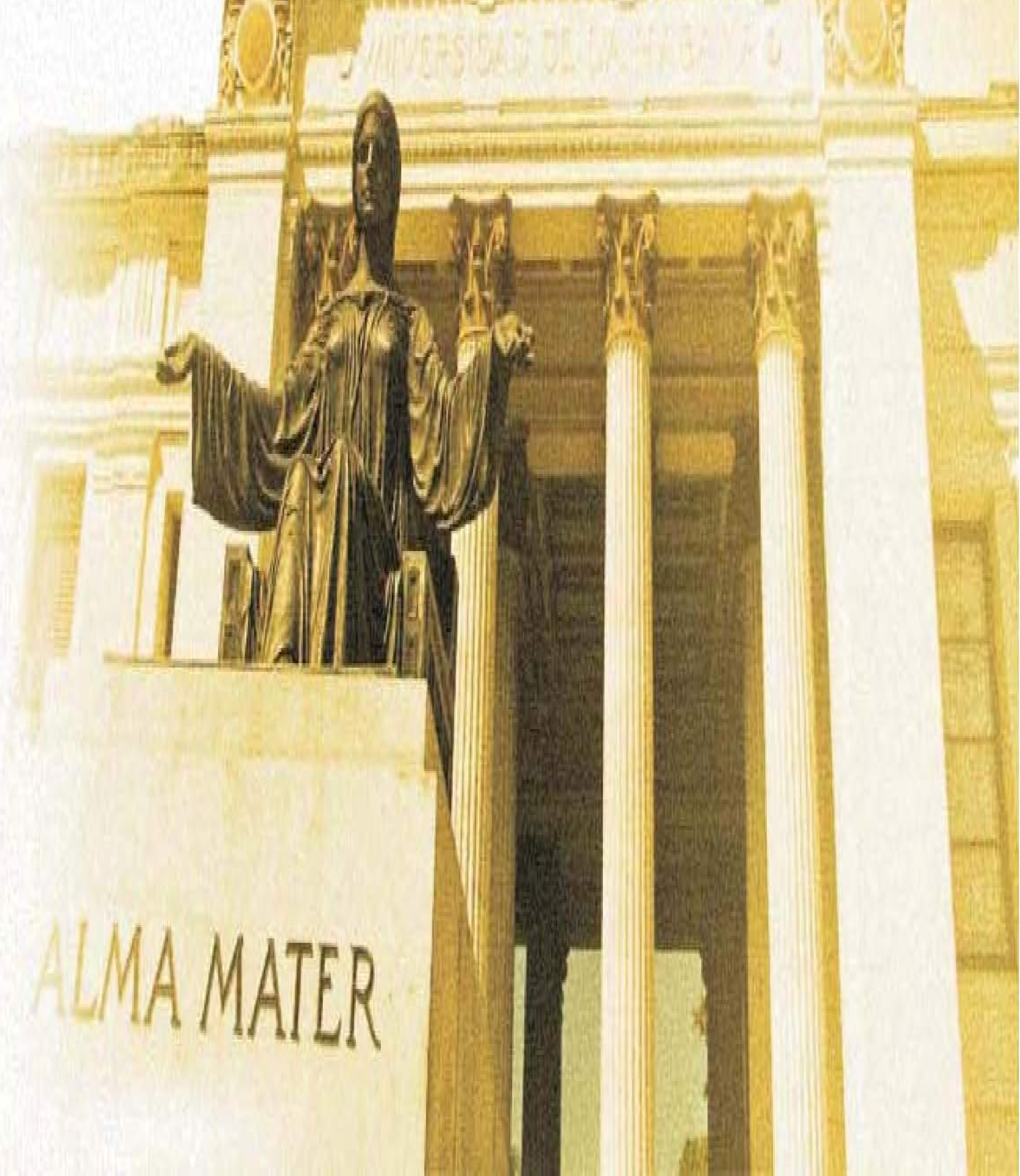
HABLEMOS DE SUBJETIVIDAD E INCERTIDUMBRE EN LA ACTIVIDAD EDUCATIVA

Luis Manuel Alonso Aguila



378-Alo-H

Hablemos de subjetividad e incertidumbre en la actividad educativa / Luis Manuel Alonso Aguila. -- Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6. -- 120 pág.

1. Alonso Aguila, Luis Manuel
2. Lógica Difusa; Ciencias Pedagógicas; Ciencias de la Educación

Edición: Alonso Aguila, Luis Manuel, lmalonso@ind.cujae.edu.cu

Digitalización: Dr. C. Raúl G. Torricella Morales torri@reduniv.edu.cu

Calle 23 entre F y G, No. 564. El Vedado, Ciudad de La Habana, CP 10400, Cuba

e-mail: eduniv@reduniv.edu.cu

Sitio Web: http://revistas.mes.edu.cu/elibro

Tabla de contenidos

Prólogo del autor

En 1965 Lotfy A. Zadeh publica los primeros trabajos sobre subconjuntos borrosos. Si bien al principio no tuvieron gran acogida, con el tiempo sus ideas se han ido desarrollando con aplicaciones en la ingeniería y en la esfera económica y de gestión empresarial. No resulta habitual la aplicación de estas herramientas en la actividad educativa, por lo que este trabajo puede considerarse una contribución de su aplicabilidad también en tareas asociadas a la actividad docente.

En el trabajo se discute sobre las condiciones de subjetividad e incertidumbre propias de la labor docente, y en el hecho de que muchos conceptos y propiedades con los que se trabaja habitualmente en el marco estrecho de *"cumple o no cumple la propiedad",* es decir en el marco de la lógica binaria, admiten matices, por lo que pueden ser abordados en un contexto más amplio ya que se corresponden más con percepciones que con medidas.

Se abordan problemas de interés teórico y práctico en el campo de las Ciencias de la Educación como los siguientes: ***el problema de la determinación del perfil ideal***, ***el problema de la formación de valores en los estudiantes, sobre la comunicación en el aula, acerca de la evaluación del aprendizaje, evaluación del aprendizaje mediante criterios de generalización e independencia y sobre la relación entre objetivos, contenidos y métodos.*** El enfoque metodológico para abordar estos problemas es el de la lógica borrosa o difusa con sus variadas interpretaciones y propiedades.

Los conceptos, modelos y algoritmos se exponen de manera sencilla y amena, sin rebuscados formalismos matemáticos, de tal manera que su estudio resulte comprensible para las personas que no se dedican a esta ciencia. Se ha evitado además evaluar diversos métodos y algoritmos para una misma tarea dado el carácter introductorio de este texto.

El trabajo abre un camino poco trillado, un camino poco transitado por los estudiosos de las aplicaciones de la lógica borrosa y por quienes dedican buena parte de su tiempo a investigaciones pedagógicas, por lo que no contiene ideas acabadas, más bien son enfoques diferentes a problemas que conocemos, pero que su formulación se restringe si aplicamos el marco estrecho de la lógica binaria. Como en estos problemas se dan condiciones de subjetividad y de incertidumbre, resulta válido en ellos aplicar la lógica borrosa o difusa. Con el trabajo se abren nuevas puertas para el estudio de problemas asociados con la actividad académica que pueden facilitar el camino al tomarse decisiones tanto en el marco institucional como por parte de los docentes en su actividad diaria con los estudiantes.

Introducción

En 1965 Lotfy A. Zadeh publica los primeros trabajos sobre subconjuntos borrosos. Si bien al principio no tuvieron gran acogida, con el tiempo sus ideas se han ido desarrollando con aplicaciones en la ingeniería y en la esfera económica y de gestión empresarial. No resulta habitual la aplicación de estas herramientas en la actividad educativa, por lo que este trabajo puede considerarse una contribución de su aplicabilidad también en tareas asociadas a la actividad docente.

En este trabajo se discute sobre las condiciones de subjetividad e incertidumbre propias de la labor docente, y en el hecho de que muchos conceptos y propiedades con los que se trabaja habitualmente en el marco estrecho de *"cumple o no cumple la propiedad",*es decir en el marco de la lógica binaria, admiten matices, por lo que pueden ser abordados en un contexto más amplio ya que se corresponden más con percepciones que con medidas. Estas ideas se desarrollan con los conceptos de independencia y de ley binomial que son propios de la Teoría de Probabilidades así como con el concepto de controlabilidad de amplio uso en la Teoría de Sistemas Dinámicos.

También se formulan varios problemas principales vinculados con la gestión educativa: El problema de la determinación del perfil ideal, el problema asociado con la formación de valores en los estudiantes, el problema de la comunicación en el aula, una propuesta de auto evaluación a partir de competencias, evaluación del aprendizaje mediante criterios de generalización e independencia y un estudio sobre las relaciones entre objetivos, contenidos y métodos.

Entre los temas que se abordan se propone una metodología que permite conocer, sin preguntar de forma directa, como los estudiantes ordenan los valores declarados para su carrera. También se propone una vía para abordar el estudio de la comunicación entre educadores y educandos. La metodología propuesta apoyada en elementos de la matemática borrosa permite establecer un criterio para determinar cuales acciones de los profesores y cuales de los estudiantes *actuando de forma conjunta* permiten una adecuada comunicación entre ellos.

También se determina la manera en que se pueden ordenar las capacidades o competencias que se van desarrollando durante un curso o semestre. La metódica propuesta se fundamenta en un algoritmo de ordenamiento a partir de los rudimentos de la lógica difusa, y aunque se ilustra con un curso de matemática para carreras de ingeniería, es viable su extensión a otras disciplinas o asignaturas. Puede utilizarse tanto por los estudiantes como por los profesores como vía de chequeo o diagnóstico del desempeño y resultados que se van obteniendo. El modelo guarda coherencia con los principios que en plano teórico se defienden sobre evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria y no contradice las formas y métodos establecidos para la evaluación de una materia; más bien le sirve de apoyo.

Por otra parte, en el trabajo se revelan los puntos de contacto entre dos ramas del conocimiento aparentemente inconexas: el Principio de extensión de Zadeh como una de las generalizaciones de mayor alcance de la lógica difusa por una parte, y las categorías de la didáctica objetivo, contenido y método por otra. El valor principal que puede atribuírsele es el de contribuir en la formalización de la relación entre objetivos, contenidos y métodos para una asignatura, disciplina o carrera a partir de las interpretaciones que pueden asumirse en correspondencia con los rudimentos de la lógica borrosa.

En el trabajo se obtiene una expresión matemática para la función de pertenencia asociada al cumplimiento de los objetivos, pero no puede verse como una *"regla mágica o salvadora"*a la cual acudimos para saber si nuestro trabajo anda bien o mal; es mas bien una guía, un medio metodológico para orientarnos. Lo importante es comprender su significado, además puede enriquecerse con cuantos matices sean de nuestro interés. Ella recoge los niveles de profundidad, sistematicidad, e independencia al abordar el cumplimiento de cualquier objetivo; pero el principio en que se fundamenta admite cualquier otra interpretación que se obtenga en el campo de las investigaciones pedagógicas para las particularidades de una asignatura, disciplina o carrera.

Es conocido que los modelos matemáticos basados en principios deterministas o en principios estadísticos, se han utilizado siempre en la solución de los más variados problemas de las ciencias naturales, tanto con carácter empírico como teórico. Fenómenos de naturaleza inorgánica o inanimada regidos por leyes de la mecánica, de la física, o de la química, así como fenómenos de naturaleza orgánica o animada a los que se unen también principios y leyes biológicas ya sea con carácter dinámico o estático, han resultado fácilmente asimilables por estos modelos matemáticos.

Por otra parte, aquellos modelos matemáticos que pretenden describir fenómenos sociales, deberán tener en cuenta entre otras cosas, dos tipos de factores que se dan en ellos: los factores objetivos, es decir aquellos que resultan independientes de las personas como las condiciones naturales o los recursos materiales existentes, y los factores subjetivos, es decir aquellos que dependen de los modos de pensar y actuar de los hombres, de su conciencia, su voluntad, o sus deseos; por lo que el estudio de fenómenos de carácter eminentemente social no siempre puede abordarse a partir de modelos matemáticos basados en la aritmética de la certeza o de la aleatoriedad, debido a que en estos fenómenos la información de que se dispone muchas veces está cargada de subjetividad e incertidumbre.

Afortunadamente, en los últimos años han ganado terreno muchos modelos y algoritmos que han ido conformando los cimientos de lo que se ha dado en llamar Matemática Numérica y no Numérica en la Incertidumbre. Para ello se ha tomado como fundamento a la lógica difusa, y con estas herramientas se pueden modelar muchos fenómenos de carácter eminentemente social donde no resulta muy confiable siquiera asumir ciertas leyes estadísticas para su tratamiento dado que la información de que se dispone se encuentra deficientemente estructurada. Modelos asociados a los conceptos de relación, asignación, agrupación y ordenación entre otros, algunos conocidos desde hace bastante tiempo, le pueden facilitar el camino a quienes tienen que tomar partido por una alternativa frente a otra u otras, es decir tomar decisiones. Estos modelos se han utilizado con éxito en los últimos años en la esfera económica y de gestión.

Al evaluar problemas asociados al trabajo docente, no podemos desprendernos aunque ese sea nuestro deseo, de elementos subjetivos, por lo que con frecuencia los resultados no siempre coinciden con los esperados. Los siguientes ejemplos como tantos otros que aparecen en la actividad diaria de maestros y profesores merecen una reflexión:

Un Tribunal para Olimpiadas Estudiantiles, desarrolla el concurso con dos categorías de preguntas; las que considera de menor complejidad y otras más complejas que serian las que deciden los lugares para los premios. Gran sorpresa recibe el tribunal cuando ocurre todo lo contrario: las preguntas aparentemente más complejas se resolvieron con mucha mayor facilidad que aquellas supuestamente más sencillas.

En otra ocasión se le da a calificar a un grupo de profesores en igualdad de condiciones para hacerlo, una pregunta resuelta por un estudiante en un examen mediante una escala de 20 puntos, y los resultados de las calificaciones oscilaron entre 10 y 16 puntos; es decir los profesores se dividen en dos grupos, los que consideran aprobada la pregunta y los que la consideran desaprobada.

Tanto en el segundo caso donde los profesores actúan de forma individual como en el primero donde lo hacen de forma colegiada, los resultados no coinciden con los esperados. Estos dos ejemplos vinculados a la categoría evaluación sólo son una muestra insignificante de un fenómeno que muchas veces ocurre en la actividad de maestros y profesores dado que el ambiente en que desarrollan su trabajo es la conjunción de elementos objetivos y por tanto medibles con otros cargados de subjetividad, imposibles de una cuantificación mas o menos exacta y que en el mejor de los casos solo permite valuaciones. Muchos ejemplos se pueden citar también asociados a otras categorías de la didáctica como los objetivos, los contenidos o las formas y métodos de enseñanza.

Por otra parte, al analizar muchos conceptos e ideas en diversas ramas de la ciencia, el enfoque borroso o difuso puede darnos una concepción más abarcadora y realista sobre todo cuando la información con que trabajamos es imprecisa y está basada en percepciones más que en medidas. Ejemplos sobre esto pueden ser los siguientes:

1. En los cursos de Teoría de las Probabilidades y de Estadística Matemática tanto para las Ciencias Técnicas como para las Ciencias Económicas se introduce el concepto de **independencia entre eventos o sucesos**. Se dice que dos eventos o sucesos son independientes si la ocurrencia de uno de ellos en nada influye en la ocurrencia o no del otro y esta idea puede expresarse mediante la probabilidad condicional. Cuando se explica este concepto se hace saber que en un problema práctico atendiendo a las condiciones en que se desarrolla, es posible asumir la dependencia o la independencia entre los eventos que interesan.

   Un ejemplo muy ilustrativo es el de dos personas, una que maneja un vehículo hacia Pinar del Río y la otra maneja otro vehículo hacia Santiago de Cuba. Hasta hace un tiempo cuando no existían los teléfonos móviles y no era posible ningún tipo de contacto o conexión entre esas personas, se podía aceptar que los eventos o sucesos asociados con la ocurrencia o no de accidentes por ellas eran independientes. Pero considérese, como puede ocurrir en estos tiempos, que se trata de dos personas que realizan el viaje uno en cada dirección y que disponen de teléfonos móviles para conversar, por lo que pueden distraerse al guiar los vehículos. Evidentemente las condiciones son otras y se puede aceptar que los eventos asociados con la ocurrencia de accidentes no son independientes.

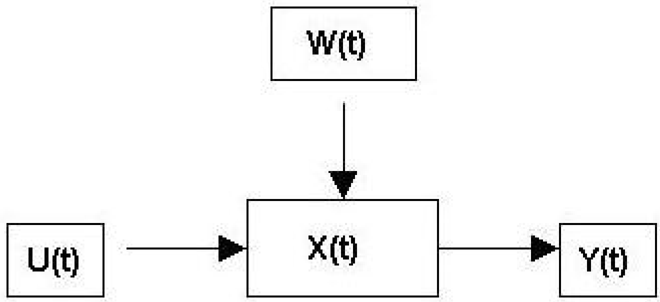
   Si se considera el problema en el marco de la lógica binaria los eventos serán dependientes, aunque lo mejor es sugerir *"grados de dependencia"*, es decir expresar que pueden ser dependientes en mayor o menor medida.

2. También en estos cursos se incluye el concepto de **ley binomial** por la amplia aplicabilidad que tiene este tipo de distribución en la solución de muchos problemas prácticos. Se dice que una variable aleatoria **X** sigue la ley binomial si representa el número de veces que en **N** experiencias independientes puede ocurrir cierto evento que tiene la misma probabilidad **p** ocurrencia en cada experiencia. El valor esperado para esta variable aleatoria es **E(X) = Np** lo cual tiene un sentido intuitivo muy natural. Aplíquese este concepto a la siguiente situación práctica:

   Una fábrica produce el 95 por ciento de piezas no defectuosas y el 5 por ciento restante de piezas defectuosas. En el lenguaje de la teoría de probabilidades esto significa que la probabilidad de que una pieza tomada al azar de un lote de piezas producidas, sea no defectuosa, es de 0.95 y de 0.05 de que sea defectuosa. Como el valor esperado es el producto de **N** (cantidad de piezas producidas) por **p**(probabilidad de que una pieza tomada al azar sea no defectuosa), entonces si se escogen 1000 piezas al azar se espera que 950 piezas sean no defectuosas y 50 sean defectuosas, si se toman 100 piezas al azar se espera que 95 piezas sean no defectuosas y solo 5 defectuosas, pero si se toman solamente 10 piezas al azar el valor esperado es 9.5, es decir se debe esperar que "nueve piezas y media" sean defectuosas.

   Con 1000 o con 100 piezas las respuestas están en correspondencia con el sentido común, pero al tomarse solo 10 piezas la respuesta no tiene sentido, por lo que se resuelve el problema diciéndose que el valor esperado está entre 9 y 10 piezas. En rigor lo que se ha hecho es tomar prestado de la lógica borrosa la respuesta de *"entre 9 y 10 piezas"*, respuesta que aunque menos precisa es más realista. Este simple ejemplo ratifica una vez más las ideas de Zadeh cuando expresa que la Teoría de las Probabilidades y la Lógica Borrosa más bien son complementarias que contradictorias. Ejemplos como este pueden motivar discusiones enriquecedoras con los estudiantes donde pueden interesarse no solo por el enfoque probabilístico sino también por el borroso.

3. En el campo de la modelación matemática ocupa un lugar importante los llamados *"Sistemas Dinámicos Controlables"* cuya descripción general se ilustra a continuación:



U(t): Conjunto de variables de entrada o (inputs).

X(t): Conjunto de variables de estado o (states).

Y(t): Conjunto de variables de salida o (outputs).

W(t): Conjunto de perturbaciones.

El sistema se dice que es **controlable** si es posible llevarlo de un estado inicial conocido $\mathbf{X(t_0)}$ a un estado final deseado $\mathbf{X(t_1)}$. De igual manera el llamado "**Problema de acción más rápida**" tiene solución si el sistema es controlable y se lleva de un estado a otro en el tiempo mínimo. Los cursos de Cálculo Variacional y de Control Optimal incluyen la solución de estos problemas cuando se trata de Sistemas Dinámicos Lineales y la solución es en el marco de la lógica binaria donde el sistema es controlable o no controlable.

¿Se pueden tener situaciones prácticas donde la controlabilidad sea en cierto grado, es decir sistemas que son poco controlables, muy controlables o incontrolables ?.

Considérese el problema asociado con el control económico de una empresa. Se trata de un problema de naturaleza compleja al que podemos asociarle variables de entrada, de salida, de estado y perturbaciones que en un modelo muy simplificado y solo con fines didácticos pueden ser las siguientes:

U(t): Inversiones en materias primas, en equipos, mano de obra contratada, gastos publicitarios, de seguridad social etc.

X(t): Nivel de inventarios, cantidad de productos terminados, cantidad de máquinas funcionando entre otros.

Y(t): Nivel de ventas, fluctuaciones en los costos de producción etc.

W(t): Factores ajenos a la empresa como las producciones de empresas competidoras, precios en el mercado de materias primas, condiciones climáticas adversas que puedan incidir en el proceso productivo entre muchos mas.

Resulta natural recoger información diaria, semanal o mensual según interese sobre las variables de entrada, de salida o de estado que son como *"fotografías"* tomadas a la empresa en fechas diferentes. Si al director o al consejo de dirección se le presenta *"el conjunto de fotos o datos"* para que tome la mejor decisión, de seguro los devolverá para que se realicen *"estudios sobre las tendencias"*que pueden tomar **U(t)**, **X(t)** o **Y(t)** para un período de tiempo, lo cual resulta de mayor importancia para él que los datos fríos cuando deba tomar una decisión.

Aquí las herramientas conocidas de la Estadística permiten presentar informes más objetivos sobre la base de medias, varianzas, correlaciones o pruebas de hipótesis. Pero lamentablemente no siempre se dispone de información confiable para conformar una ley o regularidad estadística y en este caso los subconjuntos borrosos pueden ofrecer soluciones que tal vez sean menos exactas o precisas pero más realistas. Factores como el estado de ánimo y el sentido de pertenencia de los trabajadores, las fluctuaciones de los precios en el mercado, las producciones de empresas competidoras entre otros se basan más en percepciones que en medidas, por lo que es posible asignarle graduaciones o categorías al estado económico de la empresa combinándose de manera juiciosa los datos medibles con las percepciones.

Discusiones similares surgen en las clases donde se exponen conceptos como los de observabilidad y sistema observable, estabilidad y sistema estable etc. Estas reflexiones sugieren la conveniencia de enfoques más abarcadores en la didáctica y metodología de algunas materias no solo para la enseñanza superior sino también para la precedente, enfoques que se correspondan mejor con el modo de pensar y de actuar de los hombres. La lógica borrosa, al superar las limitaciones de la lógica binaria puede facilitar la formalización de estas ideas.

Se acepta sin reticencias que el proceso docente educativo resulta en extremo complejo. Sus dos principales protagonistas, los educadores y los educandos no siempre tienen la misma percepción sobre las categorías de la didáctica y sobre otros aspectos de interés como la formación de valores o la comunicación entre ellos. La lógica borrosa o difusa facilita establecer relaciones tomando como principio los diferentes grados o niveles con que se manifiestan ciertas leyes o regularidades que se dan en este proceso.

Los objetivos, contenidos, métodos y resultados de la evaluación pueden interpretarse como conceptos borrosos o difusos ya que se caracterizan por su graduación o gradación y su granularidad o granulación. Este principio significa que un objetivo puede lograrse o plantearse con niveles de amplitud y profundidad diferentes. Un contenido puede tratarse también con niveles diferentes y de igual manera ocurre con un método y con el significado que puede tener un aprobado o un excelente en una escala de calificación. También significa que las fronteras entre el cumplimiento de un objetivo y el de otro objetivo no están definidas nítidamente, de igual manera ocurre con las fronteras entre dos métodos, entre dos contenidos o entre dos categorías de evaluación.

Por otra parte, la forma, los niveles de generalización, de independencia, de despliegue y de dominio con que se realizan las acciones por docentes y estudiantes tienen también un carácter gradual y pueden interpretarse como subconjuntos borrosos que cumplen las siguientes condiciones: El grado o nivel de la forma, el de generalización, el de independencia, el de dominio y el de despliegue que va logrando el estudiante siempre es inferior al grado de la forma, la generalización, la independencia, el dominio y el despliegue que desea el docente que este tenga.

El grado de dominio varia desde la etapa inicial donde el sujeto es consciente de todas las operaciones que integran una acción hasta su realización en forma automatizada, y el grado de despliegue transcurre desde la etapa inicial donde la acción se manifiesta en forma desplegada hasta la forma resumida. Otras características secundarias como la solidez se pueden formar con las primarias, en este caso la solidez es función de la forma, la generalización y la automatización y una manera de expresarlo en términos de la lógica borrosa es la siguiente:

Grado de solidez = mínimo {grado de la forma, grado de generalización, grado de automatización }

Se toma el mínimo para obtener el resultado más conservador.

La bibliografía sobre lógica difusa aplicada a la actividad académica es escasa; por una parte no ha sido un tema muy tratado por los estudiosos de las aplicaciones de esta lógica, y por otra parte no ha sido una herramienta usual entre investigadores de las Ciencias Pedagógicas o de las Ciencias de la Educación, por lo que este trabajo no solo enriquece aun mas el campo de las aplicaciones de la lógica difusa sino también ofrece un camino plausible para abordar el estudio de muchos problemas asociados con la actividad docente que por otras vías pueden resultar mas costosos, o difícil de formular.

No se trata de renunciar al enfoque estadístico el cual ha demostrado su utilidad como herramienta para validar muchos resultados de interés en las ciencias sociales y en particular en el campo pedagógico, pero a diferencia de este enfoque que siempre utiliza regularidades estadísticas a partir de observaciones, el enfoque difuso utiliza datos mas blandos a partir de valuaciones con toda la carga subjetiva que tienen. En problemas reales es posible una combinación juiciosa de ambos enfoques aprovechándose lo positivo de cada uno o realizar investigaciones por separado y comparar ambos resultados.

Es bueno precisar que incertidumbre y azar no representan el mismo concepto ya que el azar está sujeto a leyes, las leyes estadísticas, y la incertidumbre no posee leyes por lo que no representan los mismos niveles de información. La estructura de la incertidumbre es débil, es vaga, y cuando se le explica se hace de manera subjetiva. El azar está vinculado al concepto de probabilidad como medida de observaciones repetidas en el tiempo o en el espacio.

Se entiende por "*gestión educativa*" a la actividad que a diario se realiza en las instituciones docentes tanto por los maestros y profesores como por sus trabajadores y dirigentes a los diferentes niveles con el objeto de lograr en los educandos los conocimientos, habilidades y valores necesarios en correspondencia con la época y mediante la optimización de los recursos materiales, humanos y financieros requeridos. En ese contexto es válido preguntar:

- ¿Como afrontar el estudio de ciertos aspectos de interés asociados al trabajo docente y educativo asumiendo el carácter subjetivo de estas actividades?.
- ¿Cómo hacerlo cuando ni siquiera se dispone de información confiable para conformar una regularidad estadística?.

Este texto, aunque tiene carácter introductorio, puede propiciar ideas de valor teórico y práctico dirigidas al perfeccionamiento de nuestra gestión educativa.

Desarrollo

CAPÍTULO 1

1- La teoría clásica de conjuntos y los subconjuntos borrosos

1.1- Nociones sobre la teoría de conjuntos

Desde edades tempranas se utilizan de manera natural las nociones de la Teoría de Conjuntos. En muchas aplicaciones se parte de un conjunto universal **U** y se acepta que los subconjuntos que se utilizarán son subconjuntos de **U**. Así por ejemplo, es posible referirse a los alumnos de una escuela como conjunto universal **U** o al conjunto de valores a desarrollar con ellos según sean los objetivos; es decir con conjuntos se puede hacer referencia tanto a objetos físicos (alumnos en este caso) como a características o cualidades que son el resultado de la riqueza imaginativa del hombre (valores en este caso).

La teoría de conjuntos como nueva disciplina matemática se desarrolla a partir de los trabajos del matemático alemán George Cantor durante el período comprendido entre 1871 y 1883; surgimiento tardío respecto a otras ramas de la matemática como el Cálculo Diferencial o el Cálculo Integral. Entre las ventajas de esta teoría se puede considerar que ha servido de lenguaje y medio metodológico ideal para el tratamiento riguroso de prácticamente toda la matemática y sus principales aplicaciones a la ciencia y la tecnología.

Al pretender definir el concepto de conjunto se requiere usar vocablos similares como colección de objetos o de elementos, por lo que suele aceptarse como "*noción primaria*" con el único requisito de que no exista ambigüedad en saber si un elemento pertenece o no al conjunto en cuestión. Así por ejemplo el conjunto de alumnos de una escuela no admite ambigüedades ya que se trata de los matriculados y solo de ellos. El conjunto de valores a desarrollar por una institución educativa puede formarse atendiendo a los objetivos de la institución como resultado del análisis y discusión de sus autoridades educativas y estudiantiles. Este conjunto puede ser por ejemplo el siguiente:

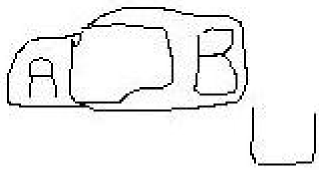
> **E** = {Amor a la patria, sentido de pertenencia, solidaridad, creatividad, espíritu crítico y auto crítico, amplia cultura, responsabilidad, incondicionalidad, honestidad, sentido del trabajo, objetividad, protagonismo}.

Entre ambos ejemplos existe una diferencia: el conjunto **A** de los alumnos de la escuela se ha definido por una cualidad o propiedad que ellos y solo ellos cumplen, la de estar matriculados; mientras que el conjunto **E** de valores se ha definido por una lista o relación de todos los valores.

Ambas maneras resultan usuales, pero el conjunto **A** también puede darse mediante una lista o relación contentiva de los nombres de sus estudiantes.

En la teoría de conjuntos se incluye el llamado conjunto nulo o vacío que se denota por $\mathbf{\Phi}$ y representa aquel conjunto que no tiene elementos. De igual manera resulta usual la idea de subconjunto de un conjunto. Se dice que **A** es subconjunto de **B** y se denota por $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ si cada elemento de **A** lo es también de **B**. En este orden de ideas dos conjuntos **A** y **B** son iguales si contienen los mismos elementos, es decir $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si y solo si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$.

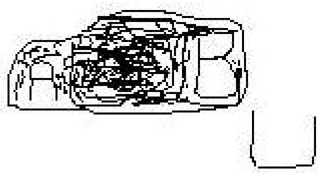
Sin pretender un examen riguroso de esta teoría se mencionan a continuación las principales operaciones entre conjuntos y las propiedades que se cumplen.



En el gráfico se muestran dos conjuntos **A** y **B** que son subconjuntos de un conjunto universal **U**.

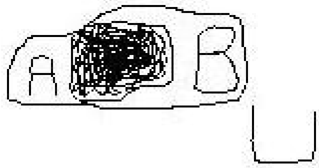
1.2- Operaciones entre conjuntos

Unión: La unión de los conjuntos **A** y **B** se comprende como el nuevo conjunto formado bajo la condición de que sus elementos pertenecen a **A,** a **B** o a ambos y se denota por el símbolo **A ∪ B** o bien **A + B**. Geométricamente se tiene:

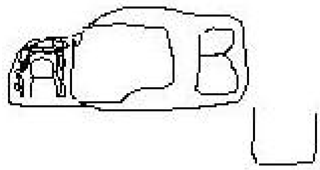


Intersección: La intersección de los conjuntos **A** y **B** se comprende como el nuevo conjunto formado bajo la condición de que sus elementos pertenecen a **A** y a **B** y se denota por los símbolos **A ∩ B** o bien **A.B**

Geométricamente se tiene:



El complemento o diferencia: Dados los conjuntos **A** y **B** se define el complemento de **A** respecto a **B** como aquel conjunto cuyos elementos pertenecen a **A** pero no a **B** y se denota por **A – B**. En particular cuando **B** coincide con el conjunto universal se habla simplemente del complemento de **A** y se denota por $\mathbf{A^c}$. Geométricamente se tiene:



Las operaciones anteriores permiten establecer las siguientes propiedades:

1. Leyes de Idempotencia

   A∪A=A **A∩A=A**

2. Leyes asociativas

   (A∪B)∪C=A∪(B∪C) **(A∩B)∩C=A∩(B∩C)**

3. Leyes conmutativas

   $\mathbf{A \cup B = B \cup A}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$

4. Leyes distributivas

   $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

5. Leyes de identidad

   $\mathbf{A \cup \Phi = A}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap \Phi = \Phi}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cup U = U}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap U = A}$

6. Leyes del complemento

   $\mathbf{A \cup A^c = U}$ $\qquad$ $\mathbf{A \cap A^c = \Phi}$ $\qquad$ $\mathbf{(A^c)^c = A}$ $\qquad$ $\mathbf{U^c = \Phi}$ $\qquad$ $\mathbf{\Phi^c = U}$

7. Leyes de Morgan

   $\mathbf{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$ $\qquad$ $\mathbf{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$

Resulta sencillo probar estas igualdades, si se quiere probar una de las leyes de Morgan, por ejemplo $\mathbf{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$ basta proceder de la manera siguiente:

Tomar un elemento **x** cualquiera del miembro izquierdo de la igualdad y probar que **x** también pertenece al miembro derecho y viceversa. En lo sucesivo para expresar que **x** pertenece a un conjunto **E** se escribe mas brevemente $\mathbf{x \in E}$ y para expresar que no pertenece se escribe$\mathbf{x \notin E}$.

Sea $\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^{\mathbf{c}}$ entonces $\mathbf{x \notin (A \cup B)}$ es decir $\mathbf{x \notin A}$ y$\mathbf{x \notin B}$ por tanto $\mathbf{x \in A^c}$ y $\mathbf{x \in B^c}$ es decir $\mathbf{x \in (A^c \cap B^c)}$. Tómeseahora $\mathbf{x \in (A^c \cap B^c)}$ entonces$\mathbf{x \in A^c}$ y $\mathbf{x \in B^c}$ es decir $\mathbf{x \notin A}$ y$\mathbf{x \notin B}$ por tanto $\mathbf{x \notin (A \cup B)}$ es decir $\mathbf{x} \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^{\mathbf{c}}$ con lo que se concluye la demostración.

1.3- Los subconjuntos borrosos

Casi 100 años después de los primeros trabajos de Cantoren materia de Teoría de Conjuntos, el profesor iraní nacionalizado en Estados Unidos, Lotfy Zadeh, de la Universidad de Berkeley en California, publica en 1965 las primeras ideas sobre *"subconjuntos borrosos"*.

La diferencia esencial entre el concepto de subconjunto y el de subconjunto borroso es la siguiente: para los subconjuntos ordinarios la pertenencia de un elemento del conjunto al subconjuntoes de todo o nada, es decir este concepto se adapta perfectamente a la llamada lógica binaria.

Por otra parte, el concepto de subconjunto borroso resulta más abarcador e incluye como caso particular al de subconjunto simple ya que para el caso borroso se aceptan los matices, es decir cada elemento del conjunto puede pertenecer al subconjunto con un cierto grado o nivel, para lo cual resulta cómodo asociarle a cada subconjunto borroso **A** una función de pertenencia que denotaremos como $\mathbf{\mu_A(x)}$ definida para cada **x** del conjunto universal **U** de tal manera que

$$\mathbf{0 \leq \mu_A(x) \leq 1}$$

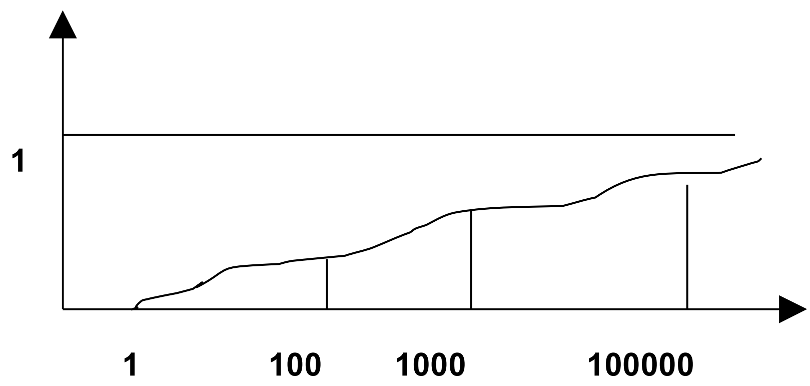
Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Si $\mu_A(x)$ toma valores próximos a cero se indica poca pertenencia por parte del elemento **x** al subconjunto borroso **A** y valores próximos a 1 indicanuna altao elevadapertenencia. Siguiendo esta idea para cualquier conjunto universal **U** se puede asociar la noción de subconjunto ordinario con la siguiente función característica de pertenencia:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; si \; x \notin A \end{cases}$$

Para los subconjuntos borrosos, como ya se expresó, $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$. La función de pertenencia puede ser continua o discreta atendiendo a las características que se quieran destacar con el subconjunto borroso.

1.4- Ejemplos de subconjuntos borrosos



1. Consideremos como conjunto universal **U** el conjunto de todos los números reales, y el subconjunto borroso **A** el formado por los números reales que son "***mucho mayores que 1***" . Una función de pertenencia se muestra en la figura anterior.

   El sentido común sugiere que no todos los números reales son mucho mayores que 1 en el mismo grado o nivel, por ejemplo el 100 es mucho mayor que 1 pero en menor grado que el 1000 y este que el 100000, además el propio número 1 es mucho mayor que 1 en grado cero. Este ejemplo sugiere la idea de que con los subconjuntos borrosos es posible formalizar aquellos conceptos que tienenun carácter ambiguo o impreciso en el sentido clásico de la lógica binaria con la que estamos acostumbrados a trabajar.En este caso la función de pertenencia debe ser continua ya que los números reales cumplen la propiedad de ser densos, además debe ser creciente como se muestra en la figura.

