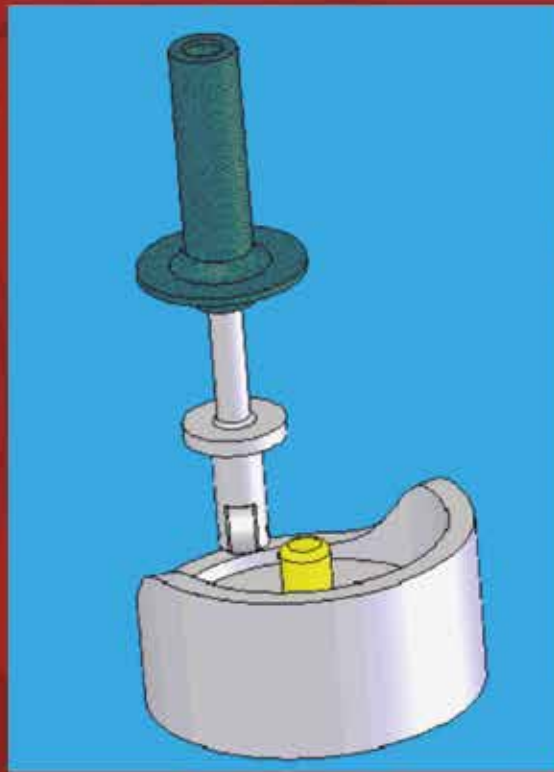


MÁQUINAS Y MECANISMOS

Implementación con
Wolfram Mathematica



José F. Olmedo S.
Jaime F. Echeverría Y.



ESPE
UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

Máquinas y mecanismos, implementación con Wolfram Mathematica

José F. Olmedo S. y Jaime F. Echeverría Y.

Primera edición electrónica. Octubre de 2018

ISBN: 978-9942-765-41-3

Revisión científica: Christian Edmundo León Cárdenas y Jorge Isaías Caicedo Reyes

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

CrnI. Ing. Ramiro Pazmiño O.

Rector

Publicación autorizada por:

Comisión Editorial de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

Cpnv. Hugo Pérez

Presidente

Edición y producción

David Andrade Aguirre

daa06@yahoo.es

Diseño

Pablo Zavala A.

Derechos reservados. Se prohíbe la reproducción de esta obra por cualquier medio impreso, reprográfico o electrónico.

El contenido, uso de fotografías, gráficos, cuadros, tablas y referencias es de **exclusiva responsabilidad del autor.**

Los derechos de esta edición electrónica son de la **Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE**, para consulta de profesores y estudiantes de la universidad e investigadores en: <http://www.repositorio.espe.edu.ec>.

Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE

Av. General Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador.

<http://www.espe.edu.ec>

MÁQUINAS Y MECANISMOS

Implementación con Wolfram Mathematica

José F. Olmedo S.
Jaime F. Echeverría Y.



Dedicatoria

Dedicamos este manual a todos los estudiantes que pasaron por las aulas del DECEM y que constituyen la razón de nuestro quehacer diario.

Resumen

Los mecanismos constituyen la parte medular de las máquinas, que son parte inherente de nuestra civilización y que nos proveen innumerables bienes y servicios. Este libro no pretende substituir a la excelente literatura que sobre el tema está muy difundida, literatura que el estudiante de la asignatura de mecanismos está obligado a revisar en la tranquilidad de su casa o en la biblioteca, donde podrá revisar los temas con mayor profundidad.

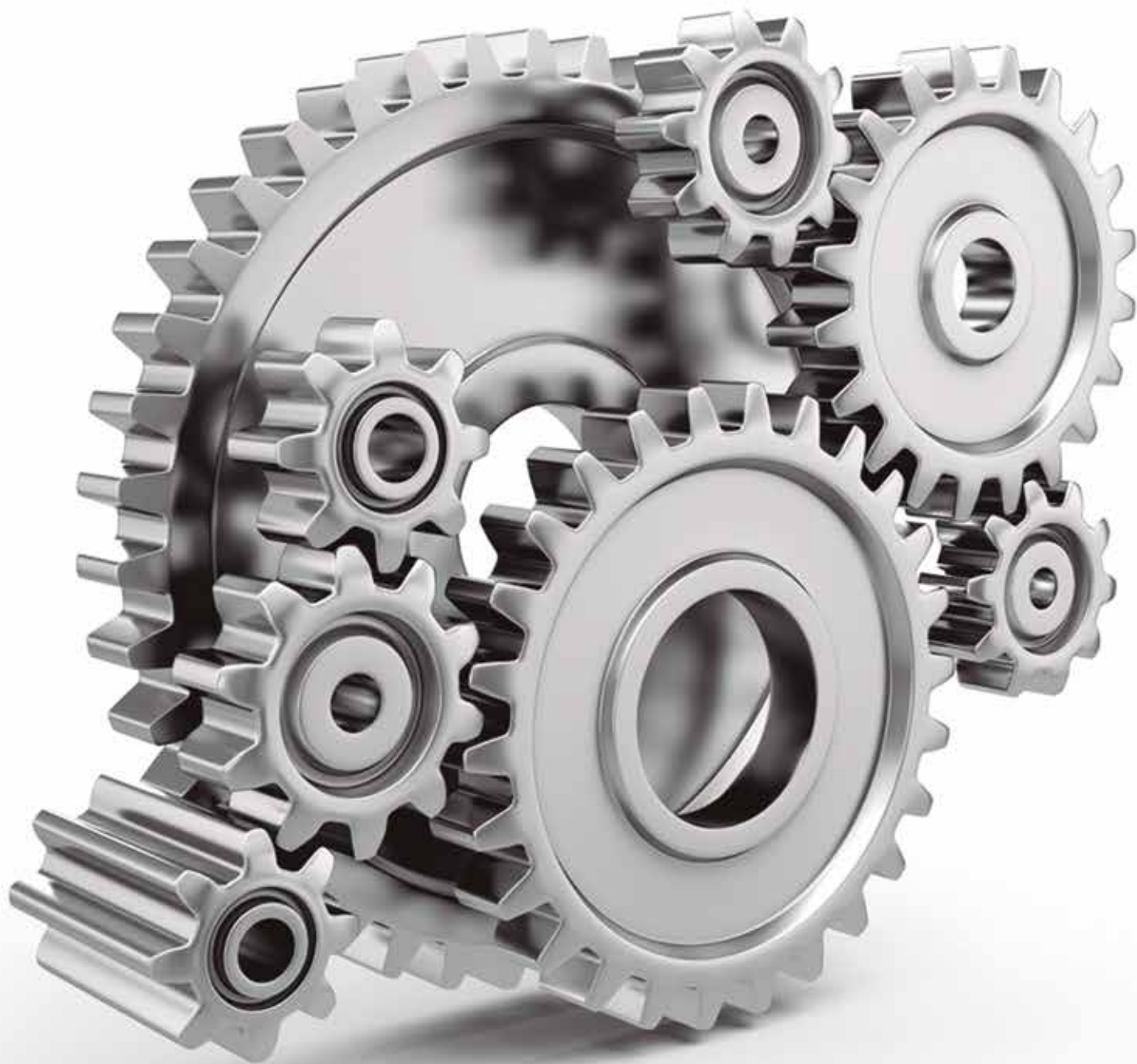
El presente libro está concebido para ser utilizado en el aula de clase donde junto con los modelos desarrollados en el laboratorio y los programas disponibles serán las herramientas para llevar a cabo el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura, de la mejor manera posible.

La utilización del software Wolfram Mathematica y de pequeños programas del mismo lenguaje embebidos dentro del texto suponen una gran ventaja pedagógica ya que permiten al estudiante explorar rápidamente el comportamiento de cualquier eslabonamiento. Los efectos que producen las variaciones de las longitudes de los eslabones o relaciones de los mismos, velocidades y aceleraciones lineales o angulares del eslabón de entrada y los parámetros inerciales en el comportamiento de un mecanismo son fácilmente examinados con la herramienta manipular. A si mismo partiendo de un mecanismo conocido se puede fácilmente establecer nuevas aplicaciones que redundara en estimular la creatividad del estudiante, a la par que se incentiva la aplicación del programa en otras asignaturas.

El programa Wolfram Mathematica con sus gráficos dinámicos constituye una verdadera revolución en el campo de la computación técnica y sin lugar a dudas su aplicación en el presente texto ha sido bastante provechosa.

Adicionalmente se ha hecho acopio de modelos, tesis e investigaciones que sobre el campo de los mecanismos se han venido ejecutando durante más de 20 años de docencia en esta rama fantástica de la ingeniería.

Para el presente trabajo nos inspiramos en el mejor libro de mecanismos conocido actualmente que es el libro de diseño de maquinaria de Robert L. Norton, texto que cambió radicalmente la visión de la enseñanza de esta asignatura.



CAPÍTULO 1

MECANISMOS

1. - INTRODUCCIÓN

1.1 OBJETIVO:

En la era tecnológica actual las máquinas y los mecanismos que las componen, son un pilar fundamental sobre el que se apoya la actividad industrial del ser humano. El empleo de máquinas y mecanismos es una necesidad extendida e inevitable, razón por la cual se precisa una cada vez mayor y mejor formación de técnicos e ingenieros sin importar su especialidad, en esta área (Roque Alejandro Calero Pérez, 1999).

1.2 TEORÍA DE LOS MECANISMOS Y LAS MAQUINAS:

Un sistema mecánico está compuesto de multitud de elementos que se conjugan entre sí para generar movimientos determinados. La teoría de los mecanismos y las máquinas es una ciencia aplicada que sirve para comprender las relaciones causa efecto entre los componentes mecánicos y los movimientos producidos en una máquina o mecanismo.

