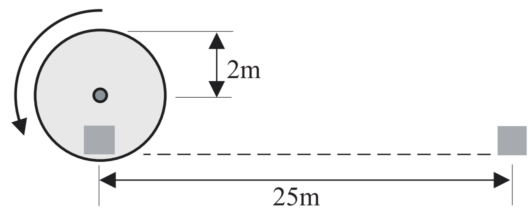
Problema 8.

9) Se diseña un sistema para medir la velocidad de una bala (v_b) consistente en dos discos paralelos unidos por un eje de 80cm y que giran con velocidad angular constante. Un disparo colineal al eje marcará un orificio en cada disco definiendo en un plano superpuesto un sector cuyo ángulo permite hallar v_b. Proponga una velocidad angular de trabajo para el equipo sabiendo que la velocidad máxima de las balas que se van a analizar es de 800m/s y que el menor ángulo medible es de 0,10rad. Calcule la velocidad de una bala que marcó un ángulo de 0,25 rad.



Problema 9.

10) Una caja en el borde de un tiovivo de 2m de radio sale desprendido y desliza por el piso hasta detenerse a los 25m, desacelerándose a razón de $2m/s^2$. Calcule las vueltas que dio el artefacto mientras la caja se movía.



Problema 10

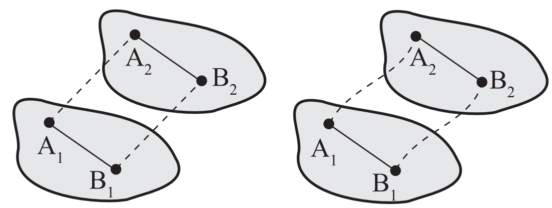
VIII CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

No siempre es posible modelar el sistema de estudio como una partícula y es preciso tratarlo como un cuerpo rígido. En lo que sigue haremos énfasis en el movimiento de rotación – dada su importancia práctica – así como en el movimiento general en el plano.

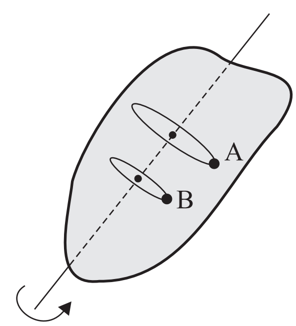
Tipos de movimiento de un cuerpo rígido

- **Traslación**: Todas las partículas que conforman el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas, pudiendo ser rectilínea o curvilínea. Si se traza una línea sobre el cuerpo, ésta permanece en la misma dirección.
- **Rotación alrededor de un eje fijo**: las partículas que conforman el cuerpo se mueven en planos paralelos sobre circunferencias concéntricas en el eje de rotación. Este eje puede o no interceptar al cuerpo rígido.
- **Movimiento general en un plano:** Cualquiera en que las partículas se muevan en planos paralelos y no sea de rotación o traslación. Ejemplo de esto es la rueda.
- **Movimiento alrededor de un punto fijo:** Es un movimiento en tres dimensiones alrededor de un punto, como es el caso del trompo.
- **Movimiento general:** cualquier otro no comprendido en los anteriores.

De acuerdo al interés del curso sólo consideraremos los tres primeros tipos de movimiento, en que los elementos del cuerpo se mueven en planos paralelos.



Movimiento de traslación de un cuerpo rígido. Una línea recta trazada no varía su dirección.



Movimiento de rotación. Los puntos del cuerpo se mueven en planos paralelos sobre circunferencias con centro en el mismo eje fijo.

Traslación

Supongamos un cuerpo que se traslada. Tomemos dos puntos A y B en el cuerpo. Sea $\mathbf{r}_A$ el vector de posición de A y análogamente $\mathbf{r}_B$. Llamémosle $\mathbf{r}_{BA}$ la posición de B medida desde A. Entonces, se cumple que:

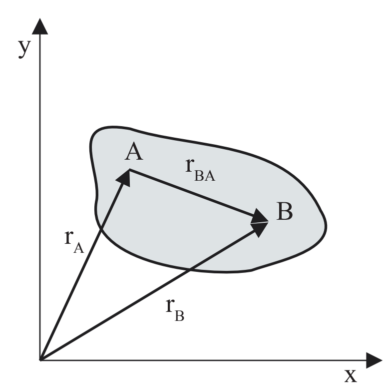
$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_{BA} + \mathbf{r}_A$$

Investigando cómo varían las posiciones con el tiempo, (lo que no es más que derivar respecto a t) queda:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

Ya que al ser el cuerpo rígido, la posición relativa de un punto respecto a otro no varía con el tiempo. Asimismo:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$



La distancia $\mathbf{r}_{BA}$ entre dos puntos A y B de un cuerpo rígido no varía con el tiempo.

De lo anterior se concluye que si el cuerpo se traslada, la velocidad y la aceleración de cada punto que lo forma es la misma. De modo que en la traslación del cuerpo rígido es suficiente describir el movimiento de uno de sus puntos. En general, se escoge el centro de gravedad, por ser un punto representativo y de ese modo el problema se reduce al correspondiente de la traslación de una partícula.

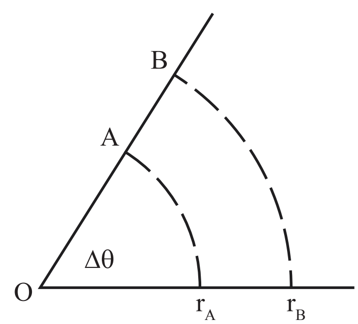
Rotación alrededor de un eje fijo

Dado un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje fijo, un punto cualquiera describirá una trayectoria circular. De hecho, cualquier otro punto también describirá una trayectoria que es concéntrica al eje de rotación. Estas trayectorias pueden estar en el mismo plano o en planos paralelos. Para el estudio del cuerpo rígido que rota es suficiente tomar un plano perpendicular al eje de rotación. Tal plano se conoce como placa representativa.

Los puntos de este plano cumplen las leyes del movimiento circular. En nuestro caso sólo veremos dos posibilidades: uniforme o uniformemente variado. No repetiremos aquí esas ecuaciones, ya vistas en el capítulo anterior.

Ahora bien, la característica esencial para el cuerpo que rota es que todos sus puntos tienen la misma velocidad angular. En efecto, tomemos un sector circular y seleccionamos dos puntos A y B, que giran alrededor de O. Los puntos están a las distancias respectivas r_A y r_B del centro de rotación. Al rotar, ambos describen el mismo ángulo $\Delta\theta$ en el mismo tiempo Δt, de manera que la velocidad angular es:

$\omega = \Delta\theta/\Delta t$



Rotación alrededor de un eje fijo. Tanto A como B tienen la misma velocidad angular ω.

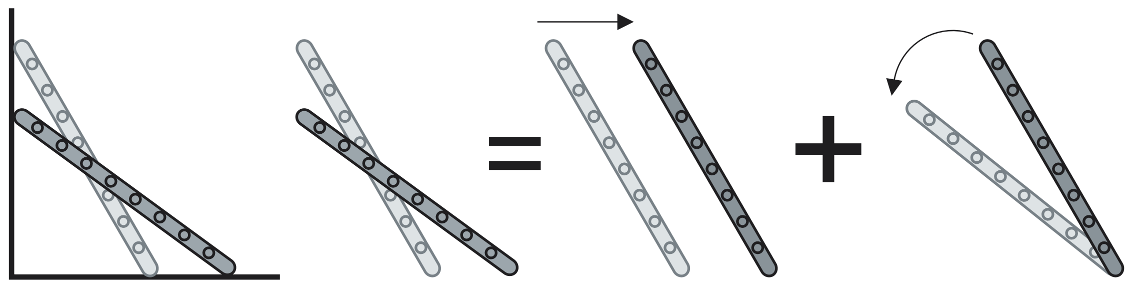
Esto hace que las magnitudes angulares describan el movimiento de rotación del cuerpo, al ser las mismas en todos los puntos del mismo.

Las velocidades lineales de distintos puntos, a diferentes distancias del centro de rotación, serán asimismo diferentes. Recordemos la relación: $v = \omega r$, por lo que si la velocidad angular ω es la misma, aquellos puntos que estén más alejados del centro de rotación tendrán a su vez mayor velocidad v.

Movimiento general en el plano

Este tipo de movimiento resulta más complejo que los anteriores. Para su estudio es conveniente considerarlo como la combinación de un movimiento de traslación y otro de rotación. Esto quiere decir que puede descomponerse el movimiento complejo en dos, primero el cuerpo rota y después se traslada o viceversa. En realidad esto no es lo que ocurre, el movimiento real es continuo, pero es una forma más simple de analizar el movimiento general en el plano.

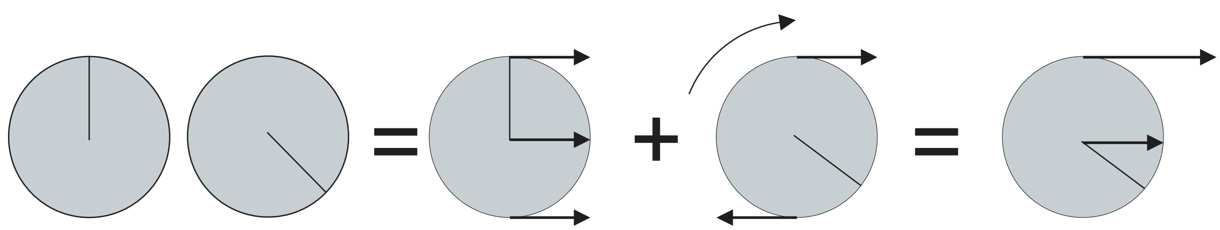
Por ejemplo, sea una varilla que sus extremos ruedan libremente por dos canales perpendiculares; o una escalera colocada sobre un piso y una pared lisa.



Estudio de un movimiento general en un plano como la combinación de un movimiento de traslación y otro de rotación.

La figura muestra la posición inicial del cuerpo. Nótese que hemos descompuesto su movimiento en el plano en dos. Primeramente el cuerpo se traslada hacia la derecha y después rota en sentido antihorario alrededor del extremo inferior. Un resultado similar se logra considerando que primero rota en sentido antihorario alrededor del extremo superior y que luego se traslada hacia abajo.

Otro ejemplo muy importante de movimiento en el plano es el de la rueda. En particular, analizaremos la llamada **rodadura pura**. Este término se refiere a que la rueda no desliza sobre la superficie, por lo que no existe movimiento relativo entre el punto de contacto y la superficie, siendo entonces nula la velocidad de ese punto respecto a la superficie.



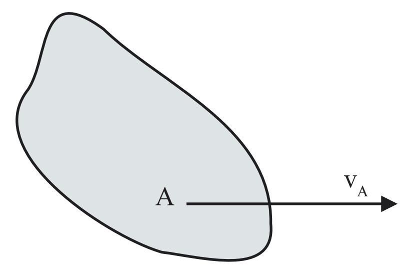
Rodadura pura. Se analiza como la combinación de dos movimientos:la rueda se traslada y luego rota sobre su eje.

Este caso muestra que la consideración de que el movimiento general sea la suma de un movimiento de traslación y otro de rotación es puramente formal. Sin embargo, demuestra al mismo tiempo la utilidad de modelar así al movimiento, ya que los resultados son similares a lo que acontece en la práctica. Se ha asumido que primero la rueda se traslada (todos los puntos tienen igual velocidad de traslación) y que luego rota sobre su eje (todos los puntos tienen igual velocidad angular) Obsérvese la suma de velocidades final.

Centro instantáneo de rotación

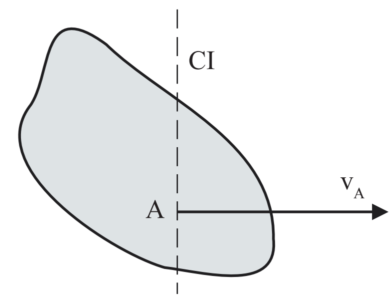
Un método sencillo para resolver problemas de movimiento general en un plano resulta de utilizar el concepto de **centro instantáneo de rotación.**

Sea un cuerpo que realiza un movimiento general en un plano. Podemos asumir que en un instante de tiempo dado, el mismo está rotando respecto a cierto punto. Quiere decir que instantáneamente suponemos que el movimiento general es un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo. Esa velocidad angular de rotación será la asociada al movimiento general.