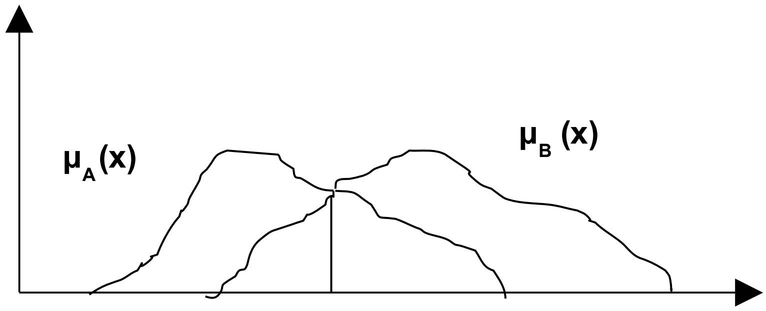
2. Cuando se imparte una asignatura o disciplina, el conjunto formado por ***los objetivos que se cumplen*** es un subconjunto borroso del conjunto formado por todos los objetivos declarados en el programa ya que los objetivos siempre se cumplen en cierto grado o medida. En este caso la función de pertenencia asociada a este subconjunto borroso es discreta, es decir toma un conjunto finito de valores atendiendo a la cantidad de objetivos declarados.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

1.4.1- Operaciones con subconjuntos borrosos

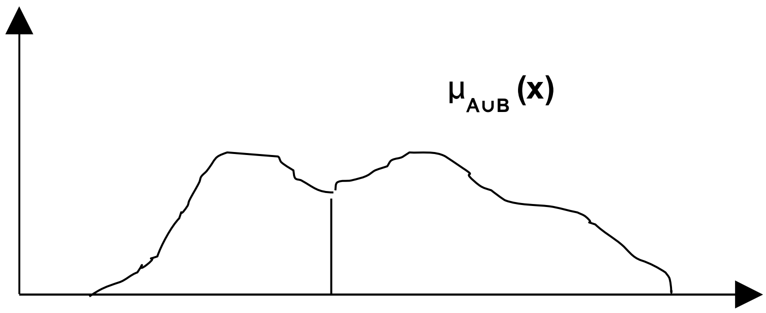
Con los subconjuntos borrosos se pueden realizar operaciones similares a las de los subconjuntos ordinarios. Se introducirán las siguientes notaciones: **a $\vee$ b** significa el máximo entre **a** y **b** y **a $\wedge$ b** significael mínimo entre **a** y **b**, así por ejemplo $3 \wedge 5 = 3$ y $3 \vee 5 = 5$.

1.4.1.1- Unión de subconjuntos borrosos



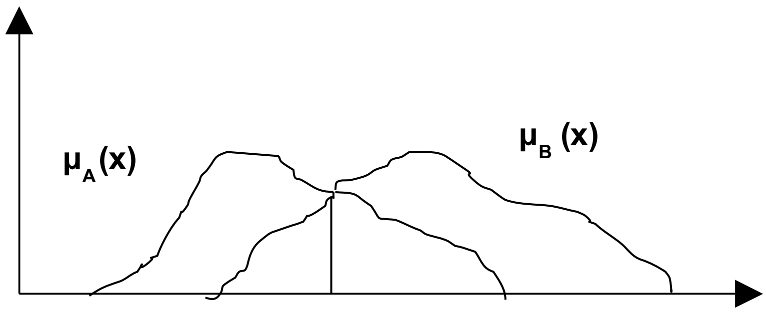
Si **A** y **B** son subconjuntos borrosos de un mismo referencial **U** con funciones de pertenencia μ_A **(x)** y μ_B **(x)** respectivamente (como ilustra el gráfico), entonces se define el nuevo subconjunto borroso **A $\cup$ B** como aquel con función característica de pertenencia $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ para todo $x \in U$

Geométricamente se tiene:

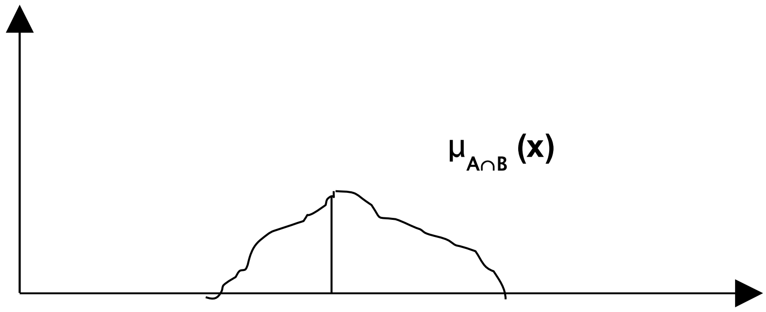


Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

1.4.1.2- Intersección de subconjuntos borrosos



Si **A** y **B** son subconjuntos borrosos de un mismo referencial **U** con funciones de pertenencia $\mu_A(x)$ y $\mu_B(x)$respectivamente (como ilustra el gráfico), entonces se define el nuevo subconjunto borroso $A \cap B$ como aquel con función característica de pertenencia $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ para todo $x \in U$. Geométricamente se tiene:



1.4.1.3- Complementación de subconjuntos borrosos

Dado un subconjunto borroso **A** con función de pertenencia $\mu_A(x)$, se define el subconjunto borroso A^c como aquel que tiene función de pertenencia $\mu_A{}^c(x)$ definida de la manera siguiente:

$$\mu_A{}^c(x) = 1 - \mu_A(x)$$

para todo $x \in U$.

Ejemplo 1

Supóngase el conjunto **E = {a, b, c, d, e}** formado por 5 estudiantes. Los estudiantes reciben la información y desarrollan su personalidad a través de diferentes canales o vías de comunicación. Entre las mas frecuentes actualmente están: las clases, las consultas con el profesor, el estudio individual, el estudio en pequeños grupos, a través de Internet o del correo electrónico, visitando museos o lugares de interés asociados a la materia que se estudia o mediante la práctica profesional.Es conocido que los estudiantes no prefieren con el mismo grado o nivel a cada canal o vía de comunicación, por lo que este hecho de naturaleza subjetiva puede expresarse mediante subconjuntos borrosos. Para fijar ideas considérese los dos subconjuntos borrosos siguientes:

A	a	b	c	d	e
$\mu_A(x)$	0.9	0.8	0.7	0.1	0.4

Que representa el grado o nivel con que cada estudiante desarrolla su personalidad mediante las clases.

B	a	b	c	d	e
$\mu_B(x)$	0.1	0.8	0.4	0.3	0.5

Que representa el grado o nivel con que cada estudiante desarrolla su personalidad mediante el estudio individual.

Entonces:

A∪B	a	b	c	d	e
máximo	0.9	0.8	0.7	0.3	0.5

Indica la información que se recibe mediante las clases o el estudio individual. De forma análoga:

A∩B	a	b	c	d	e
mínimo	0.1	0.8	0.4	0.1	0.4

Indica la información que se recibe mediante clases y estudio individual de manera conjunta. También se puede definir:

A^c	a	b	c	d	e
$\mu_A{}^c(x)$	0.1	0.2	0.3	0.9	0.6

Que indica la información que no se recibe mediante clases y

$A^c \cap B$	a	b	c	d	e
mínimo	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5

Indica en cuanto tributa **B** a lo que no tributa **A**, es decir son los conocimientos añadidos por **B** en relación con los que no añade **A**.Continuándose esta idea, con cada canal o vía de comunicación es posible formar un subconjunto borroso para los 5 estudiantes y las operaciones de unión, intersección y complementación ofrecen elementos de interés para el tratamiento de la información.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Ejemplo 2

En la asignatura Teoría Probabilidades pueden considerarse losobjetivos **A**, **B**, **C**, y **D** siguientes:

1. **A:** Resolver problemas sencillos mediante el significado y propiedades de variables aleatorias discretas del tipo binomial y Poisson.
2. **B:** Resolver problemas sencillos mediante el significado y propiedades de variables aleatorias continuas del tipo exponencial y normal.
3. **C:** Saber utilizar técnicas de simulación estadística para generar valores de una variable aleatoria discreta del tipo binomial y Poisson.
4. **D:** Saber utilizar técnicas de simulación estadística para generar valores de una variable aleatoria continua del tipo exponencial y normal.

Supóngase que un estudiante cumple el objetivo **A** al nivel 0.7, el objetivo **B** al nivel 0.3, el objetivo **C** al nivel 0.6 y el **D** al nivel 0.2. Analicemos las siguientes operaciones:

(A ∩ C) U (B ∩ D) toma los valores:

{ 0.7 min. 0.6} max.{0.3 min. 0.2} = {0.6 max. 0.2 } = 0.6

Este operador ofrece información sobre el grado de dominio del estudiante en uno de los dos campos, el discreto o el continuo. Un valor alto indica que por lo menos domina bien tanto las propiedades como la simulación de una variable aleatoria discreta o de una variable aleatoria continua mientras que un valor pequeño indica que no domina bien ninguno de los dos campos.

(A U C) ∩ (B U D) toma los valores:

{ 0.7 max. 0.6}min.{0.3 max. 0.2} = {0.7min. 0.3} = 0.3

Este operador ofrece información sobre el nivel de dominio que tiene el estudiante en ambos campos, el discreto y el continuo, más bien da idea si el estudiante domina bien la simulación tanto discreta como continua pero no necesariamente las propiedades o domina bien las propiedades tanto discretas como continuas pero no necesariamente la simulación.

También ofrece información mezclada, es decir con alto dominio de la simulación para una variable aleatoria discreta y de las propiedades de las variables aleatorias continuas o de la simulación de variables aleatorias continuas y propiedades de las variables aleatorias discretas.

Un valor alto de**(A ∩ C) ∩ (B ∩ D)** indica que el estudiante lo domina bien todo, mientras que un valor pequeño de **(A U C) U (B U D)** indica que el estudiante está mal preparado. Como se observa, pueden mezclarse convenientemente los operadores atendiendo al objetivo que interese evaluar.

En interés de evitar confusiones, es bueno precisar que los conceptos de ley de distribución para la Teoría de Probabilidadesy de función de pertenencia para la Lógica Difusa sirven para comparar el grado o medida en que objetos diferentes de un mismo conjunto cumplen con cierta característica o cualidad, pero existe una diferencia esencial entre ambos enfoques: en el enfoque de la ley de distribución se parte de un todo que ***"se distribuye"*** con la condición de que al aumentarse por un lado debe disminuirse por otro para no afectar al todo, mientras que esa restricción no se tiene en cuenta para el enfoque de la función de pertenencia.

El tratamiento de conceptos como el amor, la bondad, la solidaridad o el cumplimiento de los objetivos, entre tantos otros, se adapta perfectamente al enfoque de la lógica difusa ya que sin partir

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

de un saco lleno de amor, bondad, solidaridad o cumplimiento de objetivos, también pueden distribuirse estas características o cualidades.

En problemas prácticos resulta natural combinar ambos enfoques; el concepto de probabilidad de un evento borroso introducido por Zadeh en 1968 como generalización del concepto de valor esperado, es una muestra de estas conexiones.

1.4.1.4- El Principio de Extensión de Zadeh

Muchas aplicaciones de la lógica difusa tienen como fundamento al principio básico de extensión de Zadeh, el cual establece que si se tiene una aplicación **g(x)** de un conjunto **X** en otro conjunto **Y** y **A** es un subconjunto borroso en **X** con función de pertenencia $\mu_A(x)$, entonces de manera natural se define en el conjunto **g(X)** el subconjunto borroso **B** con función de pertenencia $\mu_B(v)$ definida de la manera siguiente:

$$\mu_B(v) = \sup_x (\mu_A(x))$$

con la condición $v = g(x)$

Es decir para cada elemento **v** en el conjunto imagen se toman todos los elementos **x** del dominio que se asocian con **v** mediante la aplicación **v = g(x)** y se define como valor de la función de pertenencia en el conjunto imagen al supremo de los correspondientes valores $\mu_A(x)$.

Este concepto puede también ampliarse al caso en que se tienen dos funciones **f(x)** y **g(x)** definidas en el conjunto **X** y con valores en el conjunto **Y** y además se tiene un subconjunto borroso **A** en **f(X)** con función de pertenencia $\mu_A(f(u))$,entonces de manera natural se define un subconjunto borroso **B** en **g(X)** con función de pertenencia $\mu_B(v)$ definida como

$$\mu_B(v) = \sup_u (\mu_A(f(u)))$$

con la condición $v = g(u)$

Es decir para cada elemento **v** en el conjunto imagen **g(X)** se determinan todos los valores **u** del dominio **X** y como existe el subconjunto borroso **A** en **f(X)** con función de pertenencia $\mu_A(f(u))$,para estos valoresde **u** tiene sentido $\mu_A(f(u))$ y de esos valores se toma el supremo.

Ejemplo 1

Sean **X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j }** **Y = { r, s, t, u, v, w, z }**

A subconjunto borroso en **X** con la siguiente función de pertenencia:

A	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\mu_A(x)$	0.8	0.3	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.9	0.8	0.6

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Consideremos la siguiente función **Φ** con dominio en el conjunto **X** e imagen en el conjunto **Y**:

$$
\begin{array}{lcl}
\Phi : X & \longrightarrow & \mathbf{Y} \\
\{a,b,c\} & \longrightarrow & \mathbf{r} \\
\{d,e\} & \longrightarrow & \mathbf{s} \\
f & \longrightarrow & \mathbf{t} \\
\{g,h,i\} & \longrightarrow & \mathbf{u} \\
j & \longrightarrow & \mathbf{v} \\
 & & \{w, z\}
\end{array}
$$

La imagen de **Φ** es el siguiente conjunto:

$$\mathbf{\Phi (X) = \{ r, s, t, u, v \}}$$

Tiene sentido definir en el conjunto **Φ (X)**el subconjunto borroso **B**con la siguiente función característica de pertenencia:

$$\mu_B (r) = \sup \{ \mu_A (a), \mu_A (b), \mu_A (c) \}= \sup \{ .8, .3, .1\} = .8$$

$$\mu_B (s) = \sup \{ \mu_A (d), \mu_A (e) \}= \sup \{ .2, .4\} = .4$$

$$\mu_B (t) = \sup \{ \mu_A (f) \}=.5$$

$$\mu_B (u) = \sup \{ \mu_A (g), \mu_A (h), \mu_A (i) \}= \sup \{ .6, .9, .8\} = .9$$

$$\mu_B (v) = \sup \{ \mu_A (j) \}= \mu_A (j) = .6$$

Por lotanto se tiene:

g(X)	r	s	t	u	v
μ_B (y)	0.8	0.4	0.5	0.9	0.6

Ejemplo 2

Sean **X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j }** **Y = { r, s, t, u, v, w, z }**

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{\Phi: X} & \longrightarrow & \mathbf{Y} \\
a & \longrightarrow & \mathbf{r} \\
\{b,c\ d,e,f\} & \longrightarrow & \mathbf{s} \\
\mathbf{\{ g,h \}} & \longrightarrow & \mathbf{t} \\
\{i,j\} & \longrightarrow & \mathbf{u} \\
 & & \mathbf{\{ v, w, z \}}
\end{array}
$$

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Sea **A** un subconjunto borroso en **Φ(X)** con la siguiente función de pertenencia:

Φ (X)	r	s	t	u
μ_A **(y)**	0.4	0.6	0.5	0.9

Consideremos otra función **ϕ** también definida en **X** y con valores en **Y** de la forma siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\boldsymbol{\phi}\mathbf{:X} & \longrightarrow & \mathbf{Y} \\
\{a,b,c\} & \longrightarrow & \mathbf{r} \\
\{d,e\} & \longrightarrow & \mathbf{s} \\
\{f, g\} & \longrightarrow & \mathbf{t} \\
i & \longrightarrow & \mathbf{u} \\
\{h, j\} & \longrightarrow & \mathbf{v} \\
 & & \{w, z\}
\end{array}
$$

Nótese que **ϕ(X) = { r, s, t, u, v }**

Tiene sentido definir el subconjunto borroso **B**en **ϕ(X)** con la siguiente función característica de pertenencia:

μ_B **(r) = sup {** μ_A **(Φ (a)),** μ_A **(Φ(b)),** μ_A **(Φ(c)) } = sup {** μ_A **(r),** μ_A **(s),** μ_A **(s) } =** sup { .4, .6, .6} = .6

μ_B **(s) = sup {** μ_A **(Φ (d)),** μ_A **(Φ (e)) } = sup {** μ_A **(s),** μ_A **(s) } = sup { .6, .6} = .6**

μ_B **(t) = sup {** μ_A **(Φ(f)),** μ_A **(Φ(g)) } = sup {** μ_A **(s),** μ_A **(t) } = sup { .6, .5 } = .6**

μ_B **(u) = sup {** μ_A **(Φ (i)) } = sup {** μ_A **(u)) } =sup { .9 } = .9**

μ_B **(v) = sup {** μ_A **(Φ (h)),** μ_A**(Φ (j)) } = sup {** μ_A **(t),** μ_A **(u) } = sup { .5, .9 } =.9**

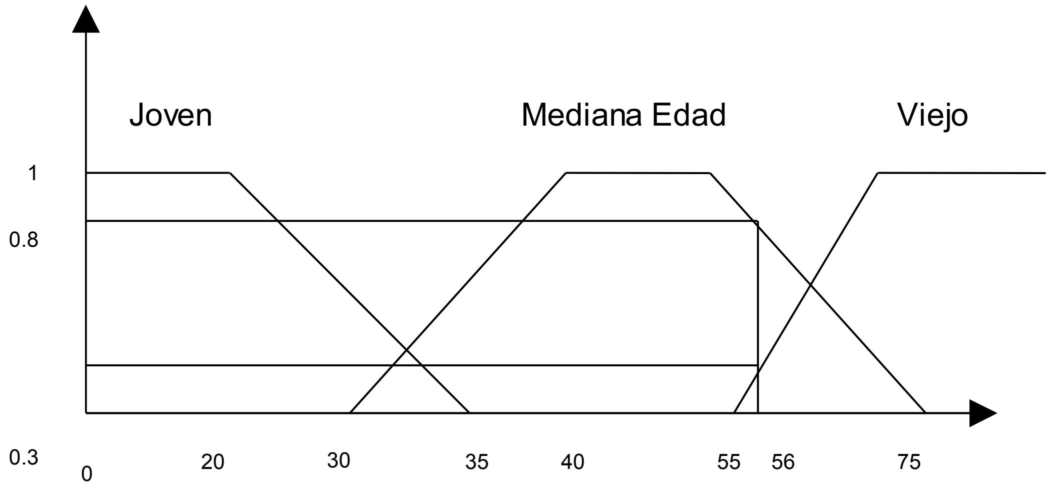
Con estos ejemplos, puede comprenderse mejor las aplicaciones del principio de extensión de Zadeh, como medio metodológico para interpretar la relación entre los objetivos, contenidos y métodos y sobre la evaluación del aprendizaje mediante criterios de generalización e independencia que se realizan al final del texto.

1.4.1.5- Las variables lingüísticas

Por variable lingüística se entiende aquella cuyos valores son palabras u oraciones en un lenguaje natural o artificial. Este concepto fue introducido por Lotfi A. Zadeh en 1975, y ha encontrado importantes aplicaciones en el campo de la lógica borrosa o difusa ya que permite el tratamiento de la información cuando esta se encuentra deficientemente estructurada.

Con las variables lingüísticas se facilita el estudio de problemas complejos a partir del razonamiento aproximado, es decir de aquel razonamiento que no es ni muy preciso ni muy impreciso pero que facilita obtener conclusiones de valor práctico a problemas cuyo tratamiento resulta muy difícil o imposible de abordar por otros modelos de la matemática aplicada.

Para fijar ideas, a continuación se muestra una posible representación de la variable lingüística ***"edad"*** solamente mediante los ***"términos linguísticos"*** siguientes: ***joven, mediana edad*** y ***viejo***.



De acuerdo al gráfico, una persona de 56 años es de mediana edad en grado 0.8, es viejo en grado 0.3 y es joven en grado cero. Por otra parte hasta los 20 años la persona es joven en grado máximo, entre 40 y 55 es de mediana edad en grado máximo y viejo en grado máximo a partir de los 75 años. También entre 20 y 35 años la persona es joven cada vez en menor grado, de igual manera es de mediana edad cada vez en mayor grado entre 30 y 40 años y viejo cada vez en mayor grado entre 55 y 75 años.

Las variables linguísticas han encontrado su espacio dentro de la *"Teoría General de la Incertidumbre"*, desarrollada últimamente por L. A. Zadeh. En esos trabajos el autor expresa que existen 4 razones para el uso de variables linguísticas y la granulación de atributos y que son:

> ***Primero*** , la incapacidad de los órganos sensoriales y en particular del cerebro para almacenar información y diferenciar detalles; por ejemplo de escuchar el ruido de un vehículo que transita por una calle cualquier persona puede inferir si se trata de un vehículo ligero o pesado, pero no todas las personas pueden reconocer la marca del vehículo que observan y muy pocas pueden leer la matrícula.
>
> **S*egundo***, cuando la información numérica puede no estar disponible; por ejemplo puede no saberse la cifra exacta de personas que visitan cierto lugar pero puede inferirse que son muchas o son pocas en relación con las que visitan otro.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Tercero , cuando un atributo no puede cuantificarse; por ejemplo atributos o cualidades como la belleza, la honestidad, el valor, la inteligencia, la solidaridad o la causalidad son características o cualidades que no pueden medirse, por lo que al referirnos a ellas siempre está presente el elemento subjetivo.

***C*uarto**, cuando existe cierta holgura o tolerancia para la imprecisión; por ejemplo puede bastar que en un tipo de tarea se requieran solo jóvenes sin precisar edades.

Se añade una ***quinta razón***: Cuando las encuestas pueden resultar muy difíciles o imposibles de realizar debido a lo espinoso del tema a encuestar o a la reticencia de los encuestados.

1.4.1.6- Distancia de Hamming

Tomemos de nuevo los subconjuntos borrosos **A** y **B**

A	a	b	c	d	e
$\mu_A(x)$	0.9	0.8	0.7	0.1	0.4

B	a	b	c	d	e
$\mu_B(x)$	0.1	0.8	0.4	0.3	0.5

Si queremos estimar el grado de semejanza o parecido entre **A** y **B**, una forma de hacerlo es a través de la llamada ***distancia de Hamming*** que denotamos mediante la expresión ***d(A,B)*** y se define de la manera siguiente:

$$d(A,B) = |0.9 - 0.1| + |0.8 - 0.8| + |0.7 - 0.4| + |0.1 - 0.3| + |0.4 - 0.5| = 0.8 + 0 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1.4$$

Nótese que si para cada elemento de **A** y **B** los correspondientes valores coinciden, entonces la distancia de Hamming es cero. Si se diferencian poco entonces la distancia de Hamming es pequeña y si se diferencian mucho es grande por lo que esta distancia nos sirve para evaluar el grado de semejanza o parecido entre dos subconjuntos borrosos finitos.

Nótese que el mayor valor que puede tomar la distancia de Hamming es **N** (cantidad de características o cualidades que conforman el subconjunto borroso) y esto es en el caso en que por ejemplo **A** tenga todas las valuaciones de **1** y **B** las tenga de **0** o se alternen el **1** y el **0**. El menor valor que puede tomar es cero y esto ocurre cuando los elementos de **A** y **B** son respectivamente iguales. En ocasiones se trabaja con la llamada ***distancia relativa de Hamming*** que se define de la manera siguiente:

$d_1(A,B)= d(A,B) / N$. En el ejemplo citado $d_1(A,B)=0.28$.

En este caso como $0 \leq d_1(A,B) \leq 1$ permite hacer comparaciones entre pares con cantidades diferentes. Si **A** y **B** tienen N_1 elementos y **C** y **D** tienen N_2 elementos siendo $N_1 \neq N_2$ entonces no es posible comparar ***d(A,B)*** con ***d(C,D)*** pero sí es posible comparar $d_1(A,B)$ con $d_1(C,D)$. Esta distancia relativa puede utilizarse además para comparar un subconjunto borroso **A** tomado como patrón con cierta colección de subconjuntos borrosos

$\mathbf{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k}$. Aquel $\mathbf{A_i}$ para el cual la distancia relativa de Hamming es menor es el que tiene mayor semejanza o parecido con el patrón.

1.4.1.7- Entropía

Cuando en un subconjunto borroso la función de pertenencia toma los valores extremos de **cero** o **uno** decimos que no existe desorden o que la **entropía** es nula. Por otra parte si todos los valores de la función de pertenencia coinciden con **.5** decimos que la entropía es máxima o que el desorden es máximo. Mas precisamente si los valores de la función de pertenencia están próximos a cero o a uno la entropía es pequeña o el desorden es pequeño mientras que si los valores están próximos a .5 la entropía es grande. Existen muchas maneras de evaluar la entropía, entre las más sencillas está la siguiente:

Considérese el subconjunto borroso

A	a	b	c	d	e
$\boldsymbol{\mu_A(x)}$	0.9	0.8	0.5	0.4	0.1

Se forma un nuevo subconjunto borroso de la manera siguiente:

$\mathbf{A_{pía}}$	a	b	c	d	e
$\boldsymbol{\mu_{Apía}(x)}$	1	1	1	0	0

Se ha colocado el valor **1** en las casillas **a**, **b**, y **c** debido a que los valores de $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ son mayores o iguales a **.5** mientras que se ha colocado el valor **0** en las casillas **d** y **e** debido a que los valores de $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ son menores que **.5**.

$$d(A,A_{pía}) = |\,0.9 - 1| + |\,0.8 - 1| + |\,0.5 - 1| + |\,0.4 - 0| + |\,0.1 - 0| = +\ 0.2 + 0.2 + 0.4 + 0.1 = 1.1$$

$$d_1(A,A_{pía}) = 1.1/5 = 0.22$$

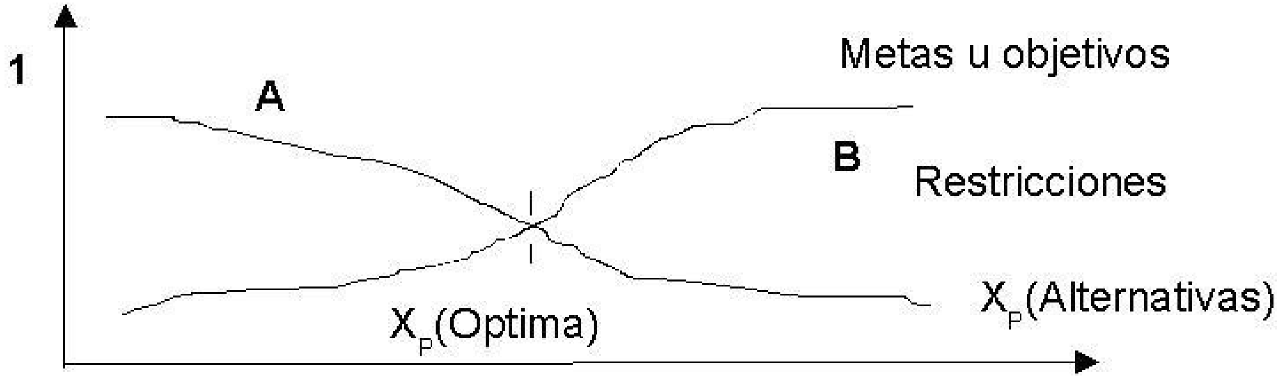
Si en las casillas los valores pueden ser ceros o unos entonces la distancia $d_1(A,A_{pía})$ es cero mientras que si todos los valores son iguales a 0.5 entonces $d_1(A,A_{pía})=(5)(0.5)/5= 0.5$. Para normalizar la expresión se define la entropía mediante la fórmula $\beta(A) = 2\, d_1(A,A_{pía})/N$ siendo **N** la cantidad de elementos del subconjunto borroso y $A_{pía}$ formado según la metodología anterior.

1.4.1.8- Sobre la toma de decisiones

La vida diaria de cualquier persona siempre transcurre "*tomando decisiones*", algunas obedecen al instinto natural y se hacen casi de manera automática como por ejemplo, acompañarse de un paraguas si se espera que llueva; otras decisiones son mas complejas y pueden necesitar largas y profundas meditaciones. Como regla, para tomar una decisión se elige una alternativa entre varias

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

posibles atendiendo a las metas u objetivos por una parte y las restricciones por otra. En el caso del paraguas el objetivo es no mojarse si llueve y la restricción es cargar con el paraguas y evitar su pérdida. En la práctica, al tomarse una decisión siempre "*se concilian*" o "*se compensan*" las metas u objetivos con las restricciones. En muchas ocasiones la lógica difusa puede servir como medio metodológico para escoger entre varias alternativas la que se considera mejor.



En la gráfica se muestra mediante funciones de pertenencia el problema general asociado con la toma de decisiones: en la región **A** se representa la idea de que para elevadas restricciones, el nivel de cumplimiento de las metas u objetivos como regla es bajo, mientras que en la región **B** ocurre lo contrario, para pocas restricciones las metas u objetivos se pueden cumplir en alto grado. Un criterio para elegir la alternativa óptima $\mathbf{X_P}$ puede ser el siguiente:

- Determinar para cada alternativa el valor mínimo entre los niveles de los objetivos y las restricciones.
- Considerar como alternativa óptima $\mathbf{X_P}$ aquella para la cual se obtiene el máximo entre los mínimos anteriores.

Seguidamente se ilustra la toma de decisiones con un ejemplo didáctico consistente en la elección de empleo. Supongamos que una persona busca empleo y tiene 4 alternativas. De acuerdo al esquema anterior consideremos:

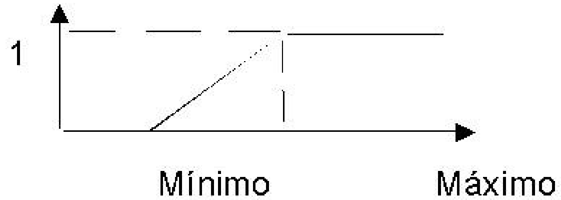
Objetivos:

La satisfacción personal.

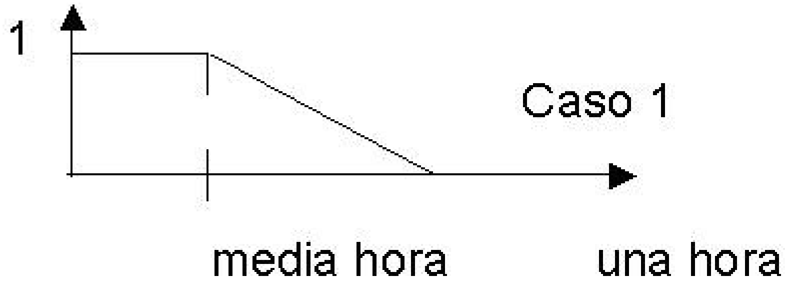
Restricciones:

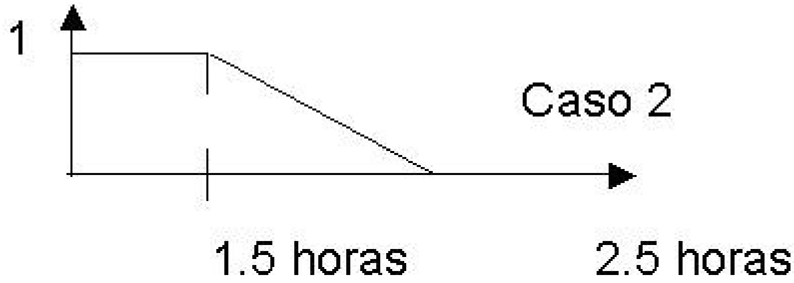
1. Salario a recibir.
2. Distancia del trabajo al hogar o bien tiempo de viajes.

El caso ideal es la alternativa donde el salario y la satisfacción personal estén al nivel máximo y el tiempo de viajes sea mínimo, pero en general esto no siempre ocurre. Se pueden construir funciones de pertenencia para el salario y el tiempo de la manera siguiente:



Para el tiempo de viajes, a diferencia del salario se pueden considerar dos o más funciones de pertenencia como se indica a continuación:





Para obtener las funciones de pertenencia se pueden aplicar criterios objetivos o subjetivos. El criterio aplicado para el salario es objetivo y válido para cualquier persona, mientras que el criterio aplicado al tiempo, aunque considera factores objetivos, depende de la importancia que cada persona le asigne a este. Por otra parte, la satisfacción personal es eminentemente subjetiva, para cada alternativa la persona que busca empleo considera en grado diferente su satisfacción personal para lugares diferentes. La siguiente tabla recoge estas informaciones:

Alternativas	A	B	C	D
Objetivos	0.5	0.7	0.9	0.8
Salarios	0.8	0.6	0.7	0.6
Tiempos	0.7	0.4	0.5	0.6

Los mínimos por columnas son: **{0.5, 0.4, 0.5, 0.6}**

El valor máximo es **.6** que se corresponde con la alternativa **D**. Se ha ilustrado con funciones lineales para simplificar el modelo, pero las funciones de pertenencia pueden tener estructura no lineal. Aunque muy simplificado el ejemplo, con él se ilustra una ventaja de los modelos difusos: reunir en el mismo modelo informaciones basadas tanto en medidas como en percepciones.

1.4.2- Las relaciones de incidencia

Entendemos por ***relación*** a todo tipo de asociación capaz de poner en evidencia los niveles de conexión existentes entre los elementos de un conjunto o de conjuntos diferentes. Entre las relaciones de mayor uso se encuentran las que se conocen como ***relaciones de incidencia***, es decir aquellas en que se refieren las influencias de los elementos de un conjunto en otro conjunto, pudiendo tratarse como caso particular las influencias entre elementos de un mismo conjunto.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente conjunto: $\mathbf{E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}}$ donde sus elementos representan las siguientes variables:

a_1 = clima, a_2 = agricultura, a_3 = salud pública, a_4 = industria, a_5 = educación

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1	0
a_3	0	0	1	0	1
a_4	1	1	0	1	0
a_5	0	0	1	1	1

Los valores situados en la tabla se expresan mediante una función μ_{ij} que toma los valores 0 o 1: el valor 0 si no hay relación de incidencia de la fila i en la fila j y el valor 1 si existe incidencia de la fila i en la fila j. En el ejemplo se acepta que el clima no incide en la industria, por lo que en la primera fila y cuarta columna aparece un cero, mientras que la industria si influye en el clima, no por gusto se discute tanto en estos tiempos sobre las afectaciones al medio ambiente y los cambios climáticos provocados entre otras cosas por la falta de control y tratamiento de sustancias químicas que invaden el entorno. Por estas razones aparece un uno en la cuarta fila y primera columna.

Aunque sencillo el ejemplo, se han mostrado dos situaciones: en algunos casos no existe duda en el 0 o el 1, pero en otros si existe la duda. Una vía para atenuar el efecto negativo de la escala {0, 1} es decir la escala {no, si} puede ser ampliar la escala.

En este sentido se han logrado buenos resultados en las aplicaciones utilizando el llamado sistema endecadario o escala de 11 valores {0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1} ya que permite matices a diferencia del sistema binario {0, 1} donde se aplica el principio de todo o nada. Puede incluso ampliarse mas la escala y tomar valores en el intervalo [0,1].

Ejemplo 2

$\mathbf{E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}}$ donde

a_1= clima, a_2= población,

a_3=agricultura, a_4=salud pública,

a_5=educación, a_6=ciencia y tecnología,

a_7=industria, a_8=energía,

a_9=medio ambiente, a_{10}=transportes,

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

a_{11}=comunicaciones, a_{12}=defensa.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_1	1	0.2	0.9	0.8	0.1	0.5	0.1	0.5	0.8	0.2	0.3	0.6
a_2	0	1	0.3	0.9	0.8	0.6	0.5	0.7	0.6	0.8	0.5	1
a_3	0.1	0.4	1	0.8	0.1	0.1	0.3	0.2	1	0.2	0	1
a_4	0	0.6	0.1	1	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2	0	0	0.4
a_5	0	1	0.3	0.8	1	1	0.8	0.3	0.5	0.2	0.2	0.4
a_6	0.2	0.3	0.4	0.6	0.5	1	1	1	.8	1	1	1
a_7	0.3	0.2	0.2	0.1	0	0.3	1	0.2	0.8	0.4	0.3	0.8
a_8	0.2	0	0.1	0	0	.2	1	1	0.9	1	0	.6
a_9	0.2	1	0.3	1	0.3	0.3	0.5	0	1	0.3	0.1	0
a_{10}	0.1	0.8	0.2	0.3	0	0	0.8	0.6	0.2	1	0.2	0.4
a_{11}	0	0.3	0	0.1	0	0.2	0.3	0.2	0.3	0.3	1	0.3
a_{12}	0	0.8	0.1	0	0.1	1	0.6	0.5	0	0.2	0.1	1

En este caso los valores $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ cumplen la condición $\mathbf{0 \leq \mu_{ij} \leq 1}$ y admiten diversas interpretaciones atendiendo a la naturaleza del problema que se estudie. En el ejemplo se ha reflejado el hecho de que la educación influye mucho en la salud pública y en la industria (niveles 0.8) ya que a mayor nivel educacional se comprenden mejor las medidas sanitarias y se puede desarrollar más a la industria. Las tablas anteriores se conocen como tablas de relaciones borrosas entre los elementos de un mismo conjunto.

El término ***borroso*** no resulta casual en la denominación de las relaciones, ya que en la práctica al considerar los valores $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ que se colocan en cada cuadrícula, pueden reflejarse medidas o valuaciones. Las medidas se refieren a estimaciones numéricas objetivas y las valuaciones, representan estimaciones numéricas subjetivas obtenidas como resultado de las opiniones de uno o varios expertos. El ejemplo 1 donde $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ solo toma los valores 0 o 1 se conoce como ***relación binaria***. En esencia, la relación borrosa puede interpretarse como varios subconjuntos borrosos finitos agrupados convenientemente.

En dependencia de los objetivos de la investigación se declaran las variables a utilizar y se seleccionan los expertos. Consideramos expertos a aquellas personas que poseen una opinión juiciosa sobre un tema específico por haberlo estudiado o por formar parte de sus vivencias personales. Si por ejemplo, se acercan los juegos olímpicos y se desea hacer pronósticos sobre el cuadro final de medallas, pueden considerarse como expertos a los comentaristas deportivos, entrenadores, dirigentes deportivos, atletas de alto rendimiento y aficionados con amplia cultura en el tema del deporte. Deberán recogerse todo tipo de opiniones desde las mas optimistas hasta las mas pesimistas para que, aunque subjetivos, los valores μ_{ij} reflejen de la mejor manera posible nuestros propósitos.