1.3 MAQUINA:

En la era tecnológica actual, las máquinas se encuentra omnipresente en todas las actividades del ser humano, desde las utilizadas en la vida cotidiana hasta en el quehacer de todos los sectores productivos como la agricultura, ganadería, minería, alimentación, siderometalúrgica, electricidad, obras públicas, etc., pasando por el sector servicios, incluyendo los de formación. Se puede definir el término máquina como una combinación de cuerpos resistentes, móviles o fijos, en los cuales la energía de ciertas sustancias (vapor, agua, combustible) o la energía eléctrica, se convierte en energía mecánica, que es encauzada para realizar un trabajo útil. (Figura 1.1) (Nieto, 1978)

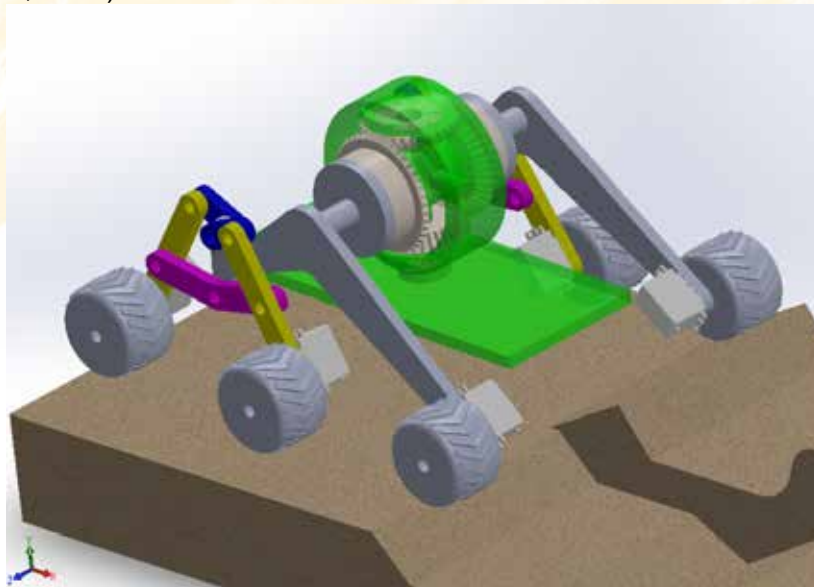


Figura 1.1. Aplicación de un diferencial en el control de los eslabones del vehículo

1.4 CLASIFICACIÓN DE LA CIENCIA DE LOS MECANISMOS:

La ciencia de los mecanismos desde el punto de vista pedagógico se divide en dos temáticas: **El Análisis y la Síntesis.**

1.4.1 EL ANALISIS

Análisis no es otra cosa que evaluar un mecanismo existente o propuesto para determinar los parámetros de diseño con el fin último de calcular la resistencia de sus elementos. El problema de evaluar un mecanismo se plantea del siguiente modo: Dado un mecanismo (número de miembros, número de pares (uniones) y dimensiones de los miembros) y conocida la velocidad de entrada del elemento conducido, determinar el estado de movimiento (trayectorias, velocidades y aceleraciones) del miembro de salida y de todos los demás que sean necesarios. ¿Que se evalúa?

Posición y Movimiento: Son importantes si el mecanismo ha de cumplir un propósito previsto o si el mecanismo deberá moverse en un espacio limitado. Para hacer un análisis de posición se puede utilizar **instrumentos de dibujo, álgebra compleja o software multicuerpo como el Working Model 2D.**

Velocidad: Es importante por cuanto ella afecta el rozamiento, el desgaste, el impacto, la aceleración, tiene aplicación directa para determinar la ventaja mecánica. Se utiliza la **cinemática.**

Aceleración: Es de interés por los esfuerzos que da lugar en las piezas de los mecanismos. Se utiliza la **cinemática.**

Fuerzas estáticas: Son importantes en los mecanismos que se desplazan lentamente como es el caso de una grúa, una herramienta, un sistema de cierre, etc. Se utiliza los elementos de la **estática.**

Fuerzas dinámicas: Son importantes en los mecanismos que se mueven a alta velocidad por ejemplo motores de combustión interna, maquinas herramientas, maquinaria textil. Se utilizan las herramientas de la **cinética.**

1.4.2 LA SINTESIS

En este caso se plantean requisitos y restricciones y se pide generar el mecanismo. La síntesis es un proceso creativo mientras que el análisis evalúa.

1.5 MECANISMO:

Es la combinación de cuerpos conectados por medio de articulaciones móviles para formar una cadena cinemática cerrada con un eslabón fijo y cuyo propósito es transformar el movimiento de un modo propuesto. El mecanismo fundamental para iniciar el conocimiento de mecanismos es el eslabonamiento de cuatro barras, que consta de los siguientes elementos, ver figura 1.2.

Eslabón Bastidor o Tierra	(1)
Eslabón de entrada, impulsor o manivela	(2)
Eslabón de salida, seguidor, balancín	(4)
Eslabón Acoplador o Biela	(3)

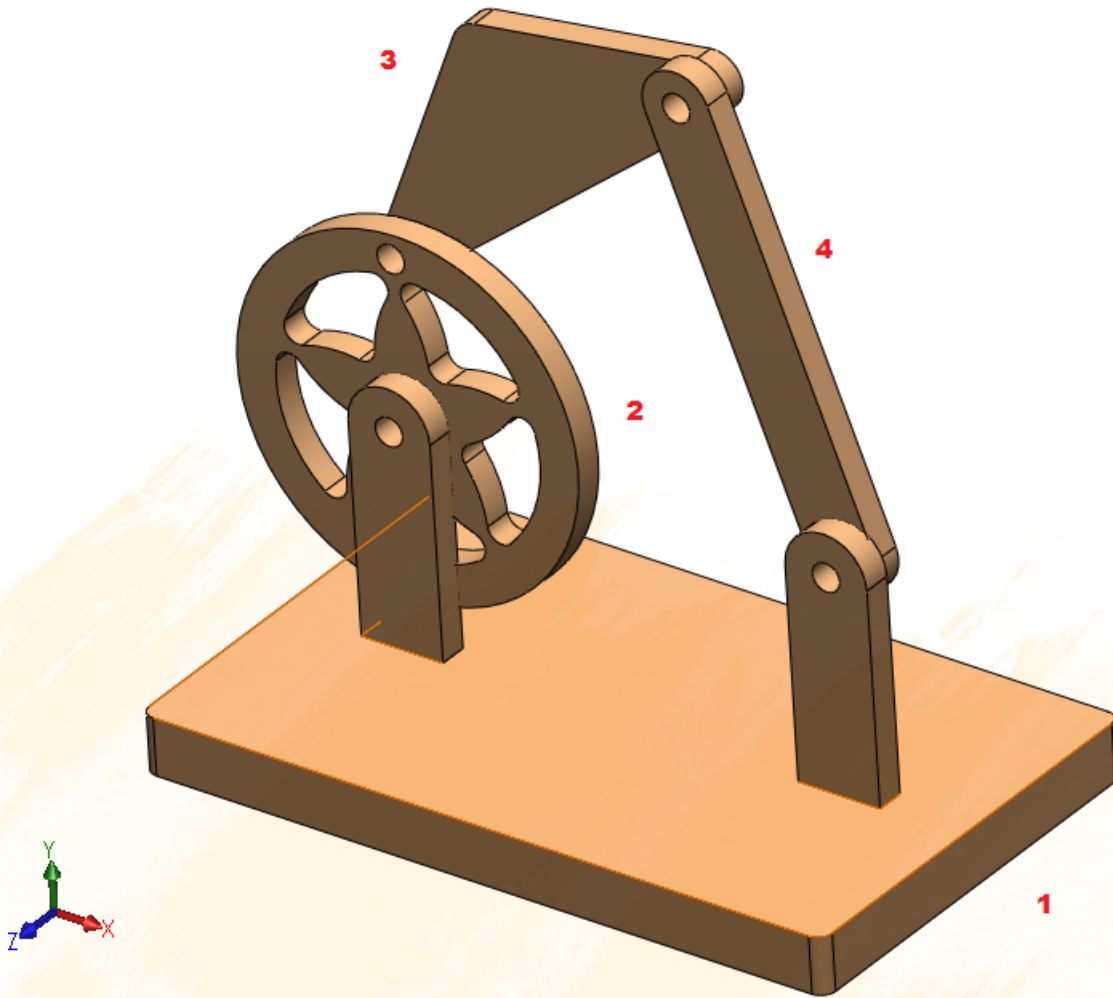


Figura 1.2. Mecanismo de cuatro barras

1.6 ANALISIS TOPOLÓGICO DE MECANISMOS

El estudio topológico de los mecanismos engloba los aspectos de su configuración geométrica

1.6.1 ESLABÓN O BARRA:

Se llama así a cada uno de los elementos que forman los sistemas mecánicos, existen los siguientes tipos de barras:

- **CUERPO SÓLIDO RÍGIDO:**

Son los eslabones rígidos de los cuales están constituidos los mecanismos, pero también se incluyen a las levas y ruedas dentadas (Nieto, 1978). Los eslabones se dividen en eslabones binarios, ternarios, cuaternarios, etc. Ver figura 1.3

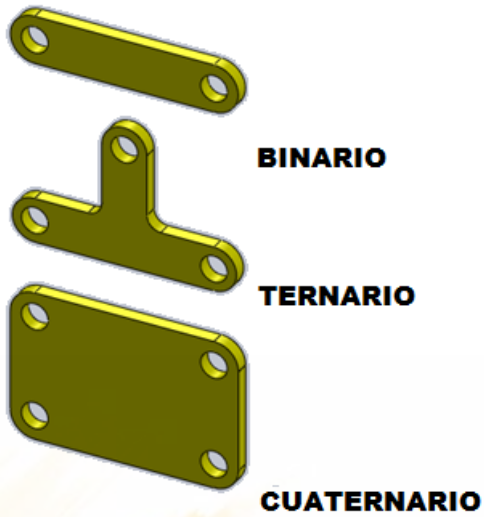


Figura 1.3. Eslabón rígido

- **CUERPO SÓLIDO UNIRRÍGIDO:**

Ejemplos: Correas, cables, bandas, cadenas, como órganos motrices principales. (Figura 1.4)



Figura 1.4. a) Elevador electrohidráulico a base de cables y poleas b) Polipasto

- **ELEMENTOS ELASTICOS :**

Ejemplos: resortes, ballestas, barras flexibles. En la figura 1.5 se observa un martinete de resorte donde un eslabón del mecanismo es un paquete de resorte. Se emplea este martillo para trabajos ligeros de forja

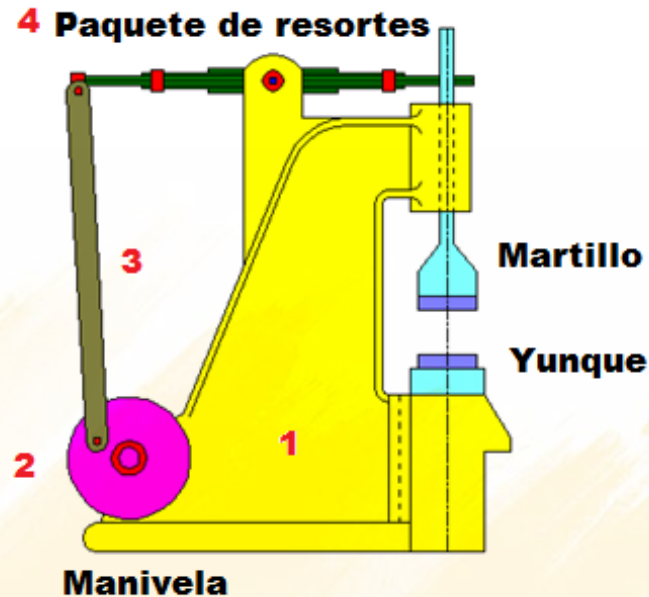


Figura 1.5. Martinete de resorte

1.6.2 CADENA CINEMATICA

Es la conexión de varios eslabones por medio de articulaciones o pares cinemáticos. Si los eslabones forman un circuito cerrado se tiene una **cadena cerrada**. De no ser así corresponde a una **cadena cinemática abierta** por ejemplo. Una retroexcavadora figura 1.6b, un brazo mecánico robot figura 1.6a, un brazo humano, los cuales son sistemas reconfigurables.



a) Brazo robótico



b) Retroexcavadora

Figura 1.6. Ejemplos de cadena abierta¹

1.6.3 PAR CINEMÁTICO

¹ a) Laboratorio Robótica, ESPE, Sangolquí, b) <https://es.dreamstime.com/imagen-de-archivo-retroexcavadoras->

Se llama así a la unión de dos barras, de forma que estas presenten un movimiento relativo de unas determinadas características debido a la constricción que impone esta unión (Norton, 2004).