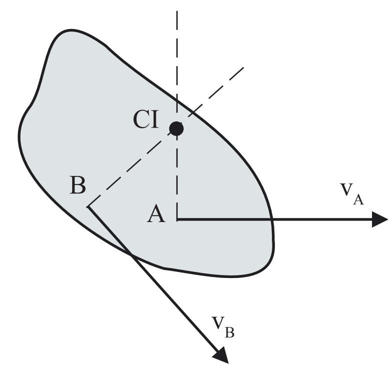


Evidentemente, la velocidad lineal del punto será perpendicular a la distancia entre el mismo y el centro instantáneo de rotación (CI). Si esa distancia es d, entonces, como siempre: $\omega = v/d$. Esta expresión permite encontrar la velocidad angular del cuerpo.

El CI puede estar situado en el cuerpo o no. Es obvio que su velocidad lineal es nula, ya que es un centro de rotación.



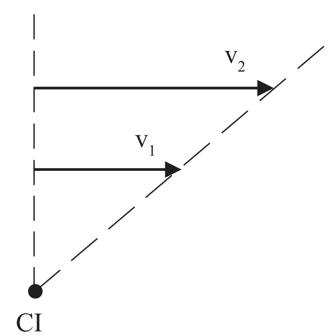
El CI puede encontrarse como muestra la figura. Si conocemos las velocidades de dos puntos del cuerpo con direcciones diferentes, las perpendiculares a ella en los puntos respectivos se cortan en el CI.



Ubicación del centro instantáneo de rotación conocidas las velocidades de puntos del cuerpo.

Si las velocidades son paralelas, se unen los puntos y los extremos de las velocidades, y la intersección es el CI. Si las velocidades son paralelas e iguales, el CI estará en el infinito, lo cual quiere decir que el cuerpo no rota, sino que se traslada.

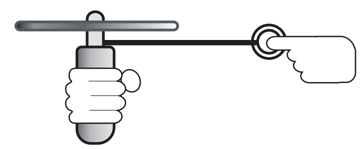
Hay que subrayar que la posición del CI es instantánea y cambia con el tiempo.



Ubicación del centro instantáneo de rotación para el caso de dos velocidades paralelas.

Problemas resueltos

1) Un niño hala un hilo de 50cm enrollado a un eje de 2cm de diámetro y que tiene acoplado un platillo que requiere 200RPM para despegar. Si el niño hala el hilo con una aceleración constante de $10cm/s^2$, ¿podrá volar el platillo?



Problema resuelto 1.

Solución:

Luego de estudiar el enunciado del problema, nos percatamos que la cuestión radica en determinar si la velocidad angular que alcanza el platillo después del accionar del niño supera o no los 200RPM. Como el platillo está unido al eje, ambos poseen la misma velocidad angular. Pasemos a estudiar el movimiento del eje.

Si consideramos que el hilo es inextensible y que no resbala sobre el eje, entonces el movimiento lineal del mismo coincide con el movimiento tangencial del eje. Esto significa que el eje tiene una aceleración tangencial de $10cm/s^2$. Es decir, realiza un movimiento circular uniformemente variado, en tanto que el hilo realiza un MRUV.

Veamos el movimiento del hilo. Como se parte del reposo, la velocidad inicial es cero. Al halar el hilo, el punto inicial se moverá a lo largo de 0,5m (el largo del hilo) Hallemos la velocidad que alcanza, que será la velocidad tangencial final que tendrá el eje.

Para ello, utilizamos la ecuación:

$v^2 – v_0^2 = 2aS$

Sustituyendo, se tiene:

$v^2 = 2(0,1m/s^2)\ (0,5m) = 0,1m^2/s^2$

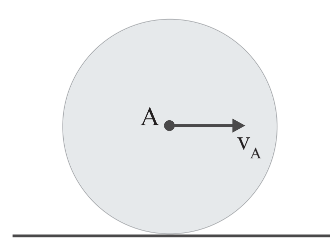
Por tanto, $v = 0,31m/s$

Relacionando la velocidad tangencial con la angular, teniendo en cuenta que si el diámetro del eje es de 0,02m, entonces el radio será de 0,01m/s

$\omega = v/r = (0,31)/(0,01) = 31rad/s$

Que llevados a RPM, serían 310RPM. De manera que el platillo volará. Nótese que en este problema es importante la consideración de que el eje y el platillo tienen la misma velocidad angular. Esta es una propiedad de los cuerpos rígidos y constituye el quid de la solución.

2) Si una rueda de radio r se mueve con rodadura pura, siendo su velocidad de traslación v_A (la velocidad del eje) (a) ¿cuál será su velocidad angular? (b) ¿cuál será el valor de la velocidad lineal del punto superior de la rueda?



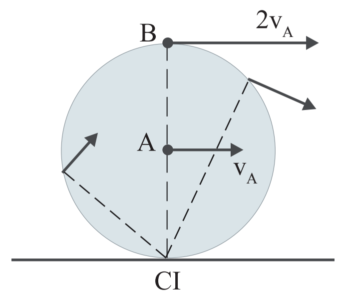
Problema resuelto 2.

Solución:

Puesto que se trata de un movimiento general en un plano, nos apoyaremos en el concepto de centro instantáneo de rotación. En el caso de la rueda, no hay dudas de que es el punto de contacto, ya que como se sabe, el CI es un punto que en ese instante tiene velocidad nula. Si v es la velocidad del eje, la velocidad angular se calcula por: $\omega = v/r$ donde r es el radio de la rueda.

Como la velocidad angular ω es la misma para todo el cuerpo, podemos hallar fácilmente la velocidad del punto superior:

$v_B = \omega(2r) = 2\omega r = 2v_A$



Ubicación del CIR para un a rueda que se mueve con rodadura pura.

De modo que la velocidad en ese punto es el doble de la del eje.

Este resultado es consecuencia de que *la rodadura sea pura*, es decir, no hay movimiento relativo entre el punto de contacto de la rueda y la superficie. Sobre esa consideración se ha obtenido la relación **v = ωr** siendo v es la velocidad de traslación de la rueda, ω su velocidad angular de rotación y r su radio. En efecto, si la rueda patina, significa que el término ωr es mayor que v, y la relación no se cumple. Si, por el contrario, la rueda desliza frenando, ωr es menor que v, tampoco se cumple la igualdad.

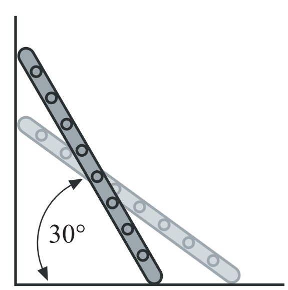
Igualmente para la aceleración:

$a = \alpha r$

Este resultado de la rodadura pura puede extenderse a un caso análogo, cual es un cilindro en el que se enrolla o desenrolla una cuerda sin deslizar.

No debe confundirse lo visto aquí con la expresión **v = ωr** válida para *la rotación alrededor de un eje fijo*, donde ω es la velocidad angular con la la que gira un punto que está a una distancia r del eje de rotación y que posee una velocidad tangencial v. En el caso de la rueda no hay que olvidar que es un cuerpo que realiza un *movimiento general en el plano* y que v es la velocidad del eje de la rueda y r su radio.

3) Una escalera de 2 metros de longitud se coloca sobre un piso y una pared pulidos. Se sabe que al caer, el extremo superior lo hace con una velocidad de 15m/s cuando el ángulo con el piso es de 30°. Halle la velocidad del extremo inferior en ese instante y la velocidad angular.



Problema resuelto 3.

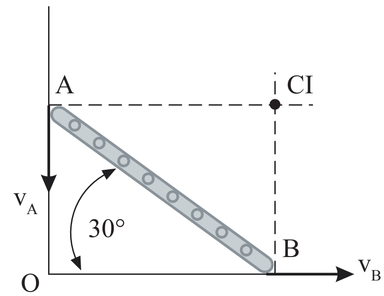
Solución:

Solucionaremos este problema utilizando el concepto de centro instantáneo de rotación (CI). Dado que la escalera resbala por la pared y el piso, las velocidades de los puntos A y B están dirigidas como se muestra en la figura. Para encontrar el CI se trazan las perpendiculares a las velocidades; el punto de intersección será el CI.

Las coordenadas del CI pueden encontrarse a través de relaciones trigonométricas. Si L es la longitud de la escalera, entonces, de acuerdo a la figura:

OA = L sen 30° = (2m) (0,5) = 1m

OB = L cos 30° = (2m) (0,86) = 1,72m



Determinación del centro instantáneo de rotación.

Utilizaremos la expresión que relaciona la velocidad angular, la velocidad tangencial de un punto y la distancia entre el punto y el centro de rotación:

$\omega = v/r = v_A/OB = (15m/s)/1{,}72m = 8{,}72rad/s$

Puesto que la velocidad angular es la misma para cualquier punto de la escalera, es posible encontrar la velocidad del punto B con la misma expresión anterior.

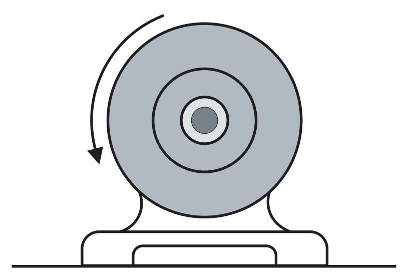
$v_B = \omega r = \omega(OA) = (8{,}72)\ (1) = 8{,}72m/s$

De manera que en el instante que se analiza, la velocidad angular de la escalera es de 8,72rad/s y la velocidad del punto inferior es de 8,72m/s.

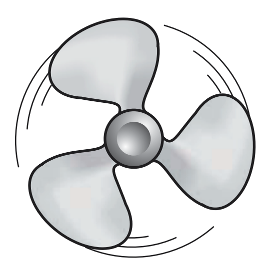
Problemas propuestos

Rotación alrededor de un eje fijo

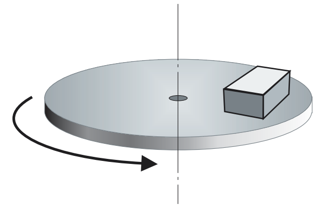
1) La rueda de una pulidora gira a 1800 RPM, velocidad que alcanza en 4s. En cambio, al cortar la alimentación, se detiene en 50s. Halle el número de revoluciones que realiza la rueda en cada caso.


Problema 1.

2) Un aspa de ventilador gira a 1200RPM. Se desconecta y de detiene después de efectuar 520 revoluciones. Halle la aceleración angular y el tiempo requerido para detenerse.

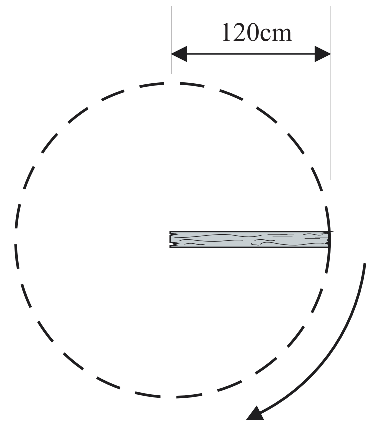

Problema 2.

3) Un pequeño bloque está colocado 10cm del centro de una placa que gira. Se sabe que el rozamiento entre el bloque y la placa será incapaz de mantenerlo cuando su aceleración total alcance el valor de $5m/s^2$, momento en que comenzará a deslizar. Si la placa parte del reposo y gira aceleradamente a razón de 6 rad/s^2, determine el tiempo y la velocidad angular de la placa cuando el bloque comienza a deslizar.



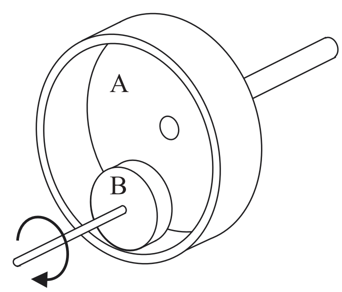
Problema 3.

4) Un palo recto de 120cm de largo gira en un plano horizontal alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos. Su velocidad angular varía uniformemente de 20 a 50 RPM en 5s. ¿Cuál es la velocidad lineal de su punto medio al cabo de 2s?



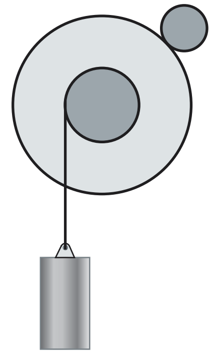
Problema 4.

5) La rueda B realiza 100 revoluciones alrededor de su eje durante el intervalo de tiempo t, mientras que su velocidad se incrementa uniformemente de 200RPM a 600RPM. Sabiendo que la rueda B gira sin deslizar sobre el interior del anillo interior de la rueda A, determinar la aceleración angular de la rueda A y el intervalo de tiempo t. Los radios de las ruedas son 3cm y 12cm respectivamente.