En ocasiones puede resultar mas útil el método de expertos para analizar un problema que una reunión, ya que la reunión tiene el inconveniente de que puede prevalecer el criterio de las personas que representan el poder, o las personas con mayor capacidad de persuasión o convencimiento o simplemente el carisma o la expresión oral de alguien puede influir en los demás. Por otra parte muchas personas requieren de algún tiempo de reflexión para emitir un juicio objetivo, lo que no permite una reunión.

Los ejemplos anteriores, aunque simplificados atendiendo a los fines didácticos de nuestra exposición, pueden servir como modelos para el estudio de vínculos o conexiones entre elementos de la naturaleza o de la sociedad o de ambas. Por otra parte, los datos reflejados en ambas relaciones borrosas corresponden a un momento y un lugar determinados, por lo que utilizar las mismas variables en otro momento o lugar nos permite realizar comparaciones.

Para el caso de los fenómenos sociales y en particular para los fenómenos asociados a la gestión educativa, por tratarse de fenómenos en extremo complejos ya que dependen no solo de factores objetivos sino también de otros eminentemente subjetivos, la causa absoluta no llega a conocerse, por lo que debemos aproximarnos a su estudio a través de causas específicas. Cuando establecemos las relaciones de incidencia de **A** en **B** y la expresamos con un número comprendido en el intervalo [0,1], lo que hacemos es emitir un juicio subjetivo sobre el grado o nivel con que esas causas específicas condicionan el efecto de tal manera que si el número está próximo a cero indicamos poca incidencia y mientras mas se acerque a uno se indica mayor incidencia.

1.4.3- Propiedades de las relaciones entre los elementos de un mismo conjunto

Al comienzo, al definir las relaciones, se expresó que estas pueden ser entre los elementos de un mismo conjunto o de conjuntos diferentes. Los ejemplos 1 y 2 se refieren a relaciones entre elementos de un mismo conjunto y a continuación estudiaremos algunas propiedades de interés para este tipo de relaciones.

1.4.3.1- Propiedad reflexiva

Una relación borrosa se llama ***reflexiva*** si $\mu_{ii} = 1$ para todo valor de la variable **i**. Es decir si la diagonal principal *"esta llena de unos"*. Los ejemplos anteriores tratan de relaciones borrosas reflexivas. La reflexividad significa que la relación de cada elemento consigo mismo es total ya que siempre toma el valor 1.

1.4.3.2- Propiedad simétrica

Una relación borrosa se llama ***simétrica*** si $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ para todas las posibles combinaciones de **i** con **j**. La simetría significa que la relación es la misma en un sentido que en el otro.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

En el ejemplo1 el valor de la relación de a_1 con a_2 es 1 es decir $\mu_{12} = 1$, sin embargo μ_{21} vale cero, por lo que la relación no es simétrica ya que resulta suficiente con que no se cumpla la propiedad de simetría en un par de elementos del conjunto. Nótese que el ejemplo 2 tampoco cumple con la propiedad de simetría ya que por ejemplo $\mu_{42} = .6$ y μ_{24} toma el valor .4. En este ejemplo se tienen algunas relaciones particulares que sí cumplen la simetría, por ejemplo

$m_{10\ 2} = .8 = \mu_{2\ 10}$ y $\mu_{11\ 7} = .3 = \mu_{7\ 11}$.

Observación

Cuando de manera conjunta en una relación se cumplen las propiedades reflexiva y simétrica, decimos que se trata de una ***relación de semejanza***. En una relación de semejanza se pone de manifiesto el grado o nivel de la relación entre los elementos tomados dos a dos, es decir permite realizar comparaciones por parejas de elementos.

1.4.3.3- Propiedad transitiva

Consideremos la siguiente relación borrosa

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	0.5	0.8	0.9	0.8
a_2	0.5	1	0.5	0.5	0.5
a_3	0.1	0.1	1	0.1	0.1
a_4	0.2	0.2	0.8	1	0.8
a_5	0	0	0	0	1

La relación directa entre $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_3}$ toma el valor $\boldsymbol{\mu_{13} = .8}$, pero $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_3}$ están también relacionados de manera indirecta a través de todos los elementos $\mathbf{a_i}$. Este fenómeno que tanto aparece en la vida real donde los elementos de un conjunto se relacionan no solo de manera directa sino también de forma indirecta a través de los restantes elementos del conjunto, conduce a la propiedad transitiva.

Diremos que en una relación borrosa se cumple la propiedad transitiva, es decir decimos que la relación borrosa ***trasciende***, si las relaciones directas entre dos elementos cualesquiera del conjunto de referencia son mayores o iguales que las relaciones indirectas. Las relaciones directas son las expresadas por la propia relación borrosa a través de los valores $\boldsymbol{\mu_{ij}}$, pero ¿como medir las relaciones indirectas?

Tiene sentido tomar como relación indirecta entre $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_3}$ a través de $\mathbf{a_4}$ a la dada por el valor mínimo entre las relaciones directas de $\mathbf{a_1}$ con $\mathbf{a_4}$ y de $\mathbf{a_4}$ con $\mathbf{a_3}$, es decir el mínimo entre $\boldsymbol{\mu_{14}}$ y $\boldsymbol{\mu_{43}}$ que denotaremos por $\boldsymbol{\mu_{14} \wedge \mu_{43}}$ donde el símbolo $\wedge$ denota el mínimo entre ambos valores. Como esto debe ocurrir con todos los elementos del conjunto debemos calcular:

$$\{ \mu_{11} \wedge \mu_{13} , \mu_{12} \wedge \mu_{23} , \mu_{13} \wedge \mu_{33} , \mu_{14} \wedge \mu_{43} , \mu_{15} \wedge \mu_{53} \}$$

es decir

$\{ 1 \wedge .8, .5 \wedge .5, .8 \wedge 1, .9 \wedge .8, .8 \wedge 0 \} = \{ .8, .5, .8, .8, 0 \}$

como se quiere que la relación directa sea mayor o igual a las indirectas, entonces debemos buscar el máximo de todas las indirectas que en este caso es .8. Para este par se cumple la transitividad ya que .8 = .8. Para completar el análisis de la transitividad debemos repetir el proceso anterior con todas las posibles combinaciones de los $\mathbf{a_i}$ para todos los valores **i** tales que $\mathbf{1 \leq i \leq 5}$.

Si el mínimo entre dos valores a y b lo denotamos por $a \wedge b$, el máximo lo denotaremos por $a \vee b$ y entonces la propiedad transitiva puede enunciarse así:

$$\mu_{ik} \geq \bigvee_{j} (\mu_{ij} \wedge \mu_{jk})$$

En este caso $\mathbf{1 \leq i \leq 5}$, $\mathbf{1 \leq k \leq 5}$, $\mathbf{1 \leq j \leq 5}$.

El operador de la derecha se conoce como **operador de convolución *maxmin*** y será muy utilizado posteriormente. Cuando en una relación se cumplen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad decimos que se trata de una **relación de similitud**.

1.4.3.4- Propiedad antisimétrica

En la esfera social cuando se analizan las relaciones entre **a** y **b** ocurre casi siempre que tanto **a** está relacionado con **b** como **b** relacionado con **a**, pero en general la relación no se da con el mismo grado o intensidad. Dos personas, aunque amigas, no necesariamente mantienen la amistad con el mismo grado o nivel en ambas direcciones. En esto radica la condición de ***antisimetría*** para las relaciones borrosa. Se pueden dar dos tipos de antisimetría:

1. **Antisimetría perfecta** Para todo par $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{a_j}$ con $\mathbf{i \neq j}$ del referencial **E** se cumple que si $\mu_{ij} > \mathbf{0}$ entonces $\mu_{ji} = \mathbf{0}$. En otras palabras, esto quiere decir que la antisimetría es perfecta cuando puede existir algún nivel de relación en un sentido pero no en el sentido contrario.
2. **Antisimetría borrosa** Para todo par $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{a_j}$ con $\mathbf{i \neq j}$ del referencial **E** se cumple que $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$ o bien $\mu_{ij} = \mu_{ji} = \mathbf{0}$. Se trata de una condición menos restrictiva que la anterior ya que basta que sean diferentes los niveles de las relaciones en ambos sentidos o de ser iguales ser nulos.

1.4.3.5- El encadenamiento de las relaciones

Parafraseando la definición inicial de relación, hasta ahora hemos puesto en evidencia los niveles de conexión existente entre los elementos de un mismo conjunto, pero dada la riqueza de relaciones que se dan tanto en la naturaleza como en la sociedad, la propia definición inicial recoge también las posibilidades de relaciones entre conjuntos diferentes.

El planteamiento general del problema resulta sencillo: Si **A**, **B** y **C** son conjuntos cualesquiera y se conoce que **A** está relacionado con **B** y que **B** está relacionado con **C**, parece natural inferir que de alguna manera **A** está relacionado con **C**.

Esta idea que desarrollaremos con tres conjuntos puede ampliarse a cualquier cantidad finita de conjuntos. Consideremos las siguientes relaciones borrosas de los conjuntos

A = { $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4}$ **}** con **B = {** $\mathbf{b_1, b_2, b_3}$ **}** y de **B** con **C = {** $\mathbf{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5}$ **}**. Estas relaciones pueden expresarse mediante las siguientes tablas:

μ_{ij}	b_1	b_2	b_3
a_1	0.7	0.8	0.9
a_2	0.2	0.1	0
a_3	1	0.4	0.5
a_4	0.2	0.6	0.3

τ_{jk}	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
b_1	0.2	0.9	1	0.4	0
b_2	0.3	0.6	0.2	0.7	0.8
b_3	0.1	0.6	0.4	0.9	0.5

¿Como estimar la relación directa entre $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{c_1}$ si conocemos que esta se obtiene a través de todas las relaciones indirectas de $\mathbf{a_1}$ con $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$ y $\mathbf{b_3}$ y de estos con $\mathbf{c_1}$?. Retomando las ideas expuestas en el estudio de la propiedad transitiva tenemos:

Para las relaciones de a_1 con b_1, b_2 y b_3 $\mu_{11} = .7$, $\mu_{12} = .8$, $\mu_{13} = .9$

Para las de cada b_1, b_2 y b_3 con c_1 se tiene: $\tau_{11} = .2$, $\tau_{21} = .3$, $\tau_{31} = .1$

Los valores de las relaciones indirectas están dados por los valores mínimos siguientes:

$\{ .7 \wedge .2, .8 \wedge .3, .9 \wedge .1 \} = \{ .2, .3, .1 \}$

De estos valores mínimos, el mayor indica el nivel de la relación directa entre $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{c_1}$ que en este caso es .3. En otras palabras, el valor $\boldsymbol{\theta_{ij}}$ de la relación borrosa del conjunto **A** en el conjunto **C** se obtiene a partir de la **convolución *maxmin*** entre la fila **i** de la relación de **A** en **B** con la columna **j** de la relación de **B** en **C**.

En busca de mayor didactismo, para explicar la relación de **A** con **C** puede resultar útil asociarla con el producto de matrices que se estudia en cursos de Algebra Lineal. En este orden de ideas consideremos la matriz M que representa la relación de incidencia de **A** en **B** y la matriz N que representa a la relación de incidencia de **B** en **C**, entonces al ser M una matriz de 4 filas y 3 columnas y N de 3 filas y 5 columnas es posible multiplicarlas y obtener el producto MN ya que el número de columnas de M coincide con el número de filas de N y se obtendrá una matriz de 4 filas y 5 columnas.

Nótese que el producto NM no puede calcularse ya que el número de columnas de N no coincide con el número de filas de M. Para el producto de matrices se multiplican respectivamente los

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

términos de cada fila de M con los de cada columna de N, así por ejemplo en la matriz MN el término que aparece en su tercera fila y cuarta columna es el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix} = 1(0.4) + 0.4(0.7) + 0.5(0.9) = 1.13$$

Si se trata del producto de convolución maxmin entonces hay que buscar los mínimos siguientes: { 1 Λ 0.4, 0.4 Λ 0.7, 0.5 Λ 0.9 } = { 0.4, 0.4, 0.5 } y de ellos tomar el máximo que en este caso es 0.5, es decir el procedimiento es el mismo para el producto de matrices que para el producto de convolución pero cambia la manera de realizar las operaciones.

La siguiente matriz es la matriz borrosa que representa la relación de **A** con **C**

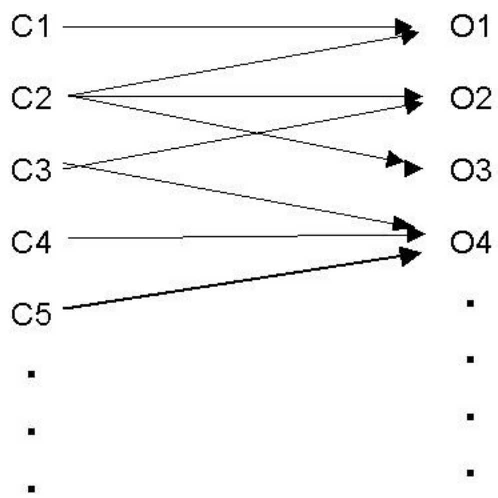
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	0.3	0.7	0.7	0.9	0.8
a_2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1
a_3	0.3	0.9	1	0.5	0.5
a_4	0.03	0.6	0.3	0.6	0.6

1.5- El problema de las asignaturas electivas

Entre las buenas prácticas de la Educación Superior está la de propiciar que sus estudiantes además de las asignaturas obligatorias de los Planes y Programas de estudio puedan cursar las llamadas *"asignaturas electivas"*. Como regla, el grupo de asignaturas obligatorias comprende aquellas materias contentivas de los conocimientos y habilidades esenciales, mientras que las electivas tributan a conocimientos y habilidades particulares que pueden apoyarse en los conocimientos y habilidades básicas o ser un grupo de conocimientos y habilidades de relativa independencia. Es bueno precisar que por ser electivas no dejan de jugar también un papel formativo en los estudiantes.

En la práctica al estudiante se le ofrece un grupo de asignaturas electivas para un semestre o curso y escoge las que cursará basándose generalmente en factores subjetivos. La propuesta de elección que se discute en este epígrafe rompe con estas prácticas y se fundamenta en el uso adecuado de la categoría didáctica *"objetivo"*.

Es conocido que los objetivos y contenidos mantienen una estrecha relación; un mismo contenido puede tributar a uno, dos o más objetivos y por otra parte dos o más contenidos pueden tributar al mismo objetivo como se observa en el siguiente esquema



Como se aprecia, entre objetivos y contenidos puede establecerse una tupida red de relaciones.

Aun entre docentes de experiencia existe la tendencia de prestarle mayor atención a la categoría didáctica contenido que a la categoría objetivo. La propuesta de elección que se sugiere exige que tanto los estudiantes como los docentes le asignen a la categoría objetivo el papel rector que le corresponde.

Seguidamente se muestra la aplicabilidad del operador de convolución **maxmin** en la clasificación de los estudiantes por asignaturas electivas. Consideremos los siguientes conjuntos:

$M=\{m_1, m_2, \ldots\ldots, m_s\}$ formado por **s** estudiantes m_i para $1\leq i \leq s$.

$O=\{o_1, o_2, \ldots\ldots\ldots, o_n\}$ formado por **n** objetivos o_j para $1\leq j \leq n$.

$P=\{p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_r\}$ formado por r asignaturas electivas p_k para $1\leq k \leq r$.

Se construyen las siguientes matrices:

	o_1	o_2	…………	o_n
m_1	μ_{11}	μ_{12}	………..	μ_{1n}
m_2	μ_{21}	μ_{22}	………..	μ_{2n}
………	………..	………….	………….	…………
m_s	μ_{s1}	μ_{s2}	…………..	μ_{sn}

El valor $\boldsymbol{\mu_{ij}}$ representa el grado de preferencia que tiene el estudiante $\mathbf{m_i}$ en conocer, aplicar o estudiar el objetivo $\mathbf{o_j}$. Se trata de una matriz de tamaño s×n.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Por otra parte en la matriz

	p_1	p_2	…………	p_r
o_1	η_{11}	η_{12}	…………	η_{1r}
o_2	η_{21}	η_{22}	…………	η_{2r}
………	………..	…………	…………	…………
o_n	η_{n1}	η_{n2}	…………	η_{nr}

El valor η_{jk} representa el grado o nivel con que tributa la asignatura $\mathbf{p_k}$ al objetivo $\mathbf{o_j}$ para $1\leq j \leq n$ y para $1\leq k \leq r$. Es una matriz de tamaño $n\times r$.

Lo interesante de este enfoque es que la persona encargada de dirigir ese proceso docente puede recoger la información de ambas matrices de manera independiente. En primer lugar se pide a los profesores que redacten los objetivos que se pueden desarrollar con cada una de las asignaturas electivas, esto debe hacerse con un lenguaje sencillo y de tal manera que resulte comprensible para los estudiantes.

Si existen objetivos muy similares pueden integrarse en uno solo e incluso puede realizarse alguna sesión de trabajo entre los docentes que impartirán esas asignaturas para lograr una propuesta mejor equilibrada. Con esa información se pide a los estudiantes que se pronuncien en cuanto a los objetivos que son de interés de ellos pero sin mencionarle los nombres de las asignaturas, con lo cual se evitan valoraciones subjetivas asociadas a la preferencia por alguna materia o por algún docente en particular. Este enfoque al romper con la forma tradicional de hacerlo puede generar incomprensiones de algunos docentes, pero si se sitúa a la categoría objetivo en el lugar que le corresponde se pueden atenuar esas incomprensiones y lograrse un resultado superior al tradicional.

Retomemos el ejemplo anterior con los conjuntos $\mathbf{A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}}$, $\mathbf{B = \{ b_1, b_2, b_3 \}}$ y $\mathbf{C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \}}$ y los valores de las matrices de incidencia de **A** en **B** y de **B** en **C**. En este caso se supone que **A** representa a 4 estudiantes, **B** representa a 3 objetivos y **C** representa a 5 asignaturas electivas, entonces podemos asignarle un significado a los valores de la matriz de **A** en **C** ya calculada

En negritas se han señalado los valores más grandes de cada fila los cuales tienen el siguiente significado:

> Al estudiante $\mathbf{a_1}$ se le debe sugerir la asignatura $\mathbf{c_4}$ ya que es la que mejor se adapta o ajusta a sus intereses. Al estudiante $\mathbf{a_3}$ se le debe sugerir la asignatura $\mathbf{c_3}$ por idénticas razones. El estudiante $\mathbf{a_4}$ puede escoger entre $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{c_4}$ y $\mathbf{c_5}$ mientras que el estudiante $\mathbf{a_2}$ tiene 4 variantes pero todas con valuación pequeña de 0.2, esto se debe a que este estudiante muestra poco interés por los objetivos declarados para las asignaturas electivas. El valor principal de este enfoque, es que permite ganar claridad por un lado en lo que piensan los estudiantes, y por otra parte en lo que ofrecen los docentes con lo cual las decisiones pueden ser mas realistas.

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	0.3	0.7	0.7	**0.9**	0.8
a_2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1
a_3	0.3	0.9	1	0.5	0.5
a_4	0.3	0.6	0.3	0.6	0.6

1.5.1.1- Observaciones

La idea expuesta acerca del encadenamiento de las relaciones admite las mas variadas interpretaciones; así por ejemplo podemos analizar cierto fenómeno desde el punto de vista estático, es decir sin tener en cuenta las variaciones temporales y considerar relaciones de incidencia de **A** sobre **B** y de **B** sobre **C**.

También podemos considerar que en dos periodos de tiempo sucesivos se tienen las mismas relaciones de incidencia entre los elementos de **A** y considerar entonces el mismo procedimiento pero tomando **B** = **C** = **A** que denotamos por $\mathbf{A}^{\mathbf{2}}$ el cual representa el nivel de las relaciones en el tiempo total. De la misma manera se obtienen $\mathbf{A}^{\mathbf{3}}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{4}}$, etc. Otra aplicación puede darse cuando se desea obtener la relación de **A** sobre **C**, pero esta resulta difícil de estimar y sin embargo el estudio del fenómeno resulta más comprensible si se introduce un conjunto **B** y se estiman las relaciones de **A** con **B** y de **B** con **C**.

Otra variante al estimar la incidencia de **A** en **C**, puede ser considerar esta como las composiciones siguientes: de **A** en **A**, de **A** en **C** y de **C** en **C** con lo que se obtiene mayor información. Si se tiene en cuenta que las relaciones borrosas se forman a partir de valuaciones con toda la carga subjetiva que contiene, el operador ***maxmin*** actúa como una especie de amortiguador o comodín que en cierto modo compensa la subjetividad.

En la práctica para formar las matrices de incidencia a partir de las opiniones de expertos se puede utilizar como valor representativo al promedio entre la moda y la media con el objetivo de asignarle mayor peso a la opinión de la mayoría.

1.5.2- Acerca del perfil ideal

Al problema de la determinación de un perfil ideal se le han dedicado numerosos trabajos que van desde la obtención del perfil ideal de un presidente o ministro, un militar, un deportista, un especialista de nivel superior o medio hasta el de un trabajador de la esfera productiva o de servicios.

Generalmente este perfil ideal lo forma un conjunto de capacidades no solo físicas e intelectuales sino también en el plano ético y moral. Aquí se incluyen características que pueden medirse como el nivel cultural mínimo requerido para un puesto de trabajo o la estatura para ocupar una posición en un equipo deportivo hasta otras eminentemente subjetivas como el carisma o nivel de persuasión o comunicación de alguien que desempeñe una actividad pública.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Para el caso de la actividad académica no basta con declarar el perfil ideal al que se aspira, se requiere establecer instrumentos que permitan evaluar en que medida se acerca a ese perfil ideal, el perfil real que se va obteniendo como resultado del desarrollo de la personalidad de los estudiantes. Es esta sugerente idea la que nos interesa utilizar. Para materializarla se requiere construir un *"perfil ideal"* o patrón al que se aspira a través de las actividades curriculares y extracurriculares con los estudiantes, el cual forma el conjunto de características y cualidades deseadas al finalizar la carrera, un año o un ciclo o grupo de materias.

Este *"perfil ideal"* puede formarse con lo declarado en los planes y programas de estudio así como mediante entrevistas y encuestas a especialistas vinculados con la formación de ese profesional, los cuales se constituyen en un grupo de expertos para estos fines. Mediante la aplicación de diversas técnicas de la matemática numérica y no numérica en la incertidumbre es posible obtener conclusiones de valor práctico sobre el grado o nivel con que se van cumpliendo aquellas características o cualidades deseadas.

Para el caso de especialistas de la rama informática, por ejemplo, nos interesan no solo cualidades asociadas con el desarrollo de un elevado pensamiento algorítmico y con la capacidad de adaptar sistemas existentes o crear nuevos sistemas informáticos en la solución de problemas prácticos de la producción o los servicios; sino también cualidades que lo conviertan en un promotor de la cultura informática en la sociedad y que conozcan y respeten las leyes y códigos éticos que rigen esta profesión.

La confección del perfil ideal de un especialista debe estar en correspondencia con la misión de la institución donde se forme; así por ejemplo para la carrera de Ingeniería Industrial de la CUJAE se establece como misión la siguiente: "Formar un profesional integral de alta calidad, comprometido con la patria, que satisfaga los requerimientos de la producción y los servicios en los inicios del siglo XXI, en los campos de la proyección, ejecución, y dirección de los sistemas que garantizan la planificación, organización, regulación, control y calidad de los procesos de cualquier organización empresarial, estatal o social con soluciones creativas, autóctonas, eficaces y eficientes. Contribuir de forma significativa al desarrollo sostenido y sustentable de la sociedad cubana y ser competitivo internacionalmente en el campo de la ingeniería industrial, para lo cual hace suya las aspiraciones mas legítimas de trabajadores y estudiantes".

Al perfil ideal se va tributando desde las primeras clases, así por ejemplo en el primer semestre de un curso de Calculo Diferencial resulta habitual entre los problemas que se resuelven, el relacionado con la estimación mediante diferenciales del error máximo cometido al calcular el volumen o el área de un cilindro circular recto. Si se trata de estudiantes de la especialidad de Ingeniería Industrial, este problema puede ilustrarse mejor vinculándolo con lo que puede ocurrir en una fábrica conformadora de metales donde se deben construir tanques de forma cilíndrica, pero se cometen errores en las mediciones del radio y la altura y aquí puede realizarse un análisis y discusión con los estudiantes de las posibles causas de esos errores. De seguro surgirán entre los factores objetivos y subjetivos los siguientes:

- Calidad de la materia prima.
- Nivel de modernización de las maquinarias.
- Condiciones ambientales, de seguridad e higiene del trabajo.
- Experiencia de los obreros.
- Política de estímulos morales y materiales etc.

Se trata, de una manera sencilla, de tributar desde lo curricular y al inicio de la carrera hacia ese perfil ideal al que se aspira mediante el vínculo con la disciplina integradora de esta carrera.

1.5.3- Planteamiento del problema del perfil ideal mediante la distancia de Hamming

A continuación se ilustra una manera de abordar la solución del problema del perfil ideal. Supongamos que se desea escoger entre 10 aspirantes a una posición de un equipo de béisbol aquel que puede considerarse mejor entre los 10. Una vía para resolver el problema es considerar un patrón o ideal al que se aspira para esa posición, es decir un conjunto de características o cualidades que debe cumplir quien la ocupe. Esas cualidades pueden expresarse numéricamente mediante medidas o valuaciones, es decir mediante estimaciones numéricas objetivas o subjetivas. Entre las objetivas pueden citarse: la estatura, los promedios tanto a la ofensiva como a la defensiva, la velocidad en el corrido de las bases etc. y entre las subjetivas se pueden considerar sus cualidades como jugador oportuno, su estímulo e influencia positiva en los restantes compañeros del equipo, saberse orientar ante situaciones complejas del juego, nunca verse perdido aunque se pierda por amplio margen entre otras.

Para las características objetivas puede servir cualquier número del intervalo [0,1] obtenido a partir de normalizar los valores de la magnitud calculada. Si por ejemplo se trata de las estaturas, se miden todas y se divide por el máximo valor entre ellas para quedarnos con números entre cero y uno.

Por otra parte, para las subjetivas es cómodo considerar la escala endecadaria, es decir de los 11 valores siguientes: 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1 con la cual se evalúan las características o cualidades deseadas del patrón de tal manera que valores grandes en la escala indican mayor apreciación de esas características y valores pequeños indican poca apreciación.

Se puede lograr una asociación semántica entre los valores de la escala endecadaria y términos usuales en nuestro idioma, así por ejemplo para evaluar la influencia positiva entre sus compañeros podemos asociar:

valor 1: influencia totalmente positiva en sus compañeros de equipo.

valor .9: influencia casi totalmente positiva en sus compañeros de equipo

valor .8: muy buena influencia positiva en sus compañeros de equipo.

valor .7: buena influencia en sus compañeros de equipo.

valor .6: influencia mas totalmente positiva que negativa en sus compañeros.

valor .5: ni muy positiva ni muy negativa influencia en sus compañeros.

valor .4: influencia mas totalmente negativa que positiva en sus compañeros.

valor .3: mala influencia en sus compañeros de equipo.

valor .2: muy mala influencia en sus compañeros de equipo.

valor .1: influencia casi totalmente negativa en sus compañeros de equipo.

valor 0: influencia totalmente negativa en sus compañeros de equipo.

En estas condiciones es posible comparar a cada aspirante con el patrón y aquel para el cual la distancia de Hamming tome el valor más pequeño es quien se acerca más al ideal al que se aspira para esa posición, es decir es quien debe ocupar esa posición.

En esencia, para este problema tenemos un subconjunto borroso que representa al patrón y otros 10 subconjuntos borrosos que representan a cada uno de los 10 atletas que aspiran a esa posición, por lo que debemos realizar 10 cálculos con la métrica de Hamming y quedarnos con aquel atleta cuyo subconjunto borroso tiene la menor distancia de Hamming al compararse con el patrón.

Debemos precisar que no existe un límite para la cantidad de características o cualidades; en la práctica mientras mayor sea esta cantidad pues mayor información tenemos de cada atleta y del patrón por lo que el resultado es mejor. En este orden de ideas se considera que quizás la evaluación de un bateador sea lo más difícil de apreciar, pues el bateo es algo muy subjetivo ya que cada jugador posee su propio estilo. Sin embargo pueden considerarse los siguientes aspectos: coordinación entre manos y órganos visuales, balance, posición de la cabeza, relación entre el esfuerzo realizado y el resultado, velocidad natural de manos, poder, reacción frente a las bolas de rompimiento, resultados contra los mejores lanzadores, paciencia en el cajón de bateo para seleccionar lanzamientos, entre otros elementos.

La distancia introducida tiene un inconveniente, y es el de penalizar igual tanto por defecto como por exceso, es decir si se desea que un jugador sea rápido con un índice de 0.7, entonces la distancia de Hamming considera iguales a quienes son rápidos con 0.5 o con 0.9 ya que las diferencias modulares entre ambos respecto al ideal de 0.7 coinciden en 0.2. Una manera de resolver esto para características donde los valores mayores representen mejor apreciación es la de considerar el llamado ***coeficiente de adecuación*** que consiste en penalizar por defecto pero no por exceso.

En el caso expuesto si aplicamos el coeficiente de adecuación quien tiene la cualidad al nivel mayor o igual a 0.7 se le considera que su evaluación es máxima, es decir se evalúa de 1 y solo se penaliza a quien tiene valuaciones o medidas inferiores a 0.7 pero con la condición de que se penaliza con mayor rigor a quien se diferencia mas de 0.7. Esto se resuelve aplicando la siguiente regla:

(1) mínimo { 1, 1- P + V }

donde **P** indica el valor deseado según el patrón y **V** indica el valor obtenido como valuación o medida. En el ejemplo indicado **P = 0.7**. Si **V = 0.6** entonces el coeficiente de adecuación toma el valor de **0.9** mientras que si **V = 0.1** entonces el coeficiente de adecuación toma el valor de **0.4**. Si **V ≥ 0.7** entonces el coeficiente toma el valor **1**.

Si se quiere un indicador que ni perjudique ni beneficie al nivel por defecto pero que estimule al nivel por exceso, es decir a mayor nivel por exceso mejor, entonces se puede recurrir al siguiente:

(2) máximo { 0 , V- P }

Por otra parte, si se quiere un indicador que considere idóneo cuando el nivel alcanzado **V** coincide con el patrón **P** pero que considere mayor competencia cuando **V** excede a **P** y menor competencia en caso contrario entonces puede considerarse el indicador siguiente:

(3) $$M(V,P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(V_i, P_i)$$

donde: $$m(V_i, P_i) = \begin{cases} 0 \ si \ P_i = V_i \\ V_i - P_i \ si \ P_i \neq V_i \end{cases}$$

$$V = (V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n) \qquad \text{y} \qquad P = (P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots, P_n)$$

En este caso ***n*** indica la cantidad de características o cualidades que se quieren evaluar .Nótese que , si los valores son próximos a -1 se indica poca competencia, si son próximos a 1 se indica mucha competencia y si son próximos a cero se indica idoneidad en el sentido de similitud con el patrón.

En un problema donde se tienen $\mathbf{N_1}$ características o cualidades que deben evaluarse por la distancia de Hamming y $\mathbf{N_2}$ características o cualidades que resulta mejor evaluarlas por el coeficiente de adecuación podemos realizar los siguientes cálculos:

$$(4) \qquad L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} (1 - |P_i - V_i|)$$

donde los $\boldsymbol{P_i}$ corresponden a los valores deseados del patrón y los $\boldsymbol{V_i}$ corresponden a los valores obtenidos para esas características o cualidades.

$$(5) \qquad L_2 = \sum_{i=1}^{N_2} \textit{mínimo}\{1, 1 - P_i + V_i\}$$

Nótese que tanto para $\boldsymbol{L_1}$ como para $\boldsymbol{L_2}$ los valores mayores que pueden tomar son $\boldsymbol{N_1}$ y $\boldsymbol{N_2}$ respectivamente por lo que puede tomarse como criterio el valor $\boldsymbol{L = (L_1 + L_2)/(N_1 + N_2)}$.

Un valor de ***L*** próximo a ***1*** indica mayor semejanza con el patrón mientras que un valor de ***L*** próximo a ***0*** indica menor semejanza con el patrón.

Con las fórmulas (1), (2), (3), (4) y (5) se dispone de herramientas sencillas para la comparación entre subconjuntos borrosos. Usarlas de forma independiente o combinarlas depende de los objetivos propuestos y de las condiciones del problema planteado.

1.5.4- Agrupamiento de objetos por características afines

Consideremos los siguientes subconjuntos borrosos:

$$\mathbf{E_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}} \qquad \mathbf{E_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}}$$

$\mathbf{E_1}$ puede representar, por ejemplo, a 5 universidades o a 5 facultades de una universidad, y $\mathbf{E_2}$ representa a 7 características o cualidades que serán utilizadas como criterios para agrupar por afinidad a esas instituciones.

Para los fines didácticos que perseguimos es suficiente tomar estas cantidades. Las características o cualidades pueden darse tanto por estimaciones numéricas objetivas como el nivel de promoción, de retención, de deserción, artículos publicados, participación en eventos científicos entre otras, como por aquellas eminentemente subjetivas como las vinculadas con la atención a los problemas de los estudiantes o de los docentes y demás trabajadores, a sus intereses profesionales, metas y sueños, creación de condiciones de vida y trabajo adecuadas entre otros factores.

El modelo que se propone es lo suficientemente amplio como para considerar solo características objetivas o solo subjetivas o combinadas. Una matriz es suficiente para recoger esa información:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
P_1	0.1	0.8	0.3	0.4	0	0.3	0.9
P_2	0.2	0	0.5	0.6	0.7	0.4	0.5
P_3	0.6	0.5	0.7	0.2	0.5	0.4	0.9
P_4	1	0.2	0.8	1	0.2	0.8	0.8
P_5	0.4	0.6	0.9	0.3	0.9	1	0.9

El significado de esta matriz es el siguiente:

En la fila 1 y columna 1 aparece el valor .1 lo cual quiere decir que la institución $\mathbf{P_1}$ tiene la característica o cualidad $\mathbf{C_1}$ al nivel .1 (es decir al 10 por ciento). En la fila 1 y columna 7 aparece el valor .9 indicando que la cualidad $\mathbf{C_7}$ se posee al nivel .9 (es decir al 90 por ciento) y así con todas las características o cualidades.

La distancia de Hamming nos permite, con la información anterior, crear una nueva matriz con la cual podemos comparar los elementos de $\mathbf{E_1}$ por pares, para ello denotemos mediante $d(P_i, P_j)$ la distancia de Hamming entre el subconjunto borroso $\mathbf{P_i}$ y el subconjunto borroso $\mathbf{P_j}$, entonces:

$$d(P_1, P_2) = |0.1 - 0.2| + |0.8 - 0| + |0.3 - 0.5| + |0.4 - 0.6| + |0 - 0.7| + 0.3 - 0.4| + |0.9 - 0.5| = 0.1 + 0.8 + 0.2 + 0.2 + 0.7 + 0.1 + 0.4 = 2.5$$

Nótese que $d(P_i, P_j)= d(P_j, P_i)$por lo que la matriz de distancias es simétrica y además $d(P_i, P_i)=0$.

Para nuestros fines es mejor tomar la distancia relativa de Hamming $d_1(P_i, P_j)$ y entonces

$$d_1(P_1, P_2)= 2.5/7= 0.357$$

De forma análoga se puede calcular:

$$d(P_1, P_4) = |0.1 - 1| + |0.8 - 0.2| + |0.3 - 0.8| + |0.4 - 1| + |0 - 0.2| + |0.3 - 0.8| + |0.9 - 0.8| = 0.9 + 0.6 + 0.5 + 0.6 + 0.2 + 0.5 + 0.1 = 3.4$$

$$d_1(P_1, P_4)= 3.4/7= 0.486$$

Al comparar los valores 0.486 con 0.357 se concluye que existe mayor diferencia entre las instituciones $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_4}$ que entre las instituciones $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$. En este orden de ideas la matriz

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5

P_1	0	0.357	$d_1(P_1,P_3)$	0.486	$d_1(P_1,P_5)$
P_2		0	$d_1(P_2,P_3)$	$d_1(P_2,P_4)$	$d_1(P_2,P_5)$
P_3			0	$d_1(P_3,P_4)$	$d_1(P_3,P_5)$
P_4				0	$d_1(P_4,P_5)$
P_5					0

Facilita realizar comparaciones entre pares de instituciones, valores pequeños indican poca diferencia entre pares de instituciones mientras que valores próximos a 1 indican mayor diferencia. Por tratarse de una matriz simétrica no se requiere trabajar con los valores situados debajo de la diagonal principal.

Es posible trabajar también con la ***matriz de semejanza***que se obtiene de la anterior tomando las diferencias respecto a la unidad. Para esto se define:

$\mathbf{d_2(P_i, P_j) = 1 - d_1(P_i, P_j)}$entonces:

$d_2(P_1,P_2) = 1 - 0.357 = 0.643$

$d_2(P_1,P_4) = 1 - 0.486 = 0.514$

El significado de la matriz de semejanza es que valores pequeños indican poca semejanza y valores próximos a 1 indican mayor semejanza. Nótese que ahora la diagonal principal se llena de unos.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	1	0.643	$d_2(P_1,P_3)$	0.514	$d_2(P_1,P_5)$
P_2		1	$d_2(P_2,P_3)$	$d_2(P_2,P_4)$	$d_2(P_2,P_5)$
P_3			1	$d_2(P_3,P_4)$	$d_2(P_3,P_5)$
P_4				1	$d_2(P_4,P_5)$
P_5					1

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Si se calculan las restantes distancias se puede formar la matriz de semejanza siguiente:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	1	0.643	0.715	0.514	0.672
P_2		1	0.7	0.572	0.615
P_3			1	0.658	0.815
P_4				1	0.6
P_5					1

En la matriz anterior se observa que la mayor semejanza la tienen $\mathbf{P_3}$ y $\mathbf{P_5}$ con valor de 0.815 y la menor semejanza es decir la mayor diferencia la tienen $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_4}$ con valor de 0.514.