Los pares se dividen en inferiores y superiores de acuerdo a la superficie de contacto entre los dos miembros que constituyen el par:

- **PARES INFERIORES O DE CONTACTO SUPERFICIAL:**

Los elementos del par hacen contacto en una superficie como es el caso de una articulación de pasador tabla 1.1.


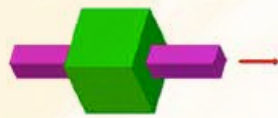


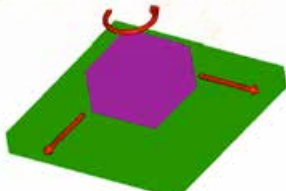

Nombre	Grados de libertad	Ejemplo
Par o junta de rotación	1	
Par prismático	1	
Par cilíndrico	2	
Par de rótula	3	
Par plano	3	
Par helicoidal o tornillo	1	

Tabla 1.1. Pares inferiores

• **PARES SUPERIORES O DE CONTACTO LINEAL O PUNTUAL:**

Los elementos del par hacen contacto en una línea. Ejemplos: Dientes de engranajes acoplados, Una leva que hace contacto en un rodillo figura 1.8.

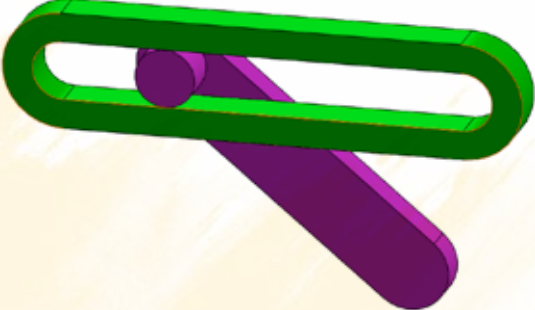
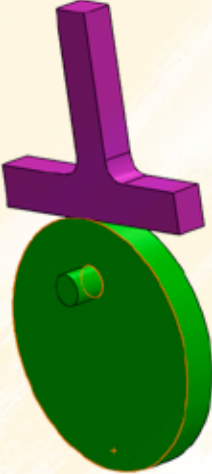
Nombre	Grados de libertad	Ejemplo
Pasador en ranura	2	
Par de leva	2	

Tabla 1.2. Pares superiores

1.7 CLASIFICACIÓN DE LOS MECANISMOS:

En la literatura existente diferentes criterios para clasificar a los mecanismos, sin embargo el más apropiado desde el punto de vista didáctico es el que toma en cuenta su funcionalidad. Según este punto de vista los mecanismos se clasifican en dos grupos:

1.7.1 MECANISMOS TRANSMISORES DE MOVIMIENTO

Los mecanismos de transmisión se encargan de transmitir movimientos de giro entre ejes. Están formados por un árbol motor (conductor), un árbol resistente (conducido) y otros elementos intermedios, que dependen del mecanismo particular.

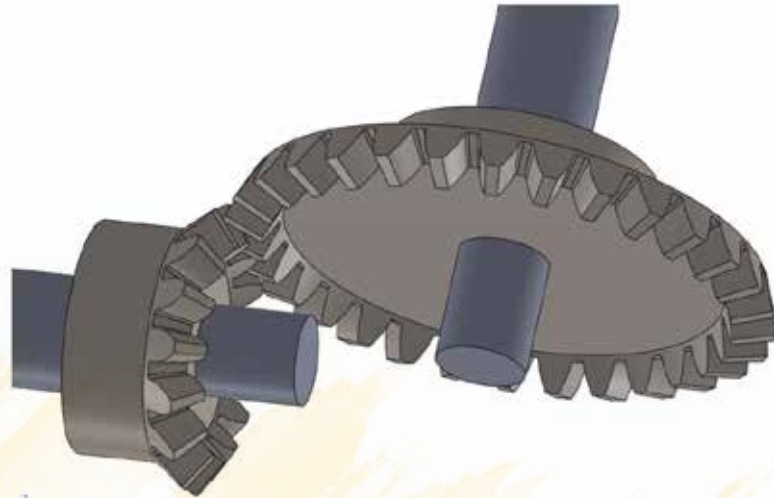


Figura 1.7. Transmisión engranes cónicos

1.7.2 MECANISMOS TRANSFORMADORES DE MOVIMIENTO

- **MECANISMO GENERADOR DE FUNCION**

Un generador de función es un eslabonamiento en el que el movimiento relativo (o fuerzas) entre eslabones conectados a **tierra** es de interés. La figura 1.9 es un eslabonamiento impulsor para un aspersor rotativo para césped que es ajustable para variar el ángulo de rotación de la cabeza del aspersor.

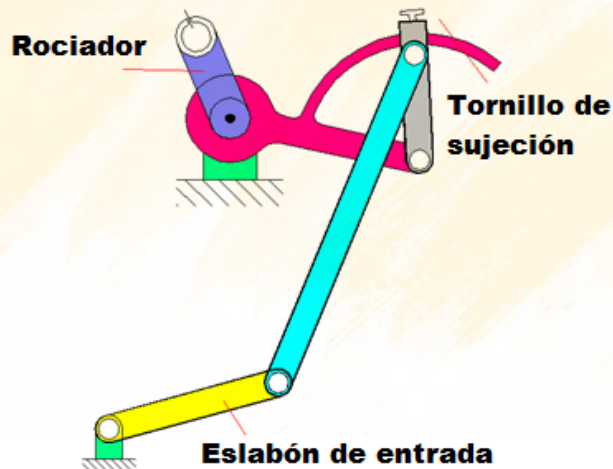


Figura 1.8. Transmisión engranes cónicos

Otro ejemplo es el mecanismo de dirección con su configuración de Ackerman que compensa el ángulo de giro del volante, la salida de la función es la rotación de las ruedas



Figura 1.9. Mecanismo de dirección Ackerman²

- **MECANISMO GENERADOR DE TRAYECTORIA**

En la generación de trayectoria interesa el trayecto en el plano de un punto trazador del eslabón acoplador. La grúa de amantillado a nivel (figura 1.10) es un eslabonamiento que genera aproximadamente un movimiento de línea recta del punto trazador. Las grúas de este tipo tienen una capacidad de 50 toneladas y un desplazamiento de cerca de 9 m de carga.

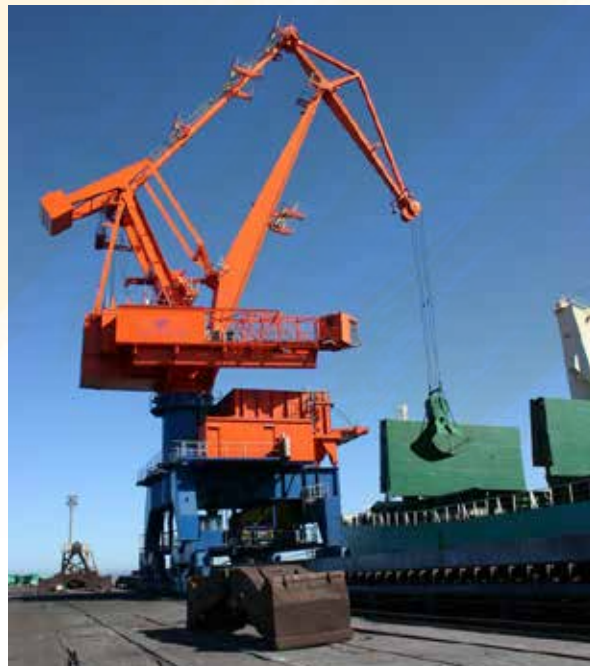


Figura 1.10. Grúa Lemniscata³

² <http://www.mekanizmalar.com>

³ <http://www.kranunion.de/nc/en/ardelt/products>

Otro ejemplo de generación de trayectoria es el mecanismo monowiper desarrollado por Mercedes Benz, como limpiaparabrisas único que copia el perfil del parabrisas

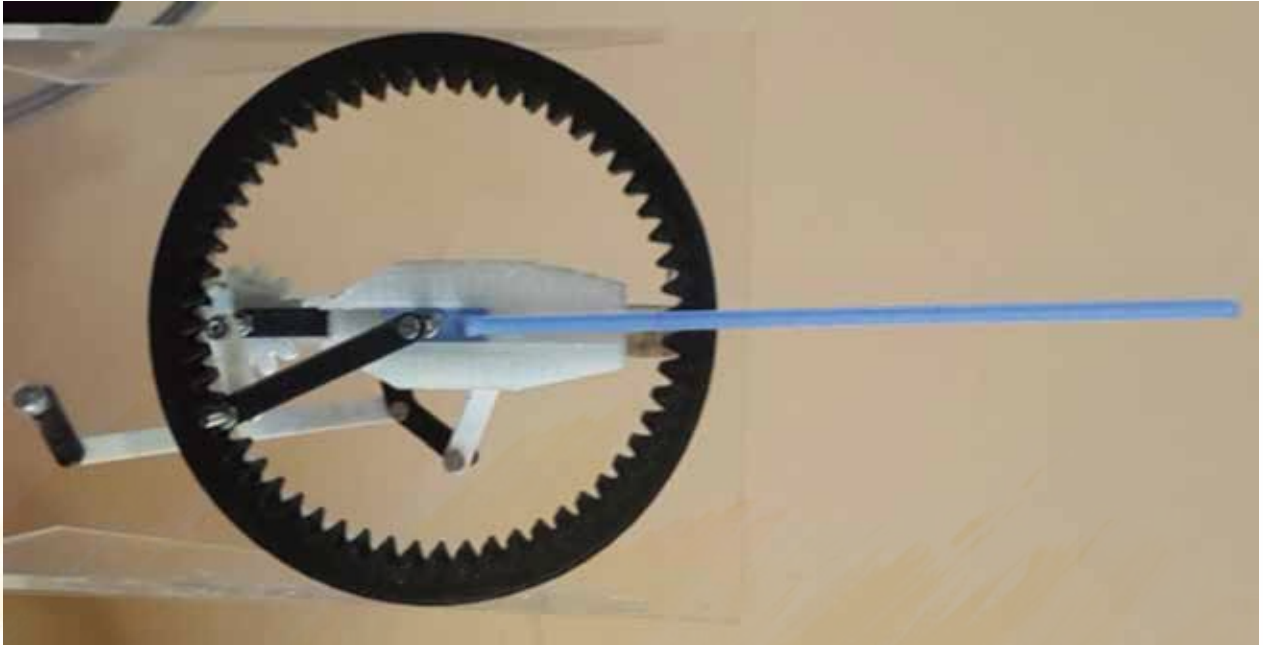


Figura 1.11. Mecanismo monowiper⁴

- **MECANISMO GENERADOR DE MOVIMIENTO**

En la generación de movimiento es de interés el movimiento total de la barra 3 o acoplador. Interesa tanto la trayectoria (x, y) de un punto cualquiera como la orientación del objeto de estudio, ver Figura 1.12 y 1.13