Problema 5.

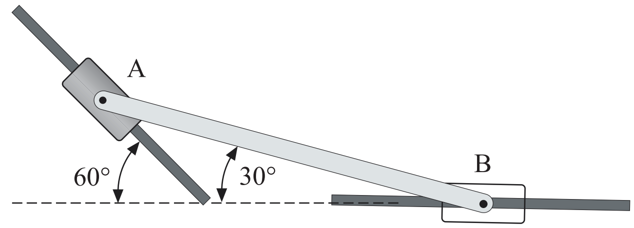
6) El sistema que se muestra parte del reposo en t = 0 y acelera uniformemente. Si al cabo de un tiempo t = 4s la velocidad de la carga es 4,8 m/s hacia abajo, halle la aceleración angular de la rueda del extremo superior derecho y el número de revoluciones que ha realizado. Los radios respectivos son 60, 300 y 360mm respectivamente.



Problema 6.

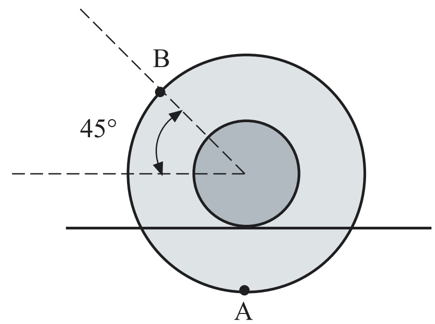
Movimiento general en el plano

7) El collar B se mueve con velocidad constante de 25cm/s hacia la izquierda. Halle, para el instante en que la barra que une ambos collares (20cm) forma un ángulo de 30° con la horizontal, la velocidad angular de la misma y la velocidad del otro collar. El ángulo de la otra barra con la horizontal es de 60°.



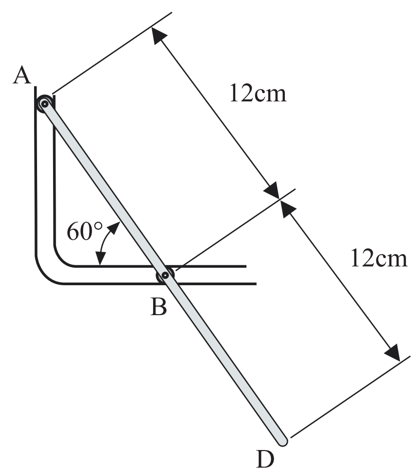
Problema 7.

8) La rueda de la figura está rodando sin deslizamiento sobre la superficie. Si su velocidad angular es de 3RPM en el sentido horario, halle las velocidades de los puntos A y B en el instante indicado. El ángulo señalado es de 45°. Los radios son R = 0,25m y r = 0,1m.



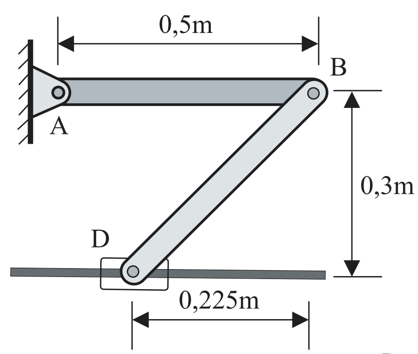
Problema 8.

9) La barra ABD está guiada por ruedas sobre canales. El ángulo entre la barra y la horizontal es de 60° y v_A = 24cm/s hacia abajo. Halle la velocidad angular de la barra y las velocidades del punto B y del punto D. Las distancias AB y BD son iguales a 12cm.



Problema 9.

10) Conociendo que en el instante indicado la velocidad angular de la manivela AB es 3 rad/s en sentido horario, halle la velocidad angular de BD y la velocidad del collarín D.



Problema 10.

Tema III Dinámica

IX DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Abordaremos el estudio de la Dinámica, que trata del movimiento de los cuerpos pero teniendo en cuenta las causas que lo motivan, es decir, las fuerzas aplicadas. A diferencia del caso estático, estas fuerzas no están equilibradas. Al igual que en los temas anteriores, comenzaremos por situaciones en las que es posible aplicar el modelo de partícula o punto material; después se tratará la Dinámica del cuerpo rígido.

Utilizaremos dos métodos para la resolución de problemas: el método dinámico, a partir de la segunda ley de Newton; y el llamado método energético, basado en la ley de conservación de la energía mecánica y conceptos afines.

Segunda ley de Newton

Tanto en el curso de Física Elemental de la Enseñanza Media, como en la asignatura Física de los Productos se tratan las Leyes de Newton. En este tema utilizaremos la segunda Ley que podemos enunciar así: ***si la fuerza resultante sobre la partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional al valor de la resultante en la dirección de ésta***.

En efecto, si se estudia el comportamiento de una partícula bajo la acción de distintas fuerzas se cumple que:

$F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 =$ constante

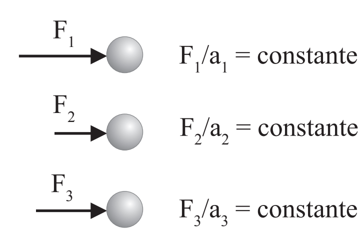
Al ser esta constante un escalar, o sea, un número, queda claro que las fuerzas y las aceleraciones coinciden en dirección y sentido.

De manera que la **ecuación de la dinámica de la partícula** sería:

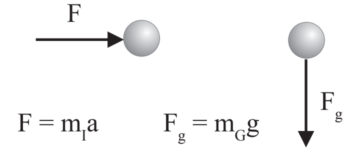
F = ma

Que es válida no sólo para fuerzas constantes sino también para fuerzas variables en el tiempo. Como se sabe, la magnitud m es la masa del cuerpo. Nótese que hasta ahora habíamos manejado el concepto de masa asociado a la fuerza de gravedad mediante $F_g = mg$ siendo g la llamada aceleración de la gravedad. Hoy se acepta, sobre la base de experimentos de alta precisión que ambas masas (gravitacional e inercial, como se conocen) son iguales.

Si sobre la partícula actúan varias fuerzas, simbolizamos la fuerza resultante como la sumatoria ΣF, y se tiene que:



Si se aplican distintas fuerzas se observa que la relación entre la fuerza y la aceleración es constante. F/a no es más que la masa del cuerpo.



La masa inercial (definida según $F = m_I a$) y la masa gravitacional (definida a través de $F_g = m_G g$) son iguales.

$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

En algunos libros se plantea que la primera Ley de Newton (*si la resultante de fuerzas sobre la partícula es cero, ésta se mueve con movimiento rectilíneo uniforme o está en reposo*) es consecuencia de la segunda Ley, ya que si F = 0, esto implica que a = 0 y por tanto la velocidad es constante. Esto no es exactamente así. (Cuesta trabajo pensar que un genio como Newton, con una tremenda economía de pensamiento, haya hablado de tres leyes donde podían ser dos) En realidad, la primera Ley, al introducir el concepto de inercia, permite definir los sistemas de referencia inerciales, que son aquellos donde es válida la ecuación F = ma. De hecho, la tierra no es exactamente un sistema de referencia inercial, pero en la mayoría de las aplicaciones prácticas puede considerarse como tal.

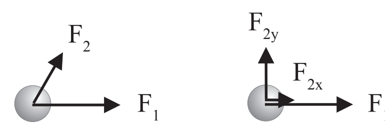
Ecuaciones de movimiento

Aunque $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ es una ecuación vectorial compacta, resulta conveniente utilizar las ecuaciones escalares de los componentes:

$\Sigma\mathbf{F_x} = \mathbf{ma_x}$

$\Sigma\mathbf{F_y} = \mathbf{ma_y}$

Para resolver problemas es conveniente seguir la metodología ya vista en estática: realizar un diagrama de fuerzas donde se ubiquen todas las fuerzas que actúan sobre la partícula y después planteamos las ecuaciones de movimiento para el problema en particular. En el caso de que no haya movimiento en uno de los ejes la sumatoria de fuerzas correspondiente será igual a cero.



De acuerdo al diagrama de fuerzas se construyen las ecuaciones de movimiento:

$\Sigma F_x = F_1 + F_{2x} = ma_x$

$\Sigma F_y = F_{2y} = ma_y$

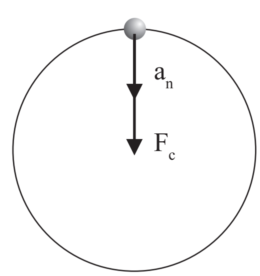
Fuerza centrípeta

Ya en la Cinemática se trató el movimiento circular, en el que el cuerpo posee una aceleración normal, dirigida radialmente hacia el centro de la circunferencia que describe. Es lógico pensar que si existe una aceleración, es por la presencia de una fuerza aplicada.

Esta fuerza sería la responsable de que el cuerpo realice tal movimiento circular, es la que lo obliga a realizar este tipo de movimiento. **Una fuerza así recibe el nombre de fuerza centrípeta**. Según el caso, la fuerza centrípeta puede tener un origen diferente.

Por ejemplo, en el caso de una piedra atada a un hilo que se mueve circularmente, la fuerza centrípeta sería la tensión del hilo; si éste se parte, la piedra deja de tener un movimiento circular. Una moneda sobre el plato de un tocadiscos, se mantiene por la fuerza de fricción, que es la fuerza centrípeta en este caso.

En el movimiento de la tierra alrededor del sol, la fuerza centrípeta es la fuerza de gravedad; en el del electrón alrededor del núcleo, es la fuerza electrostática.



La fuerza centrípeta F_c es la responsable de que el cuerpo describa un movimiento circular.

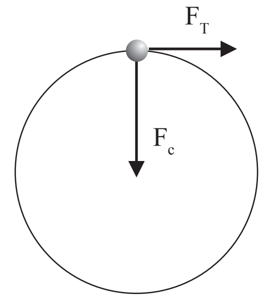
De manera que fuerza centrípeta es un nombre genérico, siendo de un tipo u otro de fuerza según el caso. Un error frecuente es añadir una "fuerza centrípeta" una vez ubicadas todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en el diagrama de fuerzas. En realidad la fuerza centrípeta es una de las fuerzas que actúan.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, tendremos:

$F_{centripeta} = ma_n = mv^2/r = m\omega^2 r$

Donde a_n es la aceleración normal, v y ω las velocidades lineal y angular y r el radio de la trayectoria.

Si setrtata de un movimiento circular uniformemente variado, es porque existe una aceleración tangencia, que evidencia que sobre el cuerpo actúa además una fuerza tangencial.



En el caso de un MCUV sobre el cuerpo actúa además una fuerza tangencial.

En algunos textos se habla de fuerza centrífuga, como aquella que hace que el cuerpo tienda a salirse de la circunferencia que describe. Tal punto de vista corresponde a analizar el problema desde el cuerpo que rota, pues en ese caso un observador nota que tiene que aplicar una fuerza para mantener al cuerpo en su posición (un hombre al borde del tiovivo si no se agarra se cae) Formalmente experimenta una fuerza que hala al cuerpo, sin embargo no hay ningún otro objeto que actúe sobre el cuerpo. Esa paradoja tiene su origen en que en los sistemas acelerados no se cumplen las leyes de Newton, pues no son sistemas de referencia inerciales. Para resolver esto se introduce el concepto de fuerza ficticia o de inercia, que es el caso de la fuerza centrífuga.

No abundaremos más puesto que este enfoque escapa del contenido del curso. Nosotros siempre analizaremos los problemas desde la tierra, que consideramos un buen sistema de referencia inercial.

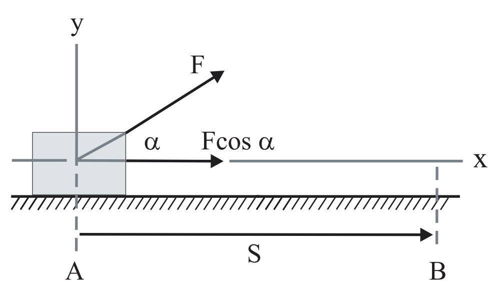
Trabajo de una fuerza

Si bajo la acción de una fuerza F la partícula se desplaza del punto A al B, se define el **trabajo** como:

$\mathbf{W_{AB} = \int F\cos\alpha\, dr}$

Siendo α el ángulo formado entre la fuerza y la dirección de desplazamiento. Por simplicidad, consideraremos el caso en que la fuerza es constante. Así, la integral se sustituye por la expresión:

$\mathbf{W_{AB} = FS\cos\alpha}$



Esquema para ilustrar el concepto de trabajo mecánico.