Los restantes valores permiten realizar comparaciones por pares, así por ejemplo se puede decir que $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_4}$ se diferencian más que $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_5}$.

La información obtenida en la tabla anterior puede también procesarse situando diferentes umbrales. Si se considera un umbral de 0.5 se quiere significar que todos los valores mayores o iguales a 0.5 se convierten en 1 y se tiene la siguiente tabla:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	1	1	1	1	1
P_2		1	1	1	1
P_3			1	1	1
P_4				1	1
P_5					1

Lo que indica que para ese umbral no existen diferencias entre sus elementos, además la relación es reflexiva simétrica y transitiva.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Si el umbral es 0.6 entonces se tiene:

	P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_1	1	1	1	0	1
P_2		1	1	0	1
P_3			1	1	1
P_4				1	1
P_5					1

Es decir no existe semejanza entre **P_1** y **P_4** ni entre **P_2** y **P_4** aunque sí existe semejanza entre **P_1** y **P_2**. En este caso no se cumple la propiedad de transitividad ya que la relación directa entre **P_1** y **P_4** toma el valor cero mientras que la relación indirecta de **P_1** y **P_4** a través de **P_3** que se obtiene como el mínimo de las directas de **P_1** y **P_3** y de **P_3** y **P_4** toma el valor uno.

Para un umbral de 0.7 se tiene:

	P_1	**P_2**	**P_3**	**P_4**	**P_5**
P_1	1	0	1	0	0
P_2		1	1	0	0
P_3			1	0	1
P_4				1	0
P_5					1

En este caso existe semejanza entre **P_1** y **P_3** así como entre **P_3** y **P_5** pero no existe semejanza entre **P_1** y **P_5**. Esta relación tampoco es transitiva ya que la relación directa entre **P_1** y **P_5** toma el valor cero mientras que las indirectas a través de **P_3** toman el valor uno.

Si por último se toma como umbral el valor de 0.8, entonces solamente mantienen semejanza **P_3** y **P_5.** Se aprecia que a medida que se eleva el umbral disminuyen los pares de relaciones con valor de 1. En un problema práctico esto no es un inconveniente ya que le permite libertad al investigador para evaluar diferentes umbrales atendiendo a los resultados que considere interesantes.

Tiene interés también formar *grupos homogéneos*, es decir poder agrupar a más de dos elementos de **E_1** atendiendo a la semejanza o parecido entre sus miembros, y de esta manera forman entonces las llamadas ***sub relaciones máximas de similitud*** como aquellas relaciones de similitud para las que no existen otras relaciones de similitud que las contengan estrictamente. El algoritmo que sigue es una vía para obtener estas relaciones.

1.5.5- Algoritmo de Pichat

El siguiente algoritmo permite obtener las relaciones máximas de similitud. Se mostrará con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1

Considérese la siguiente matriz reflexiva y simétrica, por lo que solamente se utiliza la diagonal principal con su parte superior.

	a	b	c	d	e	f
a	1		1			1
b		1		1	1	
c			1			1
d				1	1	1
e					1	
f						1

En ella solamente aparecen ceros y unos, los ceros indican que no existe semejanza entre los elementos situados en la fila y columna correspondiente, y los unos indican que sí existe semejanza o parecido entre ellos.

Para fijar un cero o un uno se puede aplicar la distancia de Hamming, el coeficiente de adecuación u otra variante que sirva de medida de la cercanía o el alejamiento y después se sitúa, como ya se explicó, un umbral, de tal manera que los valores por encima del umbral se convierten en unos y los que están debajo del umbral se convierten en ceros.

En la práctica resulta conveniente repetir el proceso con diferentes umbrales para detectar las regularidades que aparecen y obtener conclusiones mejores.

La idea del algoritmo consiste en eliminar todas las combinaciones de cada elemento de una fila con cada elemento de una columna donde aparece por lo menos un cero. Para eso se forma el llamado producto booleano de la manera siguiente:

$$(a + bde)\,(b + cf)\,(c + de)\,(e + f)$$

Se toma el término **(a + bde)** ya que en la fila **a** se encuentran las columnas **b**, **d** y **e** con el valor cero, el término **(b + cf)** ya que en la fila **b** se encuentran las columnas **c** y **f** con el valor cero, en la fila **c** ocurre lo mismo para las columnas **d** y **e** por lo que se considera el término **(c + de)** y el término **(e+ f)** se toma ya que para la fila **e** aparece un cero en la columna **f**.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Debe notarse que no se ha tomado el término que comienza con la **d** ya que en esa fila no aparecen ceros. Es decir cada elemento de la fila se combina con los elementos donde no aparece el uno y se forman las combinaciones **(a + bde), (b + cf), (c + de)** y **(e + f)** respectivamente y ahora se multiplican como si fuese un producto ordinario y se obtiene: **(a + bde) (b + cf) = ab + acf + bdeb + bdecf**

En el término **bdeb** se elimina una **b** ya que se repite y solo queda **bde** además se elimina el término **bdecf** ya que contiene a **bde**. Solo queda **ab + acf + bde**.

Las sub relaciones son las siguientes:

	a	b
a	1	
b		1

	a	c	f
a	1	1	1
c	1	1	1
f	1	1	1

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

La lectura de esto es: ninguna subrelación que contenga al subconjunto **{ a, b }** podrá ser una subrelación máxima de similitud pero es posible que **{b, d, e }** o **{a, c, f }** o ambas lo sean o no lo sean y formen parte de otras, por tanto hay que continuar con el algoritmo. El nuevo producto es **(ab + acf + bde)(c + de) = abc + abde + acfc + acfde + bdec+ bdede**.

Del término **bdede** se elimina **de** por repetirse, del término **acfc** se elimina la **c** por repetirse, por lo que quedaría **abc + abde + acf + acfde + bdec+ bde** y de esta expresión se eliminan **abde**, **acfde** y **bdec** por contener a los términos **bde** y **acf** quedando solamente **abc + acf + bde**.

El último producto es **(abc + acf + bde) (e+ f) = abce + abcf + acfe + acff +bdee + bdef** , continuando el proceso se tienen las simplificaciones siguientes: **bdee** se convierte en **bde**, **acff** se convierte en **acf** por lo que queda **abce + abcf + acfe + acf + bde + bdef** y de aquí se elimina a **bdef** por contener a **bde** y se eliminan **acfe** y **abcf** por contener a **acf**. Queda entonces **abce + bde + acf**. El complemento de estos términos nos da las sub relaciones máximas de similitud que serán: **df**, **acf** y **bde**. Se toma el complemento ya que en el procedimiento descrito se ha aplicado el criterio de eliminar todas las combinaciones donde aparece al menos un cero y la negación de ese criterio es quedarse con las combinaciones formadas solo por unos.

	d	f
d	1	1
f	1	1

	a	c	f
a	1	1	1
c	1	1	1
f	1	1	1

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

Ejemplo 2:

	a	b	c	d	e	f	g
a	1		1			1	1
b		1		1	1		1
c			1			1	
d				1			
e					1		1
f						1	
g							1

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Los productos booleanos son los siguientes:

(a +bde)(b +cf) = ab + acf + bde

(ab + acf + bde)(c +deg) = abc + acf + bdec + bdeg

(abc + acf + bdec + bdeg)(d+efg) = abcd + acfd + acfeg +bdec + bdeg

(abcd + acfd + acfeg +bdec + bdeg)(e + f) = acfd + acfeg +bdec +bdeg

(acfd + acfeg +bdec +bdeg)(f + g) = acfd + acfeg + bdecf + bdeg

Los complementos de los últimos términos son respectivamente los siguietes: **beg**, **bd, ag** y **acf** que indican las sub relaciones máximas de similitud.

	b	e	g
b	1	1	1
e	1	1	1
g	1	1	1

	b	d
b	1	1
d	1	1

	a	g
a	1	1
g	1	1

	a	c	f
a	1	1	1
c	1	1	1
f	1	1	1

En el problema del agrupamiento de objetos por características afines tratado en este punto se parte de los conjuntos $\mathbf{E_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}}$ y $\mathbf{E_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}}$ y los elementos de $\mathbf{E_1}$ se agrupan de acuerdo a los criterios de E_2, pero también puede resultar de interés agrupar los elementos de $\mathbf{E_2}$ tomando como criterio a los elementos de $\mathbf{E_1}$ y de ambos resultados obtener conclusiones.

En la actividad docente aparecen muchos problemas que en esencia son problemas de agrupamiento. A continuación se hace referencia a algunos de ellos.

Cuando se discuten planes y programas de estudio tiene sentido formular la siguiente pregunta: ¿Como agrupar las asignaturas y disciplinas atendiendo a los conocimientos, habilidades y valores que tributan?. Generalmente esto se resuelve a partir de criterios de precedencia y sobre la base de la experiencia acumulada por los especialistas que participan, pero debido a la carga subjetiva que esto tiene, si se logra formar grupos con habilidades y valores similares puede ser conveniente formar las asignaturas de un curso con elementos diferentes de esos grupos.

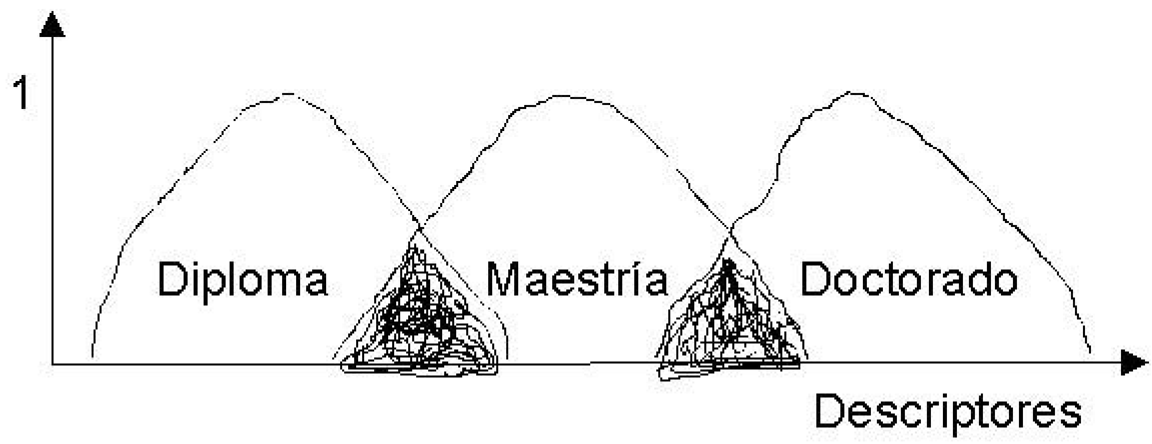
De igual manera, si una carrera se inicia con 200 estudiantes en primer año, no existen muchos criterios para formar los grupos de estudio, pero al pasarse al segundo año las condiciones son otras y el algoritmo de agrupamiento puede facilitar nuevas decisiones sobre los grupos que deben formarse a partir del segundo año.

Por otra parte, los Trabajos de Diploma, las Tesis de Maestría y las Tesis de Doctorado tienen características y cualidades comunes y otras que los diferencian, pero siempre podemos establecer gradaciones, así por ejemplo la novedad de un tema de doctorado deberá superar a la de un tema de maestría y esta al tema de un trabajo de diploma y de igual manera la bibliografía utilizada en el doctorado deberá superar en amplitud, profundidad y actualidad a la de la maestría y esta al diploma.

Los reglamentos para el trabajo docente y científico establecen principios y requisitos generales para los diplomas, las maestrías y los doctorados, pero las fronteras entre el trabajo de diploma y la maestría no están definidas nítidamente y lo mismo ocurre con las fronteras entre una tesis de maestría y un doctorado, así por ejemplo es natural escuchar expresiones como las siguientes: “Está tan bueno este trabajo de diploma que con un poquito más es una tesis de maestría”, o “los resultados de esta tesis de maestría son tan profundos que pueden conducir a un doctorado”.

Donde no se establecen ambigüedades es en las diferencias entre un trabajo de diploma y un doctorado ya que por pobre que resulte el doctorado siempre superará al diploma aunque puede darse el caso de doctorados que se parezcan más a una buena maestría y tesis de maestría que se parezcan más a un buen trabajo de diploma. De igual manera por amplio y profundo que sea un diploma nunca llegará al nivel del doctorado.

El siguiente esquema ilustra la idea expuesta:



Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

El problema del agrupamiento puede plantearse de la manera siguiente:

Establecer dos conjuntos de descriptores, es decir de características o cualidades, uno que se acerque más a los trabajos de diploma y las maestrías y otro que represente mejor las maestrías y los doctorados. Habrá descriptores comunes para diplomas y maestrías pero deben cumplirse en grado diferente y de igual manera habrá descriptores comunes para maestrías y doctorados pero deben cumplirse en grado diferente.

Considérese las siguientes notaciones:

$N_{\mathbf{Diploma}}$: cantidad de tesis de diploma.

$N_{\mathbf{Maestría}}$ **:** cantidad de tesis de maestría.

$N_{\mathbf{Doctorado:}}$ cantidad de tesis de doctorado.

Entonces se dispondrá de:

$N_{\mathbf{Diploma}} + N_{\mathbf{Maestría}}$ tesis con un conjunto de $\mathbf{D_1}$ descriptores y

$N_{\mathbf{Maestría}} + N_{\mathbf{Doctorado}}$ tesis con un conjunto de $\mathbf{D_2}$ descriptores.

Al aplicarse el algoritmo del agrupamiento para el grupo formado por $\mathbf{D_1}$ trabajos de diploma y tesis de maestría puede ocurrir que aparezcan sub relaciones máximas de similitud que contengan solo diplomas, otras solo maestrías y otras que contengan de manera conjunta tesis de diploma y de maestría. Si la proporción de los trabajos de diploma en las sub relaciones donde aparecen diplomas con maestrías supera a la proporción de las tesis de maestría esto indica una fortaleza en la categoría de los diplomas ya que de lo contrario existiría un grupo considerable de maestrías que serían como diplomas y esto no es bueno, indicaría una debilidad.

De igual manera, al aplicarse el algoritmo del agrupamiento en el grupo formado por $\mathbf{D_2}$ tesis de maestrías y de doctorado pueden aparecer sub relaciones máximas de similitud que contengan solo maestrías, otras solo doctorados y algunas que incluyan conjuntamente maestrías y doctorados. Si en estas últimas la proporción de las maestrías supera a las de doctorados, esto indica una fortaleza en la preparación de los maestrantes ya que de lo contrario existirían muchas tesis de doctorado que serían como tesis de maestría y esto indica una debilidad.

Una característica de este algoritmo es que no agrupa de manera disjunta como hacen muchos algoritmos de agrupamiento; esto en lugar de ser una desventaja es una ventaja ya que el carácter no disjunto se corresponde con la característica de granularidad que posee el enfoque difuso que estudiamos. Si las sub relaciones máximas de similitud para cualquier nivel de significación siempre estuviesen formadas solamente por trabajos de diploma, tesis de maestrías y tesis doctorados, se trataría de un caso ideal. Como se aprecia, el algoritmo de agrupamiento permite obtener conclusiones de valor práctico sobre la calidad del proceso docente educativo.

CAPÍTULO 2

2- Acerca de la formación de valores en los estudiantes

En los últimos años se discute mucho en medios académicos acerca de la formación de valores en los estudiantes, lográndose avances incuestionables en esta esfera como son la identificación de un conjunto de valores entre los principales a lograr por las instituciones educativas. Incluso en las páginas que promueven en Internet a las universidades, institutos y otros centros aparece entre las bondades de la institución los valores que desarrollan en sus educandos.

Estos valores declarados recogen de manera general un conjunto de principios éticos, morales y de formación humanística o científico técnica atendiendo a los objetivos de cada centro, pero lamentablemente no siempre se realizan investigaciones que permitan conocer en que grado se logra que los valores declarados formen parte de los modos de pensar y actuar de sus educandos. Se trata de un problema de naturaleza en extremo compleja en el cual inciden muchos factores objetivos y subjetivos que parten de la familia, la sociedad y lo bueno o malo que puede hacerse en el seno de cada institución y en particular por cada educador en su actividad diaria con sus alumnos.

Para el caso de nuestro centro, como parte del perfeccionamiento de los Planes de Estudio, en los últimos años se han logrado avances en materia de formación de valores. Se ha logrado identificar un conjunto de valores como los principales a desarrollar en nuestra institución, así como un conjunto de acciones que de materializarse adecuadamente inciden en la aprehensión de esos valores. Seguidamente se muestra la metodología y los resultados obtenidos en una investigación sobre formación de valores realizada en la Facultad de Ingeniería Industrial de la CUJAE.

Es bien conocido que tanto las acciones como los valores no se manifiestan de forma aislada, sino que están estrechamente vinculados, por lo que poseen carácter sistémico. Esta condición nos permite considerar *"relaciones de incidencia"* de tres tipos diferentes: incidencia de cada acción sobre las restantes, incidencia de cada acción sobre cada uno de los valores e incidencia de cada valor sobre los restantes.

Aunque en los trabajos realizados para la definición de los principales valores y las correspondientes acciones han participado de manera conjunta sus principales protagonistas, es decir los profesores y los estudiantes a través de las vías institucionales existentes y mediante la discusión colectiva, no todo ha sido revelado, por tratarse de un tema de gran riqueza vinculado con los modos de pensar y actuar de los hombres en el que influyen los más disímiles factores objetivos y subjetivos.

A continuación se describe brevemente una manera de abordar este problema, para tales fines se construyen "matrices de incidencia" en correspondencia con las relaciones de incidencia ya mencionadas, a partir de la información que brindan mediante encuestas, los estudiantes.

La aplicación de estas técnicas resulta plausible si se tiene en cuenta que el objeto a investigar corresponde a un fenómeno eminentemente social, y los métodos y algoritmos a utilizar nos permiten responder preguntas como las siguientes:

1. ¿Cuál orden de preferencia entre los valores establecen los estudiantes?
2. ¿Cuáles afinidades existen entre valores y acciones?
3. ¿En cual grado inciden las acciones sobre los valores?
4. ¿Cómo se comporta la aprehensión de los valores al pasar de un año al siguiente?

Estas y otras preguntas tienen indudable valor para el trabajo educativo a desarrollar.

2.1- Valores y acciones a utilizar

Para el desarrollo del trabajo se puede utilizar el siguiente conjunto de valores:

- Amor a la patria.
- Honestidad.
- Sentido del trabajo.
- Amplia cultura.
- Responsabilidad.
- Solidaridad.
- Incondicionalidad.
- Sentido de pertenencia.
- Crítico y autocrítico.
- Creatividad.
- Objetividad.
- Protagonismo.

En lo fundamental, salvo pequeños cambios, se han tomado los principales valores ya definidos en nuestra institución.

Los valores pueden desarrollarse a través de diversas acciones como parte de la labor educativa de los profesores. A continuación se enumera un conjunto de 20 acciones que pueden desarrollar los profesores de matemática. Este conjunto de acciones, aunque amplio, no pretende ser el óptimo, y se ha redactado de tal manera que resulte comprensible por los estudiantes a encuestar. Desde lo curricular se incluyen acciones específicas que pueden formarse a través de la Disciplina Matemática por ser la materia que se ha utilizado como referencia para este trabajo.

Las acciones son las siguientes:

1. Destacar efemérides nacionales e internacionales.
2. Promover el intercambio de ideas y la reflexión acerca de los temas de actualidad nacional e internacional.
3. Propiciar tareas docentes atendiendo a las diferencias individuales.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

4. Exigirle a los estudiantes en correspondencia con lo normado en los reglamentos.
5. Crear nuevos conocimientos y habilidades a partir de las definiciones y teoremas del curso de matemática.
6. Demostrar teoremas y propiedades que garanticen métodos de trabajo propios de la matemática.
7. Evaluar las diversas vías de solución que puede tener un mismo problema.
8. Propiciar la participación en eventos científicos.
9. Aplicar medidas educativas y de control para evitar cualquier manifestación de fraude.
10. Propiciar el uso de un idioma extranjero.
11. Promover el uso de la informática y de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones.
12. Promover el cuidado de la propiedad social y lo reglamentado en materia de protección física.
13. Participar con los estudiantes en la vida social y cultural de la institución.
14. Promover el pensamiento lógico a través de nociones intuitivas e ideas físicas y geométricas.
15. Promover la modelación matemática de problemas prácticos.
16. Predicar con el ejemplo.
17. Evaluar en que condiciones resulta válido aplicar la teoría que se estudia y en cuales no.
18. Corregir deficiencias de tecnicismo algebraico y otras de la enseñanza precedente.
19. Combinar cálculos manuales con computarizados según convenga e interpretar los resultados.
20. Visitar la residencia estudiantil.

2.2- Aplicación del modelo relacional borroso para la solución del problema

Para la solución de este problema utilizamos el operador de convolución **maxmin,** recordemos que se define de la manera siguiente:

Si se tienen los conjuntos **A** con **m** elementos, **B** con **n** elementos y **C** con **p** elementos y se conocen las relaciones de incidencia de **A** en **B** y de **B** en **C**, es posible conocer la relación de incidencia de **A** en **C**. Sean $0 \leq \mu_{aibj} \leq 1$ y $0 \leq \mu_{bjck} \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq p$ los valores que toman las relaciones de incidencia de cada elemento de **A** en cada elemento de **B** y de cada elemento de **B** en cada elemento de **C** respectivamente.

En la práctica los valores μ_{aibj} y μ_{bjck} pueden ser tanto medidas como valuaciones, es decir estimaciones numéricas objetivas o subjetivas y los valores próximos a cero indican poca incidencia mientras que valores próximos a uno indican mayor incidencia. Para el caso que nos ocupa se trata de valuaciones a partir de las respuestas de los estudiantes encuestados. Entonces el valor μ_{aick} que indica la relación de incidencia de **A** en **C** se define de la manera siguiente:

$$m_{aick} = \vee_{bj} (\mu_{aibj} \wedge \mu_{bjck})$$

aquí los símbolos $\vee$ y $\wedge$ representan respectivamente los operadores de máximo y de mínimo.

Supongamos que tenemos **m** acciones y **p** valores y consideremos las siguientes matrices de incidencia:

m×m	**m×p**	**p×p**
Acc → Acc	**Acc → Val**	**Val → Val**

Que representan respectivamente la incidencia de las acciones en las acciones, de las acciones en los valores y de los valores en los valores. Al aplicar la convolución **maxmin** se obtiene la relación de incidencia total de las acciones en los valores y con esta matriz es posible aplicar un algoritmo de ordenamiento como el que se ilustra en el problema anterior con lo cual podemos conocer la manera en que los estudiantes ordenan los valores. Es posible también encontrar los llamados *"efectos olvidados"* y conocer cuales acciones son las que realmente inciden más en los valores.

Es conocido que ningún modelo puede representar la realidad tal y como es, ya que los modelos siempre son aproximaciones a esa realidad, pero este modelo puede enriquecerse y analizar el problema no solamente como lo ven los estudiantes, sino también como lo ven los docentes y así obtener conclusiones de mayor alcance en materia de formación de valores.

2.2.1- Resultados obtenidos

Se consideraron las siguientes matrices:

$\mathbf{A_1}$ Matriz de incidencia de cada acción sobre las restantes según el criterio de los estudiantes. Se trata de una matriz 20×20 que se obtuvo a partir de 40 estudiantes encuestados.

$\mathbf{B_1}$ Matriz de incidencia de cada valor sobre los restantes según el criterio de los estudiantes. Se trata de una matriz 12×12 obtenida de 36 estudiantes encuestados.

$\mathbf{R_1}$ Matriz de incidencia de cada acción sobre cada uno de los valores según el criterio de los estudiantes. Se trata de una matriz 20×12 obtenida de las encuestas realizadas a 40 estudiantes.

A partir de las matrices anteriores y mediante el operador *maxmin* se obtuvo la *relación global de incidencia* siguiente:

$\mathbf{[R]_1 = A_1 \circ R_1 \circ B_1}$ que nos Indica la relación de incidencia global según los estudiantes encuestados.

Con la información obtenida se aplicó un algoritmo para el ordenamiento que permite obtener conclusiones de valor práctico para la actividad que en materia de valores debemos realizar. Los detalles del algoritmo pueden verse en este texto al tratarse el problema sobre la evaluación del aprendizaje desde una perspectiva de la subjetividad y la incertidumbre.

El principal resultado del trabajo es el siguiente:

Los estudiantes consideran los valores en el siguiente orden:

- Amor a la Patria
- Sentido de Pertenencia
- Honestidad, Solidaridad
- Responsabilidad, Crítico y autocrítico
- Protagonismo
- Creatividad, Sentido del Trabajo, Amplia Cultura, Objetividad, incondicionalidad.

Estos resultados sugieren que en materia de formación de valores se le deberá prestar mayor atención al Protagonismo, Creatividad, Sentido del Trabajo, Amplia Cultura, Objetividad e Incondicionalidad por ser los que ocupan los últimos lugares en el ordenamiento.

2.2.1.1- Escala Utilizada

Para formar las matrices a partir de las encuestas a los estudiantes se utilizó la escala siguiente:

Valor 1 - La incidencia es total

Valor 0.9 – La incidencia es muy alta

Valor 0.8 –La incidencia es alta

Valor 0.7 – Bastante elevada incidencia

Valor 0.6- Mas bien elevada incidencia

Valor 0.5 - Regular incidencia

Valor 0.4 – Mas bien poca incidencia

Valor 0.3 – Escasa incidencia

Valor 0.2 – Bastante poca incidencia

Valor 0.1 – Muy escasa incidencia

Valor 0 – La incidencia es nula

Teniendo en cuenta que los valores están asociados con los modos de pensar y de actuar de los hombres, la metodología propuesta se fundamenta en el siguiente criterio: se acepta que si un valor está poco desarrollado en un estudiante, este refiera poca incidencia de las acciones en ese valor y si está mas desarrollado refiera mayor incidencia. De igual manera se acepta que si un valor esta poco desarrollado en un estudiante este refiera poca incidencia de otros valores en ese valor y si está más desarrollado refiera mayor incidencia.

A continuación se muestra la encuesta realizada para evaluar la incidencia de los valores en los valores.

2.2.2- Encuesta acerca de la formación de valores

El objetivo de esta encuesta es que usted, atendiendo a su opinión personal, llene todas las casillas de la tabla que se adjunta. En cada casilla deberá cuantificar en que medida incide o influye un valor en otro.

La cuantificación se realiza atendiendo a la siguiente escala:

Grado de incidencia	Valor a asignar
La incidencia es total	1.0
La incidencia es muy alta	0.9
La incidencia es alta	0.8
Bastante elevada incidencia	07
Mas bien elevada incidencia	0.6
Regular incidencia	0.5
Mas bien poca incidencia	0.4
Escasa incidencia	0.3
Bastante poca incidencia	0.2
Muy escasa incidencia	0.1
La incidencia es nula	0.0

Una vez más se reitera que se trata de su **opinión personal,** formada como es lógico de elementos objetivos y subjetivos. Los valores de mayor significación definidos en nuestra institución son los siguientes:

A-Amor a la Patria : Honrar y defender con su conducta a la patria.

B-Honestidad : Ser sincero, no ocultar ni tergiversar la verdad. Luchar contra la mentira, el engaño la demagogia. Repudiar todas las formas de corrupción.

C-Sentido del Trabajo : Tener disposición para cumplir las tareas, querer ser trabajador y respetar el trabajo de los demás. Apreciar el trabajo como un medio de progreso social y realización personal.

D-Amplia Cultura : Incrementar constantemente sus conocimientos no solo en aquellas ramas propias de su ciencia y técnica sino también en otras de las ciencias sociales, históricas, el arte, la literatura, el deporte etc.

E-Responsabilidad: .Cumplir con sus deberes y tareas. Responder por sus actos y rectificar lo mal hecho.

F-Solidaridad : Sentimiento que impulsa a los hombres a prestarse ayuda mutua. Subordinar sus intereses personales a los de la humanidad.

G-Incondicionalidad : Disposición al cumplimiento del deber ante cualquier llamado de la patria, fiel al pensamiento martiano "El deber de un hombre está allí donde es mas útil".

H-Sentido de pertenencia : Sentirse orgulloso de ser estudiante y graduado del **ISPJAE** y contribuir activamente al logro de los mejores resultados.

I-Crítico y autocrítico : Descubrir, reconocer y superar los errores e insuficiencias en las actividades en que se desempeña.

J-Creatividad : Actividad humana que produce valores materiales y espirituales cualitativamente nuevos. Tener iniciativa propia, mejorar lo existente y buscar nuevas perspectivas de lo convencional.

K-Objetividad : Reflejar con rigurosidad científica los fenómenos de la realidad que está estudiando.

L-Protagonismo : Participar activamente en la dirección de los procesos de la vida estudiantil y prepararse como conductor de los procesos de cambio con la plena implicación de todos los miembros de la organización en que trabaje

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**
A	1											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
B		1										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
C			1									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
D				1								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
E					1							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
F						1						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
G							1					
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
H								1				
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
I									1			
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
J										1		

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
K											1	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
L												1

Encuestas similares se realizaron para evaluar las incidencias de las acciones en los valores y de las acciones en las acciones.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

CAPÍTULO 3

3- Propuesta sobre evaluación del aprendizaje

De manera general se acepta entre maestros y profesores que la acción de evaluar resulta válida entre otras cosas para estimar el grado de cumplimiento de los objetivos previstos para una clase, un tema, una asignatura, disciplina o carrera. Las diferencias surgen cuando se discute por un colectivo de educadores sobre qué y cómo evaluar.

En general los dos principales protagonistas del acto de evaluación: los docentes y los estudiantes no manifiestan siempre la misma percepción sobre la acción de evaluar. El docente como regla evalúa lo que considera importante y necesario pero no siempre coincide con lo que el estudiante asimila y acepta como valioso y útil. Incluso entre los educandos se dan diversas situaciones que oscilan entre los que se preparan porque se sienten motivados y los que lo hacen porque tienen que aprobar la asignatura.

El trabajo de motivación y de formación vocacional puede atenuar esta deficiencia; incluso en materias tradicionalmente complejas como la matemática y la física una vía pueden ser los llamados problemas profesionales, es decir aquellos problemas que por su amplitud y complejidad pueden abordarse en los diversos temas de un curso o a través de varios cursos o disciplinas y que tributan al modo de pensar y actuar específico de esa carrera. En este orden de ideas un curso de cálculo diferencial no puede organizarse para un estudiante que se forma como ingeniero industrial de igual manera a como se hace para el ingeniero informático.

Algunas preguntas de interés pueden ser las siguientes:

- ¿Cómo lograr la máxima objetividad en la evaluación de los conocimientos, habilidades y valores de nuestros educandos?
- ¿En que medida la evaluación responde a las necesidades sociales actuales y futuras?
- ¿En que medida la evaluación se corresponde con las tendencias en el campo científico investigativo y cultural de la época?
- ¿En que medida se manifiesta la coherencia y unidad lógica necesaria entre los diversos criterios y procedimientos de evaluación para un tema, asignatura, disciplina o carrera?

Como se aprecia se trata de un proceso complejo en el que inciden factores tanto objetivos como subjetivos. Entre los objetivos puede considerarse las diversas maneras en que se organiza el proceso docente educativo que no siempre se adapta o ajusta a las particularidades de una asignatura; por ejemplo algunas materias requieren mayor tiempo que otras para que los conocimientos, habilidades y valores que tributan sean aprehendidos por la masa de estudiantes y esto no siempre se atiende. Algunos factores subjetivos se asocian a la variedad de criterios que se dan entre docentes sobre qué y cómo evaluar.

En este orden de ideas un principio generalmente aceptado para la evaluación final de una asignatura o disciplina es el principio de considerar el criterio que tiene el profesor acerca del

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

desempeño del estudiante durante el curso, y en casos de excelente desempeño eximir al estudiante del examen otorgándole la máxima calificación. Aún para estas condiciones se dan casos de profesores que convalidan mas estudiantes que otros, es decir no existe unidad de criterios.

Corresponde a los educadores a través de la evaluación, llegar a conclusiones sobre las diferencias que se dan en cuanto al desarrollo de la personalidad del educando entre su entrada y salida.

A diferencia de otros componentes del proceso docente educativo como los objetivos, contenidos o formas y métodos de enseñanza tiene una cualidad que la distingue y es la de decidir si se pasa o no se pasa de grado o año, si se alcanza o no el título por el que se opta, si se aprueba o no y de aprobarse en cual medida. Es la componente encargada de resaltar valores o cualidades o en su defecto la encargada de señalar incompetencias.

No siempre el sistema de evaluación establecido en una institución es el mas apropiado para una materia o disciplina en particular, en ocasiones estas deben ajustarse al sistema cuando debe ser al revés por lo que se deben conciliar ambas necesidades.

Existen conceptos y métodos que no pueden soslayarse en un proceso de evaluación de conocimientos, habilidades y valores. Por ejemplo, la optimización como concepto y principio debe formar parte de los modos de pensar y actuar del ingeniero; para el caso de la ingeniería industrial se requiere optimizar recursos materiales, humanos y financieros, mientras que el ingeniero informático requiere optimizar tiempo de procesamiento y memoria al usar computadoras por lo que estos aspectos deben desarrollarse en las materias que tributan a la formación de estos profesionales.

La evaluación deberá atenerse a criterios tanto de coherencia y concordancia como de factibilidad donde se conjuguen los componentes académico, laboral e investigativo. Se deberá tener en cuenta el tiempo real de que dispone el estudiante para procesar los conocimientos y adquirir las habilidades así como los conocimientos anteriores que garantizan el cumplimiento de los objetivos previstos. Estas reflexiones y otras que el lector puede hacer muestran como el tema de la evaluación resulta muy complejo, de mucha subjetividad. Ya al inicio de este trabajo se señalaron ejemplos reales donde se aprecia el nivel de incertidumbre asociado a los resultados de una evaluación.

3.1- Modelo de auto evaluación a partir del desarrollo de competencias

A continuación se propone un modelo de auto evaluación que puede aplicarse durante todo el curso como diagnóstico para conocer las competencias que se van logrando y también las insuficiencias que aun se tienen previo al acto de evaluación. El modelo propuesto no contradice las formas y métodos establecidos para las evaluaciones parciales o finales de una asignatura o disciplina y puede aplicarse tanto como auto evaluación por cada estudiante o por el profesor con su grupo de estudios.

La metodología propuesta permite a tiempo realizar un chequeo o diagnóstico sobre el estado de preparación real de cada estudiante y se basa en el principio de ordenar las capacidades o competencias que van desarrollándose durante un curso o semestre por una disciplina o asignatura. A continuación se ilustra mediante un ejemplo sencillo y solo con fines demostrativos a partir de capacidades o competencias de un curso de matemática para carreras de ingeniería.

Algunas c apacidades o competencias a desarrollar durante el curso de matemática:

P1 – Dominar las reglas del tecnicismo algebraico.

P2 – Interpretar el texto de un problema atendiendo a sus variables de entrada y salida, funciones implicadas y relaciones entre ellas.

P3 – Elegir el método o algoritmo indicado para realizar un calculo o resolver un problema.

P4 – Interpretar la solución obtenida al realizar un cálculo o resolver un problema.

P5 – Evaluar correctamente las condiciones para las cuales resulta válido aplicar un método, una propiedad un teorema o un algoritmo.

P6 – Aplicar vías alternativas para comprobar la solución de un problema o un cálculo realizado.

P7 – Adaptarse al modo de pensar o actuar específico de cada tema o grupo de clases.

P8 – Dominar los rudimentos de la geometría analítica, las funciones trigonométricas y exponenciales.

P9 – Evaluar la unidad y coherencia que debe existir entre los datos del problema o la información del objeto a modelar y la solución que se busca.

P10 – Ajustar o adaptar un nuevo modelo a otros conocidos.

P11 – Apoyarse en ideas intuitivas e interpretaciones geométricas y físicas.

P12 – Buscar analogías y combinaciones de ideas conocidas, construir nuevas situaciones problémicas y analizar los problemas a partir de situaciones extremas en sus datos.

P13 –Desarrollar modos de pensar y actuar tanto de manera independiente como a través del grupo o pequeños colectivos de estudio.

Estas capacidades, u otras que pueden considerarse, se van desarrollando a través de los contenidos, pero durante un semestre o curso pueden ocurrir avances o retrocesos en una misma capacidad. El modelo que se propone tiene por objetivo el ordenamiento de las capacidades o competencias a partir de etapas o periodos en que puede dividirse el semestre o curso.

Resulta frecuente en matemáticas y puede ocurrir en otras materias, ir pasando de un contenido a otro en un curso o semestre donde muchos estudiantes van acumulando incompetencias e insuficiencias, pero tanto ellos como los propios docentes piensan más en términos del propio contenido que en las causas de las fallas que tienen. No se pretende tampoco cuestionar la validez de las ideas de otros cuando de evaluación del aprendizaje se trata, mas bien con esta propuesta se pretende complementar o apoyar las formas y métodos establecidas para la evaluación de una asignatura o disciplina ya que no contradice ningún criterio establecido.

El método puede implementarse fácilmente en una computadora con lo cual puede convertirse como en un juego para el estudiante, como un entretenimiento complementario al estudio que le permite conocer su progreso o retroceso en las capacidades o competencias.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

3.1.1- Algoritmo para el ordenamiento de las capacidades o competencias

El algoritmo que se propone aparece desarrollado en la literatura como vía para el ordenamiento de un conjunto **E1 = { P1, P2, ..., Pm}** de **m** elementos a partir de otro conjunto **E2 = { C1, C2, ..., Cn }** de **n** características o cualidades que forman los criterios para el ordenamiento. Estas técnicas basadas en los principios de la matemática borrosa, se han desarrollado últimamente a partir de los trabajos de Arnold Kaufmann y Jaime Gil Aluja para el planteamiento y solución de muchos problemas económicos, de gestión y sociales en general, aunque no resulta habitual su uso en temas asociados a la actividad educacional por lo que puede considerarse su aplicación un elemento novedoso en esta esfera.

