LA PAPIROFLEXIA COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN DE PERSONAS ADULTAS.

Eduard Mor i Edo.

Centre Públic de Formació de Persones Adultes Historidor Viciana, Borriana.

edmoredo@hotmail.com

RESUMEN

En la ponencia se presenta una experiencia didáctica llevada a cabo por el autor con alumnos adultos, a lo largo de varios cursos académicos. Se pretende trabajar determinados aspectos de la geometría euclidiana mediante técnicas de papiroflexia.Se proponen modelos para la construcción de los cinco sólidos platónicos, mediante la unión de módulos.

Se combina la descripción del desarrollo de la experiencia con una breve reflexión teórica a cerca de las posibilidades que ofrece el origami como instrumento de construcción de estructuras complejas.

Palabras clave: Matemáticas, papiroflexia matemática, sólidos platónicos, relación de Euler.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la presente comunicación es dar a conocer una experiencia didáctica llevada a cabo durante los últimos años por el autor con alumnos del segundo ciclo de la formación básica de personas adultas, desde el ámbito de conocimiento de ciencias, en concreto en el módulo de Procesos e Instrumentos Matemáticos.

La utilidad de la papiroflexia como recurso a medio camino entre lo recreativo y lo pedagógico está suficientemente justificada en la bibliografía existente. Ver, a título de ejemplo, los trabajos de Antonio M. Oller de la Universiad de Zaragoza[1] o los de Helena Verrill, profesora de matemáticas en la Louisiana State University.

Royo Prieto[2], por su parte ha puesto de manifiesto la equivalencia entre el mapa de pliegues de la figura y el grafo matemático, encontrando un interesante paralelismo entre la reglas de plegado y las de construcción de figuras usando únicamente regla y compás.

En la misma línea Covadonga Blanco y Teresa Otero, de la universidad de A Coruña, defienden la utilización de las técnicas de origami por la potencia que aportan a la visualización de las propiedades de los poliedros y a la experimentación en didáctica de las matemáticas.

Ello no obstante, constatamos en la práctica que estos recursos se usan muy raramente como instrumento didáctico, incluso en la enseñanza primaria, a pesar de que, en esta etapa, el uso de técnicas manipulativas está más generalizado. Por lo que hace a la secundaria conocemos alguna experiencia interesante como las llevadas a cabo por Belen Garrido[3] en Valencia, y nos atrevemos a proponer su uso en la formación de adultos, contexto que consideramos especialmente idóneo por las razones que se exponen a lo largo de este trabajo.

La papiroflexia u *origami* es un arte ancestral de origen oriental (no acaba de estar claro si son los japoneses o los chinos quienes lo inventan, en cualquier

[1] Oller, Antonio M., *Matemáticas y origami*, Zaragoza 2006.
[2] Royo Prieto, J.I.(2010) *Matemáticas y papiroflexia*,Revista Sigma, Nº 21.
[3] Ver página Web: http://www.uv.es/mabegaga/

caso vinculado a la invención del papel) y que forma parte de la cultura popular de esta parte del mundo, donde es ampliamente practicado. Por el contrario en las diferentes culturas occidentales tiene una presencia puramente testimonial, si bien está documentada su introducción en Europa, por los árabes, en la baja edad media.

La práctica del *origami* supone la aceptación de unas fuertes condiciones: no se admiten cortes ni el pegado de piezas diferentes; estrictamente se trata de doblar una única pieza de papel. En el llamado *origami* modular, sí se permite utilizar piezas distintas pero se mantiene la restricción de no pegar. Los diferentes módulos se han de mantener unidos sin necesidad de ningún tipo de cola. Además, la consistencia de las piezas compuestas es un factor de calidad a tener en cuenta.

En los últimos años, se ha desarrollado un potentísimo fundamento teórico del *origami*. Se están sentando las leyes matemáticas que acabarán transformando este arte en ciencia[4] y cuyo alcance queda muy lejos del objeto de estas líneas.

Por lo que hace a la utilización del *origami* en la clase de matemáticas, la propuesta planteada persigue el desarrollo de conceptos matemáticos, pero permite la integración de otras áreas de conocimiento como el arte o las técnicas de expresión gráfica, que, precisamente, están ausentes en el currículo específico de secundaria para adultos.