S es el desplazamiento que experimenta la partícula. Formalmente el trabajo se expresa en Nm, pero en el SI esas unidades se conocen como Joule (J). Nótese que puede ser positivo o negativo, de acuerdo al valor del ángulo.

Por ejemplo, el trabajo de la fuerza de rozamiento siempre es negativo pues forma un ángulo de 180° con la dirección del movimiento, siendo entonces el cos = -1. En el caso de que la fuerza y el desplazamiento sean perpendiculares el trabajo es cero.

El trabajo realizado por unidad de tiempo se conoce como potencia y su unidad es el Watt.

Energía cinética. Principio del trabajo y la energía

Vamos a definir la **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad v como:

$E_c = ½\ mv^2$

La energía cinética es una medida del movimiento del cuerpo y se expresa en Joule.

Si sobre la partícula actúa una fuerza a lo largo de su trayectoria, puede demostrarse que el trabajo realizado por esa fuerza en llevar a la partícula del punto A al B es:

$W_{AB} = E_{cB} – E_{cA} = \Delta E_c$

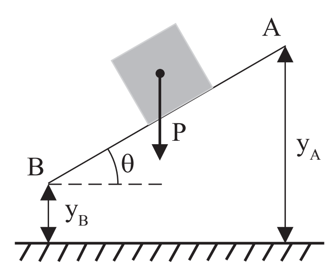
Esta expresión se conoce como Principio o Teorema del trabajo y la energía. Siendo estas magnitudes escalares, el Teorema puede servir para resolver problemas de forma más sencilla. Es importante subrayar que si bien la energía caracteriza un estado, el trabajo caracteriza un proceso.

Energía potencial

El concepto de energía potencial está asociado a un tipo de **fuerzas** llamado **conservativas**, que **se caracterizan porque el trabajo asociado a ellas es independiente de la trayectoria**, dependiendo sólo de los puntos inicial y final. Si el trabajo depende de la trayectoria, se dice que son fuerzas no conservativas, o como también se les conoce, disipativas. Las fuerzas de fricción son fuerzas disipativas.

Un ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza de gravedad. Hallemos el trabajo debido a esta fuerza (designada por P) al actuar sobre el cuerpo de la figura entre las posiciones A y B. Sea S la distancia entre ambos puntos. De acuerdo a la definición de trabajo:

$W_{AB} = PS \cos \theta = P\ h$



Esquema para ilustrar el concepto de energía potencial gravitatoria.

Donde h es la diferencia $h = y_A - y_B$. Es decir, el trabajo no depende de la inclinación del plano, sino de la diferencia de altura entre los puntos final e inicial. Cualquier otra trayectoria conduce al mismo valor de trabajo siempre y cuando parta de A y termine en B.

El resultado anterior puede escribirse como:

$W_{AB} = P(y_A - y_B) = Py_A - Py_B = mgy_A – mgy_B$

Para el caso de la fuerza de gravedad, **la energia potencial gravitatoria se define según la expresión:**

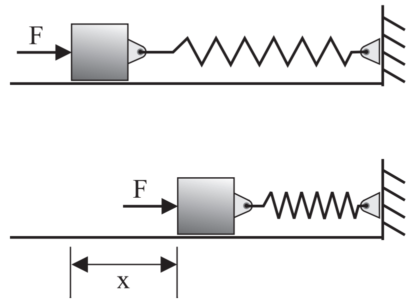
$E_{pg} = mgy$

Siendo y la altura de la partícula. De modo que:

$\mathbf{W_{AB} = E_{pgA} - E_{pgB} = - \Delta E_{pg}}$

Otro ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza elástica, digamos, de un resorte. En ese caso:

$F = - kx$



Esquema para ilustrar el concepto de energía potencial elástica.

Donde k es el coeficiente de restitución del resorte y x el valor de la deformación del mismo. El signo negativo indica que la dirección dela fuerza es siempre contraria al sentido de la elongación que coincide con la deformación x del resorte. Puesto que en este caso F no es constante, para hallar el trabajo debido a esta fuerza entre dos puntos A y B es preciso integrar:

$W_{AB} = {}_A\int^B F dx$

Sustituyendo a F por su expresión e integrando:

$W_{AB} = {}_A\int^B (-kx)\, dx = - ½\, {}_A\big|^B (kx^2)$
$= - ½ (kx_B^2 - kx_A^2) = ½\, kx_A^2 - ½kx_B^2$

Definimos la energía potencial para la fuerza elástica como:

$\mathbf{E_{pe} = ½\, kx^2}$

De modo que:

$\mathbf{W_{AB} = E_{peA} - E_{peB} = - \Delta E_{pe}}$

El trabajo de una fuerza conservativa se puede expresar como la variación de energía potencial con signo negativo. El trabajo sólo depende de las posiciones de los puntos. La energía potencial está asociada a la posición (a diferencia de la cinética, relacionada con la velocidad).

Conservación de la energía mecánica

Definiremos la **energia mecánica** como la suma de la energía cinética y potencial de una partícula, o sea:

$E = E_c + E_p$

Si la partícula está sometida a la acción de fuerzas conservativas:

$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$

Pero del principio de trabajo energía: $W_{AB} = E_{cB} - E_{cA}$ Igualando ambas expresiones, se tiene:

$E_{pA} - E_{pB} = E_{cB} - E_{cA}$

Intercambiando:

$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB}$

De manera que:

$\mathbf{E_A = E_B}$

Este es el **Principio de conservación de la energía mecánica.** Vemos que se cumple si todas las fuerzas sobre el sistema son conservativas. Si hay fuerzas no conservativas, del principio de trabajo y energía (que siempre es válido) se tiene:

$W_{\text{fuerzas conserv.}} + W_{\text{fuerzas no conserv}} = \Delta E_c$

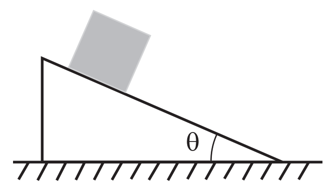
Pero el trabajo de las fuerzas conservativas es ($- \Delta E_p$), por lo que despejando se obtiene:

$W_{\text{fuerzas no conserv}} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E$

Luego, en el caso de fuerzas no conservativas, su trabajo es igual a la variación de la energía mecánica. Esta expresión nos indica que si $W_{\text{fuerzas no conserv}} = 0$, entonces $\Delta E = 0$, es decir, se conserva la energía mecánica.

Problemas resueltos

1) Se lanza hacia abajo, por un plano de 15° de inclinación, un paquete de 5kg con una velocidad inicial de 4m/s. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el paquete y el plano es de 0,35, determine a) la velocidad del paquete después que se ha movido 3m, b) La distancia d a la cual el paquete alcanza el reposo.



Problema resuelto 1.

Solución:

Si el paquete simplemente desliza por el plano, podemos considerarlo como una partícula y prescindir de sus dimensiones.

El problema puede resolverse por ambos métodos, dinámico y energético. Veamos el primero. Tanto la velocidad como la distancia son magnitudes cinemáticas, que pueden encontrarse a través de las ecuaciones correspondientes. Para ello se requiere la aceleración del cuerpo, que hallaremos mediante el método dinámico.

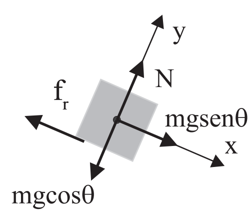


Diagrama de fuerzas. Se ha tomado el sentido positivo de los ejes de coordenadas hacia arriba y hacia la derecha.

A partir del diagrama de fuerzas se construyen las ecuaciones de movimiento:

$\Sigma F_x = mg\text{sen}\theta - f_r = ma_x \quad (1)$

$\Sigma F_y = mg\cos\theta - N = 0 \quad (2)$

Pero la fuerza de fricción es $f_r = \mu N$, donde μ es el coeficiente de fricción dinámico. Despejando en (2) y sustituyendo en (1) se tiene:

$mg\text{sen}\theta - \mu mg\cos\theta = ma_x$

La aceleración del cuerpo es:

$a = g\,(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) = 10\,(0,25 - (0,35)(0,96)) = - 0,86\text{m/s}^2$

Al ser la aceleración constante, se trata de un MRUV, que cumple:

$v^2 = 2aS + v_0^2 = (2)(-0{,}86)(3) + (4)^2$

$v = 3{,}29 m/s$

Para el inciso b) se utiliza la misma ecuación, lo que entonces es dato la velocidad final (nula) y se halla la distancia recorrida S. O sea:

$S = (v^2 - v_0^2)/2a = (-4^2)/(2(-0{,}86)) = 9{,}3m$

Para resolver el problema por el método energético, vemos que no se conserva la energía mecánica por existir trabajo de la fuerza de fricción, que es una fuerza no conservativa. Aplicamos entonces el teorema de trabajo y energía:

$W_{AB} = E_{cB} - E_{cA}$

Donde A y B son las posiciones inicial y final.

Hallemos el trabajo de las fuerzas. Las fuerzas perpendiculares al movimiento tienen trabajo nulo. El trabajo de la fuerza de fricción es:

$W_{frAB} = f_r\, S \cos \pi = - f_r\, S$

De hecho, el trabajo de la fricción siempre es negativo. El trabajo de la fuerza de gravedad será:

$W_{mgAB} = mg \cos\theta\, S \cos 0 = mg \cos\theta\, S$

Por lo que el trabajo final será la suma:

$W_{AB} = mg\cos\theta S - \mu mg sen\theta\, S = mgS(\cos\theta - \mu sen\theta)$

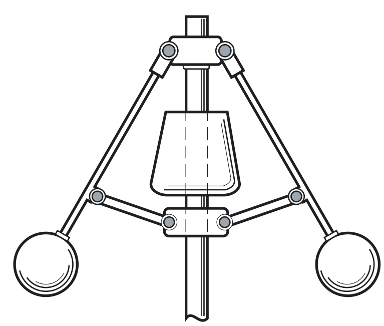
Sustituyendo f_r por μN, e igualando a la variación de energía cinética de acuerdo al teorema de trabajo y energía, se tiene:

$W_{AB} = mg(\cos\theta - \mu sen\theta) = ½\, mv_B^2 - ½\, mv_A^2$

Eliminando m, se llega al mismo resultado anterior:

$2g(\cos\theta - \mu sen\theta)\, S = v_B^2 - v_A^2$

2) El regulador centrífugo es utilizado en procesos industriales para controlar el paso de un fluido (generalmente vapor) a través de un conducto. Encuentre la velocidad angular necesaria para que el ángulo que forma la varilla de 40cm con la vertical sea de 60°.



Problema resuelto 2.

Solución:

Utilizaremos el método dinámico. Despreciaremos las masas de las varillas frente a las de las esferas. Además, las dimensiones son tales que podemos considerar cada esfera como un punto material.

Analizaremos una de las esferas, lo cual será válido para la otra (el regulador requiere de al menos dos esferas para equilibrar su movimiento) y para ello hacemos el diagrama de fuerzas que se muestra en la figura. Nótese que la tensión, en la dirección de la varilla, se ha descompuesto en sus componentes horizontal y vertical.

Las ecuaciones de movimiento serían:

$\Sigma F_x = T sen\theta = ma_x$

$\Sigma F_y = T cos\theta - mg = 0$

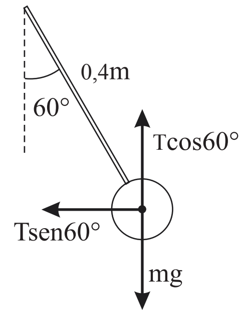


Diagrama de fuerzas. Un análisis superficial del mismo podría sugerir que el término Tsenθ debería ser negativo, de acuerdo al convenio usual de signos. En realidad no se trata de un movimiento lineal según uno de los ejes de coordenadas x ó y, sino de un movimiento en el plano horizontal con una trayectoria en forma de circunferencia. En este caso se acostumbra tomar como positivo el sentido hacia el centro de rotación y negativo en sentido contrario.

La aceleración a_x no es más que la aceleración normal o centrípeta, por lo que podemos realizar la siguiente sustitución:

$T sen\theta = m\omega^2 r$

ω es la velocidad angular con la que gira la esfera y r la distancia al eje de rotación. Es evidente que en este caso Tsenθ es la fuerza centrípeta que obliga a la esfera a realizar el movimiento de rotación.