Para el caso que nos ocupa tomaremos como conjunto **E1** el formado por las capacidades o competencias a desarrollar durante un curso o semestre y **E2** el conjunto formado por periodos de tiempo (semanas por ejemplo) o por los contenidos que se van impartiendo en uno o varios periodos. Solo con fines indicativos consideremos un curso de matemática en carreras de ingeniería y dentro de él el tema de Ecuaciones Diferenciales. Consideremos los contenidos siguientes asociados a ese tema:

C1 - Ecuaciones diferenciales de primer orden.

C2 – Ecuaciones diferenciales de orden superior.

C3 – Sistemas de ecuaciones diferenciales.

C4 – Condiciones de existencia y unicidad.

C5 – Elementos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales.

C6 – Problemas que se modelan mediante ecuaciones diferenciales o sistemas.

C7 – Métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales.

Tomemos también con fines demostrativos y para no realizar una exposición demasiado extensa, las 8 primeras capacidades o competencias ya mencionadas. Entonces tenemos:

E1 = { P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8 } E2= { C1,C2,C3, C4,C5,C6,C7 }.

Un estudiante puede llenar la siguiente tabla:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
C1	0.2	0.1	0.6	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2
C2	0.1	0.6	0.5	0.8	0.4	0.3	0.6	0.9
C3	1	0.2	0.3	0.6	0.4	0.3	0.9	0.8
C4	0.5	0.7	0.6	0.4	0.1	0.2	0.6	0.4
C5	0.9	0.8	0.7	0.2	0.5	0.1	0.9	0.8
C6	0.6	0.5	0.3	0.1	0.2	0.9	0.6	0.5
C7	0.3	0.2	0.9	0.8	0.7	0.5	0.5	0.5

El significado de la tabla es como sigue: En la primera fila y segunda columna aparece el valor .1 con lo cual se expresa que el estudiante considera que para el contenido C1 tiene desarrollada la

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

capacidad P2 a ese nivel, es decir poco desarrollada (solo al 10 por ciento). El valor .9 de la primera fila y cuarta columna significa que la capacidad P4 el estudiante considera que para el contenido C1 la tiene desarrollada al nivel .9 es decir muy desarrollada (al 90 por ciento) y así con todas las capacidades y contenidos.

Lo interesante de este enfoque es que los valores situados en las celdas pueden obtenerse como medidas, es decir estimaciones numéricas objetivas o como valuaciones es decir estimaciones numéricas subjetivas. Con esta información podemos formar una nueva tabla con los siguientes valores:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
P1	X	5	3	4	4	3	3	5
P2	2	X	4	3	4	3	2	3
P3	4	3	X	4	5	6	3	3
P4	3	4	3	X	5	6	3	3
P5	3	3	2	2	X	5	2	2
P6	4	4	2	1	2	X	3	3
P7	6	6	5	4	5	5	X	6
P8	3	6	4	5	5	5	2	X

Su significado es el siguiente: el número 5 que aparece en la primera fila y segunda columna indica que la capacidad o competencia P1 tiene valuaciones mayores o iguales que la capacidad o competencia P2 para 5 contenidos que en este caso son los contenidos C1, C3, C5, C6 y C7. Este procedimiento se aplica con todos los pares de capacidades o competencias.

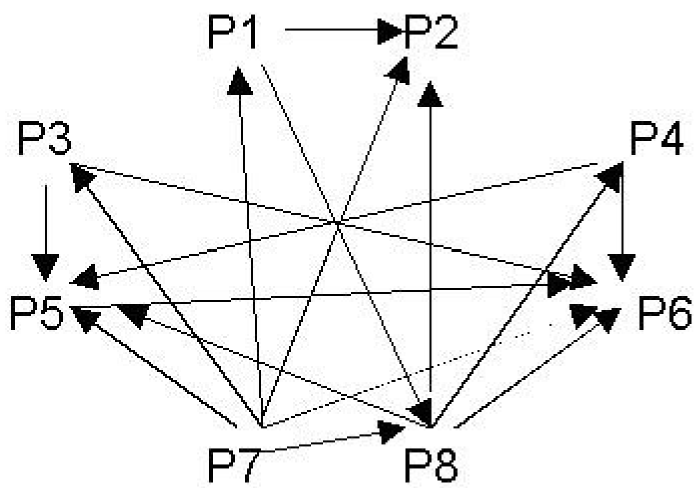
Si ahora dividimos el valor de cada celda por 7 (total de contenidos), se tiene:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
P1	X	0.71	0.43	0.57	0.57	0.43	0.43	0.71
P2	0.29	X	0.57	0.43	0.57	0.43	0.29	0.43
P3	0.57	0.43	X	0.57	0.71	0.86	0.43	0.43
P4	0.43	0.57	0.43	X	0.71	0.86	0.43	0.43
P5	0.43	0.43	0.29	0.29	X	0.71	0.29	0.29
P6	0.57	0.57	0.29	0.14	0.29	X	0.43	0.43
P7	0.86	0.86	0.71	0.57	0.71	0.71	X	0.86
P8	0.43	0.86	0.57	0.71	0.71	0.71	0.29	X

Consideramos un umbral, por ejemplo 0.7, entonces los valores mayores o iguales a 0.7 se convierten en 1 y los valores menores se convierten en 0 y se tiene la siguiente tabla:

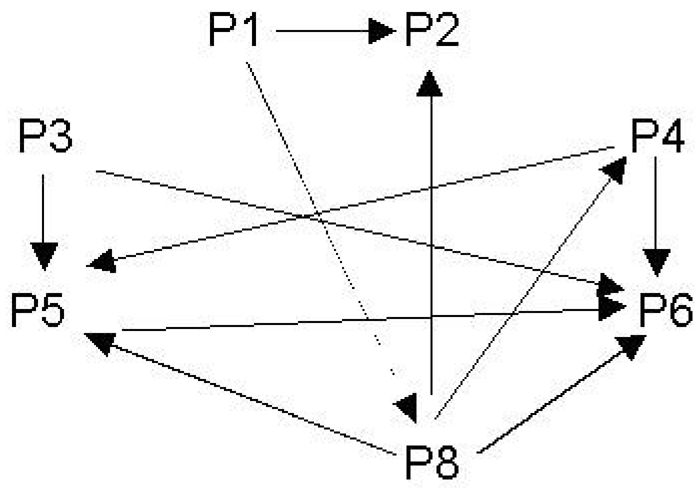
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
P1	X	1	0	0	0	0	0	1
P2	0	X	0	0	0	0	0	0
P3	0	0	X	0	1	1	0	0
P4	0	0	0	X	1	1	0	0
P5	0	0	0	0	X	1	0	0
P6	0	0	0	0	0	X	0	0
P7	1	1	1	0	1	1	X	1
P8	0	1	0	1	1	1	0	X

La tabla anterior se puede ilustrar mejor con el siguiente grafo:

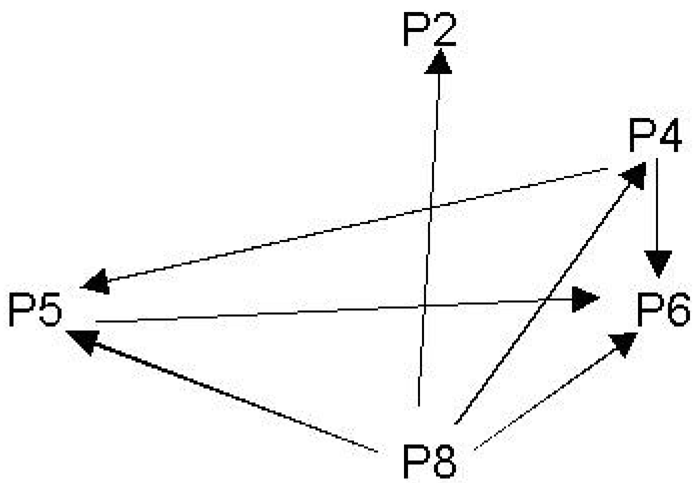


La flecha con origen en P1 y destino en P2 significa que teniendo en cuenta todos los contenidos, el estudiante tiene mejor desarrollada la capacidad o competencia P1 que la P2 y así con todos los pares de capacidades o competencias. Siguiendo este principio, la capacidad mejor desarrollada es la P7 por ser la única de la que salen flechas y no llega ninguna. A continuación eliminamos a P7 del grafo anterior así como las flechas que de él salen y tenemos el siguiente grafo:

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

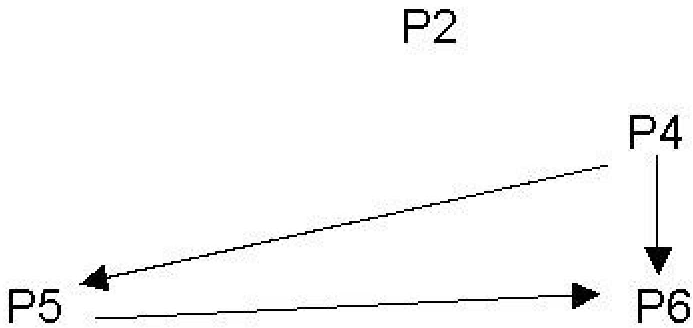


Los nuevos vértices sin predecesor son ahora P1 y P3 que formaran el siguiente eslabón en el ordenamiento. Continuando el proceso eliminemos ahora a P1 y P3 y a las flechas que de ellos salen:



El nuevo vértice sin predecesor es P8 que forma el siguiente eslabón del ordenamiento. Eliminando ahora a P8 se tiene:

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6



Continuando la misma idea el ordenamiento continúa con P4, luego P5 y finalmente P2 conjuntamente con P6. En resumen el ordenamiento obtenido es el siguiente:

{ P7 } < {P1, P3 } < {P8 } < { P4 } < { P5 } < { P2, P6 }

por lo que el estudiante deberá prestarle mayor atención a las capacidades **{P2, P6}**, **{P5}** y **{P4}** en ese orden por ser las mas deficientes. La notación **{Pi} < {Pj}**indica que el elemento **Pi** al **Pj**.

La metodología propuesta puede aplicarla también el docente con su grupo de estudios con lo cual puede ordenar las capacidades o competencias de este. En la práctica de acuerdo al umbral escogido, el ordenamiento puede resultar mas o menos "borroso", es decir puede tener mayor o menor significación para los fines previstos, pero esto no constituye un impedimento ya que el umbral tiene un efecto similar al de los controles de brillo y contraste en una pantalla, por lo que se recomienda probar con diferentes umbrales para discernir mejor las capacidades o competencias que se sitúan en los extremos del ordenamiento.

El trabajo presentado guarda coherencia con los principios que en plano teórico se proponen sobre evaluación del aprendizaje. Hace mas de 20 años la Doctora Nina F. Talízina al referirse al control expresaba que este cumple entre otras las funciones de retroalimentación, de motivación, de refuerzo y de ayuda al estudiante y su frecuencia dependerá de dos indicadores: del éxito que se logre en la ejecución de la tarea y de la necesidad que tenga el alumno de ser sometido a control,

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

por lo que si el trabajo es exitoso pero no se siente seguro, debe auto controlarse; de igual manera cuando comete errores y siente la necesidad o cuando todo lo hace mal y ni siquiera siente la necesidad del autocontrol.

En este orden de ideas, en su documentada obra sobre el tema, la doctora Miriam González Pérez expresa: "La posibilidad de provocar que el estudiante se evalúe el mismo, reflexione sobre su estilo de aprendizaje, sus estrategias de estudio, sus proyectos, constituye una potente proyección de la evaluación inicial: viable pero poco utilizada." Por otra parte, la metodología propuesta se corresponde con los principios expresados por el Doctor Guillermo Bernaza sobre la evaluación contemporánea en contraposición con la evaluación tradicional que lamentablemente aun se mantiene en muchas aulas.

En términos similares se expresa la Doctora Maribel del Valle García cuando expresa "La evaluación se considera como proceso revelador de la unidad de lo cognitivo y lo afectivo en el proceso de aprendizaje, capaz de discernir el progreso en el desarrollo de la personalidad del educando y de orientar tanto al profesor como al propio educando hacia donde es necesario dirigir los mayores esfuerzos. Se educa al educando para autoevaluarse y se propicia la evaluación grupal. Considerar al educando como sujeto en el proceso de evaluación significa darle en dicho proceso un espacio participativo, reflexivo y de toma de decisiones". Lo expuesto puede contribuir a la materialización de estas ideas.

Se ha querido con este trabajo mostrar las posibilidades que tiene el uso de técnicas aplicadas principalmente en problemas de gestión económica, a tareas asociadas con la actividad educativa, por lo que puede considerarse una modesta e incipiente contribución de esas técnicas a esta esfera. Entre las ventajas de la propuesta que se ofrece podemos citar las siguientes:

- Ayuda a descubrir en el estudiante la esencia verdadera de sus principales insuficiencias.
- El propio estudiante puede autoevaluarse.
- El profesor puede también aplicar la metodología propuesta y conocer el desarrollo de su grupo de estudios.
- El algoritmo es de fácil implementación tanto manual como computarizada.
- Contribuye al desarrollo de la personalidad de los estudiantes y puede aplicarse en diversas disciplinas o asignaturas.
- No contradice las formas y métodos establecidos para la evaluación de una materia y en todo caso sirve de apoyo o complemento de esta.

Las técnicas de referencia han mostrado su efectividad para la toma de decisiones en el campo empresarial. Aquí las decisiones van dirigidas a optimizar los recursos materiales, humanos y financieros con el objeto de lograr las mayores ganancias en un mundo empresarial cada vez más competitivo y donde casi a diario surgen nuevos productos y servicios, algunos verdaderamente valiosos, pero otros sólo con una imagen edulcorada para captar nuevos clientes.

En la actividad docente se requiere también tomar decisiones para optimizar los recursos materiales, humanos y financieros que permitan que la amplia masa de estudiantes adquiera los conocimientos, habilidades y valores en correspondencia con la época. Aquí, aunque existen decisiones institucionales importantes y necesarias para tales fines, las decisiones de mayor trascendencia para la materia prima con que se trabaja, son las que constantemente debe ir tomando el profesor con sus educandos sobre el principio de actuar como guía, como orientador y facilitador de ese proceso para

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

que las ideas y valores surjan, se desarrollen y sean aprehendidas por sus estudiantes. Para materializar lo expuesto en este trabajo en un tema concreto de una disciplina o asignatura, el docente y su colectivo deberán definir como parte del trabajo metodológico y a partir de los objetivos previstos, cuales capacidades o competencias deben irse formando. Esto debe además discutirse con sus estudiantes para que se familiaricen con esas capacidades y para que manejen este lenguaje.

Esta línea de trabajo deberá desarrollarse e investigarse más buscando sus puntos de contacto con las Ciencias Pedagógicas ya que puede tributar herramientas que bien utilizadas contribuirían a la elevación de la calidad y eficiencia de nuestro trabajo educativo.

3.1.2- Una observación necesaria

En este problema se han utilizado los términos “capacidad “ y “competencia” de forma intuitiva y con el único interés de mostrar los objetivo de la metodología propuesta. Otras capacidades o competencias propias de un curso de matemática se pudieran considerar, así por ejemplo se sabe que la matemática en las carreras de ingeniería no se explica para que luego se aplique según las reglas con las cuales se explicó. Resulta vital el papel formativo de esta ciencia para analizar otros problemas.

Si explicamos la construcción del gráfico de una curva, mas importante que las herramientas conocidas de extremos y asíntotas puede ser analizar que ocurre con los valores de la función cuando su dominio toma valores muy pequeños, muy grandes o próximos a un punto donde se indefine. De igual manera al analizar un problema según leyes de probabilidad puede resultar útil evaluar su comportamiento para valores pequeños (próximos a cero) o valores grandes (próximos a uno) de la probabilidad. Es decir educar al estudiante a *“pensar en situaciones extremas”* puede ayudarlo a comprender mejor las leyes que estudia.

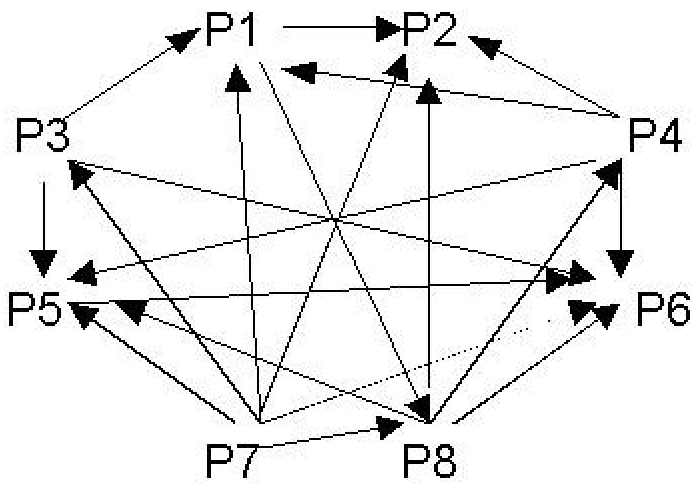
En una carrera de Historia del Arte por ejemplo, se requieren capacidades o competencias asociadas con la apreciación artística y literaria y son sus especialistas quienes deben definirlas. En la actividad empresarial resulta vital el sistemático desarrollo de capacidades o competencias tanto por sus directivos como por sus trabajadores para el logro de la excelencia a que todos aspiran. Una lectura reposada de este problema muestra sus posibilidades de aplicación también para la carrera de Historia del arte o para la actividad empresarial u otra actividad.

3.1.3- Otras precisiones sobre el algoritmo de ordenamiento

Supongamos que en el problema anterior el umbral escogido es 0.5, entonces se tiene la siguiente matriz:

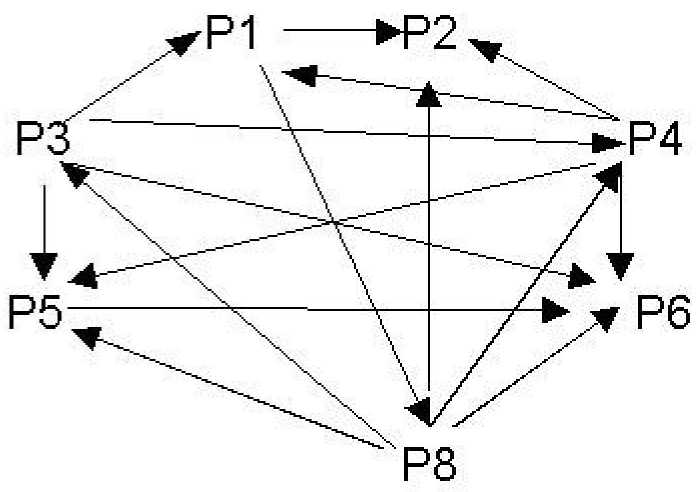
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
P1	X	1	0	1	1	0	0	1
P2	0	X	1	0	1	0	0	0
P3	1	0	X	1	1	1	0	0
P4	0	1	0	X	1	1	0	0
P5	0	0	0	0	X	1	0	0
P6	1	1	0	0	0	X	0	0
P7	1	1	1	1	1	1	X	1
P8	0	1	1	1	1	1	0	X

Con la información de la matriz se construye el siguiente grafo:

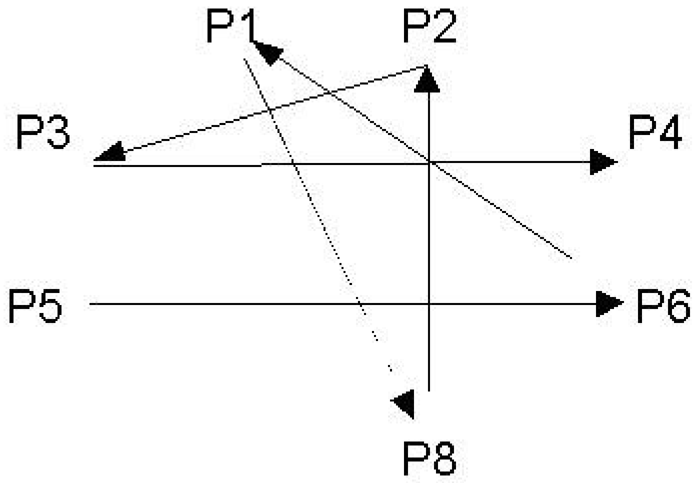


Como se observa, el único vértice del que salen flechas y al que no llega ninguna es el P7 por lo que debe formar el primer elemento del ordenamiento. Si se elimina del grafo anterior el vértice P7 con las flechas que salen de él se tiene el siguiente grafo:

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6



Al eliminarse P7 ocurre un fenómeno interesante. Los vértices restantes son indiferentes al ordenamiento ya que han formado un “circuito” como se aprecia a continuación:



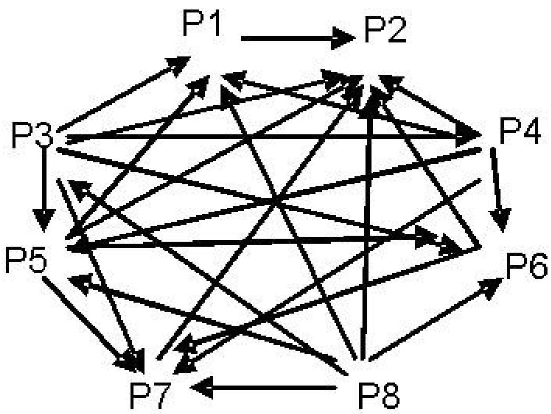
Nótese que se puede salir de cualquier vértice y llegar de nuevo a él.

Consideremos ahora la matriz binaria siguiente:

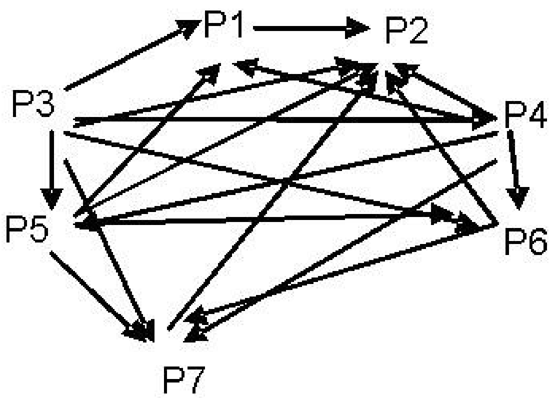
Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
P1	X	1	0	0	0	0	0	0
P2	0	X	0	0	0	0	0	0
P3	1	1	X	1	1	1	1	0
P4	1	1	0	X	1	1	1	0
P5	1	1	0	0	X	1	1	0
P6	0	1	0	0	0	X	1	0
P7	0	1	0	0	0	0	X	0
P8	1	1	1	0	1	1	1	X

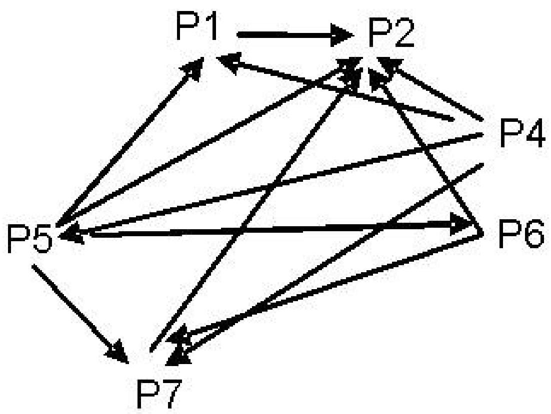
Se tiene el siguiente grafo



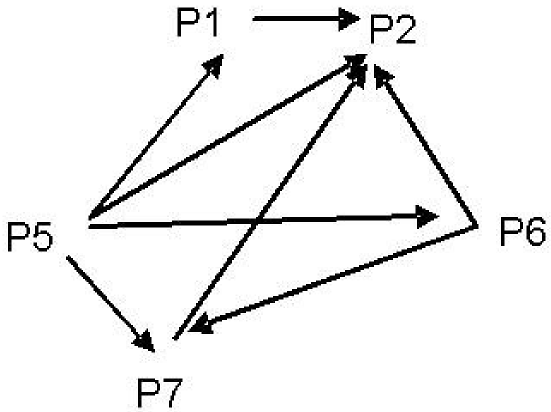
Como se aprecia, el primer lugar en el orden lo ocupa **P8** por ser el único elemento del cual salen flechas y no llegan. Al eliminar el vértice P8 así como las flechas que de él salen se tiene:



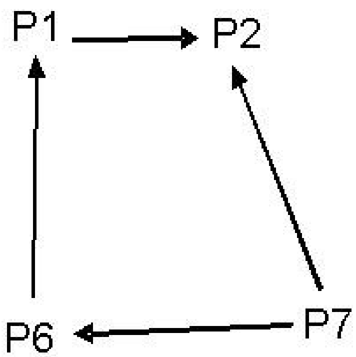
Como se aprecia le sigue en el orden **P3**. Si se elimina el vértice P3 así como las flechas que de él salen se tiene:



El siguiente vértice en el orden es **P4** y continuando el proceso se tiene

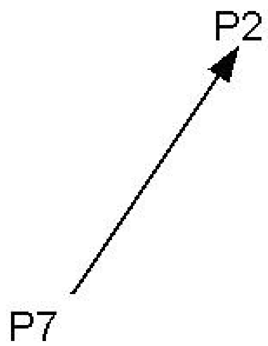


En el orden le siguen **P1** y **P6** y al eliminarlos se tiene:



En el orden le siguen P1 y P6 y al eliminarlos se tiene:

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6



En resumen el orden es como sigue:

{P8} > {P3 } > {P4} > {P5} > { P1, P6} > {P7} > { P2 }

Nótese que se ha arribado a un orden casi perfecto aunque no es este el objetivo del algoritmo. El resultado del orden puede tener o no valor práctico aunque eso no es una insuficiencia del algoritmo, el resultado en general depende del umbral escogido y de las relaciones de preferencia que existen entre los elementos a ordenar.

El algoritmo puede resultar de fácil programación si se consideran las siguientes observaciones:

1. El primer lugar en el orden lo forman los **Pi** para los cuales **toda la columna** de la matriz está formada de ceros.
2. El último lugar en el ordenamiento lo forman los **Pj** para los cuales **toda la fila** de la matriz está formada de ceros.
3. Se eliminan tanto las columnas como las filas y se repite el proceso con la matriz reducida obteniéndose el segundo y penúltimo lugares y así sucesivamente.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

CAPÍTULO 4

4- Acerca de la comunicación en el aula

En los últimos tiempos se debate mucho acerca de la conveniencia de trasladar el centro de atención de cada clase, de la erudición del profesor al proceso de aprendizaje del estudiante, principio éste que comparto. La clase es para debatir, discutir, orientar y analizar las diversas vías de solución de un problema, así como de las posibles generalizaciones y no para entregarle un conocimiento acabado al estudiante. El aprendizaje es un proceso de construcción y reconstrucción de conocimientos, habilidades y valores.

De vital importancia es la creación de un clima que propicie el vínculo entre lo cognitivo y lo afectivo, donde el estudiante pueda construir los conocimientos en un ambiente que propicie la comunicación, combinando de manera flexible lo que el profesor considera como conveniente y lo que el estudiante siente como interesante, de tal forma que se logre un desarrollo en su pensamiento teórico y creador teniéndose en cuenta las necesidades, intereses, objetivos y aspiraciones de estos, por lo que el profesor como experto, es un orientador, un guía, un facilitador del proceso de aprendizaje.

El estudiante deberá comprender que no solamente puede llegar a conocer a través de otros sino también por si mismo; observando, experimentando y combinando los razonamientos, respetándose la individualidad y evitándose la estandarización de la enseñanza. Deberá pasarse del aprendizaje reproductivo al productivo, no imponiendo nuestra propia lógica de razonamiento sino apoyándonos en el razonamiento del colectivo.

Partimos de considerar como principal actividad de maestros y profesores la formación de conocimientos, habilidades y valores que contribuyan al desarrollo de la personalidad de sus estudiantes, por lo que resulta imprescindible una acertada comunicación entre los educadores y sus alumnos. En este problema se someten a estudio las relaciones que pueden establecer durante el curso educadores y educandos y con el empleo de técnicas de la matemática no numérica en la incertidumbre se propone una metodología para determinar como estas inciden en una acertada comunicación, es decir en un clima favorable al cumplimiento de los objetivos previstos.

Es bueno precisar que el ambiente en que desarrollan su actividad los docentes resulta en extremo complejo ya que tienen que enfrentarse cada día a condiciones diferentes para lograr los objetivos previstos en su clase. Un conjunto de factores objetivos y subjetivos inciden a diario en los estudiantes.

Entre ellos podemos considerar los siguientes:

- Interés y motivación hacia la asignatura.
- Conocimientos de la enseñanza precedente.
- El horario en que se recibe la clase.
- Las condiciones ambientales y materiales del aula.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

- El sistema de evaluación establecido.
- El papel y lugar de esa asignatura en todo el currículo.
- El estado anímico y emocional etc.

Para el caso de los profesores pueden incidir en una acertada comunicación los factores siguientes:

- Conocimiento de las características individuales y de los intereses, necesidades y aspiraciones de sus alumnos.
- Interés y motivación personal.
- Uso de técnicas participativas y de principios de la pedagogía y la psicología.
- Estado anímico y emocional.
- Preparación metodológica y científica.
- Volumen de horas de clases a impartir y variedad de contenidos que se imparten simultáneamente.
- Cantidad de estudiantes en el aula etc.

Es objetivo de este trabajo aproximarnos al estudio de la comunicación entre educadores y educandos a partir de condiciones de incertidumbre. Estas consideraciones resultan válidas ya que los resultados de una clase no siempre pueden preverse. En ocasiones los maestros y profesores se quejan de que aunque utilizaron variadas formas para el desarrollo de una actividad docente, no lograron persuadir a sus estudiantes como deseaban y en otras ocasiones con menos recursos si lo logran. De igual manera grupos de estudio diferentes en un mismo curso se comportan diferentes.

La comunicación en condiciones de incertidumbre ha sido objeto de estudio en otros contextos, como por ejemplo en la actividad de marketing, y como cada actividad tiene sus propias características es bueno referirnos a algunas diferencias entre la comunicación en un aula y en condiciones de mercado. Para el caso del aula el estudiante no siempre puede escoger a su profesor, mientras que el cliente sí puede elegir un producto entre varias opciones. El estudiante está obligado a aprobar la asignatura gústele o no esta o su profesor mientras que el cliente no está obligado como regla a comprar cierto producto o recibir cierto servicio.

Por otra parte, la clase es una actividad única e irrepetible, mientras que el cliente muchas veces se ve asediado por las más variadas imágenes edulcoradas sobre cierto producto o servicio. Si bien en la actividad de marketing la comunicación tiene un carácter activo solo para los que promueven los productos y servicios y pasivo hacia quienes va dirigida, en la vida académica la comunicación tiene un carácter activo en ambos sentidos: desde el profesor hacia sus alumnos y viceversa si se quiere lograr eficiencia en el proceso docente educativo.

4.1- Acciones que estimulan una buena comunicación

A continuación se enumera un conjunto de acciones que pueden desarrollar tanto los profesores como los estudiantes para el logro de una buena comunicación. Se consideran a título indicativo algunas propias de un curso de matemática unidas a otras de carácter general. Para el caso de los estudiantes se pueden citar las siguientes:

- Resumir los aspectos teóricos de mayor complejidad.
- Repasar los conceptos de la enseñanza precedente.

- Evaluar en cuales condiciones resulta válido aplicar los teoremas y propiedades.
- Estudiar en pequeños colectivos.
- Estudiar en forma individual.
- Combinar la bibliografía fundamental con la complementaria.
- Asistir sistemáticamente a clases y prestarle atención a las sugerencias y recomendaciones de su profesor.
- Aclarar periódicamente con el profesor las dudas y principales dificultades
- Receptividad ante los señalamientos del profesor etc.

Para el caso de los profesores las siguientes acciones contribuyen a una buena comunicación con sus estudiantes:

- Explicar la esencia sin excesos de retórica.
- Apoyarse en ideas intuitivas e interpretaciones geométricas y físicas.
- Promover el uso de técnicas participativas y del diálogo y la discusión colectiva.
- Realizar una exposición personalizada atendiendo a las diferencias individuales.
- Estimular el planteamiento y solución de problemas prácticos vinculados con la especialidad que se estudie.
- Esclarecer los puntos fundamentales y dificultades mediante enfoques diferentes.
- Receptividad ante los planteamientos y preocupaciones del grupo.
- No ser esotérico o de una sola comunicación para grupos aislados.
- Poseer un impacto emocional, tratando temas del más amplio interés entre otras.

A continuación se enumeran algunas cualidades deseadas al finalizar el curso de matemática las cuales enriquecen la dimensión curricular y son de gran valor formativo tanto para el resto de los estudios como para la actividad profesional:

- Evaluar todas las posibles vías de solución que puede tener un mismo problema y entre ellas elegir la mejor.
- Saber en cuales condiciones resulta válido aplicar determinadas reglas, leyes o principios y en cuales no.
- Obtener nuevos conocimientos y desarrollar nuevas habilidades de forma independiente.
- Expresar la esencia en el planteamiento y solución de una situación problémica y diferenciar entre lo esencial y lo secundario.
- Saber diferenciar al evaluar un concepto o problema, si se trata de un fenómeno de naturaleza esencialmente nueva, o simplemente una generalización o interpretación de ideas conocidas aplicadas en condiciones diferentes.
- Desarrollar hábitos de expresión oral de un material, en el uso de gráficos e ilustraciones geométricas y en la búsqueda de variables, parámetros u otros datos a partir de la lectura e interpretación del texto de un problema.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

- Promover el intercambio de ideas y la reflexión colectiva para resolver los problemas entre otros.

Este conjunto de cualidades no pretende ser el único y junto a otras contribuyen al desarrollo de la personalidad, por lo que pueden asumirse como parte del ideal al que se aspira a través de la actividad curricular.

El problema que se estudia es de una naturaleza muy compleja por tratarse de las relaciones entre educadores y educandos que propician una buena comunicación, es decir un clima favorable al logro de los objetivos propuestos durante el curso.

La metodología propuesta ofrece una vía para estudiar el problema bajo el supuesto real de que el ambiente en que desarrollan su actividad los docentes está cargado de subjetividad e incertidumbre por lo que muchas veces ni siquiera es viable suponer la validez de alguna regularidad estadística. Los principios de la matemática borrosa propuestos como fundamento metodológico para abordarlo, aportan un camino plausible, y aunque no constituyen una panacea para la solución del problema, indican sin lugar a dudas una vía sencilla para su tratamiento.

La aplicación de estas ideas a una situación concreta puede arrojar resultados diferentes, es decir en el mismo grupo de estudio con materias y profesores diferentes se puede obtener un grupo de acciones conjuntas diferentes, y por otra parte, el mismo profesor ante colectivos diferentes también puede arrojar acciones conjuntas diferentes, que es lo que sucede en la práctica.

Si bien no todos los docentes tienen el mismo carisma y nivel de persuasión y convencimiento con sus estudiantes, incluso para aquellos que les resulta más fácil identificarse con sus alumnos, aplicar estas ideas puede resultar válido ya que les permite descubrir acciones conjuntas en las que ni siquiera habían pensado y además descartar aquellas que aunque sean de su preferencia les toman mas tiempo y recursos.

4.2- Aplicación del modelo relacional borroso para la solución del problema

A continuación se propone una metodología para el estudio del problema de la comunicación entre educadores y educandos. Los resultados que pueden obtenerse con la metodología siguiente constituyen una aproximación importante al estudio de este problema, ya que se trata de evaluar las relaciones interpersonales entre maestros y profesores por una parte, y los estudiantes por otra, partiendo de las condiciones de subjetividad e incertidumbre que las caracterizan, para lo cual se toma como fundamento los conjuntos de acciones que tanto los educadores como los educandos deben realizar para el logro de los objetivos del curso, así como las relaciones de incidencia que pueden establecerse entre esas acciones.

Consideremos los siguientes conjuntos:

A : Acciones de los profesores para el logro de una acertada comunicación (m acciones)

B : Acciones de los estudiantes para el logro de una acertada comunicación (n acciones).

C : Objetivos a lograr durante el curso (p objetivos).

A partir de estas acciones se pueden establecer las relaciones de incidencia siguientes:

$\mathbf{m \times m}$	$\mathbf{m \times p}$	$\mathbf{p \times p}$
$\mathbf{A \to A}$	$\mathbf{A \to C}$	$\mathbf{C \to C}$

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Que representan respectivamente las matrices de incidencia de **A** en **A**, de **A** en **C** y de **C** en **C**. Mediante el operador de convolución **maxmin** se puede obtener la relación de incidencia total

$$\overset{\mathbf{m\times p}}{A \rightarrow \mathbf{C}\ \mathbf{(total)}}$$

Razonando de forma análoga pueden obtenerse:

$$\overset{\mathbf{n\times n}}{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \qquad \overset{\mathbf{n\times p}}{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}} \qquad \overset{\mathbf{p\times p}}{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}}$$

Que representan respectivamente las matrices de incidencia de **B** en **B**, de **B** en **C** y de **C** en **C** y también mediante el operador de convolución **maxmin** se puede obtener la relación de incidencia total

$$\overset{\mathbf{n\times p}}{B \rightarrow \mathbf{C}\ \mathbf{(total)}}$$

Es bueno precisar que al tomar la relación de incidencia total obtenida a partir del operador de convolución **maxmin**, la información sobre las incidencias de las acciones de los profesores y de los estudiantes sobre los objetivos es mas representativa que tomando las matrices de incidencia iniciales ya que este operador recoge también las incidencias internas entre los conjuntos **A**, **B** y **C**.

Podemos entonces formular las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles acciones de profesores y cuales de estudiantes **actuando de forma conjunta** producen los mejores resultados?
2. ¿Cuáles acciones de profesores y cuales de estudiantes resultan intrascendentes?