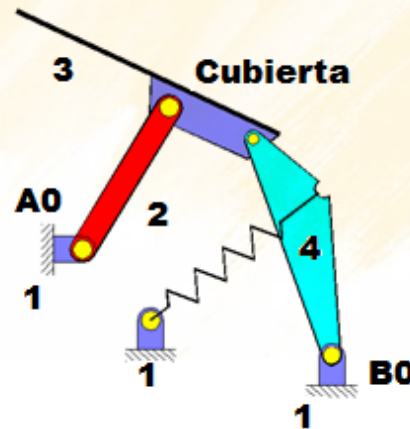


Figura 1.12. Mecanismo para apertura de un capo

⁴ Laboratorio Mecanismos

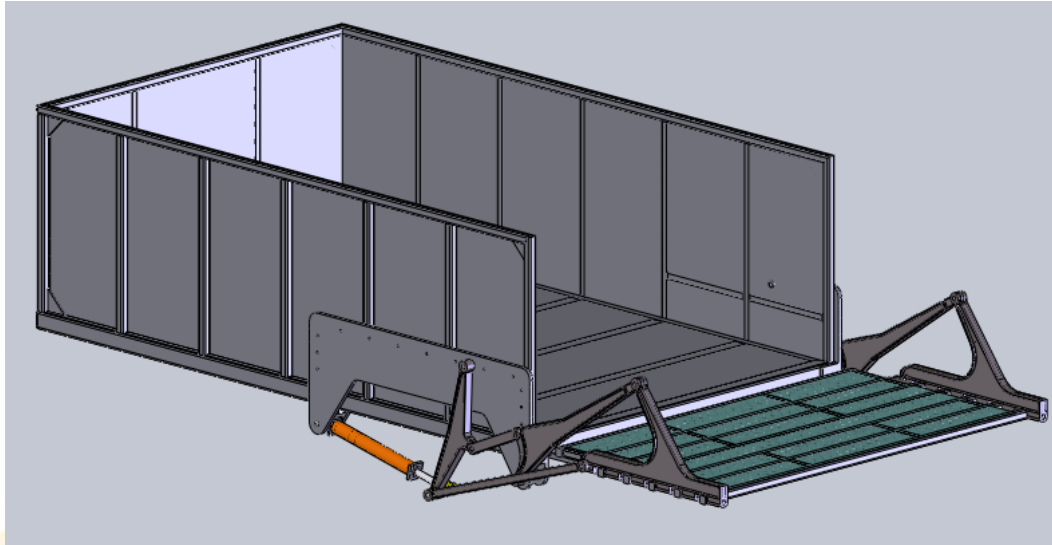


Figura 1.13. Mecanismo para subir y bajar la plataforma de un camión⁵

En este caso interesa que todos los puntos de la plataforma tenga la misma trayectoria

1.8 GRADOS DE LIBERTAD DE UN MECANISMO:

Parte del análisis de un mecanismo, después de esbozar el diagrama cinemático, es determinar el número de grados de libertad de un mecanismo. Por grado de libertad se entiende el número de entradas independientes requeridas para determinar la posición de todos los eslabones o dicho de otra manera: Cuantos motores yo necesito para poder mover unos mecanismos determinados

La ecuación que nos ayuda a determinar el número de grados de libertad de un mecanismo **plano** se conoce ecuación de GRUEBLER (Nieto, 1978).

$$GDL = 3(n - 1) - 2j_1 - j_2 \quad (1.1)$$

Dónde:

- j_1 es el número de pares de un solo grado de libertad
- j_2 es el número de pares con dos grados de libertad
- n es el número de eslabones
- GDL** es el número de grados de libertad de un mecanismo

1.8.1 DEDUCCION DE LA ECUACION DE GRUEBLER:

Un eslabón cualquiera en un plano tiene 3 GDL. Por consiguiente un sistema de n eslabones tendrá $3n$ GDL. Cuando un eslabón se fija o sujeta al marco de referencia, sus 3 GDL se eliminan y se tiene $3(n-1)$ GDL

⁵ Gómez, R., & Torres, B., (2005). Diseño de un montacargas incorporado al cajón de un camión, simulación de su funcionamiento y operación, ESPE, Sangolquí

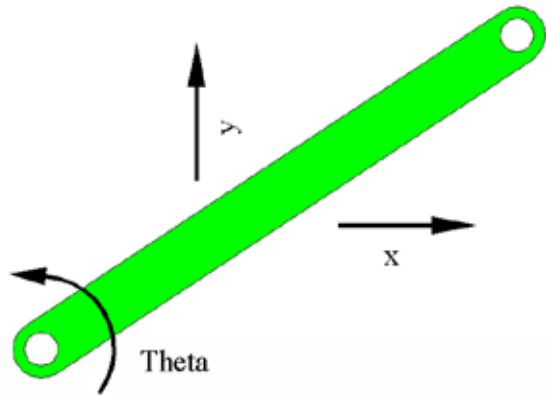


Figura 1.14. Eslabón

Cuando dos eslabones se conectan por una junta completa, x_1 se combina con x_2 y y_1 se combina con y_2 eliminándose 2 grados de libertad, por tanto según el número de juntas se eliminan $2 \cdot j_1$ GDL.

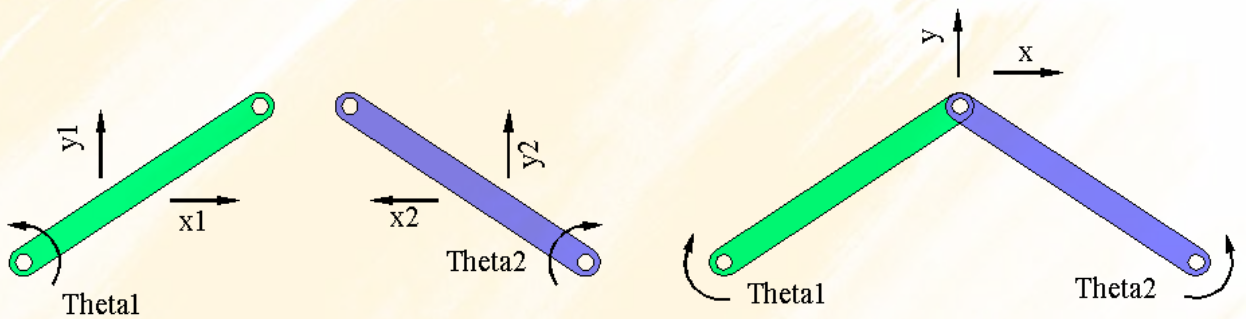


Figura 1.15. Eliminación de grados de libertad por una junta

Una junta de 2 grados de libertad o semijunta elimina un solo grado de libertad, por tanto se eliminarán j_2 GDL. En la figura se puede ver que al unir con un par de leva o par rodamiento-deslizamiento se ha eliminado solamente un grado de libertad