En la ecuación en el eje Y, la aceleración es 0 porque no hay movimiento en esa dirección. Luego:

$T cos\theta = mg$

Dividiendo una ecuación sobre la otra, se tiene:

$\tan\theta = \omega^2 r/g$ (1)

$\omega = \sqrt{g \tan\theta / r}$

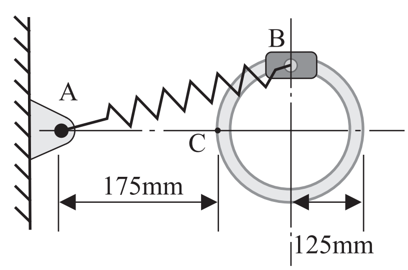
Sustituyendo los valores:

$\omega = \sqrt{(10 m/s^2)(1,73)/0,4m} = 6,57 rad/s$

Resulta interesante analizar la expresión (1). Obsérvese que si ω aumenta, para mantener la igualdad se hace necesario que la tangente del ángulo aumente, vale decir, que aumente el ángulo que forma la varilla con la vertical. En efecto, en la práctica la varilla se eleva. Esto hace que r (la distancia de la esfera al centro de rotación) también aumente pero tanθ es una función que crece más rápido.

Esto también puede verse desde otro punto de vista. Que aumente la velocidad angular implica que la fuerza centrípeta ($F_c = m\omega^2 r$) debe ser mayor para mantener el movimiento de rotación. Ya vimos que en este caso particular Tsenθ es la fuerza centrípeta, por lo que senθ debe aumentar y por tanto el ángulo θ, llegando a la misma conclusión de que la varilla se eleva.

3) Un collar de masa 1,5kg se acopla a un resorte y se desliza a lo largo de una varilla circular, la cual se encuentra en un plano horizontal. El resorte no está deformado cuando el collar se encuentra en C y la constante del resorte es 400N/m. Si el collar se deja en reposo en B, determinar la velocidad del collar cuando pase por el punto C.



Problema resuelto 3.

Solución:

Utilizaremos el método energético. Supondremos que entre el collar y la varilla no hay fricción, por lo que la energía mecánica se conserva: la energía en el punto B será igual a la del punto C. En el punto B, el collar no tiene energía cinética pues está en reposo, sólo tiene energía potencial elástica debido a la deformación x del resorte.

$E_B = ½ kx^2$

En el punto C no hay deformación del resorte, por lo que no habrá energía potencial elástica, y toda la energía será cinética:

$E_C = ½ mv^2$

Igualando, ya que la energía se conserva:

$E_B = E_C$

$½ kx^2 = ½ mv^2$

$v = x \sqrt{k/m}$

La deformación x del resorte será igual a la diferencia entre la longitud que tiene deformado y la longitud sin deformar. Esta última es 0,175m, igual a la distancia AC. Sea L la longitud AB, entonces:

$x = L – 0,175m$

Para encontrar L, utilizamos el teorema de Pitágoras:

$L = \sqrt{(0,175 + 0,125)^2 + (0,125)^2} = 0,325m$

Sustituyendo:

$x = 0,325m – 0,175m = 0,15m$

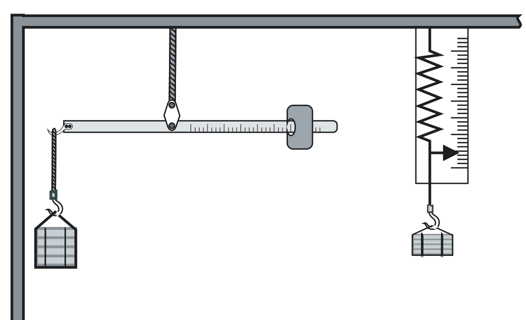
$v = (0,15)\sqrt{400/1,5} = 2,45m/s$

Que es la velocidad del collar al pasar por el punto C.

Problemas propuestos

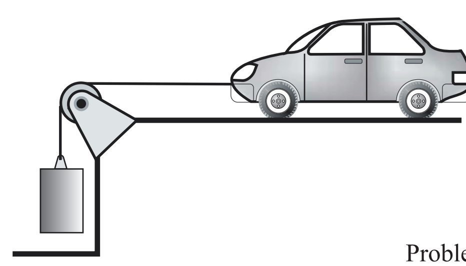
Método dinámico

1) Una pesa tipo romana y un dinamómetro están sujetos al techo de un ascensor, y de ellos penden sendos paquetes. Estando el ascensor en reposo, las escalas respectivas marcan 20N. Si el dinamómetro marca 18N, determine la aceleración del ascensor y la carga que marcaría la romana.



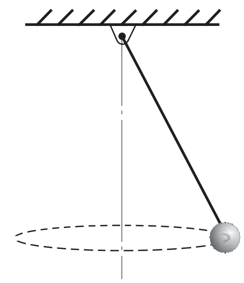
Problema 1.

2) Cuando el sistema mostrado parte del reposo, se observa que la aceleración del bloque es $3m/s^2$ hacia abajo. Despreciando el efecto del rozamiento, determinar a) la tensión en el cable, b) la masa del bloque. Considere que la masa del carro es 800kg.



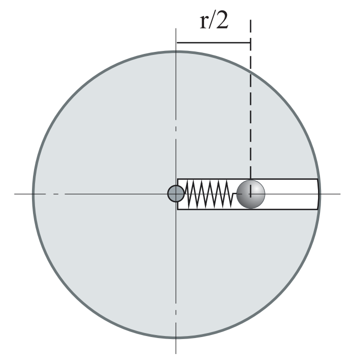
Problema 2.

3) Se hace girar una esfera de masa 5kg en una circunferencia horizontal como se indica en la figura. Sabiendo que la tensión máxima soportada por la cuerda es 100N, calcular a) la velocidad máxima posible si la longitud de la cuerda es de 2m, b) el valor del ángulo del hilo con la vertical.



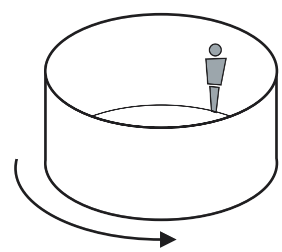
Problema 3.

4) El disco de la figura de 20cm de diámetro está acoplado a un motor eléctrico de doble enrollado: arranque y marcha, y debe conmutar de uno a otro cuando alcanza 600RPM. Para ello, la bolita de 0,1kg debe desplazarse 5mm. Halle el coeficiente de elasticidad del resorte si la bolita está inicialmente a mitad del radio del disco.



Problema 4.

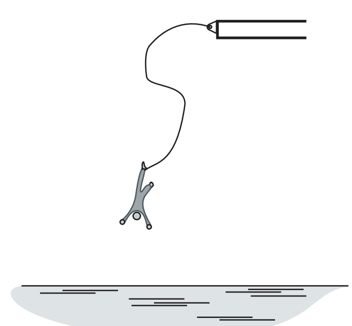
5) Halle la velocidad angular necesaria para que el tambor de 2m de radio sostenga a un hombre de 70kg si el coeficiente de fricción entre el hombre y la pared del tambor es 0,5.



Problema 5.

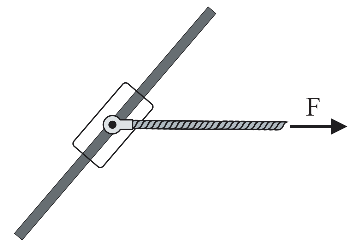
Método energético

6) Un hombre de 70kg decide practicar el bungee cord lanzándose de un puente a 100m de altura, amarrado a sus pies por una cuerda elástica de k = 130N/m. Calcule la longitud máxima de cuerda necesaria para simplemente rozar el pavimento.



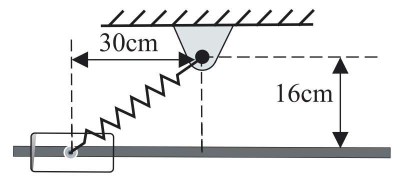
Problema 6

7) El collar de 2kg se está moviendo hacia abajo con una velocidad de 3m/s cuando una fuerza F se aplica horizontalmente. Suponiendo que el rozamiento entre el collar y la varilla es despreciable, determinar el valor de la fuerza F si el collar se detiene 1,2m abajo del punto en que se aplica la fuerza. El ángulo entre la varilla y la horizontal es de 30°.



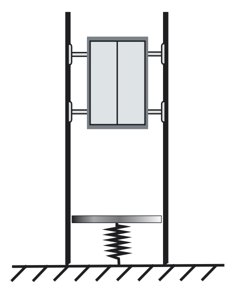
Problema 7.

8) El resorte tiene una constante de restitución de 6N/m y está unido al collar de 4kg que se mueve libremente a lo largo de la varilla horizontal. La longitud natural del resorte es 10cm. Si el collar está en reposo en la posición mostrada y se suelta, hallar la máxima velocidad que alcanza.



Problema 8

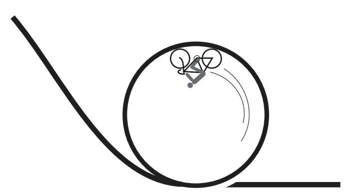
9) Un elevador de 500kg cae desde 20m. A partir de la segunda mitad se aplicaron los frenos de emergencia que se desconectan al impactar al resorte de seguridad, cuya longitud es de 1m y su coeficiente de restitución k = 400kN/m ¿Cuál será el valor de la fuerza de fricción necesaria para que sólo se comprima la mitad del resorte?



Problema 9.

Combinación del método dinámico y el energético

10) Calcule la altura mínima para que un ciclista pueda vencer el llamado “rizo de la muerte”. Asuma que el radio del rizo es r.



Problema 10.

X DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

En muchos problemas de la Dinámica de la partícula se utiliza la condición de que los hilos y poleas que aparecen son de masa despreciable. Asumimos como válido el hecho de que la tensión del hilo no varía al pasar por una polea, o que en el caso de un cuerpo halado por un hilo, la fuerza con que la mano hala el hilo es la misma con la que el hilo hala el cuerpo. Sin embargo, aún no hemos aclarado cuándo podemos asumir tales consideraciones. Abordaremos el estudio de la Dinámica del cuerpo rígido y al igual que en el caso de la partícula, utilizaremos dos métodos de solución: dinámico y energético.

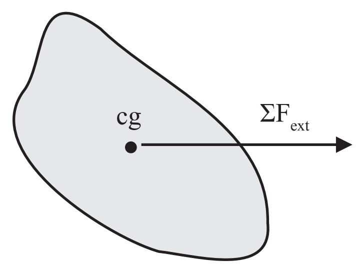
Ecuaciones de movimiento de traslación del cuerpo rígido

Se demuestra que para un cuerpo rígido que se traslada por la acción de una o varias fuerzas, **la ecuación fundamental de la Dinámica es:**

$$\boldsymbol{\Sigma F_{ext} = ma_c}$$

Donde ΣF_{ext} es la resultante de las fuerzas externas aplicadas, m es su masa y a_c es la aceleración de su centro de gravedad. El cuerpo se mueve como si toda su masa estuviese concentrada en su centro de gravedad y la resultante de las fuerzas aplicada ahí. Para el caso de cuerpos que se mueven en el plano, o sea, que las partículas que lo forman se mueven en planos paralelos, las ecuaciones de las componentes serán:

$$\Sigma F_x = ma_{cx}$$
$$\Sigma F_y = ma_{cy}$$



Para un cuerpo rígido que se traslada se tiene que $\Sigma F_{ext} = ma_c$

Ecuaciones de movimiento para la rotación

La **ecuación fundamental de la Dinámica de la rotación** tiene forma análoga al caso traslacional:

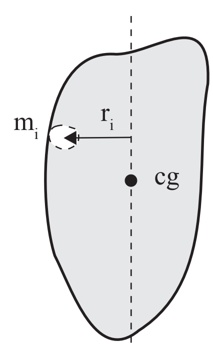
$$\boldsymbol{\Sigma M_0 = I_0}\ \alpha$$

Donde ΣM_0 es la sumatoria de los momentos de las fuerzas aplicadas respecto al centro de gravedad, α es la aceleración angular e I_0 es el **momento de inercia** del cuerpo respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de gravedad. El momento de inercia tiene el mismo significado que la masa en la ecuación de la traslación: la inercia del cuerpo, o sea, la oposición a cambiar su estado de reposo o movimiento de rotación.

Formalmente el **momento de inercia** se define como:

$$I_0 = \Sigma\, m_i\, r_i^2$$

Donde supuestamente se ha dividido el cuerpo en pequeñas secciones de masa m_i, siendo r_i la distancia de cada una al eje de rotación.



El momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad es $I_0 = \Sigma m_i r_i$. Aquí m_i representa la masa de la sección i-ésima en que se ha dividido el cuerpo y r_i es la distancia hasta el eje de rotación.