Para responder estas preguntas podemos formar una matriz de distancias $\mathbf{K_{m\times n}}$ que combine a cada una de las **m** acciones de los profesores con cada una de las **n** acciones de los estudiantes para lo cual se procede de la siguiente forma:

Denotemos por ac_{it} para $\mathbf{1 \le i \le m}$ y $\mathbf{1 \le t \le p}$ los elementos de la matriz de incidencia total

$$\overset{\mathbf{m\times p}}{A \rightarrow \mathbf{C}\ \mathbf{(total)}}$$

y por bc_{jt} para $\mathbf{1 \le j \le n}$ y $\mathbf{1 \le t \le p}$ los elementos de la matriz de incidencia total

$$\overset{\mathbf{n\times p}}{B \rightarrow \mathbf{C}\ \mathbf{(total)}}$$

Entonces los elementos k_{ij} de la matriz $\mathbf{K_{m\times n}}$ se obtienen de la manera siguiente:

$$k_{ij} = \sum_{t=1}^{p} \mathrm{I}\ ac_{it} - bc_{jt}\ \mathrm{I}$$

Un valor pequeño de k_{ij} indica que de forma conjunta las acciones del profesor y del estudiante asociadas a este valor tienen un efecto positivo en las cualidades deseadas al finalizar el curso. Si se establece un umbral **u** entonces los valores por debajo del umbral indican cuales acciones de forma conjunta entre profesores y estudiantes tienen un efecto positivo en el logro de los objetivos y los valores por encima del umbral indican las acciones conjuntas que resultan intrascendentes.

Se reitera de nuevo que se trata de un modelo que representa de manera aproximada la realidad, pero que puede ser enriquecido y admitir muchas mas interpretaciones.

En la práctica no se trata de que el docente esté apelando constantemente a la aplicación del modelo para evaluar si la comunicación con sus estudiantes es buena, regular o mala ya que medir esas variables con cierta objetividad puede resultar muy difícil. Por otra parte mediante encuestas a los estudiantes y a los docentes es posible conocer el grado de comunicación que mantienen, pero de lo que se trata es de encontrar soluciones a los problemas antes de que surjan.

El modelo propuesto en el caso ideal nos ofrece información valiosa sobre las acciones conjuntas de mayor trascendencia y sobre las intrascendentes, no se trata de aplicar el modelo en el sentido matemático en que ha sido expuesto, se trata de verlo como un instrumento que puede guiarnos en la búsqueda de las posibles causas asociadas a una deficiente comunicación entre un docente y sus estudiantes. El modelo nos hace pensar que una acción por buena que nos parezca puede influir negativamente en un objetivo ya que ella influye también en otras acciones y a su vez estas influyen en todos los objetivos.

4.3- Particularidades para la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería

La tarea de formación matemática en los estudiantes de Ciencias Técnicas resulta en extremo compleja, pues se trata de lograr para una amplia masa de educandos en un período de tiempo relativamente pequeño de cuatro o cinco semestres, conocimientos, habilidades y valores que han sido el resultado de todo un proceso de desarrollo histórico y científico de la humanidad durante varios siglos y cuyos aportes principales lo han logrado verdaderos genios de esta ciencia.

Teniendo en cuenta las particularidades de la ciencia matemática, el hecho de haber surgido y desarrollarse como respuesta a las necesidades de la práctica social, su elevado nivel de abstracción, su lenguaje preciso y su poder de síntesis y de generalización, así como el hecho real de que no podemos prescindir de la matemática aunque ese sea nuestro deseo, obliga a plantearnos la tarea de búsqueda permanente de nuevos métodos que permitan cada vez una mayor comunicación con la amplia masa de estudiantes.

En las últimas décadas se ha producido una amplia penetración de los métodos matemáticos en las más diversas ramas del conocimiento científico, conociéndose este proceso como matematización de las ciencias. Ramas de la ciencia que hasta hace algunos años parecían estar divorciadas de la matemática, han encontrado en ella un modo adecuado de expresión cuantitativa de sus fenómenos. En la medicina, por ejemplo, se ha extendido el estudio del funcionamiento de órganos vitales como el corazón, pulmones o riñones, a partir de los trabajos del fisiólogo norteamericano Artur Gayton, el cual ha logrado describir dicho funcionamiento mediante ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, la propia matemática se enriquece no sólo de ciencias tradicionales como la Física y la Mecánica, así por ejemplo, se ha comprobado experimentalmente que cuando una persona observa un objeto, le presta mayor atención a los ángulos y esquinas que lo conforman que a los segmentos rectilíneos. El hecho de que los ángulos y esquinas son los que nos ofrecen mayor información acerca de la forma y dimensiones del objeto, ha servido en la actualidad al desarrollo de la Teoría sobre los Puntos Significativos de una Curva, de amplio uso en el campo del procesamiento de imágenes digitales y el reconocimiento de patrones de forma bi dimensionales. Es este un ejemplo interesante relacionado con la influencia de la psicología en la matemática.

La génesis del cálculo diferencial e integral está asociada con la extensión de la medida de alguna magnitud conocida a casos más generales. Así por ejemplo, la observación de que la tangente a una circunferencia puede definirse como un límite de rectas secantes, permite extender el concepto de tangente a una clase más amplia de funciones; y la observación de que tomando intervalos de tiempo cada vez más pequeños, las velocidades medias conducen a la velocidad instantánea, abonan el terreno para el desarrollo del curso de cálculo diferencial.

Por otro lado, el conocimiento de fórmulas para el cálculo de áreas de polígonos, permite extender el concepto de área a un círculo y a figuras más generales como base del curso de cálculo integral. Ambos conceptos rompen con la estructura “estática” a la que están acostumbrados los estudiantes para pasar hacia una estructura “dinámica” o de movimiento por lo que una comunicación acertada debe partir de estos presupuestos.

En el plano metodológico lo criterios de optimización en la construcción de las asignaturas tributan a una buena comunicación con los estudiantes. En este sentido resulta conveniente introducir los conceptos propios de la Teoría de Probabilidades como probabilidad, densidad de probabilidad, función de distribución, esperanza matemática, desviación típica, coeficiente de correlación entre otros en forma paralela con los conceptos análogos de frecuencia, histograma, función de distribución empírica, media aritmética etc.

Otro criterio de optimización está en dejar claro si los nuevos problemas que se abordan se basan en conceptos y principios de naturaleza esencialmente nueva para el estudiante, o simplemente son generalizaciones o interpretaciones de otro tipo que se obtienen de la información anterior. Estas ideas no deben quedar sólo en el claustro, resulta útil discutirlas con los estudiantes sin necesidad de utilizar un lenguaje rebuscado.

La introducción de la computación en los cursos de matemática para las carreras de ingeniería, constituye sin lugar a dudas el principal cambio de paradigma experimentado por la enseñanza de esta ciencia en los últimos años. Poco a poco se fueron venciendo las reticencias y obstáculos de aquellos docentes aferrados a un tradicionalismo caduco y el uso de medios de computo en los cursos de matemática ha servido ya no solamente para resolver problemas que por otras vías serian muy costosos, difíciles o simplemente imposibles de resolver, sino también para lograr comprender con mayor eficiencia, conceptos y métodos generales de trabajo propios de esta ciencia que a través de las técnicas tradicionales de enseñanza no siempre resultaban de fácil comprensión por la amplia masa de estudiantes.

La confección de algoritmos y programas en los casos que así se justifique o el uso de asistentes matemáticos o de otros sistemas con fines demostrativos, resulta algo habitual en cualquier curso de matemática para carreras de ingeniería al que se le impregnen signos de ineluctable modernidad. Las enormes posibilidades que brindan las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones, con el ahorro de tiempo y recursos que representan, es una línea de trabajo que bien utilizada puede elevar sin lugar a dudas, la eficiencia y calidad del proceso de enseñanza de la matemática.

Es bueno aclarar que en temas de comunicación con los estudiantes no todo requiere computadoras en un curso de matemáticas.

La discusión heurística, el debate, el intercambio fuera de protocolo con la dirección del profesor, no lo sustituye ningún sistema computarizado para cumplimentar muchos objetivos propios del curso de matemática; por lo que el lápiz y el papel continúan siendo fieles y necesarios aliados del estudiante.

De lo que se trata, al organizar el curso, es de atendiendo a los objetivos, definir donde y como utilizar técnicas de cómputo y donde no hacerlo.

El docente siempre deberá aprovechar, para una buena comunicación, aquellos recursos que logren atraer la atención de sus educandos. En este sentido resultan válidas las siguientes observaciones que propician una adecuada motivación en los estudiantes, y es conocido que con una buena motivación se puede elevar el nivel de comunicación.

Observación 1:

El teorema central del límite de la Teoría de Probabilidades expresa que la suma de **n** variables aleatorias tiende a la ley normal para **n** grande. Intuitivamente lo que importa es que todas incidan un poquito y que ninguna exceda a las restantes de manera significativa. La demostración rigurosa de este teorema generalmente no se hace en los cursos de matemática para las carreras de ingeniería. Basta tomar varias variables aleatorias y comprobar que la suma va tomando "forma acampanada" para ilustrar este teorema en esos cursos. Aunque es posible simular este fenómeno en una computadora, esta no nos permite "tocar con las manos este teorema" es decir "verlo en una situación concreta".

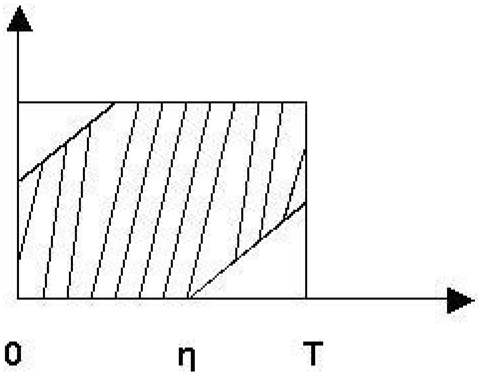
Una vía para enriquecer la clase donde se aborde el teorema central del límite puede ser mostrar a trasluz a los estudiantes una regla plástica de 50 centímetros con varios años de uso. Los golpes, las caídas y deformaciones recibidas por la regla durante varios años se expresan mediante variables aleatorias que al actuar de manera conjunta con el paso del tiempo dejan su huella en la regla precisamente "siguiendo la ley normal". El reflejo de soslayo de la luz en la regla, nos permite ver además que la esperanza matemática se sitúa aproximadamente en los 25 centímetros como nos exigiría el teorema central del límite. Se trata como ya dije de "poder palpar" un concepto, un principio cuya demostración rigurosa requiere un tratamiento matemático avanzado. Puede lograrse además sin necesidad de computadoras.

Observación 2:

En carreras de perfil radio electrónico se puede motivar la aplicación de la probabilidad geométrica con el siguiente ejemplo:

Un equipo receptor de información debe procesar la información recibida en un intervalo de tiempo **T**. Se conoce que en ese intervalo y de forma independiente se reciben solo dos señales portadoras de información y que para el procesamiento de cualquiera de ellas se requiere un tiempo $\boldsymbol{\eta}$. Si durante el procesamiento de una de las señales se recibe la otra, entonces como ambas no pueden procesarse simultáneamente, la última se pierde. Determine la probabilidad de que se pierda la información contenida en alguna de las señales.

En el siguiente gráfico consideremos en el eje de abscisas el instante de tiempo **x** en que llega una señal y en el eje de ordenadas el instante de tiempo **y** en que llega la otra señal.



Cualquiera de las dos señales se pierde siempre que **I x – y I ≤ η**. En el cuadrado de longitud **T** se sitúan todos los pares **(x,y)** es decir todos los instantes de llegada de las señales mientras que en la región sombreada se sitúan los instantes en que si llega una señal la otra se pierde ya que en esa región es donde se cumple la condición **I x – y I ≤ η**. La probabilidad pedida es entonces el cociente de ambas áreas:

$$P = \frac{T^2 - (T-\eta)^2}{T^2}$$

Este problema que aparece también como problema del encuentro en el clásico libro de Gnedenko sobre Teoría de Probabilidades, puede plantearse de la siguiente manera: Dos personas acuerdan encontrarse en cierto lugar con la condición de que ninguno espera por el otro un tiempo mayor de **η**. Hallar la probabilidad de que se encuentren.

Supongamos que **T = 60** minutos y **η = 20** minutos. Haciendo los cálculos se tiene **p = 0.55**.

Aunque ambos problemas pueden tener interés práctico una combinación de los dos enfoques propicia una mayor motivación hacia los estudiantes y por tanto el nivel de comunicación se eleva al tratarse un tema significativo para ellos, ya que en esas edades es normal que los enamorados se citen para una hora y que uno espere por el otro durante cierto tiempo.

Observación 3:

Con el siguiente ejemplo se puede comprender mejor el valor práctico del concepto de esperanza matemática o valor esperado de una variable aleatoria.

Consideremos un equipo con estructura en serie formado por dos bloques. Supongamos que se conocen las probabilidades q_i de que habiendo fallado el equipo el fallo haya sido causado por la unidad **i** para **i = 1, 2**. Asumamos además que ambos bloques no pueden fallar simultáneamente. Sea c_i el costo por chequeo y reparación en caso de fallo del bloque **i** para **i = 1, 2**.

Cuando $c_1 = c_2$ es evidente que para incurrir en el menor costo de reparación del equipo debe chequearse primero la unidad 1 si $q_1 > q_2$ y primero el bloque 2 si $q_1 < q_2$. Cuando $c_1 < c_2$ y $q_1 > q_2$ es evidente que debe chequearse primero el bloque 1.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

De manera análoga cuando $\mathbf{c_1 > c_2}$ y $\mathbf{q_1 < q_2}$ es evidente que deberá chequearse primero al bloque 2 para que el costo de chequeo del equipo sea mínimo. El problema consiste en establecer un orden de chequeo que sirva para cualquier caso. Una posible respuesta puede ser la siguiente:

Denotemos por $\mathbf{X_i}$ la variable aleatoria que representa el costo de reparación del equipo cuando se chequea primero la unidad **i** para **i = 1, 2**. Las series de distribución correspondientes son:

X_1	c_1	c_1+c_2
	q_1	q_2

X_2	c_2	c_1+c_2
	q_2	q_1

El costo medio de reparación $\mathbf{EX_1}$ si se revisa primero la unidad 1 está dado por la expresión

$$EX_1 = c_1\, q_1 + (c_1+c_2)\, q_2$$

y el costo medio de reparación $\mathbf{EX_2}$ si se revisa primero loa unidad 2 es

$$EX_2 = c_2\, q_2 + (c_1+c_2)\, q_1.$$

Sobre estos cálculos si

$$EX_1 < EX_2$$

se debe chequear primero la unidad 1 y en caso contrario primero la unidad 2.

Quienes se dedican a la reparación de equipos electrónicos o de automóviles, por tratarse de sistemas complejos aplican estos principios a partir de la experiencia acumulada. Siempre se busca primero si la causa de no funcionamiento se debe a aquella pieza que se rompe con mayor frecuencia y además es más fácil de sustituir. En problemas reales los valores aproximados de $\mathbf{q_1}$ y $\mathbf{q_2}$ se obtienen precisamente de esa experiencia acumulada.

CAPÍTULO 5

5- Una lectura sobre objetivos, contenidos y métodos en términos de lógica difusa

Como ya hemos expresado, la lógica borrosa o difusa ha encontrado múltiples aplicaciones tanto en la esfera económica y de gestión como en problemas de ingeniería vinculados al control automático, pero no resultan habituales sus aplicaciones en problemas asociados con la actividad académica, por lo que este trabajo puede considerarse una contribución a la aplicabilidad del enfoque borroso también en esta esfera.

Fijando ideas, con este problema queremos revelar los puntos de contacto entre dos ramas del conocimiento aparentemente inconexas: el Principio de extensión de Zadeh como una de las generalizaciones de mayor alcance de la lógica difusa por una parte, y las categorías de la didáctica objetivo, contenido y método por otra. El valor principal que puede atribuírsele es el de contribuir en la formalización de la relación entre objetivos, contenidos y métodos para una asignatura, disciplina o carrera a partir de las interpretaciones que pueden asumirse en correspondencia con los rudimentos de la lógica borrosa.

Por su claridad de exposición seguidamente se expresan algunas ideas expuestas por el Doctor Carlos M. Alvarez en su libro " La Escuela en la Vida" acerca de los objetivos, el contenido y los métodos como categorías de la didáctica. Escribe su autor: "El *objetivo* es la categoría de la didáctica que expresa el modelo pedagógico del encargo social, contiene las aspiraciones, los propósitos que la sociedad pretende formar en las nuevas generaciones, tanto los que se vinculan directamente con el dominio del contenido: los *instructivos*, como aquellos aspectos mas esenciales, que son consecuencia de procesos mas trascendentes: los *desarrolladores o educativos*.

El *contenido* es la categoría didáctica que expresa aquella parte de la cultura o ramas del saber que el estudiante debe dominar para alcanzar los objetivos, y el *método* es la categoría didáctica que como concepto dinámico expresa el modo de desarrollar el proceso con el mismo fin. También expresa:"*... el contenido es detallado y analítico, el objetivo es desarrollador y sintético...,... el objetivo precisa el contenido...,... el objetivo trasciende a los contenidos...,... el objetivo se concreta mediante el contenido...,... el contenido es función del objetivo..., ...el objetivo es la variable independiente y el contenido la dependiente.... Que enseño(contenido) es función de para que enseño(objetivo)...*

El objetivo incluye, además, el conocimiento asociado a la habilidad y toda una serie de precisiones en cuanto al nivel de asimilación o independencia, profundidad o esencia, generalidad o sistematicidad, entre otras de dichos conocimientos y habilidades. El contenido tiene como componentes, un sistema de conocimientos que reflejan el objeto de estudio, un sistema de habilidades que expresa los modos de actuación del hombre en sus relaciones con dicho objeto; y un sistema de valores que determina la significación de los conocimientos para el escolar.

El método posee también tres dimensiones: instructiva, desarrolladora y educativa. En el método cada alumno manifiesta su propia personalidad, sus gustos, vivencias e intereses y modifica en cierto grado el método general.

Sin embargo el profesor en la dinámica del proceso y por su carácter concreto, para enseñar la habilidad hace uso de múltiples procedimientos y operaciones, adecuando el método mas general a las condiciones específicas concretas del colectivo de estudiantes, enriqueciéndolo y particularizándolo según las variadas situaciones que implica cada problema o situación específica en cada escolar. De ahí que los métodos de enseñanza y aprendizaje son mucho mas ricos, variados y multifacéticos que la habilidad que encierra el objetivo.

Por esa razón no debe entenderse el método de enseñanza ajeno al objetivo, pero a su vez no se identifican. Ambos tienen personalidad propia pero están indisolublemente unidos, relacionados mutuamente. El objetivo como inductor, como aspiración a alcanzar, el método como ejecutor, como vía para alcanzarlo."

Por otra parte, en el artículo 134 del Reglamento para el Trabajo Docente y Metodológico en la educación superior cubana se establece:" La evaluación del aprendizaje es un proceso consustancial al desarrollo del proceso docente educativo. Tiene como propósito comprobar ***el grado de cumplimiento de los objetivos***formulados en los planes y programas de estudio de la educación superior, mediante la valoración de los conocimientos y habilidades que los estudiantes van adquiriendo y desarrollando; así como, por la conducta que manifiestan en el proceso docente educativo. Constituye, a su vez, una vía para la retroalimentación y la regulación de dicho proceso".

En el párrafo anterior el lenguaje utilizado no es otro que el de la lógica borrosa o difusa. Los dos rasgos principales de esta lógica están presentes cuando hablamos de cumplimiento de objetivos; estos rasgos son: la ***graduación o gradación***y la ***granularidad o granulación***, ya que en la práctica todos aceptamos que cualquier objetivo se cumple siempre en un grado o medida, de ahí las calificaciones de excelente, bien, regular o mal *(graduación)*y además no siempre esta bien precisado cuando termina el cumplimiento de un objetivo y comienza el otro *(granularidad),*de aquí que las fronteras entre el cumplimiento de un objetivo y el de otro no estén nítidamente definidas.

El mismo enfoque podemos asumir si hablamos del cumplimiento de un contenido o del desarrollo o realización de un método.

Si denotamos por **C** el conjunto de los contenidos, **O** el conjunto de los objetivos y **M** el conjunto de los métodos, en general se acepta que cada contenido puede tributar a uno o varios objetivos y diferentes contenidos pueden tributar a un mismo objetivo, es decir se tiene una relación entre el conjunto **C** y el conjunto **O**. El hilo conductor en esta relación son los elementos de **M**, por lo que para cada método puede asumirse que en alguna medida un contenido tributa a un objetivo.

Como regla tanto los objetivos como los contenidos se declaran el los planes y programas de estudio para las asignaturas, disciplinas y carreras y se concretan con mas detalle como parte del trabajo metodológico que realizan los colectivos de educadores. Tanto los objetivos como los contenidos pueden mantenerse con un núcleo estable por un período de tiempo. En relación con los métodos no ocurre igual, ya que dependen de infinidad de factores como la experiencia académica del docente, su preparación pedagógica y psicológica, su carisma y nivel de comunicación con los estudiantes, entre otros elementos.

Modelo difuso de la función de pertenencia asociada al cumplimiento de los objetivos

Para aplicar el enfoque difuso se tomará como criterio la manera en que tributan al cumplimiento de los objetivos los siguientes niveles asociados al cumplimiento de los contenidos:

1. Nivel de generalización, amplitud o profundidad con que se trata el contenido.
2. Nivel de sistematicidad con que se expone el contenido.
3. Nivel de independencia que se propicia cuando se expone el contenido.

Consideremos las siguientes notaciones:

1. **v = método(contenido)** representa al conjunto de todos los métodos y contenidos que tributan al objetivo **v**, es decir el conjunto de todos los métodos y contenidos tales que al aplicarle un método concreto a un contenido concreto se logra el cumplimiento del objetivo en algún grado o medida.
2. $\mu_{\mathbf{met.}}$(cont.) representa la función de pertenencia de un método aplicado a un contenido, es decir significa el grado o nivel con que el método en cuestión se aplica por el docente a ese contenido.
3. $\mu_{\mathbf{profun.}}$(cont.) representa la función de pertenencia del grado o nivel de generalización, amplitud o profundidad con que se trata el contenido por el docente.
4. $\mu_{\mathbf{sist.}}$(cont.) significa el grado o nivel de sistematicidad con que se aborda el contenido por el docente.
5. $\mu_{\mathbf{ind.}}$(cont.) representa el grado o nivel de independencia que se propicia en el estudiante al tratar un contenido.
6. Como los educadores tienen grados de preferencia diferentes por los métodos que utilizan, tiene sentido considerar la función de pertenencia $\mu_{\mathbf{pref.}}$(met**.**) que indica el grado de preferencia de ese método por el docente.
7. También se considera la función de pertenencia $\mu_{\mathbf{most}}$(met.,cont.) que indica el grado en que se debe, de acuerdo a la experiencia acumulada y a los principios de la pedagogía, aplicarse ese método con ese contenido.

Finalmente, $\mu_{\mathbf{obj}}$(v) representa la función de pertenencia asociada al grado o nivel de cumplimiento del objetivo **v**

Por otra parte, para los rasgos de generalización, e independencia se puede considerar también los niveles de aceptación o asimilación que van mostrando los estudiantes. Para tales fines se consideran las siguientes funciones de pertenencia:

- $\mu_{\mathbf{asim.profun.}}$(cont.) representa el grado o nivel de aceptación o asimilación que muestran los estudiantes ante el nivel de profundidad con que se trata un contenido.
- $\mu_{\mathbf{asim.ind.}}$(cont.) representa el grado o nivel de aceptación o asimilación que muestran los estudiantes ante el nivel de independencia que se propicia cuando se trata un contenido.

En el conjunto **M x C** se puede considerar un subconjunto borroso con la siguiente función de pertenencia:

μ(met., cont.) = $\mu_{\mathbf{most}}(\text{met.,cont.})\mu_{\mathbf{pref.}}(\text{met.})\mu_{\mathbf{met.}}(\text{cont.})$ $\mu_{\mathbf{profun.}}(\text{cont.})$ $\mu_{\mathbf{asim.profun.}}(\text{cont.})$ $\wedge$ $\mu_{\mathbf{most}}(\text{met.,cont.})\mu_{\mathbf{pref.}}(\text{met.})\mu_{\mathbf{met.}}(\text{cont.})$ $\mu_{\mathbf{sist.}}(\text{cont.})$ $\wedge$ $\mu_{\mathbf{most}}(\text{met.,cont.})$ $\mu_{\mathbf{pref.}}(\text{met.})\mu_{\mathbf{met.}}(\text{cont.})$ $\mu_{\mathbf{ind.}}(\text{cont.})$ $\mu_{\mathbf{asim.ind.}}(\text{cont.})$

La función μ(met., cont.) reúne para cada método y cada contenido, por una parte el grado o nivel de generalización, amplitud y profundidad, sistematicidad e independencia con que los aborda el docente y por otra parte los grados o niveles de aceptación por los estudiantes de la profundidad e independencia con que se tratan.

La función $\boldsymbol{f : M \times C \longrightarrow O}$

(met., cont.) $\longrightarrow$ obj.

Relaciona todos los métodos y contenidos que se vinculan con cada objetivo. El dominio de esta función no representa necesariamente a todos los elementos del producto cartesiano.

Para aclarar la idea, consideremos los siguientes conjuntos de métodos, contenidos y objetivos:

$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ $O = \{o_1, o_2, o_3\}$ $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$

En este caso se puede tener la siguiente función que los relaciona:

$$\boldsymbol{f : M \times C \longrightarrow O}$$

$$\{(m_1,c_1), (m_2,c_3), (m_4,c_5)\} \longrightarrow o_2$$

$$\{(m_3,c_1), (m_4,c_2)\} \longrightarrow o_1$$

$$\{(m_2,c_1), (m_4,c_4)\} \longrightarrow o_3$$

Nótese que métodos diferentes con el mismo contenido tributan a objetivos diferentes, en este caso (m_1,c_1), (m_3,c_1), (m_2,c_1) tributan a los objetivos o_2, o_1 y o_3 respectivamente, mientras que un mismo método aplicado a contenidos diferentes tributa a objetivos diferentes, en este caso (m_4,c_2) y (m_4,c_4) tributan a los objetivos o_1 y o_3 respectivamente. También se observa que métodos y contenidos diferentes tributan a un mismo objetivo, en este caso (m_1,c_1) , (m_2,c_3) y (m_4,c_5) tributan al objetivo o_2.

Si se aplica el principio de extensión de Zadeh, se obtiene la función de pertenencia asociada al cumplimiento de los objetivos de la manera siguiente:

$$\boldsymbol{\mu_{obj}(v) = \sup_{método}\{\max_{contenido}\{\mu(met., cont.)\}\}}$$

Con la condición **v = método(contenido)**

o bien $\mu_{obj}(v) = \sup_{\text{método}}\{\max_{\text{contenido}}\{\mu_{most}(\text{met.,cont.})\mu_{pref.}(\text{met.})\mu_{met.}(\text{cont.})$ $\mu_{profun.}(\text{cont.})$ $\mu_{asim.profun.}(\text{cont.})$ $\wedge$ $\mu_{most}(\text{met.,cont.})\mu_{pref.}(\text{met.})\mu_{met.}(\text{cont.})$ $\mu_{sist.}(\text{cont.})$ $\wedge$ $\mu_{most}(\text{met.,cont.})$ $\mu_{pref.}(\text{met.})\mu_{met.}(\text{cont.})$ $\mu_{ind.}(\text{cont.})$ $\mu_{asim.ind.}(\text{cont.})\}\}$

Con la condición **v = método(contenido)**

La expresión **método(contenido) = objetivo** no puede interpretarse en el sentido de aplicarle un método cualquiera a un contenido cualquiera ya que en general se logrará siempre un objetivo pero ese objetivo puede no tener sentido. En realidad interesa el problema al revés, es decir dado un objetivo hallar un método y un contenido tales que al aplicarle el método al contenido se logra en alguna medida el cumplimiento del objetivo. Es este el significado de la expresión **método(contenido) = objetivo** que nos interesa.

Consideremos el siguiente ejemplo con fines didácticos:

Objetivo: Aprender a nadar.

Se considera cumplido el objetivo cuando la persona es capaz de trasladarse por el agua durante varios minutos sin contacto con otros elementos.

Contenido:

1. Realizar ejercicios respiratorios asociados a la natación.
2. Realizar ejercicios con brazos y piernas asociados a la natación.

Método1: Realizar los ejercicios fuera del agua.

Método 2: Realizar los ejercicios dentro del agua.

Método 3: Combinación juiciosa de los métodos 1 y 2.

Método1(contenido) = objetivo

Se logra el objetivo de que la persona reproduzca fuera del agua todo lo que se requiere para nadar pero no se logra el objetivo de aprender a nadar.

Método2(contenido) = objetivo

La persona puede aprender a nadar.

Método3(contenido) = objetivo

Puede resultar más eficiente que los métodos 1 y 2.

Corresponde a los especialistas establecer grados de cumplimiento del contenido, y de los métodos que de acuerdo a la edad del sujeto y sus características físicas pueden relacionarse con los siguientes elementos principales:

- Estilos de natación que aprende.
- Tiempo que puede permanecer nadando.
- Velocidad al nadar.

De esta manera se le puede asignar un sentido a las funciones de pertenencia

$\mu_{met.}$ (cont.), $\mu_{profun.}$(cont.), $\mu_{sist.}$(cont.), $\mu_{ind.}$(cont.), $\mu_{pref.}$(met.), μ_{most}(met.,cont.), $\mu_{asim.profun.}$ (cont.), $\mu_{asim.ind.}$(cont.)

y con la metodología propuesta obtener un significado para la función de pertenencia $\boldsymbol{\mu_{obj}}$**(v)** que representa el grado de cumplimiento del objetivo enunciado.

5.1- Valor práctico de los resultados

El principal resultado de este trabajo es la expresión matemática para la función de pertenencia asociada al cumplimiento de los objetivos, pero no puede verse como una *"regla mágica o salvadora"* a la cual acudimos para saber si nuestro trabajo anda bien o mal; es mas bien una guía, un medio metodológico para orientarnos. Lo importante es comprender su significado, además puede enriquecerse con cuantos matices sean de nuestro interés. Ella recoge los niveles de profundidad, sistematicidad, e independencia al abordar el cumplimiento de cualquier objetivo, pero el principio en que se fundamenta admite otras interpretaciones que puedan darse para las particularidades de una asignatura, disciplina o carrera.

Casi todo el razonamiento al que se acostumbra al estudiante desde la enseñanza primaria está asociado con la lógica binaria, es decir la lógica del todo o la nada; sobre esta base se estructuran tanto los modelos deterministas como los estadísticos y los de probabilidad los cuales lamentablemente se introducen tardíamente solo en la enseñanza universitaria y no para todas las carreras.

Cuando se habla de introducir modelos matemáticos en las investigaciones científicas, no todos los investigadores aceptan la validez de estos modelos en cualquier campo de investigación; muchos de los investigadores dedicados a las ciencias sociales muestran reticencia ante estos modelos, y solo aceptan enfoques estadísticos para validar su campo de investigación. La ciencia pedagógica no está ajena a esa tendencia.

Es conocido que ningún modelo puede representar al objeto de manera fiel. Los modelos a los que estamos más habituados son los asociados con fenómenos deterministas o leyes de probabilidad; incluso en estos casos tan trillados se trata de aproximaciones donde se tienen en cuenta las regularidades esenciales pero no es posible recoger todas las relaciones que pueden aparecer entre los factores que intervienen en el objeto que se desea modelar.

Para el caso de un fenómeno eminentemente social como el proceso docente educativo, la tarea resulta en extremo compleja pues con mayor razón pueden omitirse aspectos importantes. El modelo propuesto constituye una aproximación plausible ya que tiene en cuenta aspectos esenciales del proceso de asimilación reflejados en las funciones de pertenencia.

Los fundamentos de la lógica borrosa resultan naturales al modo de pensar del hombre; muchas veces decimos que las cosas no son en blanco y negro solamente, sino que tienen matices, tienen colores, ahí está el sentido de lo que expresa el concepto de subconjunto borroso; su (graduación o gradación).

También al observar a una persona no siempre podemos precisar su edad, pero podemos establecer si se trata de un joven, una persona adulta de mediana edad o una de mayor edad, es decir podemos establecer fácilmente tres categorías o grupos, aunque el problema es que las fronteras entre el joven y el de mediana edad o el de mediana edad y el de mayor edad no están definidas con nitidez, incluso dos personas pueden clasificar de manera diferente a alguien que observan. De aquí la otra característica asociada con el pensamiento del hombre que es la (granulación o granularidad).

La lógica borrosa se nutre de estos principios, por lo que allí donde la información dependa de factores subjetivos, es decir que permitan obtener más que una medida una valuación, se recomienda el enfoque borroso para modelar el problema. La lógica borrosa además no niega a la lógica binaria o a las lógicas multivalentes, sino que las incluye como casos particulares. Si bien hace solo unos 100 años fue que comenzó la introducción en mayor escala de los enfoques estadísticos y de probabilidad en la modelación matemática de problemas prácticos, la introducción del enfoque borroso o difuso es mucho más reciente; los primeros trabajos de Zadeh son del año 1965 y en los años 70 y 80 del pasado siglo se hicieron importantes aplicaciones pero mas bien en el campo económico y en el control borroso de sistemas dinámicos.

Cuando se discuten nuevos programas se debate mucho tanto sobre objetivos como sobre contenidos y métodos de enseñanza, pero una vez aprobado el programa algunos educadores o colectivos de educadores, a pesar de que la categoría objetivo es la rectora en el proceso docente educativo, piensan más en términos de contenidos que en términos de objetivos. Por otra parte no todos los educadores estudian y comprenden el valor real que tienen las categorías de la didáctica, muchos son excelentes educadores y lo han logrado a partir de la experiencia acumulada y de condiciones naturales para este tipo de actividad, pero muestran poco interés cuando se requieren discusiones sobre la metodología de una asignatura o disciplina en particular. Determinar una relación entre estas categorías es un problema de naturaleza en extremo compleja por estar asociada con infinidad de factores que no siempre se pueden medir; no por gusto la misma clase por el mismo docente no puede darse de igual manera ante grupos de estudio diferentes.

El artículo 134 del reglamento antes citado, concluye que la evaluación es ***"una vía para la retroalimentación y la regulación"*** del proceso docente educativo, pero podemos preguntarnos: ¿Cómo recibir esa retro alimentación que nos permita ir regulando el proceso atendiendo a los objetivos previstos, a las características de los estudiantes y a las condiciones con que se cuenta sin necesidad de hacer evaluaciones?. Es cierto que de observar los rostros de los educandos es posible conocer sobre sus estados de ánimo e intereses, pero podemos profundizar un poco más e investigar sobre los grados de independencia, de asimilación o de generalidad; indagar cuales factores influyen en ellos y discutir con los alumnos este lenguaje. La propuesta que aquí se ofrece, basada en estos principios, es otra vía para la retro alimentación y regulación necesarias.

Resulta natural hacernos las siguientes preguntas:

> ¿Como evaluar el cumplimiento de los objetivos en una situación concreta?.
>
> ¿Como aproximarnos a la función de pertenencia asociada al cumplimiento de los objetivos ?.

Con los siguientes ejemplos se pretende aclarar un poco este asunto aunque por supuesto, no lo resolveremos.

Ejemplo 1:

En los cursos de Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática para las carreras de ingeniería se incluye el estudio de la ley normal debido a que esta ley es un medio ideal para el tratamiento de muchos problemas prácticos. Para el caso de la carrera de Ingeniería Industrial puede considerarse como objetivo primario asociado a la ley normal el siguiente:

Objetivo: Resolver problemas sencillos asociados a la ingeniería industrial tanto al nivel reproductivo como productivo mediante el significado y propiedades de la ley normal.

A continuación se aclaran los términos de este objetivo:

Resolver problemas sencillos significa aquellos que por su amplitud y profundidad solo requieren como modelo a las propiedades y al significado de la ley normal o una combinación de esta ley con otra y los datos que utilizan pueden asumirse sin realizar experiencias. Significa además obtener una respuesta coherente con la pregunta; por ejemplo si por el significado lógico de la pregunta la probabilidad debe ser grande, el resultado obtenido no puede ser pequeño.

Asociados a la ingeniería industrial el campo que abarca la ingeniería industrial es muy amplio, por lo que se refiere a tareas que impliquen organizar, planificar, dirigir, controlar u optimizar recursos materiales, humanos o financieros en correspondencia con nuestros principios éticos, de defensa del medio ambiente y en un marco sostenible y sustentable.

Nivel reproductivo se refiere a la aplicación de una propiedad de manera aislada y en condiciones similares a como aparece en los textos o como fue explicado.

Nivel productivo se refiere a la aplicación integrada de varias propiedades para lo cual se exige además cierto nivel de abstracción y generalización en la solución de la tarea. Pueden incluirse problemas que integren el modelo de la ley normal con otras leyes de distribución. La diferencia esencial entre los niveles reproductivo y productivo consiste en que para el primero el estudiante *"reproduce o repite"* la propiedad estudiada o el significado explicado prácticamente en la misma forma en que la conoce sin establecer vínculos o relaciones entre ellos. El nivel productivo requiere la integración de los conceptos y propiedades que le permitan resolver situaciones nuevas para él.

Significado de la ley normal se refiere por una parte al significado particular que tiene como ley de distribución y por otra parte a su significado y valor práctico dado por el Teorema Central del Límite.

Propiedades de la ley normal se refiere a las propiedades específicas de esta ley como la simetría respecto a la media, coincidencia entre media y mediana, la regla de las tres sigmas, la forma en que varía la campana para valores diferentes de la varianza, el uso de la tabla en el sentido directo y en el inverso, el comportamiento de la media y la varianza para una combinación lineal de varias variables normales e independientes, y el Teorema Central del Límite.

El ***contenido*** asociado a este objetivo es en lo fundamental lo expresado como su significado y propiedades. Los niveles de profundidad, sistematicidad e independencia en el tratamiento del contenido dependen no solo del tiempo asignado al estudio del tema, sino también a la forma en que se organice el proceso docente, a las prioridades que se le den a cada aspecto, a la experiencia del docente y a los medios con que se cuenta entre otros elementos.

En relación con los ***métodos*** es bueno precisar que no solo se trata de los métodos del docente, sino también los de los estudiantes y en particular las recomendaciones que reciben de su profesor para que a partir de la experiencia de este utilicen métodos eficientes para lograr los conocimientos, habilidades y valores a los que tributan los contenidos. El uso de los sistemas informáticos que existen para el procesamiento estadístico de datos, sirve también como método para evaluar mejor las propiedades de la ley normal.