2.OBJETIVOS

De entrada, los objetivos básicos que se pretende alcancen los alumnos son:

- Conocer los elementos básicos de la geometría del plano y del espacio: punto, recta (pliegue), polígono, poliedro, perpendicularidad, paralelismo….
- Trabajar el concepto de regularidad en los polígonos y en los poliedros.
- Conocer y demostrar intuitivamente la relación de Euler para los poliedros regulares.

[4] Un ejemplo de esto es la obra enciclopédica de D. Mitchell, *Mathematical Origami.*
En la misma línea destacaremos el logro de Huzita-Hatori, que han diseñado un conjunto de axiomas absolutamente análogo a los axiomas de Euclides, pero referidos a la papiroflexia y la demostración del teorema de Haga sobre divisiones de cuadrados en un número dado de partes iguales.

- Tomar conciencia de la imposibilidad de construir otros sólidos platónicos distintos de los conocidos.
- Desarrollar la capacidad para interpretar instrucciones dadas en forma de gráficos, planos y diagramas.
- Apreciar la belleza subyacente en las estructuras geométricas simples.
- Desarrollar la visión espacial asociada a las estructuras geométricas.
- Desarrollar habilidades manuales, especialmente la psicomotricidad fina.
- Estimular el aprecio por la exactitud y precisión requeridas en el plegado de las figuras.
- Estimular la cooperación de los alumnos en la construcción cooperativa de módulos independientes.
- Apreciar la potencia de la construcción a base de módulos reutilizables en estructuras diferentes.

3. LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Pretendemos la construcción de los cinco sólidos platónicos, a saber, el tetraedro, el cubo o exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Reciben el nombre de platónicos, al haber sido descritos por el filósofo griego Platón en su obra *Timeo.* En esta obra no sólo se hace una descripción de las propiedades matemáticas de estos poliedros, sino que se establece su asociación mística con cada uno de los elementos de que estaría formado el universo según la filosofía griega antigua, tierra (cubo), aire (octaedro), agua (icosaedro) y fuego (tetraedro). El dodecaedro se asociará a la quintaesencia, el universo todo, …

Resulta relativamente fácil demostrar que estos cinco poliedros regulares (caras, aristas y ángulos iguales) son los únicos posibles.

Resumimos en la tabla siguiente las propiedades geométricas básicas que deben descubrir los alumnos.

POLIEDRO	VÉRTICES	CARAS	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4 TRIÁNGULOS	6
OCATEDRO	6	8 TRIÁNGULOS	10
EXAEDRO	8	6 CUADRADOS	12
DODECAEDRO	20	12 PENTÁGONOS	30
ICOSAEDRO	12	20 TRIÁNGULOS	30

Recordemos que estos poliedros satisfacen la relación de Euler, que los alumnos deben comprobar:

$$C+V=A+2$$

4.DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA.

4.1. Temporalización

La experiencia se desarrolla a lo largo de un mes, dedicándole un tiempo aproximado de media hora al día en clase, debiendo los alumnos acabar de realizar los módulos por sí mismos, en su casa. Hay que tener en cuenta que el proceso de construcción de los módulos pasa por dos etapas bien diferenciadas, en una primera es imprescindible un grado de concentración alto, dada la dificultad intrínseca del plegado. Superada esta primera fase, se entra en una segunda que es puramente repetitiva, perfectamente compatible con otras actividades. Resulta fundamental realizar el ensamblaje en clase, por la dificultad técnica que comporta y la consiguiente necesidad de autorización del profesor.

4.2. Requisitos

Por lo que hace a los materiales, no se requiere más que papel. En un principio se usa el reciclado por el consumo grande que supone la construcción de los primeros módulos, que se desechan por su insuficiente calidad. Cuando se ha adquirido la suficiente destreza, se usa papel de colores para la construcción de las figuras definitivas.

Por lo que hace al desarrollo de la clase es ideal disponer de pizarra digital, o al menos de proyector, de manera que los alumnos tengan en todo momento visible el esquema. Como se ha dicho, llega un momento en que la figura se construye de manera rutinaria, pero hasta ese momento, han de tener accesibles las instrucciones de plegado.