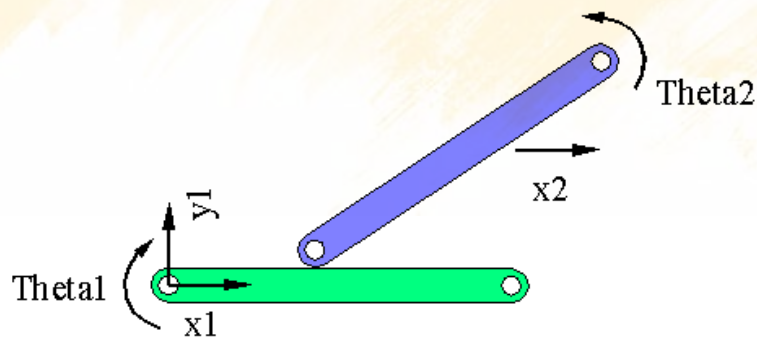
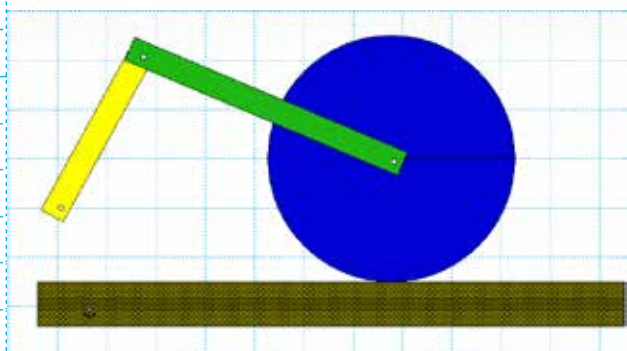
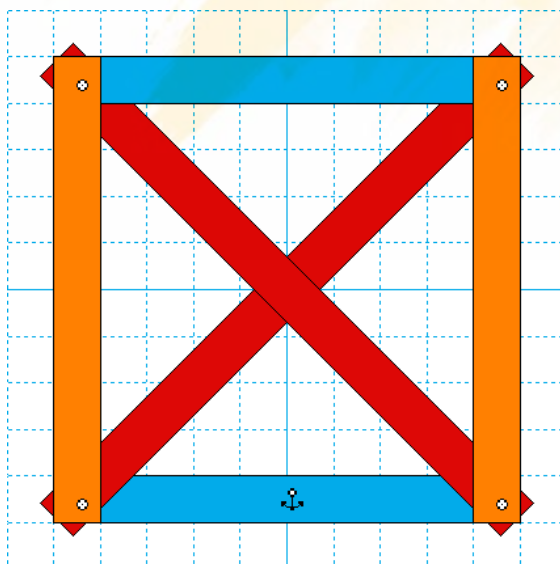
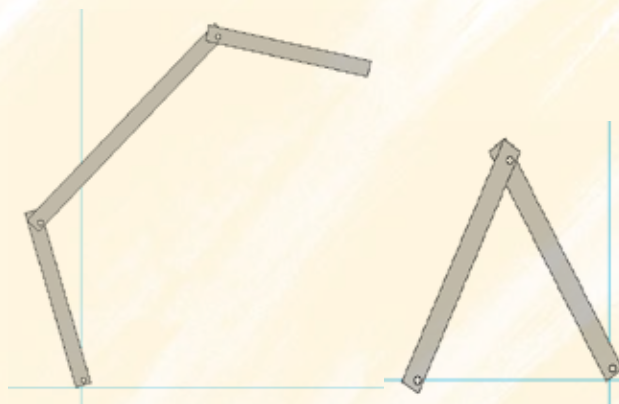
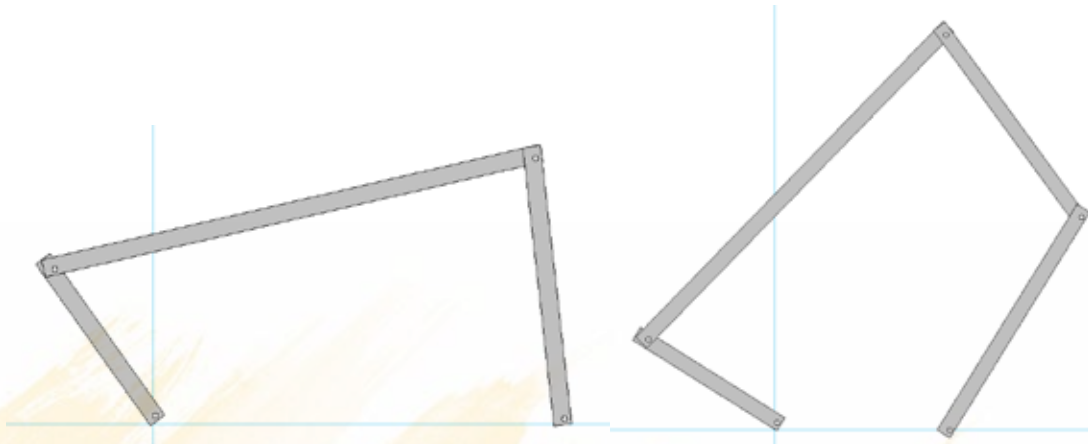
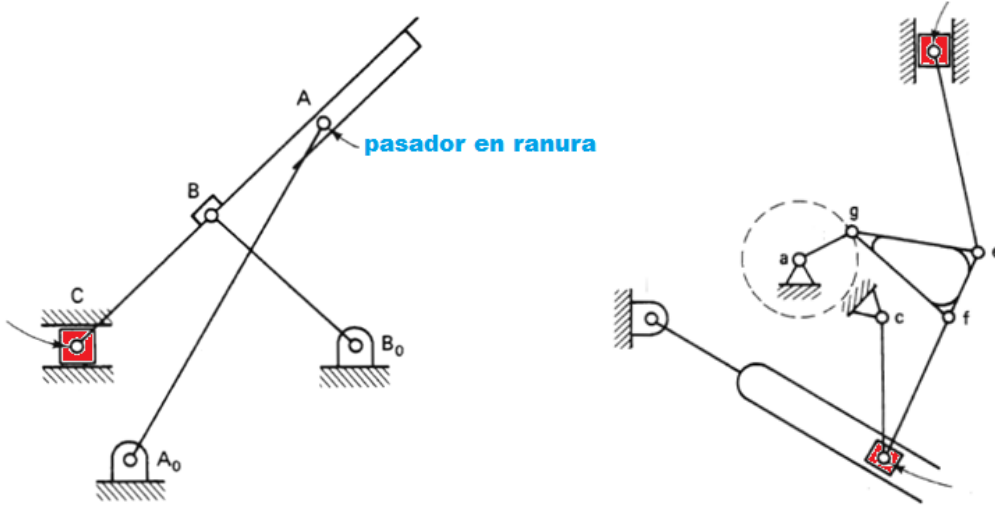
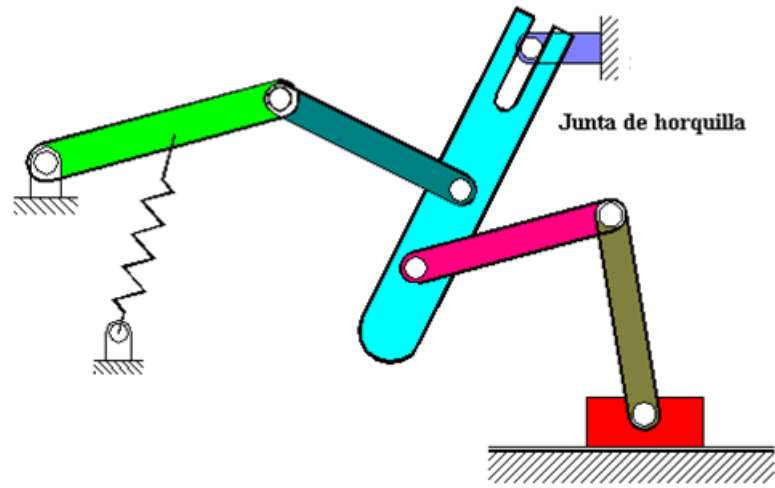
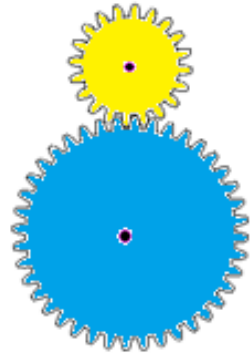


Figura 1.16. Eliminación de grados de libertad en una semijunta

1.8.2. TAREAS PARA EL ESTUDIANTE:

Usando la ecuación de Gruebler determine los grados de libertad de los siguientes mecanismos





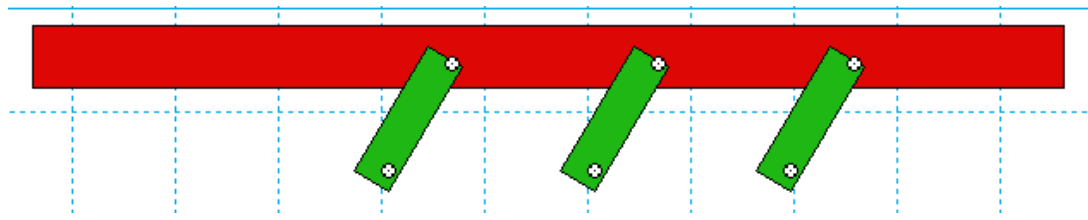


Figura 1.17. Determinación de grados de libertad⁶

1.9 CONDICION DE GRASHOF

Es una relación muy simple que pronostica el comportamiento de rotación o rotabilidad de un eslabonamiento de cuatro barras y sus inversiones con base sólo en las longitudes del eslabón. Para un eslabonamiento plano de cuatro barras, la suma de las longitudes más corta y más larga tiene que ser menor que la suma de las longitudes de los dos eslabones restantes, si se desea que exista una rotación continua entre dos elementos.

$$s + l \leq p + q \quad (1.2)$$

Si no se satisface esta desigualdad, ningún eslabón efectuará una revolución completa en relación con otro y se dice que el eslabonamiento es no Grashof.

⁶ <https://es.dreamstime.com/imagen-de-archivo-retroexcavadoras-image10455981>

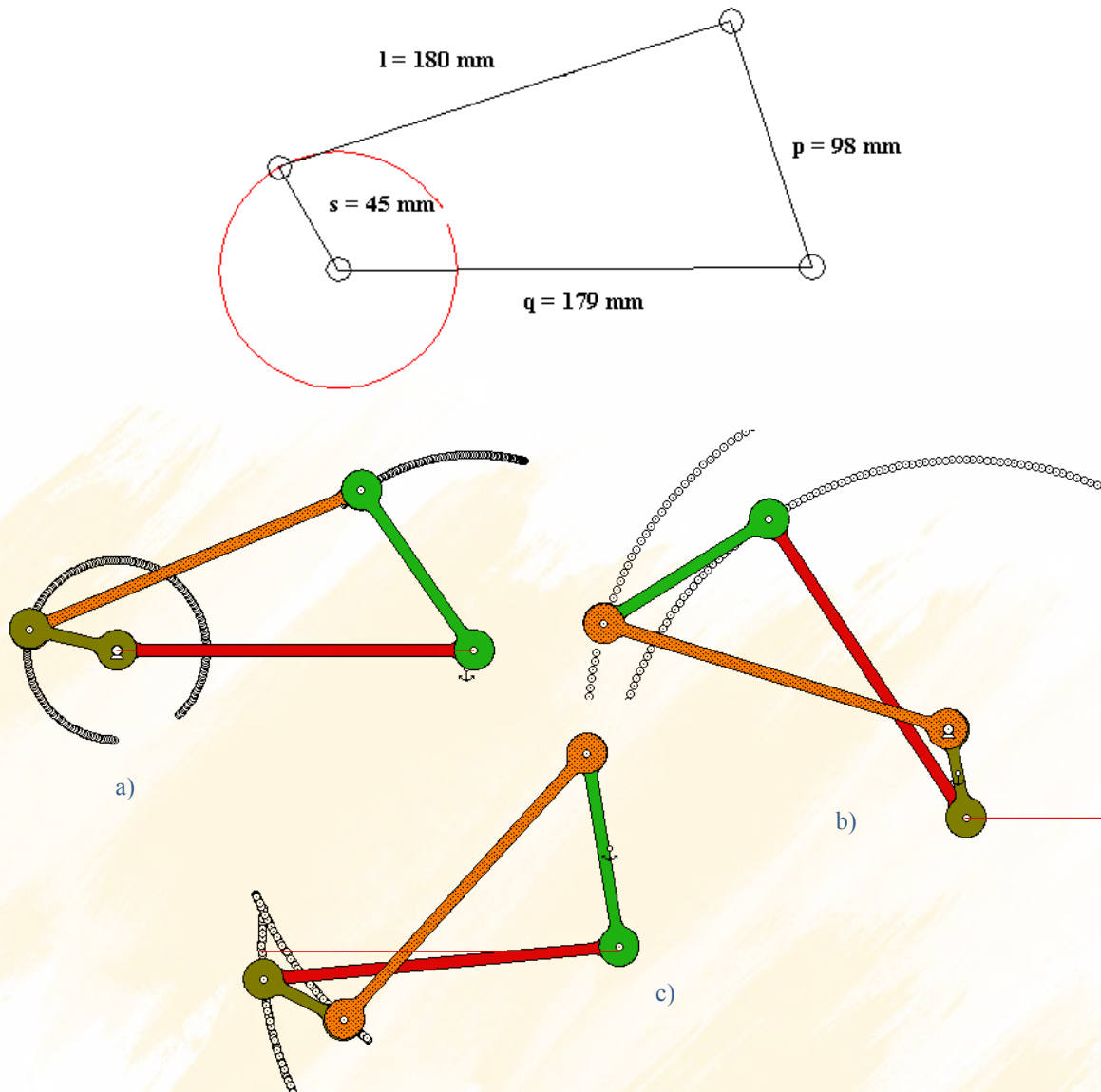


Figura 1.18. a) Mecanismo Manivela-Balancín b) Mecanismo doble manivela c) Mecanismo doble balancín de Grashof

Si se fija cualquier eslabón adyacente al más corto (1 o 3) tendremos un caso denominado **manivela- balancín**. Si se fija el eslabón más corto (2) se lograra **una doble manivela** y si se fija el eslabón opuesto al más corto se tendrá un **doble-balancín de Grashof**.