Los métodos de enseñanza pueden clasificarse atendiendo a las siguientes categorías: método problémico, de la invariante de la habilidad, reproductivo, productivo y creativo. Al método problémico se tributa con el planteamiento de problemas que se modelan precisamente mediante la ley normal o el teorema central del límite.

Al método de la invariante de la habilidad puede tributarse de las siguientes formas:

- a)- Sugiriéndole al alumno dibujar una curva normal con la media dada en el problema para orientarse mejor y evitar errores conceptuales en los cálculos de probabilidades asociados a esta ley.
- b)- Atendiendo a la naturaleza del problema, la regla de las tres sigmas representa una invariante de habilidad que puede aplicarse como método para buscar la cola derecha o la cola izquierda. Si por ejemplo se conoce que el tiempo medio de funcionamiento de cierto

equipo sigue la ley normal con media de 5 años y desviación típica de medio año, y se quiere ofrecer un tiempo razonable de garantía al usuario, al aplicar la regla de las tres sigmas y tomar la cola izquierda parece razonable ofrecer una garantía de 3 años. En este caso la cola derecha no tiene sentido.

Por otra parte si se trata del tiempo medio de reparación de un equipo y se conoce que sigue la ley normal con media de 5 horas y desviación típica de media hora, entonces de la regla de las tres sigmas se puede sugerir como norma razonable de tiempo para la reparación el valor de 6 horas. En este caso no tiene sentido tomar la cola izquierda. Nótese que los mismos valores para $\mu = 5$ y $\sigma = 0.5$ resuelven problemas diferentes con el mismo modelo.

– c)- Supongamos que nos interesa un método que sirva para que los estudiantes comprendan la validez del teorema central del límite. En términos estrictamente matemáticos no existe otra manera de hacerlo que no sea la demostración rigurosa del teorema. Quienes no conocen la demostración pero han aplicado muchas veces herramientas estadísticas en la solución de problemas prácticos llegan con el tiempo a comprender la validez del teorema.

El problema está en propiciar una "justificación creíble" sin experiencia práctica y sin la demostración. Como se hizo referencia anteriormente, en este caso es posible realizar simulaciones en una computadora o también mostrar a trasluz una regla plástica de 50 centímetros con varios años de uso. Los golpes, las caídas y deformaciones sufridas por la regla durante varios años son variables aleatorias que al actuar de forma conjunta dejan su huella en la regla precisamente siguiendo la ley normal.

Al nivel productivo puede tributarse con problemas sencillos como los siguientes:

1. Una variable aleatoria discreta **X** se ha modelado mediante la ley normal con media 30 y varianza pequeña. Al calcularse $P(X \geq 31)$ y $P(X \geq 50)$ no se ha aplicado el factor de corrección. Diga en cual caso el error es mayor y justifique su respuesta.
2. Se quiere determinar la norma de tiempo para la reparación de un equipo en un taller que cuenta con 50 obreros para esta tarea y se han propuesto cuatro variantes: 20 horas, 30 horas, 36 horas y 50 horas.

   a)- Se conoce de la experiencia acumulada que el tiempo de reparación de un equipo sigue la ley normal con media de 30 horas y varianza de 4 horas. Cual de las normas propuestas considera usted más razonable. Justifique su respuesta.

   b)- Sobre la base de una norma que permita reparar el 95 por ciento de los equipos se le pidió al estudiante **A** que calculara la probabilidad de que por lo menos 45 obreros cumplieran la norma y obtuvo un resultado próximo a cero, mientras que al estudiante **B** se le pidió que calculara la probabilidad de que a lo sumo 5 obreros cumplieran la norma y obtuvo un resultado próximo a uno. Califique usted estas respuestas y justifique en cada caso.

Para el caso que nos ocupa no es interés desarrollar el método creativo.

Ejemplo 2:

El Ingeniero Informático participa en los grupos multidisciplinarios que se crean para cumplir tareas complejas de la esfera productiva, de servicios o científico técnica. Muchas veces se requiere aplicar un modelo matemático conocido o se construye un nuevo modelo de acuerdo a las exigencias del problema, por lo que un objetivo de esta carrera puede ser el siguiente:

Objetivo: Implementar modelos matemáticos en un lenguaje de programación.

La disciplina Matemática General que se estudia en el primer y segundo año de esta carrera debe tributar a ese objetivo.

A continuación se exponen algunas consideraciones sobre **métodos** y **contenidos** de esta disciplina asociados a este objetivo. Primero discutiremos sobre el concepto de función. Se demuestra lo útil que resulta llegar al concepto abstracto de función, es decir a la correspondencia que se establece entre dos conjuntos **A** y **B** de naturaleza arbitraria de tal forma que a cada elemento del conjunto **A** se le hace corresponder un único elemento del conjunto **B**.

Si bien estas ideas parecían estar reservadas para los estudiosos de la llamada matemática pura, ahora deberán formar parte de la cultura matemática en la ingeniería informática sobre todo si se quieren aprovechar mejor las potencialidades que ofrecen las herramientas de cómputo tanto mediante la confección de algoritmos y programas como mediante el uso de asistentes matemáticos. No se trata de comenzar por definir en una clase el concepto abstracto de función y utilizarlo en toda su riqueza, sino en ir aproximándonos a él a través de las diversas situaciones problémicas.

Por otra parte, resulta habitual impregnar a los cursos de matemática para ingenieros de los siguientes enfoques: enfoque analítico en variables reales, complejas o vectoriales; enfoque de optimización; enfoques probabilísticos o estadísticos; enfoque de operadores o transformaciones y de equivalencias o isomorfismos entre otros. Aunque al enfoque numérico o aproximado también se le dedica atención, no siempre se logra un elevado desarrollo del pensamiento algorítmico de los estudiantes.

A continuación se exponen algunas reflexiones que pueden enriquecer este tipo de pensamiento, que es esencial para la carrera de Ingeniería Informática, ya que no siempre se aprovechan todas las potencialidades que ofrece el curso de matemática. Se puede avanzar en este terreno si muchas ideas, apoyadas en interpretaciones geométricas y físicas o en nociones intuitivas, se combinan con los conocimientos que en materia computacional ya poseen los estudiantes. Son formas concretas de contribuir al objetivo planteado en este problema.

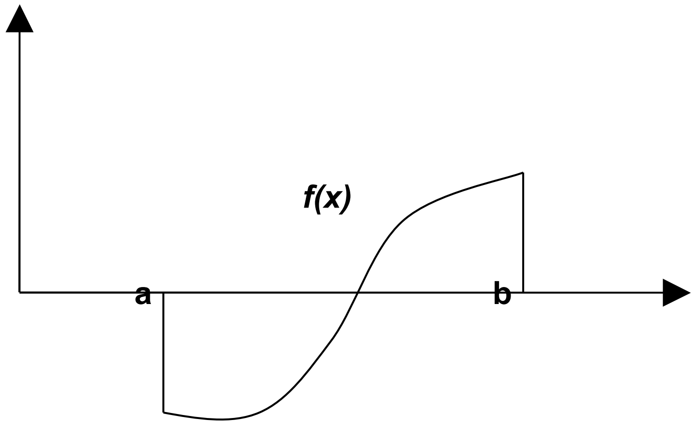
Construcción del concepto abstracto de función

Resulta natural utilizar en los cursos de matemática para ingenieros funciones con dominio e imagen en subconjuntos de números reales o complejos, para lo cual generalmente se comienza con funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ o de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$ y progresivamente se trabaja con funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$. Estos espacios vectoriales son suficientes para introducir los conceptos de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad con los cuales se cubren las principales aplicaciones de la matemática en la ingeniería.

La introducción de la computación con el uso de super lenguajes o de asistentes matemáticos constituyen exigencias para la ampliación progresiva del concepto de función. No se trata de imponer en una clase este concepto en un plano eminentemente teórico, sino en preparar al estudiante para que comprenda que no son sólo de interés para él las funciones con dominio e imagen en $\mathbf{R}^n$. Esto puede lograrse desde las primeras clases de una forma muy sencilla si se vincula con problemas que el estudiante debe abordar como son la búsqueda de una raíz en un intervalo o la búsqueda de un extremo. Para ilustrar con el método de bisección lo antes expuesto considérese el conjunto siguiente:

$$\mathbf{F} = \{\, \mathbf{f} : [\,\mathbf{a,b}\,] \to \mathbf{R} \text{ continuas, crecientes o decrecientes y tales que } f(a)f(b) < \mathbf{0} \,\}$$

Como consecuencia del teorema de Bolzano existe una única raíz para cada elemento de **F**. La forma en que se programa el algoritmo del método de bisección en lenguaje **C**, como se expresa a continuación, puede resultar más comprensible si se asocia con la siguiente función que llamaremos Raíz:



Sean:

$A = F \times [a,b) \times (a,b] \times \mathbf{R}^{+}$

$B = (a,b) \cup (F \times [a,b) \times (a,b] \times \mathbf{R}^{+})$

$\text{Raíz} : A \longrightarrow \mathbf{B}$

$$(f,p,q,eps) = \begin{cases} (p+q)/2 & \text{si } f((p+q)/2) = 0 \text{ ó } q - p < eps \\ (f, (p+q)/2, q, eps) & \text{si } f((p+q)/2)\, f(q) < 0 \\ (f, p, (p+q)/2, eps) & \text{si } f(p)\, f((p+q)/2) < 0 \end{cases}$$

Esta idea encierra un método general de trabajo aplicable en la programación de otros algoritmos. Nótese que la función Raíz así definida, tiene por dominio e imagen dos conjuntos de naturaleza abstracta, pero aquí lo aparentemente muy abstracto tiene un valor muy concreto. Resulta esencial discutir estas ideas con los estudiantes para que comprendan la necesidad de la ampliación del concepto de función. Compárese lo anterior con el programa de la función Raíz en lenguaje **C** que se describe a continuación:

```
double raíz(f,a,b,eps)
double f(), a, b, eps;
    {
double m;
m = (a+b)/2;
if(f(m)= = 0 || b-a<eps)
return(m);
else if (f(a)*f(m)<0)
return(raíz(f, a, m, eps));
```

```
else
return (raíz(f, m, b, eps));
}
```

Este programa expresa el proceso iterativo que comienza con el intervalo inicial **[a,b]** y progresivamente se pasa a los intervalos **[a,m]** ó **[m,b]** siendo **m=(a+b)/2** en dependencia de si la raíz cae en el subintervalo **[a,m]** ó en **[m,b]**.

Si la solución de este mismo problema se realiza mediante un asistente matemático, por ejemplo mediante el **DERIVE**, basta teclear las siguientes líneas de código:

```
f(x):=
g(a,b):=if(f(a)f((a+b)/2)<0, [a,(a+b)/2], [(a+b)/2,b])
Bisección(a,b,n):=ITERATE(g(element(v,1),element(v,2)),v,[a,b],n)
Error:=(a,b,n ):=(b-a)/2^n
```

Si consideramos **I** como el conjunto de todos los sub intervalos cerrados de un intervalo cerrado inicial **[a,b]** donde está definida **f** como elemento de **F**, entonces las expresiones anteriores son funciones con dominio e imagen en los conjuntos siguientes:

g: $\mathbf{I} \to \mathbf{I}$

g([a,b]) = [a,(a+b)/2] si f(a)f((a+b)/2)<0

g([a,b]) = [(a+b)/2,b] en otros casos

bisección: $\mathbf{I} \times \mathbf{N} \to \mathbf{I}$

Esta función actúa de la manera siguiente: a cada elemento de **I** y para cada número natural **n**, se obtiene otro elemento de **I** a partir de iterar **n** veces la función **g**, operación que realiza la función **ITERATE** que tiene implementado el asistente matemático **DERIVE**.

error: $\mathbf{I} \times \mathbf{N} \to \mathbf{R}$

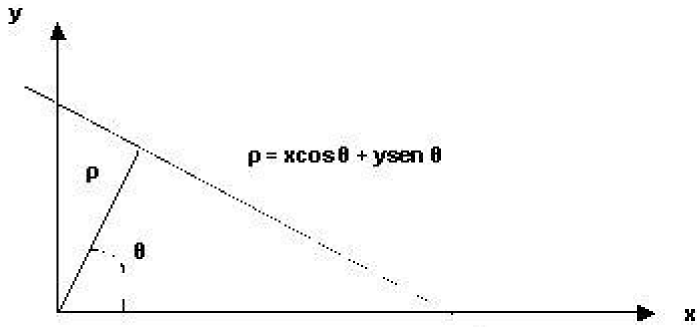
Esta función devuelve el número real $\mathbf{(b-a)/2^n}$ que representa el error en

la estimación de la raíz.

Como se observa de este ejemplo, de una forma natural se ha ampliado el concepto de función a conjuntos con dominio e imagen de naturaleza un tanto diferente a lo que habitualmente el estudiante conoce. De manera similar puede realizarse con otros métodos numéricos cuyos principios pueden introducirse también desde las primeras clases como el método de Newton para el cálculo de una raíz, o el método de Euler para la solución aproximada de una ecuación diferencial.

5.2- Acerca de la Transformación de Hough

En el campo del reconocimiento de patrones de forma es muy conocida la Transformación de Hough, cuyas ideas básicas fueron patentadas por este autor en 1962. Esta transformación permite ampliar el concepto de función y brinda una aplicación sencilla de valor práctico para la ecuación normal de una recta, ideas que pueden utilizarse en los cursos de Geometría Analítica. Es otra manera de ver como el curso de matemática para la ingeniería puede enriquecerse a partir de herramientas informáticas. De forma breve se exponen a continuación las ideas básicas asociadas con esta transformación.



La ecuación normal de una recta puede expresarse como $\rho = x\cos\theta + y\mathrm{sen}\theta$. A cada recta en el plano **x-y** se le hace corresponder por la ecuación anterior, un único par de valores **θ-ρ** en $[0,\pi)\times(-\infty,+\infty)$. La ecuación $\rho = 0$ representa una recta que pasa por el origen y $\theta = 0$ representa una recta paralela al eje **y**. Nótese que un punto fijo (x_i,y_i) en el plano **x-y** por la ecuación anterior se convierte en $\rho = x_i\cos\theta + y_i\mathrm{sen}\theta$. Esta ecuación analizada como curva en el plano **θ-ρ**, cosa que puede hacerse ya que x_i e y_i están fijos representa una curva sinusoidal.

Por otra parte, si en el plano **θ-ρ** fijamos un punto (θ_i,ρ_i) entonces la ecuación $\rho_i = x\cos\theta_i + y\mathrm{sen}\theta_i$ representa una recta en el plano **x-y**. Es decir la transformación de Hough cumple las siguientes propiedades:

1. Un punto en el plano **x-y** se corresponde con una curva sinusoidal en el plano **θ-ρ**.
2. Un punto fijado en el plano **θ-ρ** se corresponde con una recta en el plano **x-y**.
3. Puntos situados en la misma recta $\rho_0 = x\cos\theta_0 + y\mathrm{sen}\theta_0$ corresponden a diferentes curvas sinusoidales pero todas con la condición de que se intersectan en (θ_0,ρ_0).
4. Puntos situados en la misma sinusoidal $\rho = x_0\cos\theta + y_0\mathrm{sen}\theta$ corresponden a diferentes rectas pero todas pasando por el mismo punto (x_0,y_0). Las condiciones 1 y 2 representan ampliaciones del concepto de función ya que en 1 El dominio es $\mathbf{R}^2$ y la imagen es la familia de curvas sinusoidales, mientras que en 2 el dominio es el conjunto $[0,\pi)\times(-\infty,\infty)$ y la imagen es la familia de rectas.

A continuación se utiliza la condición 3 para la búsqueda de rectas en una imagen, para lo cual se forma un *"acumulador bidimensional"* de la manera siguiente: se divide el intervalo $[0,\pi)$ en d_1 partes iguales y el intervalo $[-R,R]$ en d_2 partes iguales. Para cada punto (x_i,y_i) de la imagen mediante la ecuación $\rho = x_i\cos\theta + y_i\mathrm{sen}\theta$ se encuentra hasta d_2 valores diferentes de ρ correspondientes a d_1 valores diferentes de θ. Los valores de θ y de ρ en el acumulador se obtienen con cierto margen de error prefijado de antemano. El siguiente cuadro recoge un acumulador de 709 puntos:

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

ρ\θ	0^0	20^0	40^0	60^0	80^0	100^0	120^0	140^0	160^0
1	4		5			9		12	7
2	80	3	20		2	65	1		7
3				6		1	3		8
4			72		42	4		45	
5		19					1		12
6		11			93		9	8	
7			46	8					79
8				9			18		

El significado de este cuadro es el siguiente: 72 puntos están sobre la recta de ecuación $4 = x\cos 40^{0'} + y\text{sen}40^0$, ningún punto sobre la recta de ecuación $3 = x\cos 20^0 + y\text{sen}20^0$, un punto sobre la recta de ecuación $5 = x\cos 120^0 + y\text{sen}120^0$ etc. Si se considera un umbral de 60 entonces hay 5 rectas en la imagen y si el umbral es de 40 entonces hay 8 rectas en la imagen.

Esta idea sencilla pero ingeniosa puede desarrollarse en un curso de matemática como aplicación no habitual pero valiosa. Solamente se ha pretendido dar la idea elemental, ya que existen muy buenos algoritmos para la transformación de Hough que reducen la memoria necesaria y aceleran los cálculos.

5.3- Nociones sobre simulación estadística

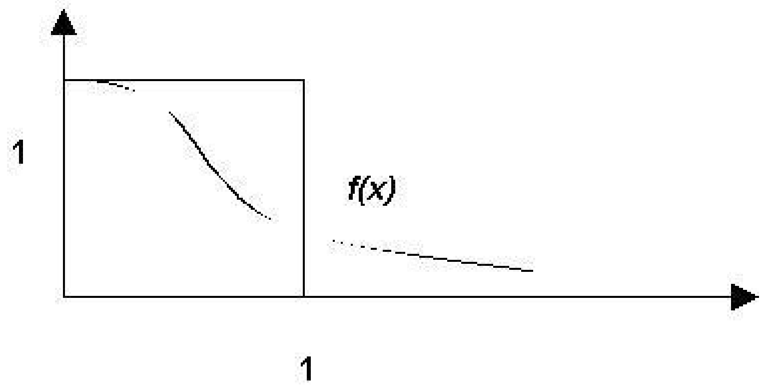
Aunque los cursos de Teoría de Probabilidades y de Estadística Matemática se ofrecen generalmente cuando concluyen los cursos de Análisis Matemático y de Algebra, la posibilidad que brindan los lenguajes de programación de generar números pseudoaleatorios con ley uniforme en el intervalo [0,1], facilita la solución de tareas sencillas que desarrollan el pensamiento algorítmico a partir de nociones elementales sobre la simulación estadística. Algunos ejemplos pueden ser los siguientes:

Calculo aproximado de una integral definida:

En este caso, conjuntamente con los métodos de cálculo aproximado de integrales definidas mediante rectángulos, trapecios y parábolas, puede evaluarse por ejemplo la integral de Poisson con el siguiente programa escrito en forma de pseudolenguaje:

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

```
input n ;
m = 0 ;
for (i = 1 ; n)    {
x =  rnd(1)  ;  / significa generar x en el intervalo  [0,1]  /
y = rnd(2)  ;  / significa generar y en el intervalo [0,1] /
if (y ≤ exp(-x* x) )
m ++ ;            }
print m/n  ;
```



Siendo $f(x) = e^{-x^2}$

El significado del algoritmo es muy simple, cuando se genera el punto aleatorio **(x,y)** el contador **m** se incrementa si el punto cae debajo de la curva ***f(x)*** y finalmente se calcula el cociente **m/n** siendo **n** la cantidad de experiencias, es decir la cantidad de veces que se repite el proceso.

Al discutirse el ejemplo 1 no quedó resuelto el problema sobre como construir la tabla de la ley normal tipificada. Este algoritmo es una respuesta a ese problema.

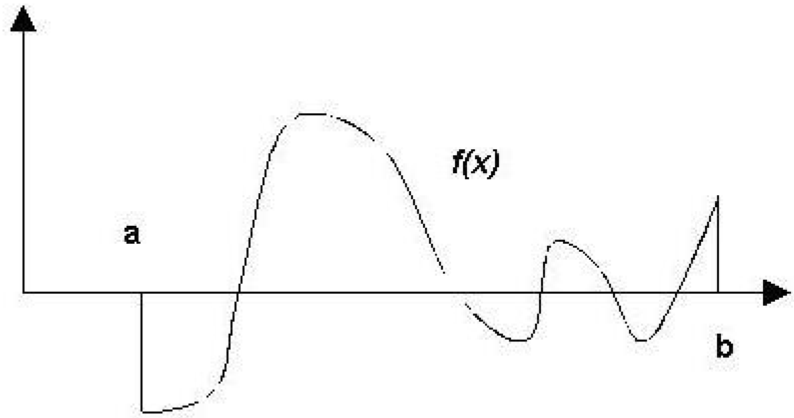
Cálculos similares pueden hacerse con integrales múltiples. Para esos casos, las técnicas de simulación resultan más ventajosas que los métodos basados en fórmulas de cuadraturas. Un ejercicio interesante consiste en obtener aproximaciones del número **π** utilizando esta idea a partir de la comparación entre el área de un círculo de radio 1 inscrito en un cuadrado de lado 2 y el área del cuadrado. Resulta muy provechoso realizar discusiones de este tipo con los estudiantes.

Búsqueda del mínimo de una función f (x).

En este caso, conjuntamente con los métodos aproximados de búsqueda de extremos del tipo del gradiente, se puede introducir el siguiente programa escrito en forma de pseudolenguaje :

```
input n, z ;
 m = 0 ;
 while ( m < n )
   {
x = rnd (1) ;   / significa  generar x en el dominio de la función /
 if ( f (x )  <  f (z ) )
 z = x,  m = 0 ;
 else
 m ++ ;
   }
print z, f(z) ;
```

La esencia del algoritmo es sencilla, se parte de un punto inicial **z** del intervalo **[a,b]** y se genera un valor **x** también en **[a,b]** y si **f(x) < f(z)** el valor que se le asigna a **z** es el de **x**. Se establece como criterio de parada un número **n** de veces sucesivas en que no se logra mejorar el valor **z** que será el punto de mínimo y **f(z)** el valor mínimo correspondiente.



El valor práctico de este algoritmo, está dado en que permite buscar extremos de funciones que no cumplen las condiciones de continuidad y de diferenciabilidad clásicas o que no son unimodales, cuestión esta que aparece muchas veces en la práctica.

Resulta de interés comparar este algoritmo en cuanto a tiempo de procesamiento y memoria con los algoritmos del tipo del gradiente. Estas ideas permiten la construcción de nuevos conocimientos por los estudiantes y el enriquecimiento de la formación básica en matemáticas, a partir de conocimientos elementales de computación, ya que basta conocer en algún lenguaje de programación la sintaxis para la entrada y salida de datos y el uso de los ciclos “if”, “for” y “while”. Además, de esta forma, se prepara el terreno para la comprensión ulterior de los fenómenos aleatorios a través del curso de Teoría de Probabilidades y Estadística Matemática.

En cuanto a los niveles de generalidad, amplitud o profundidad del contenido es bueno además precisar que los teoremas y propiedades se estudian a diferentes niveles que van desde el conocimiento de sus hipótesis y tesis, sus interpretaciones geométricas y físicas en caso de que existan, los principios sobre como demostrarlos, las pseudo demostraciones y las demostraciones formales. Los teoremas de existencia y unicidad generalmente se enuncian pero no se demuestran por estar basados en conceptos que salen del marco de estos cursos.

Para aplicar estas ideas en una asignatura, una disciplina o una carrera se requiere trabajar con varios objetivos, varios contenidos y muchos métodos. Lo importante, se reitera una vez más, no es obtener en forma analítica una expresión matemática para la función de pertenencia asociada a un objetivo ya que esto seria demasiado embarazoso y poco práctico. Un camino mas enriquecedor es poder *"desmenuzar o despedazar"* al objetivo, al contenido y a los métodos en partes significativas que permitan el análisis que sugiere la fórmula teórica propuesta.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

CAPÍTULO 6

6- Evaluación del aprendizaje mediante criterios de generalización e independencia

El proceso de asimilación de nuevos conocimientos y habilidades transcurre siempre mediante varias etapas. Estas etapas se caracterizan por los cambios que se operan en cada una de las características de las acciones, es decir en la forma, el grado de generalización, el grado de despliegue, el grado de independencia y el grado de dominio.

La forma cambia de la material o materializada a la forma perceptiva, después a la forma verbal externa y por último a la forma mental. El grado de generalización va aumentando mientras que el grado de despliegue se va reduciendo, la acción se abrevia y el individuo la realiza cada vez más rápido.

En el caso de la independencia se avanza desde la acción compartida, es decir con ayuda del que enseña, hacia la acción independiente del individuo. En cuanto al grado de dominio al principio se es consciente de todas las operaciones que integran la acción y poco a poco una parte de estas operaciones pasa al subconsciente y en una etapa superior se convierte en una acción automatizada. Este proceso se conoce como ley de interiorización de las acciones.

La primera etapa o etapa cero es la etapa de motivación, a ella le sigue la etapa de formación de la base orientadora de la acción y de manera sucesiva etapas sobre la participación activa de los estudiantes tomándose como base cada vez un mayor trabajo independiente. Al final deberá lograrse la máxima generalización e independencia absoluta.

Una manera de estimular la motivación y orientación puede ser formulando problemas que se correspondan con situaciones prácticas. Es bueno precisar que el tránsito por etapas no es uniforme para todos los estudiantes y además entre una y otra etapa no existen fronteras nítidamente definidas. La base orientadora implica una imagen de la acción a realizar, es lo que el sujeto sabe de la acción en si y de las condiciones en que debe realizarse.

En general se distinguen diferentes tipos de base orientadora de la acción, pero se pueden resumir en tres tipos generales: el primer tipo se caracteriza porque el individuo actúa por la vía del ensayo-error. Se trata de una base incompleta porque el sujeto no recibe todos los conocimientos sobre la acción, sino que él mismo trata de encontrarlos, probando de forma ciega. Se trata de una manera poco práctica para adquirir muchos conocimientos en breve tiempo.

El segundo tipo se caracteriza por el hecho de que al alumno se le ofrece desde el inicio un sistema completo y preelaborado de orientaciones, mientras que en el tercer tipo la orientación se da sobre la base de las llamadas "*invariantes o esencias*" que le permiten al sujeto a partir de una orientación general básica, resolver cualquier caso particular. En resumen, el primer tipo es incompleto, concreto e

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

independiente por el modo de obtención, el segundo tipo es completo, concreto, y no se obtiene de manera independiente. Por último, el tercer tipo es completo, generalizado e independiente y como regla supera a los anteriores.

Para el desarrollo de este trabajo se asume como elementos principales, los niveles de generalización y de independencia que se van logrando a medida que transcurre el proceso docente educativo de un tema, una asignatura, disciplina o carrera. En un proceso que se desarrolle en condiciones normales, al principio se tiene una máxima dependencia y una mínima generalización y con el paso del tiempo se van invirtiendo estos elementos.

Se define el grado de generalización como el cociente entre las posibilidades objetivas del sujeto para resolver una tarea y las posibilidades subjetivas de hacerlo, de tal manera que el grado de generalización toma valores entre cero y uno. Valores próximos a cero implican un escaso grado de generalización mientras que valores próximos a uno significan un alto grado de generalización.

El grado de dependencia se define de la manera siguiente: primero se obtiene la relación entre la capacidad de resolver solo una tarea y la capacidad de hacerlo con ayuda del profesor o de otros compañeros y este cociente se resta de uno. Si la capacidad de resolver solo la tarea coincide con la capacidad de hacerlo con ayuda del profesor o de otros compañeros entonces el grado de dependencia es mínimo y toma el valor cero, y si esa capacidad es nula entonces la dependencia es máxima y toma el valor uno. Lo expresado se puede definir mediante las siguientes igualdades:

$$\text{Grado de generalización} = \frac{\text{Posibilidades objetivas de resolver un problema}}{\text{Posibilidades subjetivas de resolver un problema}}$$

$$\text{Grado de dependencia} = 1 - \frac{\text{Capacidad de resolver un problema de manera independiente}}{\begin{array}{l}\text{Capacidad de resolver un problema con ayuda}\\ \text{del profesor o de otros compañeros.}\end{array}}$$

Este trabajo se nutre de dos fuentes principales, por una parte se toma como fundamento psicológico y pedagógico a las etapas del proceso de asimilación y la ley de interiorización de las acciones con los niveles de generalización y de dependencia como elementos principales. Por otra parte se toma como fundamento matemático a los principios del Lenguaje Natural Precisado que en esencia consiste en lo siguiente:

Dada una proposición **P** expresada en lenguaje natural, y una pregunta **Q** también en lenguaje natural, obtener una respuesta a **Q** dado **P** que denotaremos como **Q/P**. Para los objetivos de este trabajo se consideran las proposiciones siguientes:

> **P**: Para un grupo de estudios la mayoría de los estudiantes del grupo son mucho más generalizadores que dependientes.
>
> **Q**: ¿Cual es la diferencia entre los niveles de generalización y de dependencia en el grupo de estudios?

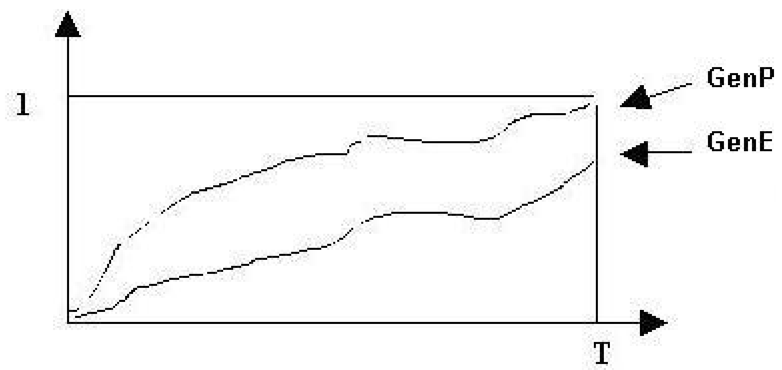
El tratamiento matemático de este problema requiere su formalización mediante la Lógica Borrosa y el uso del Principio de Extensión de Zadeh expuesto desde su artículo cenital de 1965 y enriquecido posteriormente. Aun en el caso de que para un grupo de estudios ninguno de los estudiantes sea mucho más generalizador que dependiente, la proposición resulta válida ya que en ese caso los estudiantes son mucho más generalizadores que dependientes en grado cero. En el modelo que se expone a continuación se aclara el valor práctico de la pregunta **Q**.

6.1- Modelo difuso para la evaluación del aprendizaje

El modelo propuesto utiliza como criterios para la evaluación del aprendizaje a los niveles de generalización y de independencia del profesor y de los estudiantes. Se asumen las siguientes notaciones:

GenP: Grado de generalización que propicia o estimula el profesor.

GenE: Grado de generalización que va logrando el estudiante.

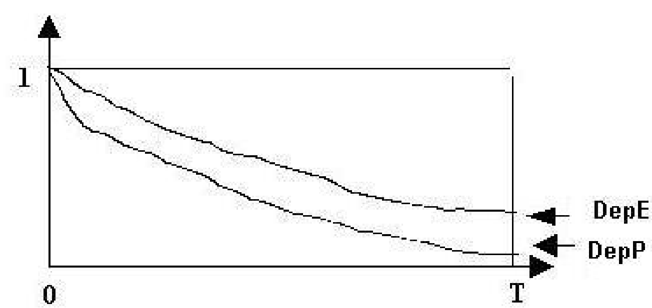


Las curvas **GenP** y **GenE** pueden interpretarse como las funciones de pertenencia asociadas a los subconjuntos borrosos que representan respectivamente a la generalización del profesor y del estudiante, para cada instante de tiempo en el intervalo **[0,T]**. Al principio los niveles de generalización tanto del profesor como del estudiante son nulos, pero con el paso del tiempo se incrementan con la condición de que el nivel de generalización al que aspira el profesor que tengan sus estudiantes **(GenP)** siempre es superior al que estos van logrando **(GenE)**.

Para los niveles de dependencia se consideran las siguientes notaciones:

DepP: Grado de dependencia que estimula o propicia el profesor.

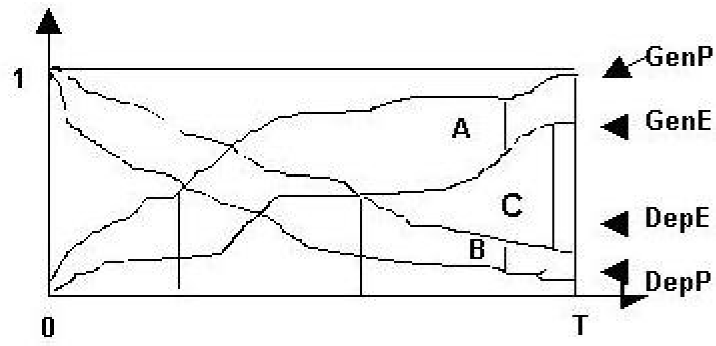
DepE: Grado de dependencia que tiene el estudiante.



Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Al principio el grado de dependencia es máximo y a medida que transcurre el tiempo disminuye la dependencia pero siempre con la condición de que el grado de dependencia real que tiene el estudiante **(DepE)** siempre es mayor al grado de dependencia a que aspira el profesor que este tenga **(DepP)**.

La combinación de ambos gráficos conduce a resultados interesantes como se expone a continuación:



TP **TE**

El tiempo **T** dado al tema, asignatura o curso se divide en tres etapas: **[0,TP]**, **[TP,TE]** y **[TE,T]**. **TP** y **TE** son los instantes de tiempo donde coinciden los grados de generalización y de dependencia del profesor y del estudiante respectivamente.

La primera etapa **[0,TP]** es la etapa de motivación y de desarrollo de la base orientadora de la acción, lo característico de esta etapa es la escasa generalización y elevada dependencia tanto por el docente como por el estudiante. En esta primera etapa el papel principal lo tiene el docente. La segunda etapa **[TP,TE]** es una etapa de elaboración conjunta entre el profesor y sus estudiantes, el profesor es cada vez más generalizador que dependiente, es decir se separan cada vez mas los niveles de generalización y dependencia del profesor mientras que se acercan cada vez más los niveles de generalización y dependencia del estudiante.

Si bien el punto **TP** depende más del profesor y en menor medida de los estudiantes, el punto **TE** depende más de cada estudiante en particular ya que no todos alcanzan al mismo tiempo el nivel donde coinciden la generalización y la dependencia. El valor **TE** es función del grado de asimilación de cada estudiante. La tercera etapa **[TE,T]** es la etapa donde predomina el trabajo independiente del estudiante, es decir es la etapa donde el estudiante tiene niveles de generalización superiores a los de dependencia, lo cual no significa que todo lo pueda hacer solo, pero está en condiciones de ser cada vez menos dependiente y más generalizador.

Nótese que es deseable que los valores **A** y **B** sean pequeños ya que con esto se indica que los niveles de generalización y de dependencia del estudiante estén próximos a los del profesor, pero este criterio por sí solo resulta engañoso ya que puede ocultar limitaciones o insuficiencias en el trabajo del docente.

Si un docente propicia un bajo nivel de generalización y un elevado nivel de dependencia, las curvas **GenP** y **DepP** tienen poco comportamiento asintótico al punto 1 y al eje de abscisas respectivamente y entonces **A** y **B** pueden ser relativamente pequeños pero no dan idea de buenos niveles de generalización y dependencia por el estudiante. Una manera de superar esta limitante es considerar el valor **C = GenE - DepE**.

Valores grandes de **C** dan idea de que el estudiante es mucho más generalizador que dependiente y de hecho para que esto ocurra deben ser pequeños **A** y **B**. Por otra parte, el profesor deberá propiciar la máxima generalización y la mínima dependencia (o bien máxima independencia) no existiendo una fórmula para lograrlo.

Aquí inciden muchos factores que conforman lo que se conoce como *"maestría pedagógica"* del profesor y en esto inciden su experiencia docente, su nivel de comunicación con los estudiantes, su preparación pedagógica, metodológica y psicológica, interés y motivación personal, estado de ánimo, carisma etc.

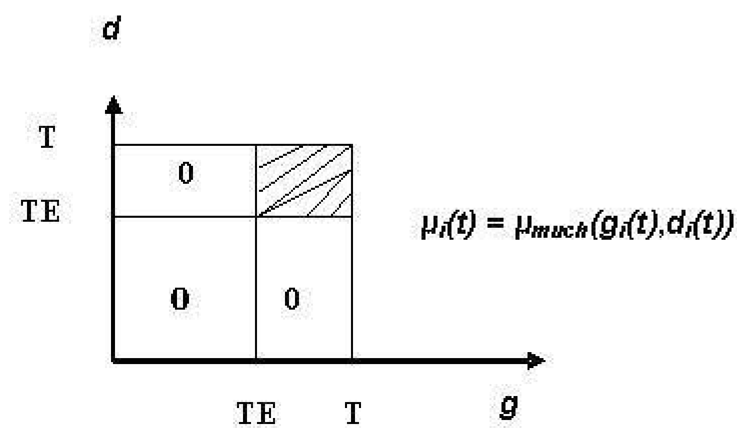
Considérese ahora un grupo de estudios formado por **n** estudiantes y retomemos la proposición **P**:

P: La mayoría de los estudiantes del grupo son mucho más generalizadores que dependientes.

Esta proposición puede formalizarse mediante las siguientes funciones de pertenencia:

$$\mu_i(t) = \mu_{much}(g_i(t), d_i(t)) \quad 1 \leq i \leq n$$

Función de pertenencia asociada al subconjunto borroso que representa el grado en que el i-ésimo estudiante es mucho más generalizador que dependiente en el instante **t**, para **t** en el intervalo **[0,T]**. Nótese que en el intervalo de tiempo **[0,TE]** esta función toma el valor cero ya que el grado de generalización siempre es inferior al grado de dependencia y solo toma valores positivos para la región sombreada **[TE,T]× [TE,T]** como se muestra en la figura. Las funciones $g_i(t)$ y $d_i(t)$ representan los grados de generalización y dependencia respectivamente.