Queremos resaltar aquí que, también en el tema que nos ocupa, la aparición de la red ha supuesto un antes y un después en la difusión de los materiales y técnicas. Los libros de papiroflexia, escasos, caros y difíciles de obtener han dado paso a una avalancha de materiales audiovisuales disponibles desde cualquier ordenador conectado a Internet.

4.3. Evaluación

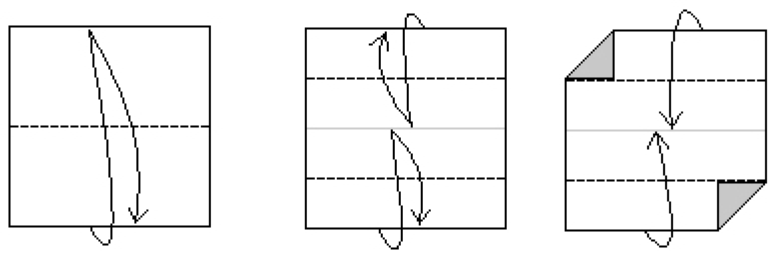
Se evalúa el acabado final de la figura, precisión de plegado, pulcritud y las actitudes demostradas en su realización, así como la iniciativa de los alumnos en la creación de figuras nuevas.

5. CONSTRUCCIÓN DEL CUBO(HEXAEDRO)

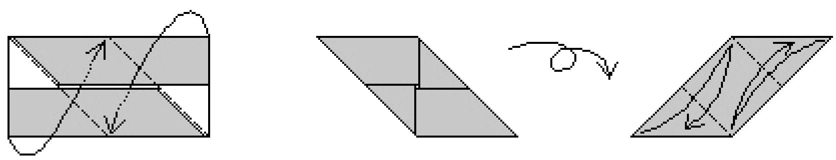
El cubo es una de las figuras más accesibles y hay un gran número de módulos que permiten su construcción. Hemos elegido el Sonobe[5], por ser uno de los más utilizados, y porque permite la construcción de poliedros estrellados muy vistosos.

Se trata, sin duda de uno de los módulos más versátiles, por la cantidad de figuras que se construyen ensamblando este modulo.

A continuación se presenta el diagrama básico:



Plegado del Modulo Sonobe

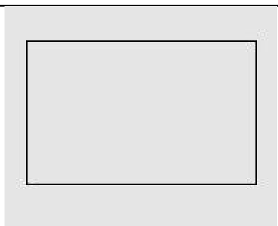
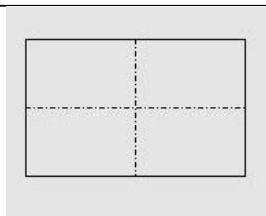
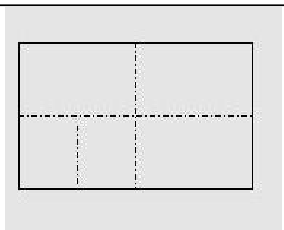
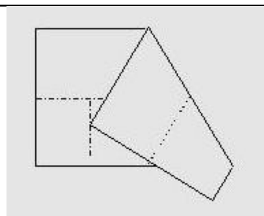
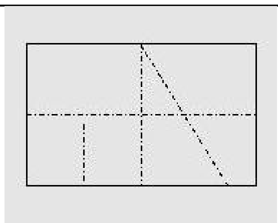
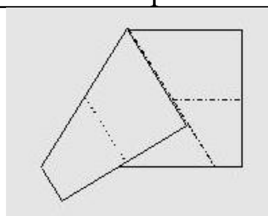
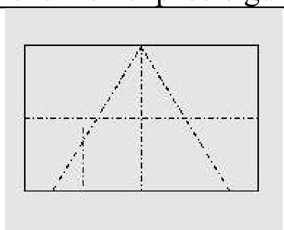
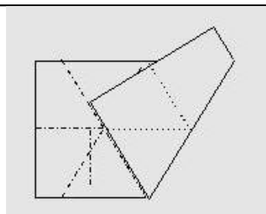


El ensamblaje de 6 de estos módulos permite la construcción de un cubo.