El subíndice I_0 indica que el eje intercepta al plano de movimiento en el centro de gravedad. De modo que el momento de inercia está referido respecto a un eje. Nótese que no depende únicamente de la masa, sino también de la distribución de la misma respecto al eje de rotación.

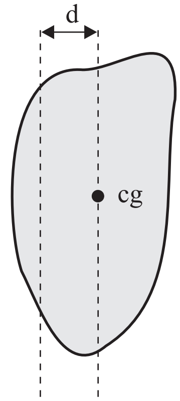
En el caso de que el cuerpo rote respecto a un eje que no pasa por el centro de gravedad, la ecuación sería:

$\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{I}\alpha$

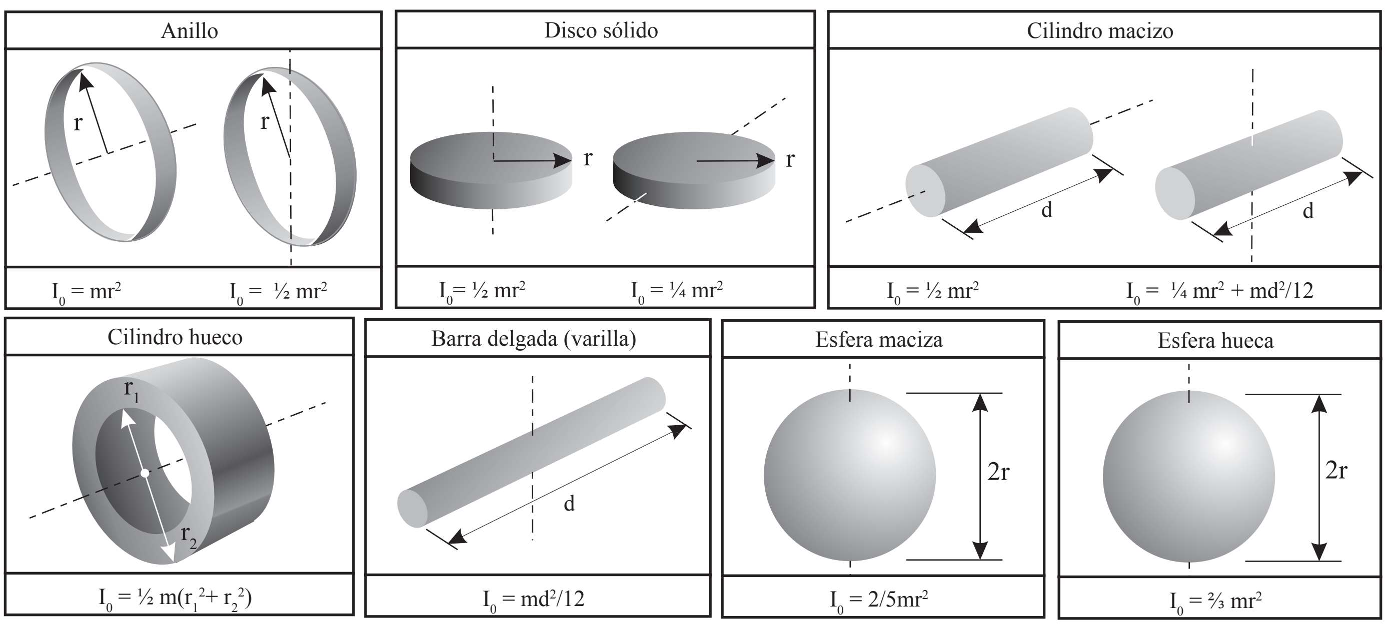
Aquí el momento **M** se calcula respecto al eje de rotación, mientras que I es el momento de inercia respecto a dicho eje. Para hallar el momento de inercia respecto a un eje que no pasa por el centro de gravedad, se utiliza **el teorema de Steiner** o de los ejes paralelos:

$I = I_0 + md^2$

Siendo I el momento de inercia respecto a un eje que es paralelo al correspondiente de I_0, m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los ejes. En la tabla se muestran algunos valores de I_0 para formas conocidas.



El momento de inercia respecto a un eje que no pasa por el cg se halla según: $I = I_0 + md^2$



Momentos de inercia de formas geométricas comunes

El cálculo de los momentos de inercia es complejo. En general, la fórmula de I_0 se transforma, mediante un proceso de límite en:

$I_0 = \int r^2\, dm = \int \rho\, dV$

ρ es la densidad de masa, y la integral se realiza por todo el volumen.

Movimiento general en el plano

Si el cuerpo realiza un movimiento general en el plano, podemos considerarlo como una combinación de traslación y rotación. De manera que las ecuaciones de movimiento quedan:

$\Sigma F_x = ma_{cx}$
$\Sigma F_y = ma_{cy}$
$\Sigma M_0 = I_0\, \alpha$

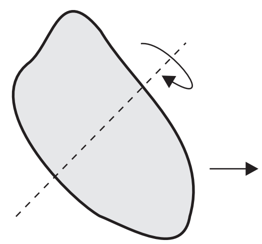
Energía cinética de rotación

Si un cuerpo rota, su **energía cinética de rotación** se define:

$\mathbf{E_c = \frac{1}{2} I_o \omega^2}$

Análogo al caso traslacional. Si además se traslada, la energía cinética total será:

$E_c = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_o\, \omega^2$



Si el cuerpo rota y se traslada al mismo tiempo entonces tiene energía cinetica de rotación y energía cinética de traslación.

Es de señalar que esta expresión es válida, como se dijo, si el cuerpo se traslada y rota. Si solamente se traslada, tendrá exclusivamente energía cinética de traslación; si sólo rota, solamente tendrá energía cinética de rotación. Análogamente, el trabajo debido al momento de una fuerza es:

$\mathbf{W_{AB} = M_0\, (\theta_B - \theta_A)}$

El término $(\theta_B - \theta_A)$ se refiere al desplazamiento angular. Se cumple el principio de trabajo energía:

$\mathbf{W_{AB} = \frac{1}{2} I_0 \omega_B^{\,2} - \frac{1}{2} I_0\, \omega_A^{\,2}}$

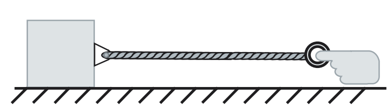
Se satisfacen además las mismas consideraciones respecto a la conservación de la energía mecánica.

Nótese que en el caso de la rodadura pura, en el que el cuerpo se traslada y rota, existe fuerza de fricción. Sin embargo, se conserva la energía mecánica porque el trabajo de la fricción (estática) es cero, ya que no hay deslizamiento.

Es importante destacar que si el cuerpo no rota respecto a su centro de gravedad, en la expresión de energía de rotación se sustituye I_0 por I, que es el momento de inercia respecto al eje en cuestión.

Problemas resueltos

1) Se hala un bloque con un hilo. ¿Bajo qué condiciones la fuerza que hala el hilo es igual a la que ejerce el hilo sobre el bloque?



Problema resuelto 1.

Solución:

Es común en los problemas de Mecánica asumir que se desprecia la masa de un hilo, y que esta consideración permite afirmar que las fuerzas se trasmiten. Sin embargo, no siempre se tiene claro por qué esto es así. Trataremos de explicarlo con este ejemplo.

Como que el hilo está sujeto a tracción por ambos extremos podremos considerarlo como un cuerpo rígido. Veamos las fuerzas que sobre él actúan. Para ello estudiemos los pares de fuerza de acción y reacción que se forman. Por un lado se tiene que la fuerza de la mano sobre el hilo es igual a la fuerza del hilo sobre la mano. O sea:

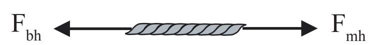
$F_{mh} = F_{hm}$

Por otro lado, la fuerza del bloque sobre el hilo es igual a la fuerza del hilo sobre el bloque:

$F_{bh} = F_{hb}$

La figura muestra el diagrama de cuerpo libre del hilo. Entonces, la ecuación de movimiento correspondiente es:

$F_{mh} - F_{bh} = ma$



Fuerzas que actúan sobre el hilo.

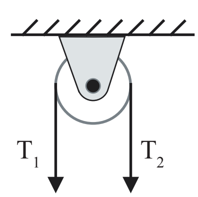
Por lo que en general se cumple que $F_{mh} \neq F_{bh}$, o sea, la fuerza que ejerce la mano sobre el hilo no es igual a la que ejerce el bloque sobre el hilo. Pero esta última sí es igual a la que ejerce el hilo sobre el bloque. De manera que la ecuación anterior puede escribirse como:

$F_{mh} - F_{hb} = ma$

Por tanto, sólo si la masa del hilo es despreciable (m = 0) o se está en el caso estático (a = 0) resulta válido decir que la fuerza que la mano ejerce sobre el hilo es igual a la que el hilo ejerce sobre el bloque.

Es conveniente puntualizar que la condición de que el hilo sea inextensible, también de uso común, permite afirmar que la velocidad y la aceleración de los puntos conectados al hilo es la misma.

2) Una cuerda envuelve a una polea. ¿Bajo cuáles condiciones podemos afirmar que la tensión se trasmite de un lado a otro de la polea?



Problema resuelto 2.

Solución:

Sea una polea sometida a tensiones a cada lado por parte de un hilo, que suponemos de masa despreciable. Planteamos la ecuación de rotación para la polea, calculando los momentos respecto a su centro:

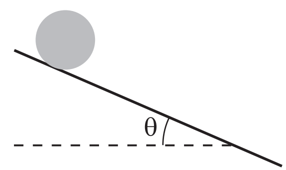
$\Sigma M_0 = I_0 \alpha$

Puesto que la polea es un disco, el momento de inercia es $I_0 = ½ mr^2$. Si a es la aceleración un punto exterior de la polea, entonces $\alpha = a/r$. Por otra parte, la suma de los momentos es $T_1R - T_2R$, por lo que la ecuación queda:

$T_1 r - T_2 r = ½ \, mr^2 \, a/r$
$T_1 - T_2 = ½ \, ma$

De donde vemos que para que las tensiones sean iguales a ambos lados de la polea, como se asume usualmente, la condición necesaria es que la masa de la polea sea despreciable, de lo contrario las tensiones son diferentes.

3) Un cilindro rueda con rodadura pura por un plano inclinado ¿Cuál será su velocidad al llegar a la base respecto a otro que resbala?



Problema resuelto 3.

Solución:
Para un cilindro que resbala, la velocidad que alcanza al descender una altura h es $v = \sqrt{2gh}$
Lo resolveremos primero por el método dinámico. Realizamos el diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones quedan:
$F_x = mgsen\theta - f_r = ma_x$
$\Sigma F_y = N - mgcos\theta = 0$
$\Sigma M_0 = - f_r \, r = I_0 \, \alpha$

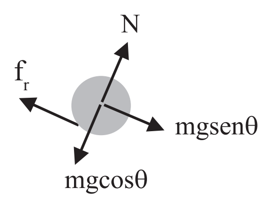
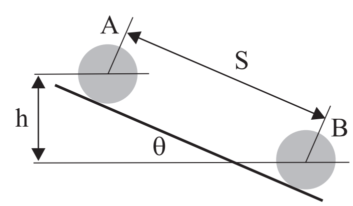


Diagrama de fuerzas.

Se ha colocado, como es usual, un sistema de ejes coordenados x-y de modo que el eje x es colineal a la pendiente del plano inclinado, y así quedan definidas las direcciones positivas y negativas. Para la ecuación de la rotación el signo del momento se ha tomado siguiendo la regla de la mano derecha. Esta ecuación puede reescribirse como:
$-f_r \, r = ½ \, mr^2 \, (- a/r)$

Donde hemos introducido la expresión del momento de inercia de un cilindro y la relación entre α y la aceleración lineal a. El signo menos se debe a que α y a tiene signos diferentes: el cilindro rueda de modo que α está en sentido negativo pero se traslada de modo que a está en sentido positivo. De esta ecuación se obtiene que:
$f_r = ½ma_x$

Sustituyendo en la primera ecuación, se halla que:
$a_x = 2/3 \, gsen\theta$



De acuerdo al gráfico se tiene que h = S senθ donde h es la altura que desciende el cilindro. Nótese que se ha tomado como punto de referencia para indicar la altura del cilindro su centro de gravedad.

Y de la ecuación cinemática $v^2 = 2aS$, se llega a que:
$v = \sqrt{4/3gh}$.