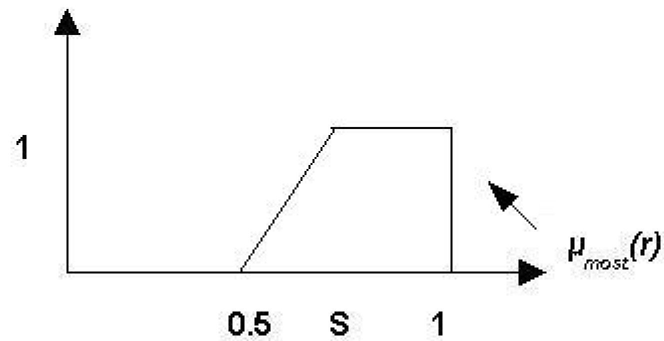
Si se considera $r(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(t)$

entonces con esta expresión se indica la cantidad relativa de estudiantes del grupo que son mucho más generalizadores que dependientes en el instante **t**. Nótese que $0 \leq r(t) \leq 1$.

Con la expresión $K(t) = \mu_{most}(r(t))$ se indica el grado en que la mayoría de los estudiantes del grupo son mucho más generalizadores que dependientes en el instante **t**.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

La función μ_{most} se utiliza mucho en aplicaciones sobre Lógica Difusa y se define de la manera siguiente: para valores entre **0** y **0.5** toma el valor cero, para valores entre **0.5** y **S** toma valores según una recta inclinada y para valores entre **S** y **1** toma el valor **1**. El valor **S** lo define el investigador de acuerdo a las características y necesidades del problema.



Los puristas podrán observar que la expresión ***r(t)*** es de naturaleza estadística, por indicar una *"media o promedio"* . En la práctica en un modelo borroso pueden mezclarse conceptos y leyes propios de esta lógica con otros de las Probabilidades y la Estadística.

Considérese las siguientes notaciones:

G representa la familia de funciones de pertenencia que miden el grado de generalización.

D representa a la familia de funciones de pertenencia que miden el grado de dependencia.

g y **d** representan a un elemento cualquiera de **G** y **D** respectivamente.

$\mathbf{g_i(t)}$ y $\mathbf{d_i(t)}$ representan respectivamente los grados de generalización y de dependencia para el estudiante **i** en el instante **t.**

Retómese la pregunta:

Q: ¿Cuál es la diferencia entre los niveles de generalización y de dependencia en el grupo de estudios ?. Ya se vio que esta pregunta se corresponde con el análisis realizado sobre el valor **C = GenE – DepE**.

Es posible responderla mediante la aplicación del Principio de Extensión de Zadeh con la función de pertenencia ***μ(t,v)*** definida de la manera siguiente:

$$\mu(t,v) = \sup_{\substack{g \in G \\ d \in D}} K(t)$$

con la condición $v = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} g_i(t) - \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\right]$ $\quad g_i(t) \geq d_i(t)$

Nótese que $0 \leq v \leq 1$

De no existir el supremo para algún ***(t,v)*** se le asigna el valor cero a ***μ(t,v)***. Si

$t = t_0$ entonces $\mu(t_0,v)$ es la función de pertenencia asociada a la diferencia entre los niveles de generalización y dependencia en el instante t_0.

Como se observa, en este modelo se considera que los grados de generalización e independencia se miden con muchas funciones $g_i(t)$ y $d_i(t)$. Sobre esa base es el sentido que se le asigna al supremo a que hace referencia la función $\mu(t,v)$.

Valor práctico de los resultados

Primeramente se analizan los siguientes casos extremos:

- *a)-* $g_i(t) = d_i(t)$ para todo $1 \le i \le n$ en un sub intervalo del intervalo de tiempo **[TE,T]**. En este caso $v = 0$, $\mu_i(t) = \mu_{much}(g_i(t), d_i(t)) = 0$, $r(t) = 0$, $k(t) = 0$, $\mu(t,v) = \mu(t,0) = 0$. Se trata de un caso hipotético donde para todos los estudiantes del grupo coinciden los niveles de generalización y de dependencia y el grado de la respuesta a la pregunta **Q** para este caso es mínimo (**cero**), coincidiendo con la aplicación del modelo.
- *b)-* $g_i(t) = 1$, $d_i(t) = 0$ para todo $1 \le i \le n$ en un sub intervalo del intervalo de tiempo **[TE,T]**. En este caso $v = 1$, $\mu_i(t) = 1$, $r(t) = 1$, $k(t) = 1$, $\mu(t,v) = 1$. Se trata también de un caso hipotético donde todos los estudiantes del grupo tienen al nivel máximo la generalización y al nivel mínimo la dependencia y el grado de la respuesta a la pregunta **Q** para este caso es máximo (**uno**) coincidiendo con la aplicación del modelo.

En la práctica, como ya se ha explicado, los estudiantes del grupo alcanzan los niveles de generalización coincidentes con los de dependencia en instantes diferentes, por lo que la condición $g_i(t) \ge d_i(t)$ se va alcanzando en instantes de tiempo posteriores a **TP**, primero para pocos estudiantes que son los que muestran un aprovechamiento académico superior y progresivamente con el resto de los estudiantes.

Se considera como valor **TE** aquel para el cual el primer estudiante del grupo logra niveles de generalización coincidentes con los de dependencia. A partir de este instante de tiempo se comienzan a obtener valores pequeños de v de acuerdo con la expresión

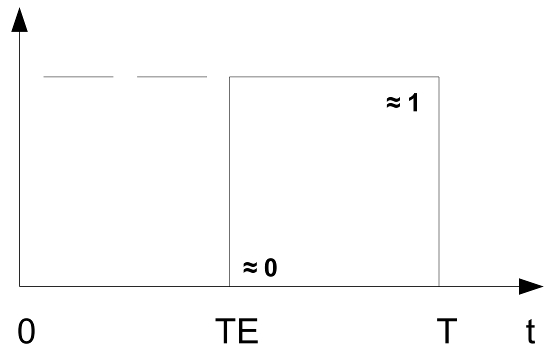
En este caso se tienen las siguientes aproximaciones: $v \approx 0$, $\mu_i(t) \approx 0$ (para los valores de i que tributan a los valores v), $r(t) \approx 0$.

De aquí se concluye que $k(t) = 0$ y $\mu(t,v) = 0$.

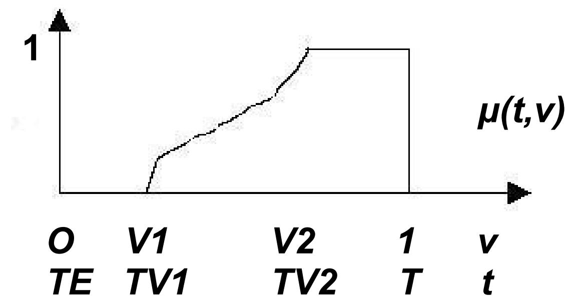
En la etapa final debe ocurrir lo contrario, es decir $g_i(t) \approx 1$, $d_i(t) \approx 0$, por tanto $v \approx 1$, $\mu_i(t) \approx 1$, **r(t)** ≈ 1.

De aquí se concluye que $K(t) = 1$ y $\mu(t,v) = 1$

La siguiente gráfica muestra el dominio de $\mu(t,v)$ y los valores aproximados que toma próximos a **(TE,0)** y **(T,1)**.



Para un proceso normal puede darse la siguiente representación para ***μ(t,v)***



Para ilustrar mejor la idea se ha situado en el eje de abscisas los siguientes valores de ***v***: ***0, V1, V2*** y ***1*** correspondientes a los valores de ***TE, TV1, TV2*** y ***T*** del tiempo.

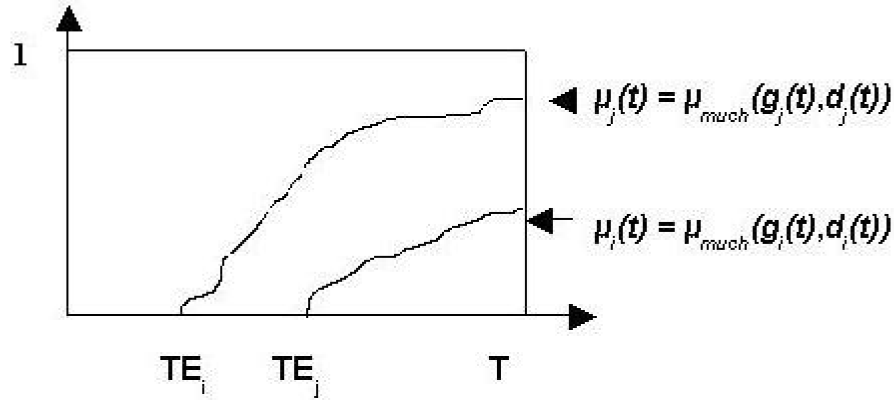
Un proceso normal en un grupo de estudios debe seguir un comportamiento como el siguiente: Etapa inicial **(TE,TV1),** etapa intermedia **(TV1,TV2)** y etapa final **(TV2, T)**. En este caso si el intervalo de tiempo **(TE,TV1)** es muy grande el proceso en ese grupo de estudios no funciona bien ya que esto significa que para mas tiempo del previsto los niveles de generalización no superan significativamente a los de dependencia. Si **(TE,TV1)** es pequeño y **(TV2, T)** es grande esto significa un elevado aprovechamiento académico de los estudiantes ya que durante un largo período de tiempo los niveles de generalización están casi al máximo y los de dependencia casi al mínimo.

De igual forma si se logran alcanzar los instantes de tiempo **TV1** y **TV2** con mucha rapidez esto indica un alto aprovechamiento académico mientras que si **TV1** se alcanza mas tardíamente se corre el riesgo de que **TV2** no se alcance antes del tiempo **T** final del proceso y esto significa un débil aprovechamiento académico.

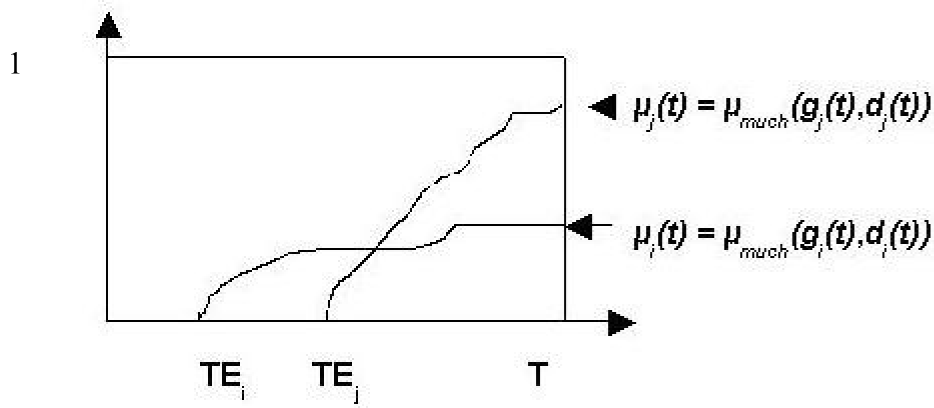
Como en el modelo se construye una correspondencia entre el intervalo de tiempo **[TE,T]** y el intervalo **[0,1]** asociándose **0** con **TE**, **V1** con **TV1**, **V2** con **TV2** y **T** con **1** se pueden hacer comparaciones con intervalos de tiempo diferentes y esto es de gran utilidad para el estudio del proceso docente educativo . Así por ejemplo el modelo permite comparar un mes o un trimestre con un semestre, un año con dos años o con todo el período lectivo de la carrera. Lo normal debe ser que para un período mayor de tiempo los valores **V1** y **V2** se sitúen más a la izquierda, es decir más próximos a cero. Las ideas expuestas también son válidas si en lugar de un grupo de estudios se analiza un único estudiante.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

La metodología propuesta no es *"discriminatoria"* ni *"elitista"* en el sentido de solo apreciar a los más capaces, sino que recoge también la posibilidad de aquellos que al principio no demuestran un elevado aprovechamiento académico y después pueden avanzar y superar a los que arrancaron mejor.



En este caso el estudiante **i** logra ser mucho más generalizador que dependiente primero que el estudiante **j** y siempre mantiene esta condición.

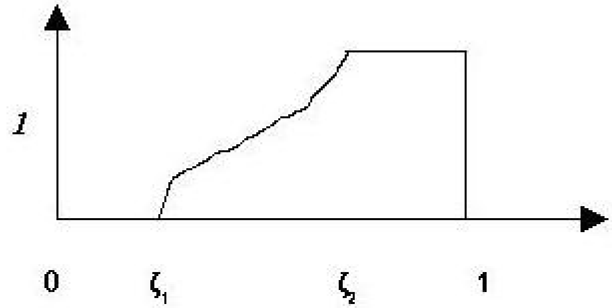


En este caso el estudiante **i** también logra ser mucho más generalizador que dependiente primero que el estudiante **j**, pero a partir de cierto momento el estudiante **j** supera al estudiante **i**. Este fenómeno resulta habitual en la actividad docente.

Considérese el conjunto **F** de todas las funciones **f(x)** con dominio en el intervalo **[0,1]** definidas de la manera siguiente: para dos valores cualesquiera ζ_1 y ζ_2 que cumplan la condición $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < 1$

$$
f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x \leq \zeta_1 \\ 1 \text{ si } \zeta_2 \leq x \leq 1 \\ \textbf{Continua y creciente en } [\zeta_1, \zeta_2] \end{cases}
$$

Por construcción estas funciones toman valores en el intervalo **[0,1]**. Geométricamente se tiene:



Para las operaciones conocidas de unión e intersección el conjunto **F** tiene estructura de retículo distributivo **[3]**. Más precisamente sean **f(x)** y **g(x)** dos elementos de **F** entonces la unión de **f** y **g** se define como:

(f U g)(x) = max{ f(x), g(x) } y la intersección entre **f** y **g** se define como:

(f ∩ g)(x) = min{ f(x), g(x) }. Estas operaciones cumplen las leyes asociativa, conmutativa, distributiva, de idempotencia y de absorción. En **F** se puede también establecer una relación de orden de la manera siguiente: **f ≤ g** si para todo **x** se cumple que **f (x) ≤ g(x)**.

Al considerarse el conjunto $\mathbf{E = \{ E_1, E_2, \ldots\ldots, E_k \}}$ formado por **k** asignaturas que recibe el grupo de estudios, entonces para cada asignatura se tiene una función $\mu_i(t,v)$ diferente para cada $1 \leq i \leq k$. En el supuesto de un proceso que transcurra en condiciones normales estas funciones pueden interpretarse como elementos del conjunto **F.**

Esta observación puede aprovecharse para evaluar aspectos de interés asociados al proceso docente educativo ya que si por ejemplo en un subgrupo de asignaturas se tiene que el mínimo que representa ***"lo peor"*** se comporta casi igual o mejor que el máximo que representa ***"lo mejor"*** para otro subgrupo de asignaturas, entonces este segundo subgrupo tributa poco respecto al primero en cuanto al desarrollo de elevados niveles de generalización e independencia en los estudiantes.

Si las funciones $\mu_i(t,v)$ y $\mu_j(t,v)$ asociadas a dos asignaturas $\mathbf{E_i}$ y $\mathbf{E_j}$ respectivamente se pueden ordenar de tal manera que $\mu_i \leq \mu_j$ entonces esto significa que la asignatura $\mathbf{E_j}$ tributa mas al desarrollo de los niveles de generalización e independencia que la asignatura $\mathbf{E_i}$ en el sentido de que lo hace en mayor grado primero que $\mathbf{E_i}$ **.**

La construcción de un modelo matemático siempre resulta algo así como *"un parto"* al que se llega después de largas y profundas meditaciones. Este modelo no es una excepción, ya que pretende ofrecerle, a los estudiosos de las Ciencias Pedagógicas, un camino diferente para abordar el estudio de aspectos medulares asociados con la actividad docente, sobre la base de las condiciones de subjetividad e incertidumbre que la caracterizan. Se trata de un camino no trillado que toma como fundamento matemático a la Lógica Difusa, la cual, como se ha expresado, ha encontrado múltiples aplicaciones en economía, ingeniería y hasta en medicina, pero no en la actividad educacional.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

El objetivo, en este caso, ha sido proponer un modelo teórico que caracterice a la evaluación del aprendizaje, con el cual se amplían los principios y métodos que en materia de evaluación pueden considerarse.

Se fundamenta en conceptos propios de la Pedagogía y la Psicología aplicada a la enseñanza, como los de Etapas del proceso de Asimilación y Ley de Interiorización de las Acciones. Su valor principal consiste en encontrar una formulación matemática que se apoye en esos conceptos mediante el uso del Principio de Extensión de Zadeh.

Resulta deseable la aplicabilidad del modelo en una situación real. Esto requiere, por una parte, estudiar la manera de obtener los niveles de generalización e independencia para formar las funciones de pertenencia, y de igual forma, analizar entre las diversas variantes que pueden asumirse para las funciones $\mu_{much}(g_i(t),d_i(t))$ y $\mu_{most}(r)$, cuales se adaptan mejor a los requerimientos del modelo.

Por otra parte, es conocido que en medios académicos las discusiones sobre que y como evaluar generalmente se reducen a las diversas maneras de medir el grado de cumplimiento de los objetivos para un tema o una asignatura, lo cual no deja de ser esencial, pero con este modelo se aspira a evaluar el proceso docente educativo precisamente como un proceso que transcurre en el tiempo, y esto requiere un enfoque metodológico más abarcador que debe continuar estudiándose.

El grado de generalización depende entre otros factores, de los niveles de sistematicidad y de profundidad con que se trata el contenido. Si por ejemplo, se trata de un curso de matemática para carreras de ingeniería, como ya se ha expresado, los teoremas y propiedades pueden estudiarse a diferentes niveles de profundidad que van desde el conocimiento de sus hipótesis y tesis, sus interpretaciones geométricas o físicas en caso de que existan, las ideas sobre como demostrarlos o cuasi demostraciones, hasta las demostraciones formales. Los teoremas de existencia y unicidad generalmente no se demuestran por apoyarse en conceptos que salen de un curso para la formación de ingenieros.

Para aquellas ramas de la ciencia donde se utilicen de manera natural herramientas matemáticas, la metodología propuesta resultará más comprensible y podrá facilitar en sus estudiantes y docentes ser conscientes de un proceso de naturaleza muy compleja como el proceso docente educativo.

El profesor deberá aprovechar cualquier oportunidad para estimular la generalización en los estudiantes. Un ejemplo sencillo en un curso de Teoría de Probabilidades puede ser el siguiente:

Considérese un sistema formado por dos unidades, una unidad fundamental y otra de reserva que deben funcionar en un intervalo de tiempo **[0,T]** con la condición que si la unidad fundamental **A** falla, de manera automática se activa la unidad de reserva **B**. Puede tratarse por ejemplo de un hospital que recibe electricidad tanto de las líneas principales de alimentación que funcionan en calidad de unidad fundamental, como de un grupo electrógeno que cumple las funciones de unidad de reserva. En estas condiciones interesa calcular la probabilidad de funcionamiento del sistema en el tiempo **[0,T]** si se conoce que ambas unidades tienen una probabilidad de fallo de **0.05**.

Para que el sistema funcione en el tiempo **[0,T]** solamente pueden ocurrir dos cosas: que funcione la unidad **A** en el tiempo **[0,T]** o que si falla, durante el tiempo restante funcione la unidad **B**.

Considérese los eventos:

F: el sistema funciona

A : funciona la unidad **A**

B : funciona la unidad **B**

P(A) = 0.95 **P(B) = 0.95** ya que las probabilidades de fallo en ambos casos es **0.05**

Entonces el evento **F** se puede expresar de la manera siguiente:

$\mathbf{F = A + A^C B}$ donde $\mathbf{A^C}$ indica el evento complementario

Al aplicar propiedades de la probabilidad se tiene:

$$\mathbf{P(F) = P(A + A^C B) = P(A) + P(A^C B) = P(A) + P(A^C)P(B)}$$

$$P(F) = 0.95 + (0.05)(0.95) = 0.95 + 0.0475 = 0.9975$$

Aunque no se expresa en el enunciado, resulta natural aceptar la independencia entre las unidades.

Si aquí termina el análisis de este problema solo se concluye que la probabilidad aumenta y esto coincide con el sentido común ya que siempre es mejor disponer de una reserva.

El problema puede plantearse en un sentido más general, por ejemplo analizar que ocurre si se dispone de dos unidades de reserva en lugar de una. Los propios estudiantes pueden formular la nueva situación considerando ahora **A**, **B** y **C** siendo **A** la unidad fundamental, si falla se activa **B** como primera reserva y de fallar esta antes del tiempo **T** final se activaría **C** como segunda reserva. La probabilidad de funcionamiento será entonces:

$$\mathbf{F = A + A^C B + A^C B^C C}$$

$$\mathbf{P(F) = P(A + A^C B + A^C B^C C) = P(A) + P(A^C B) + P(A^C B^C C)}$$

$$\mathbf{P(F) = P(A) + P(A^C)\ P(B) + P(A^C)\ P(B^C)\ P(C) = 0.9975 + (0.05)(0.05)(0.95)} = 0.999875$$

Como se observa, al usarse dos unidades de reserva en lugar de una la probabilidad de funcionamiento del sistema aumenta, pero el aumento no es significativo por lo cual no se justifica usar tres unidades. En este caso una simple generalización ofrece una visión más abarcadora.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Conclusiones

Con este trabajo se ha querido mostrar las posibilidades de aplicación de la llamada lógica borrosa o difusa tanto para el rediseño de conceptos que tradicionalmente se estudian en el marco estrecho de la lógica binaria como para abordar problemas propios de la gestión educativa. No se pretende sustituir los modelos estadísticos de amplio uso en problemas asociados con esta actividad por estos enfoques ya que por principio esto es inaceptable. Sigamos usando un enfoque estadístico siempre que resulte válido, pero cuando trabajamos en un ambiente incierto donde las regularidades estadísticas no se reflejan de manera natural, podemos apelar a estos enfoques que pueden darnos respuestas menos precisas que una media o una varianza pero más realistas.

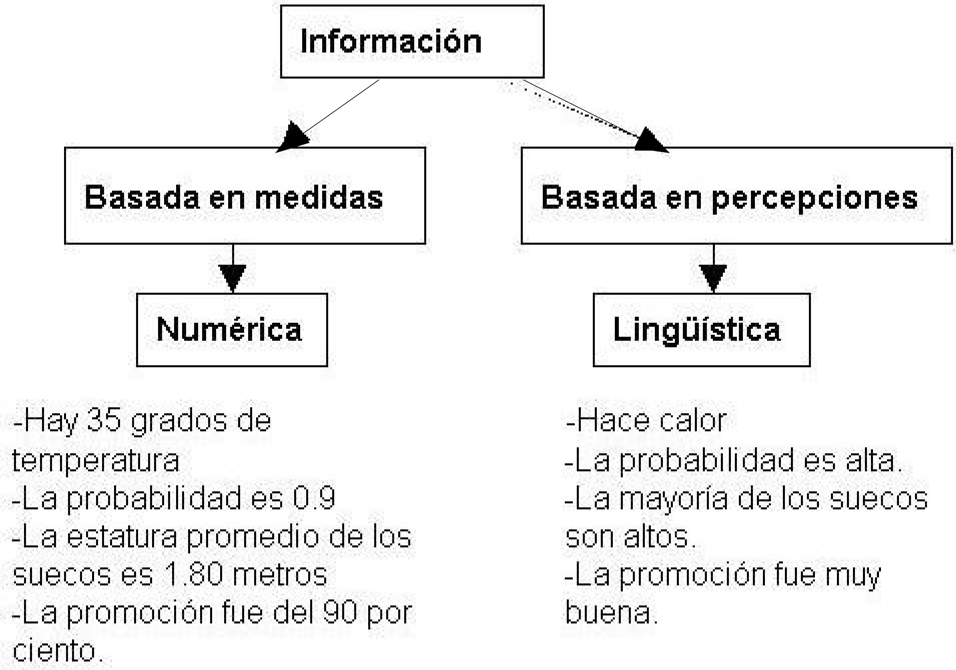
La razón esencial en la aplicación del enfoque borroso o difuso es que este enfoque tiene en cuenta dos características que se dan en el pensamiento humano: la gradación o graduación y la granularidad o granulación. Cuando analizamos un problema siempre establecemos grados o categorías, es decir comparamos por una medida o por alguna valuación y también agrupamos pero no de manera disjunta, sino mediante gránulos o grupos donde no se establecen límites exactos que indican cuando termina una cualidad y comienza otra.

Si por ejemplo el tema a analizar es el cumplimiento de los objetivos de una asignatura, disciplina o carrera, estamos conscientes de que los objetivos no se logran siempre en el mismo grado o medida, y también no podemos decir exactamente donde termina el cumplimiento de un objetivo y comienza el otro. Las ideas aquí expuestas, como se expresó al principio, pueden resultar polémicas, pero el enfoque metodológico propuesto abre puertas para el debate y eso es lo más importante.

Una de las limitaciones básicas de la Teoría de Probabilidades clásica es que su estructura conceptual no se acomoda al tratamiento de la información basada en percepciones ya que esta información es de naturaleza imprecisa. Muchos de los conceptos que utilizamos habitualmente son conceptos borrosos, por ejemplo: la amistad, el amor, la bondad, la inteligencia, la belleza, la creencia, el conocimiento, el entendimiento, la relevancia, la honestidad, la probabilidad, la posibilidad, el cumplimiento etc. El carácter difuso se expresa en el hecho de que cuando hablamos podemos decir: muy relevante, poco relevante, irrelevante etc, y así con los restantes conceptos. Siempre que para un concepto podemos establecer gradaciones, estamos en presencia de un concepto borroso o difuso.

El proceso docente se caracteriza, entre otras cosas, por el flujo o transferOencia de información que se produce entre los educadores y los educandos. Los educadores propician y estimulan la adquisición de conocimientos, habilidades y valores y los estudiantes se apropian de estos, pero además realizan constantemente juicios valorativos sobre el proceso docente y sus educadores por lo que resulta un proceso en extremo complejo. En materias de ciencias básicas como la Matemática, la Física o la Química se trabaja con información basada en medidas mientras que en materias de perfil social o literario se trabaja mas bien con información basada en percepciones, dado los matices o interpretaciones que una misma idea puede admitir. Aunque se mencionan situaciones extremas, se trata de un fenómeno sin fronteras definidas con precisión ya que tanto las medidas como las percepciones pueden aparecer en ambas categorías.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6



Siguiendo a Zadeh, de manera general se puede establecer, entre otras, la siguiente clasificación para la información:

La mayor parte de la información que habitualmente utilizamos es más lingüística que numérica y la información numérica puede verse también como un caso particular de información lingüística. Por otra parte, un lenguaje natural es un sistema para describir percepciones y las percepciones son de naturaleza imprecisa como resultado de las limitaciones de nuestros órganos sensoriales y en particular del cerebro para resolver detalles y almacenar información. Una de las tareas de la lógica borrosa en que se trabaja actualmente es en la de crear sistemas que permitan alcanzar la capacidad del lenguaje natural.

A lo largo de este trabajo se han estudiado diversos modelos para abordar las relaciones entre las categorías objetivo, contenido, método y evaluación del aprendizaje, como conceptos esenciales para la estructuración coherente de cualquier asignatura, disciplina o carrera. Los problemas son de interés teórico y práctico tanto en el campo de las Ciencias de la Educación como en el de las Ciencias Pedagógicas y el enfoque metodológico para abordarlos ha sido el de la lógica borrosa o difusa con sus variadas interpretaciones y propiedades. Se ha tomado como fundamento teórico a esta lógica por ser la que mejor se adapta a las particularidades de estas relaciones a partir de las condiciones de incertidumbre propias de la actividad docente.

Los resultados del trabajo pueden también ser de interés en otros contextos; cualquier actividad humana siempre recoge objetivos, contenidos, métodos y formas de evaluación, en particular para aquellas actividades de carácter promocional, de gestión o que requieran establecer niveles de comunicación entre partes, los principios que se establecen en el trabajo resultan válidos.

Como ya se ha expresado, cuando se trata de aplicar modelos matemáticos en problemas de ciencias técnicas o biológicas no se muestra reticencia por los especialistas, pero no ocurre igual con los problemas de ciencias sociales. En este orden de ideas es bueno recordar lo expresado por Carlos Marx: “La ciencia solo alcanza la perfección cuando es capaz de valerse de las matemáticas”, y en época más reciente las reflexiones de Herbert A. Simon, sociólogo y economista norteamericano, Premio Nobel de Economía en 1978 cuando escribió “La matemática es el idioma universal de la ciencia contemporánea. No existen limitaciones de principio para la formalización y matematización de cualquier problema científico”. Los modelos expuestos a través de este libro son una modesta contribución a esas ideas.

Referencias Bibliográficas

1. Alonso Aguila L. M., Méndez Fabrét Carmen L. “La Matemática en la Incertidumbre: una aplicación al estudio sobre la formación de valores en los estudiantes” Revista TEMAS de Ciencia y Tecnología. Universidad Tecnológica de la Mixteca México Vol. 8 Nr. 23 año 2004, páginas 19 – 23.
2. Alonso Aguila L. M. “El problema de la comunicación en el aula. Su estudio en condiciones de incertidumbre” Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación Vol. 3 No 1. 2005 ISSN 17286042.
3. Alonso Aguila L. M. “La evaluación del aprendizaje desde una perspectiva de la subjetividad y la incertidumbre. Una propuesta de modelo de auto evaluación a partir de competencias”. Revista Iberoamericana de Educación de la OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación la Ciencia y la Cultura). Número 40 / 1. 25 – 09 – 06. ISSN: 1681 – 5653.
4. Alonso Aguila L. M. “Lectura Fuzzy en conceptos matemáticos y categorías de la didáctica”. XIV Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura de la CUJAE. Palacio de Convenciones, La Habana diciembre de 2008. ISBN 978-959-261-281-5
5. Alonso Aguila L. M. “El Principio de extensión de Zadeh como medio metodológico para interpretar la relación entre objetivos, contenidos y métodos” Revista Iberoamericana de Educación No. 46/ 8-15 de agosto de 2008. ISSN: 1681-5653.
6. Alonso Aguila L. M. “Propuesta de modelo difuso sobre evaluación del aprendizaje” Revista Investigación Operacional de la Universidad de la Habana Vol.31 No. 2, 2010. ISNN 0257-4306.
7. Alonso Becerra A. y otros “Educación en Valores en Ingeniería Industrial” I Simpòsio Internacional de Ingeniería Industrial Nov. 2000 ISPJAE Ciudad de la Habana.
8. Alvarez de Zayas C. M. *La Escuela en la Vida* La Habana Editorial Pueblo y Educación. 1999.
9. Attneave F. “Some informational aspects of visual percepcion” Psychol. Rev. 61 1954 pag. 183-193
10. Ballester B. L. y Colom C. A. “Lógica difusa: una nueva epistemología para las Ciencias de la Educación” *Revista de Educación* España No. 340. Mayo – agosto. pp.995 – 1008. (2006)
11. Bector C. R. , Chandra Saresh “Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games” Spriger – Verlag Berlin Heidelberg 2005.
12. Bernaza Rodríguez G. “La evaluación desde una perspectiva personológica”. Revista Cubana de Educación Superior, Nro. 2 año 2000.
13. Bojadziev G, Bojadziev M. “ Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications” World Scientific Publishing”. 1995.
14. Curbeira C. A. “Introducción a la Teoría del Lenguaje” Editorial Felix Varela La habana 2007.

15. Del Valle García M., Douglas de la Peña C. y Prado Caballero L. " Una estrategia didáctica para el desarrollo integral del educando" Libro Electrónico Pedagogía 2003" Memorias del evento internacional. La Habana febrero de 2003.

16. Dubreil P., Dubreil Jacotin M. L. "Lecciones de Algebra Moderna" Edición Revolucionaria La Habana 1967.

17. Duda R. O. and P. E. Hart "Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures" Comm. ACM, 15 11-15 (January 1972).

18. Gil Aluja J. "Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre". Editorial Milladoiro España 1999.

19. Gil Lafuente J. " Marketing para el nuevo milenio. Nuevas técnicas para la gestión comercial en la incertidumbre". Ediciones pirámide España 1997.

20. García de Fanelli A. M. "Aplicación de la Metodología Borrosa a la evaluación de la calidad de los posgrados" Cuadernos del CIMBAGE No.4 pag. 99-132.

21. Gómez Fernández J. A. "Curso de Cálculo Variacional y de Control Optimal" Editora de la Universidad de la Habana 1995.

22. González Pérez M. "Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria "Revista Pedagogía Universitaria Vol.5 No.2 2002.

23. Hanss Michael "Applied Fuzzy Arithmetic" Spriger – Verlag Berlin Heidelberg 2005.

24. Hough P.V.C. "Methods and means for recognizing complex patterns U.S. Patent 3069654 (Dic. 18 1962).

25. Kandel A. "Fuzzy Mathematical Techniques with Applications" Addison-Wesley 1986.

26. Kaufmann A., Gil Aluja J. "Introducción de la teoría de subconjuntos borrosos en la gestión de las empresas" Editorial Milladoiro 1993 España.

27. Kaufmann A., Gil Aluja J. " Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre" Editorial Hispano Europea S. A. 1987.

28. Kaufmann A., Gil A. J., Gil L. A. "La creatividad en la gestión de las empresas" Ediciones Pirámide S.A. Madrid 1994.

29. Kaufmann A. Gil Aluja J. "Modelos para la investigación de efectos olvidados "Editorial Milladoiro"

30. Kaufmann A. Gil Aluja J."Las matemáticas del azar y de la incertidumbre" Editorial Centro de Estudios Ramón Areces España 1990.

31. Lazzari Luisa L, García S. P "La evaluación de la calidad en la universidad" V Congreso de SIGEF 1998 Suiza.

32. Lazzari Luisa L "Reflexiones acerca de las matrices de incidencia y la recuperación de efectos olvidados" Cuadernos del CIMBAGE No. 004 Universidad de Buenos Aires 2001.

33. Lazzari Luisa L "Proyecto: Enseñanza de los conjuntos borrosos desde el inicio de la formación profesional" ISBN 978-950-29-1087-1 Universidad de Buenos Aires agosto 2008.

34. Ojalvo M. N. " La Comunicación en el aula. Su investigación y entrenamiento". Revista Cubana de Educación Superior Vol. 14. Nro. 1 1994.

35. Pedrycz W. "Fuzzy Control and Fuzzy Systems" 1992
36. Pérez Carreras Pedro. " Matemática Asistida por Ordenador" Universidad Politécnica de Valencia 1996.
37. Programas de la Disciplina Matemática Superior y Matemática Aplicada para las carreras de Ingeniería Industrial y de Ingeniería Informática. CUJAE Ciudad de la Habana 2007.
38. RESOLUCION No. 210 ⁄ 2007 (2007) *Reglamento de trabajo docente y metodológico de la Educación Superior* La Habana Cuba Producciones Gráficas ENPES.
39. Rosental M. y Ludín P. "Diccionario Filosófico" Editora Política Cuba 1981.
40. Salmina N..G. y otros "Análisis lógico-psicológico de los procedimientos para discutir la asignatura docente". Educación Superior Contemporánea 3(47) 84.
41. Schildt Herbert "Programación en Turbo C" Mc GRALL- HILL/ Interamericana de México 1989.
42. Talízina N. F. " Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior" Universidad de la Habana 1985.
43. Tijonov A. Kostomarov D. "Conferencias de Introducción a las Matemáticas Aplicadas" Editorial MIR Moscú 1987.
44. Zadeh L. A. "Fuzzy Sets" Information and Control , 8 338_353 (June 1965).
45. Zadeh L. A. "Fuzzy Sets and Systems" In Fox, J ed. System Theory Politechnic Press Brooklyn New York p.p 29_ 39 1965.
46. Zadeh L. A "Probability measures of fuzzy events" *J. Math. Anal Appl*.23, 421-427 (1968).
47. Zadeh L. A "The Concept of a Linguistic Variable and its Applications to Approximate Reasoning" Part I, II and III Information Sciences 8(3), 8(4) and 9 1975.
48. Zadeh L. A."Probability Theory and Fuzzy Logic are Complementary Rather Than Competitive". Technometrics 37(3) p.p. 271-276 American Statistical Association. 1995.
49. Zadeh L. A." Form computing with numbers to computing with words. From manipulation of measurements to manipulation of perceptions" IEEE Trans. on Circuits and systems. Vol 45. No. 1 january 1999.
50. Zadeh L. A." Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) - An outline." Information Sciences 172 2005.
51. Zadeh L. A " Generalized theory of uncertainty – principal concepts and ideas". Computational Statistics and Data Analysis 51 (2006) 15- 46.

Ciudad de La Habana : Editorial Universitaria, 2010. -- ISBN 978-959-16-1207-6

Datos del Autor

Luis Manuel Alonso Águila

Licenciado en Matemáticas, Doctor en Ciencias Matemáticas y Profesor Titular del Departamento de Ingeniería Industrial perteneciente a la Facultad de Ingeniería Industrial del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, CUJAE.

Durante más de 30 años ha impartido cursos de pregrado y de postgrado en materias de Matemática General y Matemática Aplicada en carreras de ingeniería y también ha desarrollado tareas de dirección docente y metodológica.

El texto que se ofrece es el resultado de sus investigaciones, en el terreno de la Lógica Difusa, aplicada a problemas asociados con la labor académica en la Educación Superior, aunque sus ideas pueden resultar válidas en otros niveles educacionales. El libro está orientado principalmente a quienes deseen realizar investigaciones en el campo de las Ciencias Pedagógicas y las Ciencias de la Educación mediante herramientas matemáticas ajustadas al escenario subjetivo e incierto de este campo.

Por su actividad docente ha recibido entre otros, los siguientes reconocimientos: Talentos de Oro de la ANIR, Distinción Por la Educación Cubana, Distinción Rafael María de Mendive y Medalla José Tey.