1.10 INVERSIÓN CINEMÁTICA

Es el proceso mediante el cual se altera el eslabón seleccionado como referencia para una cadena cinemática dada, los movimientos relativos entre los distintos eslabones no se afectan; Pero sus movimientos absolutos (los que se miden con respecto al de referencia) pueden cambiar drásticamente (SHIGLEY, 1988).

La figura 1.18 a) representa el motor de combustión interna
 La figura 1.18 b) representa el motor rotatorio utilizado en aviones de hélice

La figura 1.18 c) representa el mecanismo para impulsar las ruedas de las locomotoras
 La figura 1.18 d) representa una bomba de agua.

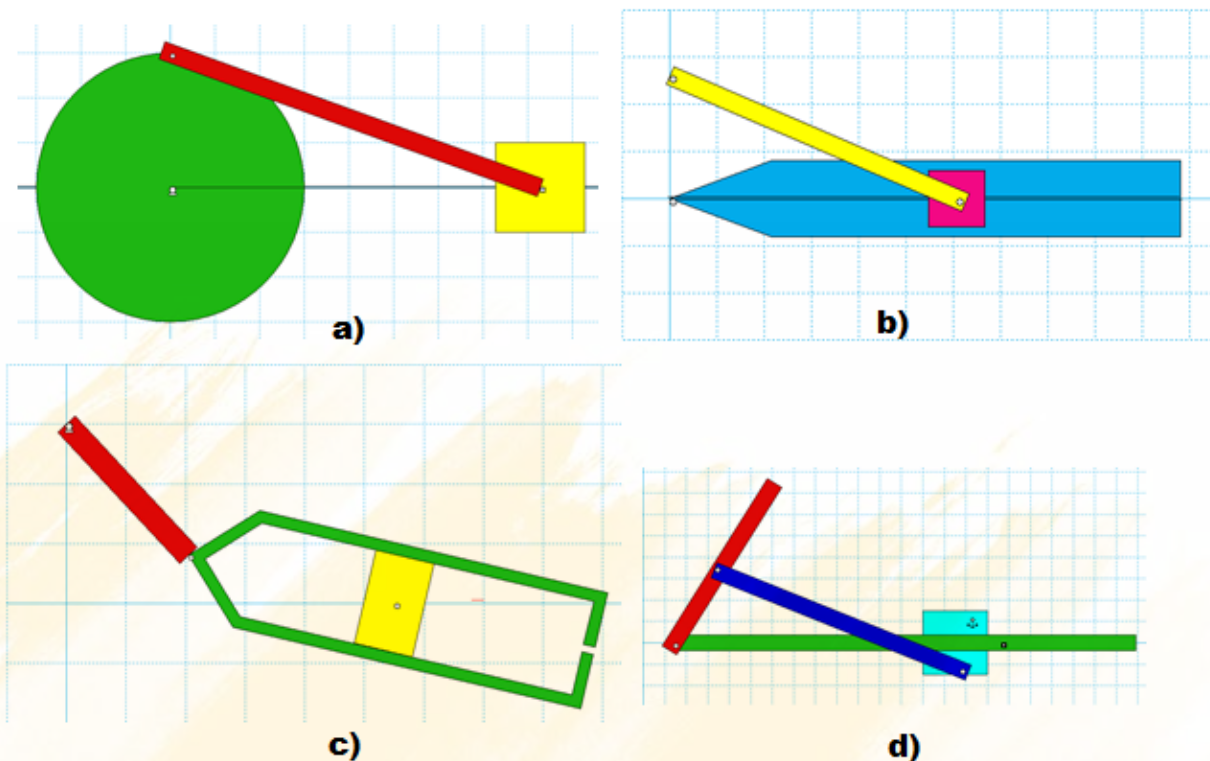


Figura 1.19. Tipos de inversiones cinemáticas. a) Motor de combustión interna b) Motor rotatorio de aviación c) Mecanismo para impulsar ruedas motrices d) Bomba manual⁷

1.11 CURVAS DEL ACOPLADOR

Durante el movimiento del eslabonamiento cualquier punto fijado al acoplador genera una trayectoria determinada con respecto al eslabón fijo y que recibe el nombre de curva del acoplador. La ecuación algebraica es de sexto orden por lo que se puede hallar curvas de acoplador con características interesantes y de variadas aplicaciones como veremos posteriormente, de interés especialmente para mecanismos generadores de trayectoria y de movimiento paralelo.

- Curvas en ocho
- Curvas con tramos casi rectilíneos
- Curvas con tramos casi circulares
- Curvas con una o más cúspides

⁷ Shigley, J.E., Uicker, J.J., Teoría de máquinas y mecanismos, McGraw-Hill

Ejemplos:

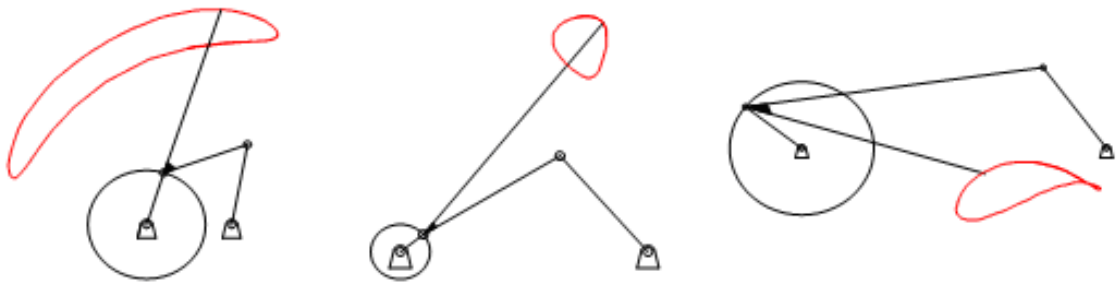


Figura 1.20. Algunas curvas de acoplador

1.12 MECANISMOS FLEXIBLES

Adentrarse en las fronteras de la cinemática del siglo XXI es fascinante, una de ellas se refiere a los mecanismos flexibles (compliance mechanism). Un mecanismo convencional es un diseño mecánico usado para transferir o transformar movimiento, fuerza o energía. Los mecanismos tradicionales que se han revisado consisten en eslabonamientos rígidos conectados con juntas móviles. Un mecanismo flexible también transfiere o transforma movimiento, fuerza o energía, de la misma forma que los mecanismos rígidos, sin embargo, los mecanismos flexibles obtienen su movilidad de la elasticidad del material por medio de la deflexión de miembros o de juntas flexibles en vez de juntas rígidas únicamente.

Un ejemplo de mecanismo flexible está indicado en la figura 1.21. La fuerza de entrada genera un amplio movimiento en la tenaza indicada.

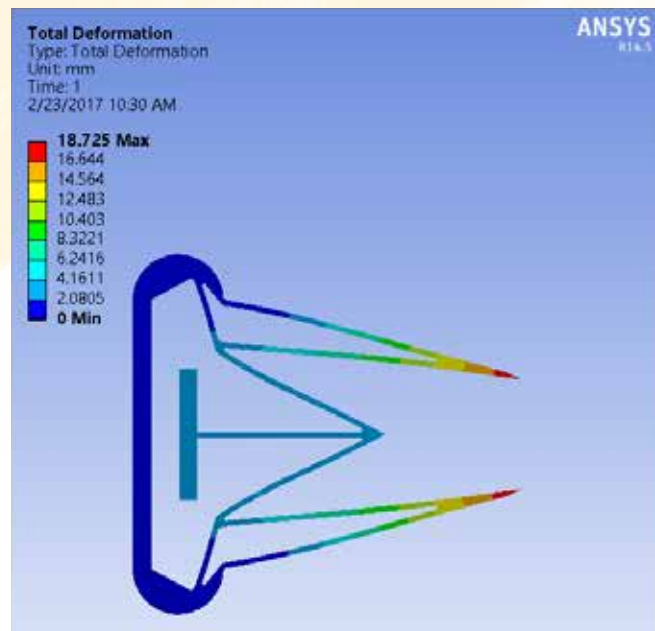
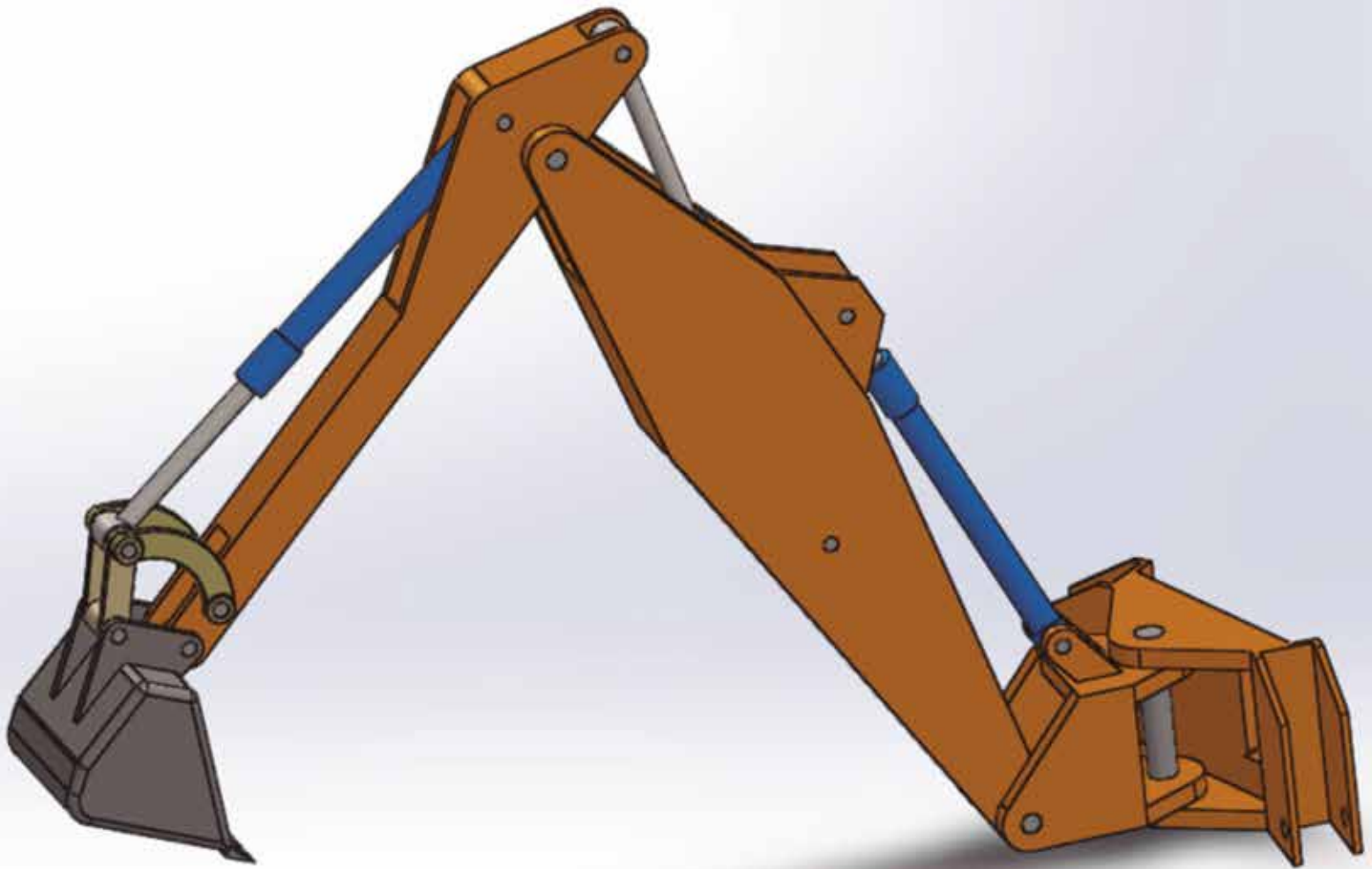