Se observa que el cilindro que resbala llega con mayor velocidad que el que rueda.
Resolvamos el problema por el método energético. Si el punto superior es A y el de la base es B, tenemos que:
$E_A = mgh$
$E_B = ½ \, mv^2 + ½ \, I_0 \omega^2$

La energía mecánica se conserva, por lo que igualamos E_A y E_B. Posteriormente sustituimos I_0 por el valor correspondiente a un cilindro y como se trata de una rodadura pura, es válida la inclusión de $\omega = v/r$. Así, se llega al mismo resultado que por el método dinámico.

Si en este problema utilizamos el concepto de eje instantáneo de rotación, situado en el punto de apoyo, es obvio que quiere decir que el cuerpo lo que hace es realizar una rotación alrededor de dicho eje. Por tanto, la única energía cinética que tiene es rotacional, $\frac{1}{2} I\omega^2$. La cuestión es que I es el momento de inercia respecto al punto de apoyo. Para encontrarlo aplicamos el teorema de ejes paralelos:

$$I = I_0 + md^2 = I_0 + mr^2$$

Sustituyendo, se tiene:

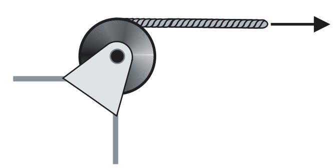
$$E_c = \frac{1}{2}(I_0 + mR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}m(R^2\omega^2) = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Se demuestra la equivalencia de las formas de enfocar un problema general en el plano: o la combinación de traslación y rotación, o consideralo como una rotación pura alrededor del eje instantáneo de rotación.

Problemas propuestos

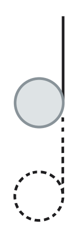
Método dinámico

1) Un cilindro puede rotar alrededor de su eje central sin fricción, y tiene enrollada una cuerda con la que se tira con una fuerza constante de 10N. Tiene un radio de 0,5m y una masa de 20kg. Halle la velocidad angular que adquiere al cabo de 10s.



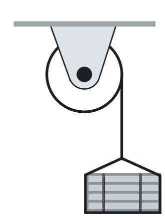
Problema 1.

2) Un disco (yoyo) parte del reposo. Si el hilo se desenrolla verticalmente, halle la aceleración con la que cae el yoyo. Compare con el caso de caída libre.



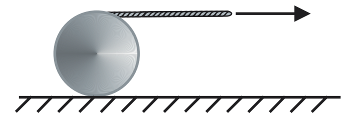
Problema 2.

3) Un disco de radio R y masa M puede girar libremente y tiene enrollada una cuerda ligera e inextensible de la que cuelga un bloque de masa m. Encuentre la aceleración lineal del bloque y compare con el caso de caída libre.



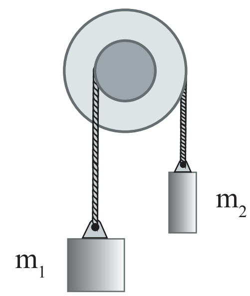
Problema 3.

4) Un cilindro sobre un plano es tirado por un hilo enrollado en dirección horizontal con una fuerza F = 60N. Si el cilindro tiene una masa de 10 kg, un radio de 20cm y rueda sin deslizar, calcule el tiempo que emplea en recorrer 5m si parte del reposo.



Problema 4.

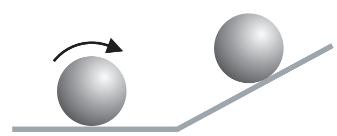
5) Calcule la aceleración angular del disco, capaz de girar sin fricción sobre su eje, sabiendo que m_1 = 10kg, m_2 = 5kg, la masa del disco es M = 20kg y los radios R = 0,4m, r = 0,1m.



Problema 5.

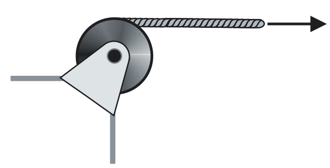
Método energético

6) Una esfera maciza rueda sin deslizar por una superficie horizontal con velocidad v. Si en su recorrido encuentra un plano inclinado, halle la altura que alcanzará su centro de gravedad.



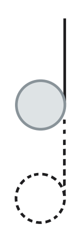
Problema 6.

7) Un cilindro puede rotar alrededor de su eje central sin fricción, y tiene enrollada una cuerda con la que se tira con una fuerza constante de 10N. Tiene un radio de 0,5m y una masa de 20kg. Halle la velocidad angular que adquiere al cabo de 10s.



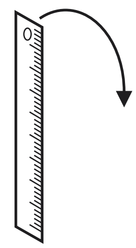
Problema 7.

8) Un yoyo parte del reposo. Si el hilo se desenrolla verticalmente, halle la aceleración con la que cae.



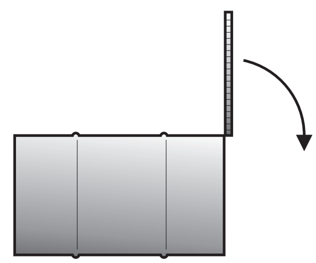
Problema 8.

9) Una regla de 1m se sostiene verticalmente con un extremo en el piso y se deja caer. Encuentre la velocidad del otro extremo cuando choca contra el piso, suponiendo que el extremo apoyado no resbala. Considere que para una varilla de longitud L, el momento de inercia es: $I_0 = 1/12mL^2$.



Problema 9.

10) Una tapa de un tanque, que está acostado sobre el piso, de 40cm de radio y 1cm de grosor cae desde la vertical. Halle la velocidad lineal que alcanza el extremo libre.



Problema 10.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

I Estática de la partícula

1) La tensión será mayor en el tramo superior.
2) La tensión en el cable es 2816N y la resultante es 5464N
3) La longitud del cable será 1,2 veces la longitud de la viga.
4) La tensión en el cable A será de 394N y forma un ángulo de 31,3° con la vertical.
5) Las componentes de la fuerza son: F_X = 2340N y F_Y = 850N.
6) Las componentes de la tensión son: T_X = 234N y T_Y = 598N.
7) Las fuerzas sobre la caja son de 50N (lado derecho) y 86N.
8) La fuerza horizontal necesaria es: $F = Pd / \sqrt{d^2 + h^2}$
9) La tensión será: $T = P / 2\sqrt{1 - L^2/4d^2}$
10) Las tensiones son de 158,5N en AC y 120,5N en CB.

II Estática del cuerpo rígido

1) La fuerza es perpendicular al eje de la palanca y el momento tiene un valor de 37,5Nm.
2) La tensión es de 308N.
3) La fuerza de contacto es 107,5kN.
4) La tensión será de 4090N.
6) a) El momento respecto a B es M_B = 88Nm entrando al plano del papel. b) La fuerza horizontal F = 391N dirigida hacia la izquierda. c) La fuerza mínima F = 276N formando 45° con la horizontal.
7) El momento respecto al punto A es M_A = 4,6Nm entrando al plano del papel; y respecto al punto C es M_C = 4,2Nm saliendo.
8) El momento será de 211Nm.
10) El momento respecto al eje es 6Nm.

III Sistemas de fuerzas

1) Si la distancia entre las hélices es 3m y 40m entre los remolcadores, F = 22,5kN.
2) Asumiendo que F se aplica al extremo del mango, x = 47cm
3) a) Las fuerzas son horizontales de 2000N b) Las fuerzas son de 1600N y forman 36,8° con la horizontal.
4) La distancia es de 7,5cm.
5) a) El sistema fuerza-par en B consta de una fuerza de 50N que forma 30° con la vertical y un momento de par de 4,3Nm en sentido horario b) Las fuerzas tendrían un valor de 53,7N.

6) El sistema fuerza-par en A consta de una fuerza de 400N que forma 30° con la vertical y un par de momento M_p = 63Nm en sentido horario.
7) La tubería tiende a desenroscarse.
8) La fuerza resultante es 265,5N y forma 42° con la horizontal.
9) La fuerza equivalente será de 10N hacia abajo y está situada a 1,8m a la derecha de A.
10) La fuerza de 30N se aplica en un punto a 0,32m del extremo.

IV Cuerpo rígido en equilibrio

1) Habrá que poner el apoyo a una distancia de la caja igual a 1/3 de la longitud de la palanca.
2) La tensión en el cable es P/2.
3) La distancia es 2,67m.
4) La fuerza P = 500N y la reacción en C es de 1300N y forma un ángulo de 22,6° con la horizontal hacia la derecha y arriba.
5) La tensión en el cable es de 28,9kN y la reacción en el pivote A es de 31,8kN formando 31,3° con la horizontal hacia arriba y la derecha.
6) La distancia mínima entre los dos tornillos es 10cm.
7) La fuerza de tracción será de 1500N y la reacción en A de 1383,5N formando un ángulo de 68,8° con la horizontal hacia arriba y la derecha.
8) La longitud de la varilla es de 0,8m
9) La distancia máxima entre la pared y el borde del tanque ha de ser 0,77m.

V Centro de gravedad

2) El ancho de la estructura es 0,99m
4) La tendencia a rotar es en sentido antihorario.
5) La pieza está sometida a un par de momento 1072Nm y si se cuelga por el extremo superior izquierdo el brazo más corto forma un ángulo de 31,3° con la vertical.
6) Para que la pieza quede en la posición mostrada debe colgarse por un punto situado sobre la línea vertical que pasa a 1,61cm del centro de los semicírculos, por encima del eje horizontal.
7) El centro de gravedad se ha desplazado en el eje vertical 0,038m hacia abajo respecto al centro del círculo.
8) El valor es L = 0,24m
9) las coordenadas del centro de gravedad, respecto a la esfera de la izquierda, son: X = 0,15m y Y =0,13m
10) se logrará una posición de equilibrio inestable colocando al sistema de modo que la varilla forme 9,7° con la vertical hacia la izquierda.

VI Rozamiento

1) El coeficiente de fricción $\mu = 0{,}18$. De acuerdo a la tabla de la valores de μ, el piso debe estar hecho de metal.
2) El ángulo α cumple la condición de que $\cos \alpha = r_1/r_2$.
3) La fuerza W debe aplicarse como mínimo a la distancia de 0,6m del eje.
4) a) F = 4160N b) F = 684N
5) El coeficiente de fricción será de 0,35
6) El hombre podrá avanzar 0,4m.
7) La caja desliza.
8) El guajiro se cae.
9) La fuerza deberá tener un valor de 58N.
10) La fuerza de fricción será de 0,9N.

VII Cinemática de la partícula

1) a) 5m/s b) 11m/s c) 60m
2) Asumiendo la velocidad del auto como 60km/h y que emplea 30m en reducir su velocidad de 100km/h hasta 0, debe aplicar los frenos a 11,3m del obstáculo.
3) Asumiendo la velocidad del tren como 60km/h, la del carro como 100km/h y la distancia Habana-Matanzas de 100km, el tren se vuelve inalcanzable para el carro a los 39 minutos y 36 segundos, estando a 60km de Matanzas.
4) a) El móvil B alcanza al A a los 15s después de salir, a 300m b) $v_B = 22.5$m/s
5) a) $a_n = 2{,}08$m/s b) 63,3km/h
6) La aceleración total será de 3,6m/s.
7) La bicicleta avanza $4000\pi r$ metros; asumiendo la velocidad angular del cilindro como 2000RPM, siendo r su radio. Si r = 0,02m, entonces avanza 125,6m.
8) Asumiendo un cassette de 60 minutos, los radios de los carretes lleno y vacío como 0,023m y 0,011m, la longitud de la cinta es 90m y la aceleración angular de $\alpha = 0{,}0013$rad/s.
9) La velocidad angular de trabajo será de 100rad/s y la velocidad de la bala de 320m/s.
10) El tiovivo da 4 vueltas.

VIII Cinemática del cuerpo rígido

1) a) 57,2 vueltas b) 716,2 vueltas.
2) La aceleración angular es $\alpha = 2{,}2\text{rad/s}^2$ y el tiempo que emplea en detenerse es de 54,5s.
3) El bloque desliza para $\omega = 7$rad/s, al cabo de 1,17s.

4) La velocidad lineal será de 1,92m/s.

5) La aceleración angular del cilindro A es $\alpha = 0,63 rad/s^2$ y el tiempo es 15,7s.

6) La aceleración angular de la rueda es $24 rad/s^2$ y en el tiempo señalado realiza 30,5 vueltas.

7) La velocidad angular de la barra es 1,25rad/s y la velocidad lineal del collar A es de 25cm/s.

8) Las velocidades de los puntos A y B son: $v_A = 0,045 m/s$ y $v_B = 0,096 m/s$.