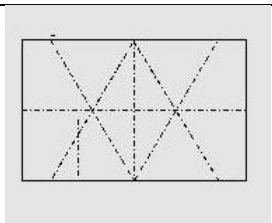
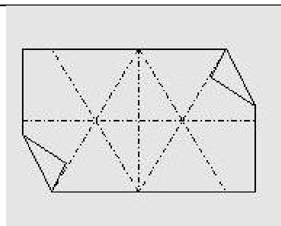
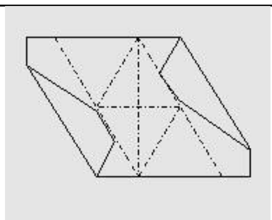
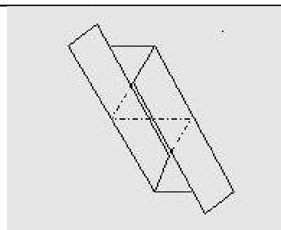
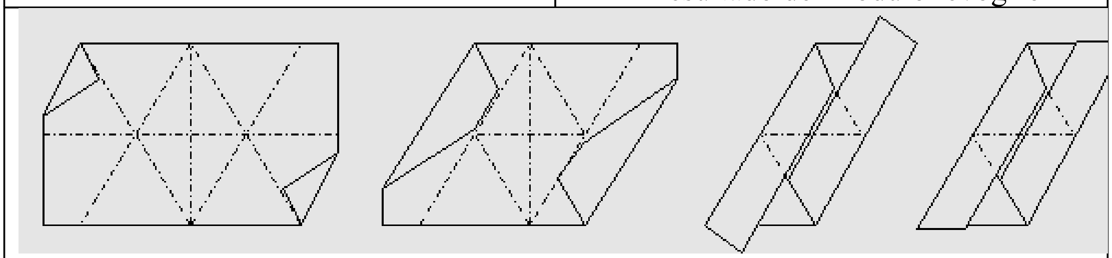
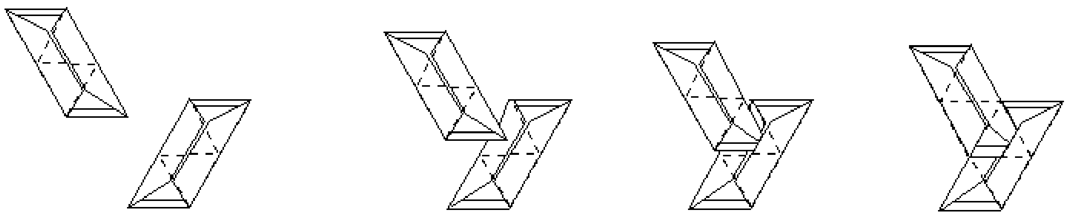
6. TETRAEDRO, OCTAEDRO E ICOSAEDRO

[5] Es uno de los pocos módulos que se conocen con el nombre de su creador, el japonés H. Sonobe.

Se construyen los tres a partir del mismo módulo, creación de Helena Verrill, profesora de matemáticas en la Louisiana State University[6], y denominado módulo triangular.

 El punto de partida es un papel en formato A6	 Doblamos por las mitades y desdoblamos
 Calculamos el punto medio	 Pivotando en el punto medio superior se pliega la esquina hasta el punto medio calculado en el paso anterior.
 Desdoblamos, el pliegue servirá de referencia en el paso siguiente	 Volviendo a pivotar en el punto medio superior
 Desdoblamos una vez más. Va apareciendo un triángulo equilátero	 A partir de ahora hay que repetir los pasos anteriores pivotando sobre el punto medio inferior. Obsérvese la simetría de la figura.

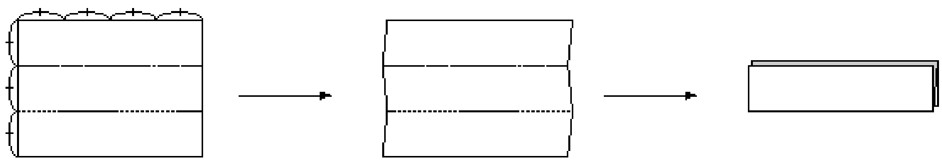
[6] Puede obtenerse una colección extensísima de diagramas y desarrollos matemáticos en https://www.math.lsu.edu/~verrill/origami.