Figura 1.21. Mecanismo Flexible

Con los modernos procesos de manufactura aditivos se pueden desarrollar estos mecanismos que se constituyen con un único solo elemento. Ver más en: <http://research.et.byu.edu/llhwww/>



CAPÍTULO 2

ANALISIS DE MECANISMOS

2.1 INTRODUCCION

El análisis cinemático de mecanismos se refiere al estudio del movimiento de los mismos (desplazamientos, velocidades, aceleraciones, y sobreaceleraciones de puntos y miembros constituyentes), sin atender para nada la causa que produce tales movimientos (Nieto, 1978). El análisis cinemático en sí mismo tiene poca utilidad. Más bien debe ser considerado como un medio para llegar a resolver el análisis dinámico y por lo tanto el análisis de esfuerzos, así como para comprobar los resultados obtenidos en la síntesis de mecanismos. El análisis cinemático de mecanismos puede acometerse por diversos métodos:

2.1.1 MÉTODOS GRÁFICOS

Los métodos gráficos han sido los más antiguos en su aparición y los tradicionalmente empleados. Pese a su relativa facilidad estos métodos eran sumamente tediosos si se necesitaba determinar todo el análisis cinemático para todo el ciclo de movimiento del mecanismo, pues cada nueva posición requiere que el trazo de un sistema completamente nuevo de diagramas vectoriales y nada de lo hecho anteriormente sirve para esta nueva posición.

2.1.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos se basan en la formulación de Lagrange, tienen la ventaja de ser completamente generalistas, ya que no precisan del desarrollo de un conjunto de ecuaciones para cada mecanismo particular. Por tanto, no se requiere acceder al programa informático fuente, para cambiar las ecuaciones, cada vez que se desea analizar un nuevo mecanismos. En base de este método están elaborados los programas de simulación multicuerpo, SimWise 4D, Working Model 2D, 3D, 4D, Nastran, Cosmos Motion, Adams, Universal Mechanism, etc.

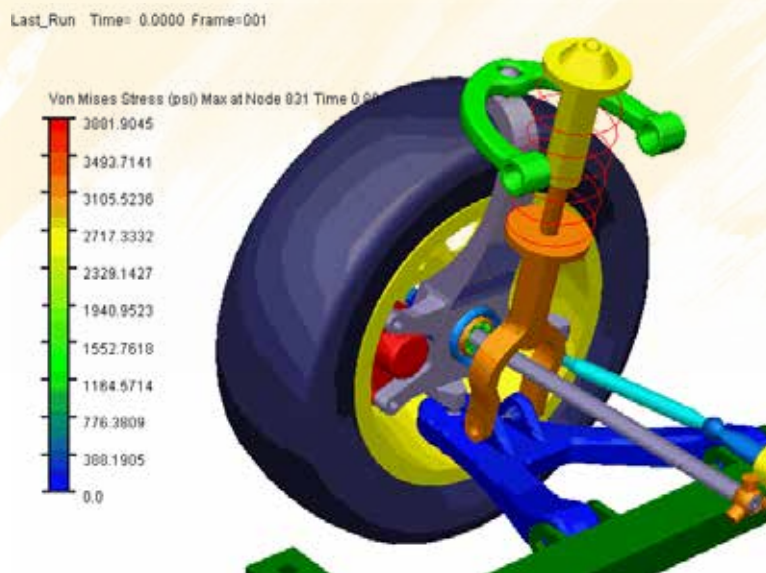


Figura 2.1. Mecanismo realizado en Msc Adams⁸

2.1.3 METODOS ANALÍTICOS

⁸ <https://www.google.com/software-simulation-rmb-dynamic-multibody-Adams-Flexible-Body>

Los métodos analíticos de empleo mucho más moderno (datan de la década del 50) se apoyan, tanto en la puesta a su servicio de la matemática como en el uso de la moderna herramienta que es el computador personal PC, lo cual ha evolucionado la práctica de la ingeniería. Estos métodos están alcanzando un gran desarrollo y a niveles prácticos desbancaron a los métodos gráficos, frente a los que presentan indudables ventajas:

- Permiten el análisis en ciclo completo
- Dan soluciones rápidas
- Permiten planteamientos generales
- Su precisión es definitivamente mayor que los métodos gráficos

El método analítico más utilizado es el **Método de Raven** o de **Algebra Compleja**

• **LOS NUMEROS COMPLEJOS COMO VECTORES**

Hay muchos métodos de representar vectores. Estos se pueden definir **en coordenadas polares**, por su magnitud y su ángulo, o en **coordenadas cartesianas**, mediante las componentes **x** y **y**. Un vector de posición cualquiera puede ser representado mediante **vectores unitarios** o mediante notación de **números complejos**.

Formato en coordenadas polares	Formato en coordenadas cartesianas
$R @ < \theta$	$R \cos(\theta) \hat{i} + R \sen(\theta) \hat{j}$
$R e^{i\theta}$	$R \cos(\theta) + R \sen(\theta) i$

En este caso la componente en la dirección X se denomina **parte real**, y la componente en la dirección Y, recibe termino de **parte imaginaria**. Este número imaginario se usa en el análisis como un **operador** y no como un valor. En la figura 2.2 se muestra el **plano complejo** en el que el **eje real** representa la dirección de la componente X del vector en el plano, y el **eje imaginario** representa la dirección del componte Y del mismo vector

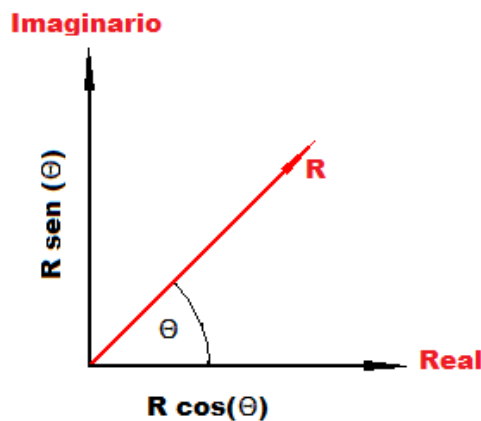


Figura 2.2. Plano complejo

Advierta en la figura 2.3. Que cada multiplicación por el operador **i** resulta en una rotación de **90°** en sentido contraria a las manecillas del reloj del vector.

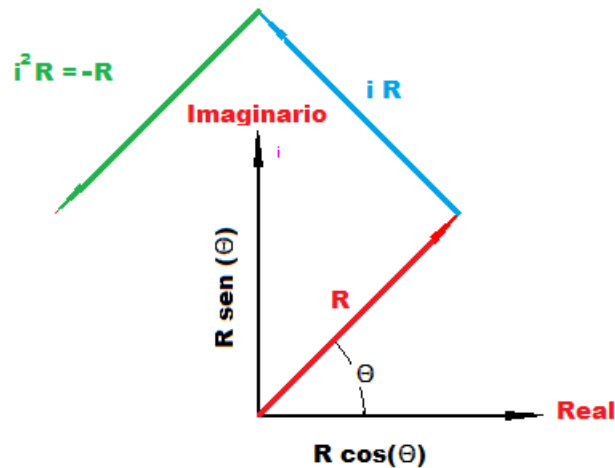


Figura 2.3. Operador rotación

Comprobación: Dado el vector

$$e^{i.45^\circ}$$

Al multiplica por el operador i se obtiene:

$$i \cdot e^{i.45^\circ} = i (\cos(45) + i \sin(45)) = i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora rotando el vector 90° en sentido anti horario, se observa que coinciden:

$$e^{i.(45^\circ+90^\circ)} = \cos(135) + i \sin(135) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La ventaja de utilizar esta notación de números complejos para representar vectores en el plano proviene de la **identidad de Euler**

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$$

No hay función más fácil de derivar o integrar, ya que tal función es su propia derivada

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} \rightarrow i \exp(i\theta)$$

Se puede utilizar el Mathematica como herramienta para derivar

$$D[\operatorname{Exp}[I\theta], \theta] \quad i e^{i\theta}$$

Se utiliza esta notación de números complejos para los vectores, con el fin de desarrollar y deducir las ecuaciones para la posición, velocidad y aceleración de eslabonamientos.