9) La velocidad angular de la barra es 4rad/s. La velocidad del punto B es 41,2cm/s en sentido horizontal. La velocidad en el punto D es 85,6cm/s y forma 16,2º con la horizontal.

10) La velocidad angular es 6,66rad/s y $v_D = 2 m/s$ hacia la izquierda.

IX Dinámica de la partícula

1) El ascensor cae con una aceleración $a = 1 m/s^2$ y la pesa romana mantiene su valor.

2) a) La tensión es 2400N b) $m_B = 342,8 kg$.

3) La velocidad máxima es 5,4m/s y el ángulo es 60°.

4) El coeficiente de restitución será k = 3960N/m

5) La velocidad angular necesaria será de 3,1rad/s

6) La longitud necesaria es 67,2m.

7) El valor de la fuerza es F = 2,9N.

8) La máxima velocidad que alcanza es 0,28m/s.

9) La fuerza de fricción necesaria es de 308N.

10) La altura mínima es de 5r/2, siendo r el radio del rizo.

X Dinámica del cuerpo rígido

1) El cilindro alcanzará una velocidad angular de 20rad/s

2) El yoyo cae con una aceleración de 2/3g.

3) El bloque cae con una aceleración de 2mg/(M + 2m), que es menor que si cayera en caída libre

4) El cilindro emplea 1,1s para recorrer la distancia.

5) La aceleración angular es $4 rad/s^2$ moviéndose en sentido horario.

6) El centro de gravedad subirá una altura igual a $0,7v^2/g$.

7) La velocidad angular que alcanza el cilindro es de 20rad/s.

8) El yoyo cae con una aceleración de 2/3g.

9) La velocidad del extremo es de 5,4m/s.

10) La velocidad del extremo de la tapa es 7,1m/s.

ANEXOS

Como complemento de este material presentamos a continuación varios documentos que pueden ser de utilidad a los estudiantes.

- **Pasos para la resolución de problemas**

Dada la importancia que reviste la resolución de problemas para los diseñadores, y siendo de hecho uno de los objetivos del curso de Mecánica, es conveniente conocer estos pasos, suficientemente generales como para ser aplicados a diferentes clases de problemas.

- **Sistema de conocimientos**

Se exponen los componentes del sistema de conocimientos de la asignatura, es decir, los conceptos, modelos, leyes y principios que se tratan. Esta información es muy útil para la preparación individual de los estudiantes.

- **Bibliografía general**

Aunque el texto fundamental del curso es el presente material, se relacionan una serie de libros que complementan los contenidos abordados en clases. Para mayor facilidad se brinda la localización en las instituciones correspondientes.

PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolver problemas es una habilidad importante para el diseñador industrial. Contribuir al desarrollo de la misma es uno de los objetivos fundamentales de la asignatura. A continuación, brindamos algunas ideas para enfrentar una situación problémica.

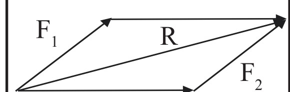
1. **Comprensión del problema**. Se trata de entender el problema, comprender por qué funciona y por qué es un problema. Para ello se pueden ayudar de un gráfico o de un esquema. Hay que leer detenidamente el enunciado, si es factible, elaborar algunas hipótesis sobre posibles resultados. El planteamiento de hipótesis ayuda a la formulación de una estrategia de solución.
2. **Elaborar una estrategia de solución**. Para ello hay que tener en cuenta los datos disponibles, tanto los que dan de forma explícita o los que podemos asumir del enunciado. Por ejemplo, si hablan de un cuerpo ligero asumimos que su masa es despreciable y si una superficie es lisa, que no hay fricción. Relacionar todas las consideraciones bajo las cuales vamos a resolver el problema y un resumen de las fórmulas y relaciones matemáticas que tienen que ver con el tema. Con todo esto, trazar el camino a seguir para la resolución del problema.
3. **Solución del problema**. Se refiere a resolver el problema propiamente, resolver las ecuaciones, despejar y encontrar las incógnitas. Hay que expresar cada resultado parcial y las unidades de las magnitudes. Un consejo sano es resolver primero el problema de forma literal, o sea, sin sustituir en las ecuaciones los datos numéricos. Esta sustitución es mejor hacerla al final, pues a veces hay magnitudes que se cancelan en la fórmula definitiva y finalmente no son necesarias.
4. **Comprobación de los resultados**. Aquí incluye tanto la Física como el sentido común. Hay que comprobar si el resultado corresponde a la hipótesis inicial (si la había), si las unidades obtenidas son las correctas y si los valores son lógicos. Por ejemplo: un auto que se mueve aceleradamente se sabe por hipótesis que su velocidad final es mayor que la inicial, de no ser así hay un error. Si la velocidad nos da en horas sobre kilómetros evidentemente algo está mal y si da que el auto se mueve a 10000 km por hora ¡a correr! Es imperdonable dar una respuesta que a todas luces es un disparate.

A lo largo de estos 4 pasos hay una cuestión importante: **Hay que explicar y fundamentar cada paso**. En los exámenes aparecen errores que si se hubiera hecho esto no se hubiesen cometido. Además, como quiera que sea deben responder como estudiantes universitarios que son, o sea, utilizar adecuadamente el lenguaje y comunicarse de forma eficiente.

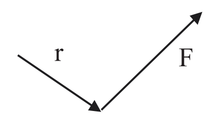
Finalmente, es bueno reflexionar sobre esta frase de Einstein: “Ningún científico piensa con fórmulas. Antes de que el físico comience a calcular, él debe tener en su cerebro el curso de los razonamientos. Estos últimos, en la mayoría de los casos, pueden ser expuestos en palabras sencillas. Los cálculos y las fórmulas constituyen el paso siguiente”

SISTEMA DE CONOCIMIENTOS

I ESTÁTICA DE PARTÍCULA

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
	Partícula		Fuerza	N	
		Línea de acción Suma de fuerzas			
Regla del paralelo gramo					 $\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$
		Fuerzas concurrentes Fuerzas coplanares			
Ley de los cosenos Ley de los senos					$a^2=b^2 + c^2 -2bc\cos\theta$ $a/\mathrm{sen}\alpha = b/\mathrm{sen}\beta = c/\mathrm{sen}\gamma$
		Componentes rectangulares			$\mathbf{F} = \mathbf{F_x} + \mathbf{F_y}$ $F_x = F\cos\theta$ $F_y = F\,\mathrm{sen}\theta$ $\mathrm{Tan}\theta = F_y/F_x$
	Diagrama de Cuerpo aislado				$F^2 = F_x^{\,2} + F_y^{\,2}$
		Vector unitario			$\mathbf{F_x} = F_x\,\mathbf{i}$ $\mathbf{F_y} = F_y\,\mathbf{j}$
		Fuerza de gravedad			$F_g = mg$
		Suma de fuerzas (componentes rectangulares)			$\mathbf{R} = \mathbf{R_x} + \mathbf{R_y}$ $R_x = \Sigma F_x$ $R_y = \Sigma F_y$
		Equilibrio mecánico Condición de equilibrio			$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$

II ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
Principio de trasmisibilidad	Cuerpo rígido	Fuerza externa Fuerza interna Traslación Rotación vector deslizante Fuerza equivalente		Nm	
			Momento de una fuerza respecto a un punto		$M_o = Fd$  $\mathbf{M_0} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ $M_o = rF\text{sen}\theta$
Teorema de Varignon			Momento de las componentes de una fuerza		$\mathbf{M_0 = M_{Fx} + M_{Fy}}$ $M_{Fx} = F_x\, y$ $M_{Fy} = F_y\, x$
			Momento de una fuerza respecto a un eje		$M_{0z} = F_P\, d$

III SISTEMA DE FUERZAS

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
		Vector libre Pares equivalentes	Par de fuerzas	Nm	$M_{par} = Fd$
		Sistema de fuerzas Equivalentes			$\Sigma F = \Sigma F'$ $\Sigma M_o = \Sigma M_o'$
		Sistema fuerza- par			

IV CUERPO RÍGIDO EN EQUILIBRIO

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
Ley de acción y reacción (3era. Ley de Newton)	Diagrama de cuerpo libre	Ligaduras Reacciones Condiciones de equilibrio			$\mathbf{R} = 0$ $\mathbf{M_0} = 0$ Para el plano: $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma M_C = 0$

V CENTRO DE GRAVEDAD

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
		Centro de gravedad			$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta F_{gn}/F_g$ $\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta F_{gn}/F_g$
		Centro de masa			$\mathbf{X} = \Sigma x_n \Delta m_n/M$ $\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta m_n/M$
		Centroide			$\mathbf{X} = \Sigma\, x_n \Delta A_n/A$ $\mathbf{Y} = \Sigma\, y_n \Delta A_n/A$
		Método por simetría Método por descomposición			

VI ROZAMIENTO

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
		Rozamiento húmedo Rozamiento seco Fricción estática Fricción dinámica	Coeficiente de fricción		$F_s = \mu_s\, N$ $F_k = \mu_k\, N$

VII CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
	Partícula		Posición	m	
			Velocidad	m/s	$v = dx/dt$
			Aceleración	m/s^2	$a = dv/dt$
		Movimiento rectilíneo			
		Movimiento rectilíneo uniforme			$x = vt + x_0$
		Movimiento rectilíneo uniformemente variado			$v = at + v_0$ $x = ½at^2 + v_0t + x_0$ $v^2 = 2a(x- x_0) + v_0^2$
		Movimiento circular uniforme	Desplazamiento angular		θ
			Velocidad angular		$\omega = d\theta/dt$ $\omega = v/r$ $\theta = \omega t + \theta_0$
			Aceleración tangencial		$a_t = ds/dt$
			Aceleración normal		$a_n = v^2/R$ $a_n = \omega^2R$
			Aceleración angular		$\alpha = a_t/R$
		Movimiento circular uniformemente variado			$\theta = ½ \alpha t^2 + \omega_0t + \theta_0$ $\omega = \alpha t + \omega_0$ $\omega^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) + \omega_0^2$

VIII CINEMÁTICA DEL CUERPO

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
	Cuerpo rígido	Traslación del cuerpo rígido Rotación alrededor de un eje fijo Movimiento general en el plano Centro instantáneo de rotación Rodadura pura		Nm	

IX DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
Segunda Ley de Newton	Partícula				$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$
Ecuaciones de movimiento					$\Sigma F_x = ma_x$ $\Sigma F_y = ma_y$
			Fuerza centrípeta		$F_c = m\, a_n$
			Trabajo de una fuerza	J	$W = FS\cos\alpha$
			Energía cinética	J	$E_c = \frac{1}{2} mv^2$
Teorema del trabajo y la energía					$W = \Delta E_c$
		Fuerza conservativa	Energía potencial	J	$W_{conserv} = - \Delta E_p$
			Energía potencial gravitatoria		$E_{pg} = mgh$
			Energía potencial elástica		$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$
Conservación de la energía mecánica					$W_{fuerzas\ no\ conserv} = \Delta E$

X DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Leyes	Modelos	Conceptos	Magnitudes	SI	Relaciones
Ecuación fundamental de la traslación Ecuaciones de la traslación Ecuación fundamental de la rotación Teorema de los ejes paralelos	Cuerpo rígido	Método dinámico Traslación del cuerpo rígido Rotación del cuerpo rígido	 Momento de inercia	 kgm^2	$\Sigma F_{ext} = ma_c$ $\Sigma F_x = ma_{cx}$ $\Sigma F_y = ma_{cy}$ $\Sigma M_0 = I_0\ \alpha$ $I_0 = \Sigma\ m_i\ r_i^2$ $I = I_0 + md^2$
		Método energético	Energía cinética de rotación	J	$E_c = ½\ I_o\omega^2$
			Trabajo debido al momento de una fuerza	J	$W = M_0\ \Delta\theta$

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

- Beer F. P y E. Russell, Mecánica vectorial para ingenieros, Edición Revolucionaria, La Habana, 1988 (dos tomos).
- Meriam J.L. Mecánica, Edición Revolucionaria, La Habana, 1967
- Movnin M. S. y otros, Fundamentos de Mecánica Técnica, Editorial Mir, Moscú, 1985.
- Nikitin E. M., Mecánica teórica, Editorial Mir, Moscú, 1980
- Portuondo R., Pérez M., Mecánica, Pueblo y Educación, La Habana, 1986
- Targ I. Breve curso de Mecánica Teórica, Editorial Mir, Moscú, 1970.
- Sokolov F.,Mecánica Industrial, Editorial Mir, Moscú, 1986.