<table>
<tr><td>
Hemos obtenido 3+3 triángulos equiláteros</td><td>
Doblamos como se indica</td></tr>
<tr><td>
Un paso más</td><td>
El resultado del módulo levógiro</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Con los dobleces que se indican se consigue un módulo que es la imagen especular del anterior, es el módulo dextrógiro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Obsérvese cómo se ensamblan dos módulos dextrógiro y levógiro.</td></tr>
</table>

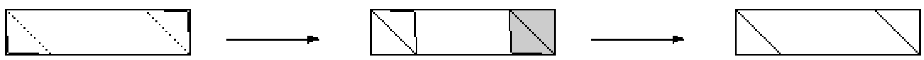
Aquí resulta interesante trabajar el concepto de simetría respecto a un eje, o la obtención de una figura que es la imagen especular de otra dada, ya que el módulo levógiro y el dextrógiro cumplen esta propiedad y la manipulación de objetos en tres dimensiones ayuda a su interiorización.

7. DODECAEDRO

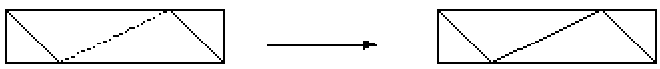
Se construye a partir de un módulo absolutamente simple:



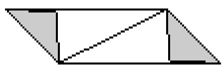
El punto de partida es una hoja de proporciones 3X4



Se pliegan las esquinas, únicamente para calcular los puntos del plegado central



Plegamos en valle el pliegue central y el montaña los laterales



Este es el resultado. Se necesitan 30 módulos idénticos

8. A MODO DE CONCLUSIÓN

La utilización de la papiroflexia como recurso educativo puede constituir un instrumento potente de motivación del alumno. Especialmente las competencias relacionadas con la geometría, la visión espacial y las propiedades del plano y del espacio, pueden trabajarse usando recursos de papel lo que no deja de ser, al menos, una opción original y creativa.

La simplicidad de los materiales empleados, contrasta fuertemente con la sofisticación de los figuras obtenidas, y hace que los alumnos aprecien la potencia y la belleza de la técnica empleada.

La construcción modular permite el desarrollo de nuevas figuras, partiendo de otras conocidas, de manera que el alumno puede investigar por sí mismo el diseño de sus propios cuerpos, quedando de esta manera abierto el tema de estudio.

Una línea de investigación que nos parece fructífera es la conexión de los módulos con las estructuras arquitectónicas, especialmente cúpulas, lo que permite relacionar las matemáticas con el arte y otras ciencias.

9. BIBLIOGRAFIA

BASCETTA, P.(1998) *Origami: Geometria con la carta (I). Quadrato magico*, 52 . Disponible en http://www.origami-cdo.it/articoli/artgeo.htm.

BRILL,D.(2001) *Brilliant origami*. Tokyo:Japan Publications.

DE LA PEÑA HERNÁNDEZ,J.(2001) *Matemáticas y papiroflexia*. Madrid: Asociación Española de Papiroflexia.

DRAY, E., MAMINO S. (2010),*Origami* Disponible en http://digilander.libero.it/modulandia/modelli_dod.htm.

FUSÈ,T. (2000): *Unit origami: Multidimensional transformations*. Tokyo: Japan Publications.

HULL, T. *Origami and geometric constructions*, http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html.

KASAHARA, K., TAKAHAMA, T.(2000). *Papiroflexia "origami" para expertos*. Madrid:EDAF.

MACCHI,P. y SCABURRI, P.(1997) *Nuevos objetos de papiroflexia*. Barcelona: Ed. De Vecchi.

OLLER, Antonio M.,(2006) *Matemáticas y origami*, Zaragoza.Disponible en Internet (http://www.unizar.es/ttm/2005-06/matorittm.pdf)

ROYO PRIETO,J.I.(2010) *Matemáticas y papiroflexia.*Madrid: Revista Sigma, Nº 21.

SIMOS,L., GURKEVITZ,R., ARNSTEIN, B.(1999) *Modular origami polyhedra*. New York:Dover.