2.1.4 WOLFRAM MATHEMATICA

En el estudio a llevarse a cabo, es imprescindible generar los modelos matemáticos por medio de fórmulas que expresan las variables cinemáticas, las cuales necesariamente deben ser graficadas, como por ejemplo: trayectorias, velocidades, aceleraciones o torques. Gracias a la computadora es posible generar estos gráficos con el auxilio de muchos programas de análisis numérico, tales como Wolfram Mathematica (Figura 2.4), MathCAD, MATLAB, MAPLE, TK Solver, etc. Los análisis llevados a cabo en este texto se basarán en la aplicación de Wolfram Mathematica el cual puede ser descargado gracias a la RED CEDIA, de la página: <https://www.cedia.org.ec/respositorios/wolfram-mathematica>



Figura 2.4. Logo Wolfram Mathematica⁹

2.2 MECANISMO MANIVELA - CORREDERA

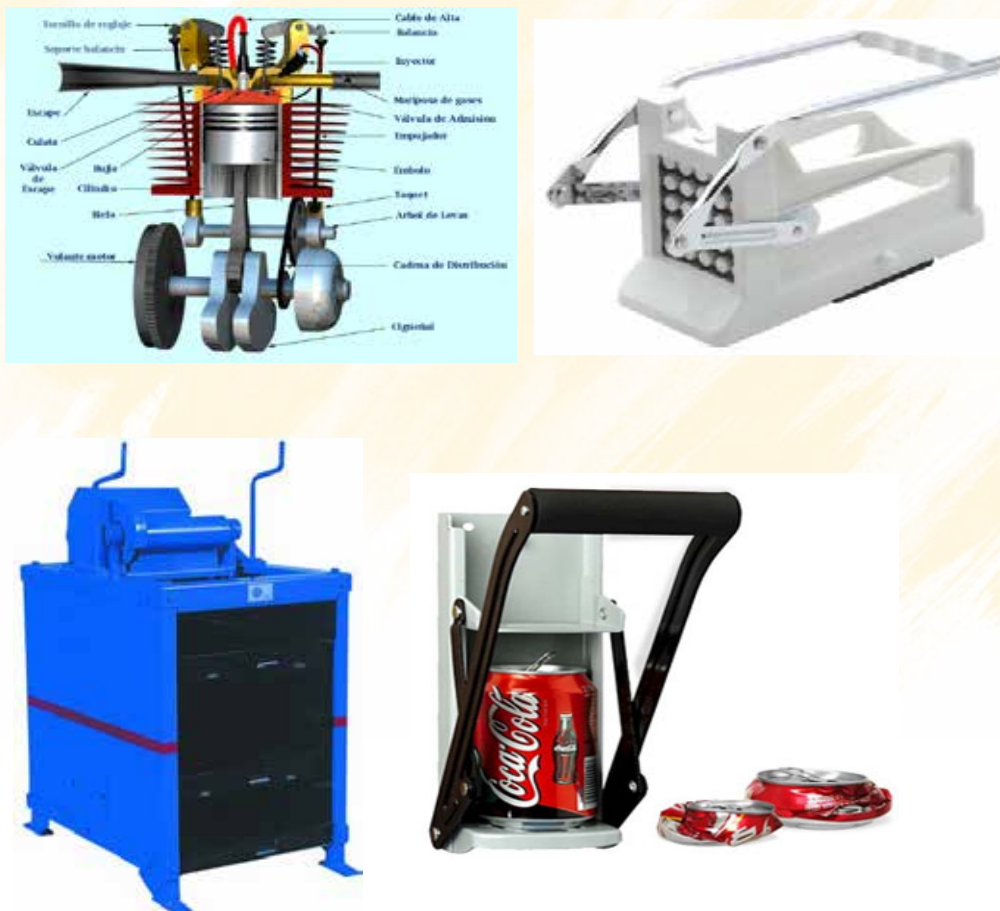


Figura 2.5. Mecanismos biela manivela a) Motor de combustión interna, b) Tamizador de áridos gruesos¹⁰, c) Aplastador de latas¹¹, d) Aplastador de papas

⁹ <https://www.wolfram.com/mathematica/>

¹⁰ www.proetisa.com

El mecanismo manivela corredera se trata de un mecanismo capaz de transformar el movimiento circular de una manivela en un movimiento lineal alternativo o viceversa. Dicho sistema está formado por un elemento giratorio denominado **manivela** que va conectado con una barra rígida llamada **biela**, de tal forma que al girar la manivela la **corredera** se ve obligada a retroceder y avanzar, produciendo un movimiento alternativo. Es sin duda uno de los mecanismos más construidos en el mundo, es la base de los motores de combustión interna (figura 2.5 a), bombas de desplazamiento positivo, compresores, troqueladoras, (figura 2.6) y diferente tipo de maquinaria.



Figura 2.6, a) Troqueladora b) Plegadoras¹²

¹¹ <http://www.regalosfrikis.com/aplastador-de-latas/>

¹² <http://www.catalogometalurgico.com/empresas/view/558>

Para efectuar el análisis, se establece una ecuación vectorial en base de los vectores de posición:

2.2.1 ANALISIS DEL MOVIMIENTO

Partiendo del siguiente circuito vectorial, dado por la cadena cinemática (Figura 2.7)

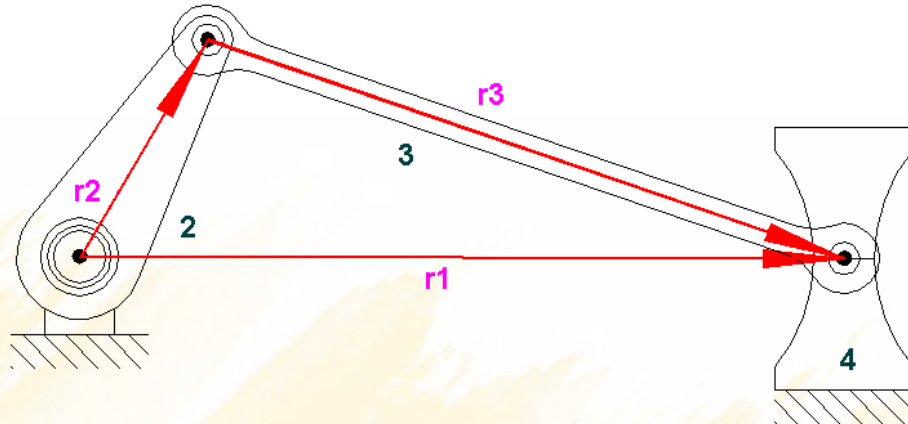


Figura 2.7. Circuito vectorial

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 \quad (2.1)$$

Y utilizando la notación en álgebra compleja donde el eje x es el eje real y el eje y es el imaginario:

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 \quad (2.2)$$

La identidad de Euler se obtiene por expansión en serie de Taylor de $e^{i\theta}$ y se genera la siguiente equivalencia:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (2.3)$$

Reemplazando en la expresión (2.1) se tiene:

$$r_1(\cos 0^0 + i \sin 0^0) = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) + r_3(\cos(\theta_3) + i \sin(\theta_3))$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

$$r_1 = r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3) \quad (2.4)$$

$$0 = r_2 \sin(\theta_2) + r_3 \sin(\theta_3) \quad (2.5)$$

θ_2 es la variable independiente que varía de 0 a 360° y la solución de las ecuaciones es:

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left(-\frac{r_2}{r_3} \sin(\theta_2) \right) \quad (2.6)$$

$$r_1 = r_2 \cos(\theta_2) + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 \sin^2(\theta_2)} \quad (2.7)$$

2.2.2 GRÁFICOS EN WOLFRAM MATHEMATICA

```
ClearAll[r2,r3,x,v,a,θ]
r2=150;
r3=300;
x=r2*Cos[θ Degree]+r3*Sqrt[1-(r2/r3*Sin[θ Degree])^2]
θ3=ArcSin[-r2*Sin[θ Degree]/r3 ]
Plot[x,{θ,0,360}]
Plot[θ3 180/π,{θ,0,360}]
```

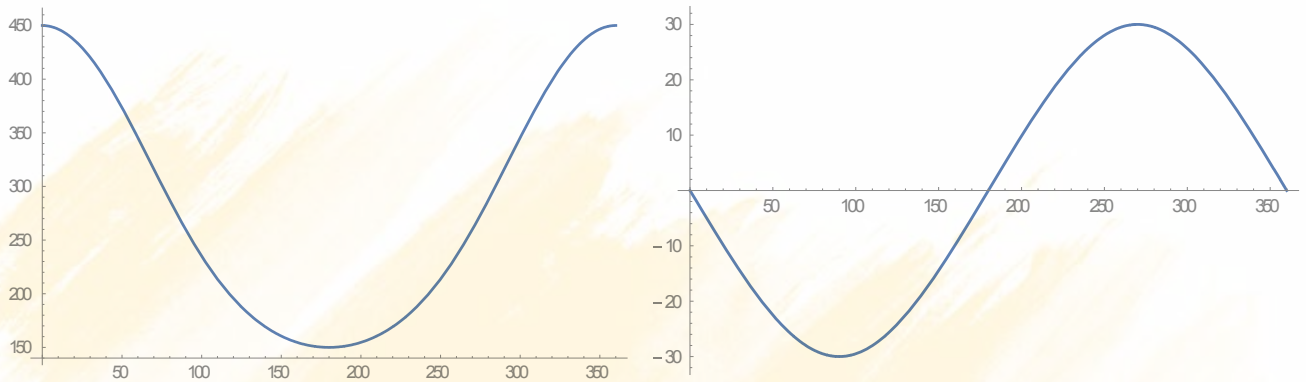


Figura 2.8. Desplazamiento de la corredera y Rotación de la biela

En el grafico (Figura 2.8) del desplazamiento de la corredera se puede determinar el valor de la carrera efectuando la diferencia entre $450 - 150 = 300$ que como se ve es igual a $2r_2$. Se puede hacer uso de la manipulación interactiva que ofrece el programa Wolfram Mathematica (Figura 2.9)

```
Manipulate[r2=150;
Plot[r2 Cos[θ]+r3 Sqrt[1-(r2/r3 Sin[θ])^2],{θ,0,2*π}],{r3,150,300}]
```

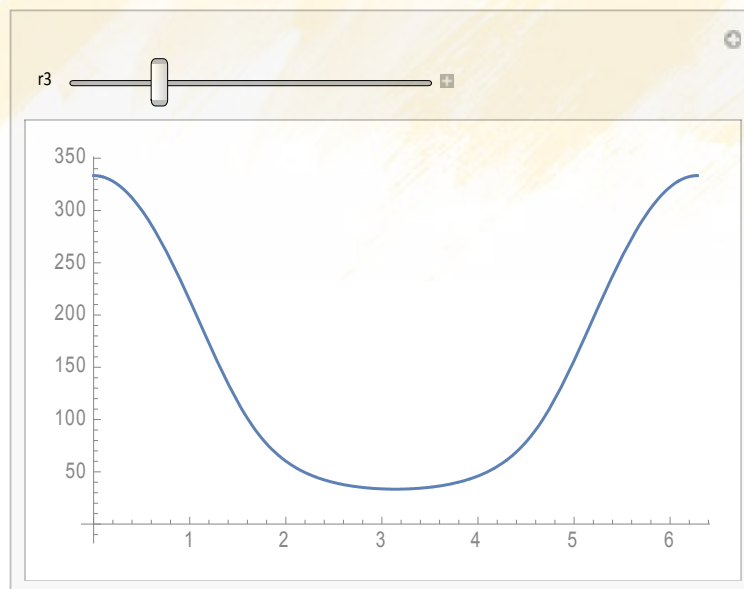


Figura 2.9. Desplazamiento de la corredera con la sentencia Manipulate

2.2.3 ANALISIS SIMPLIFICADO DE DESPLAZAMIENTO

Debido a que este mecanismo es uno de los más estudiados y útiles que existen, se ha buscado maneras de simplificar el tratamiento matemático con el fin de obtener expresiones más simples que son de mucha ayuda para el análisis vibratorio de motores, ya sean mono o multicilíndricos. En primer lugar se establece un cambio en la nomenclatura de los eslabones:

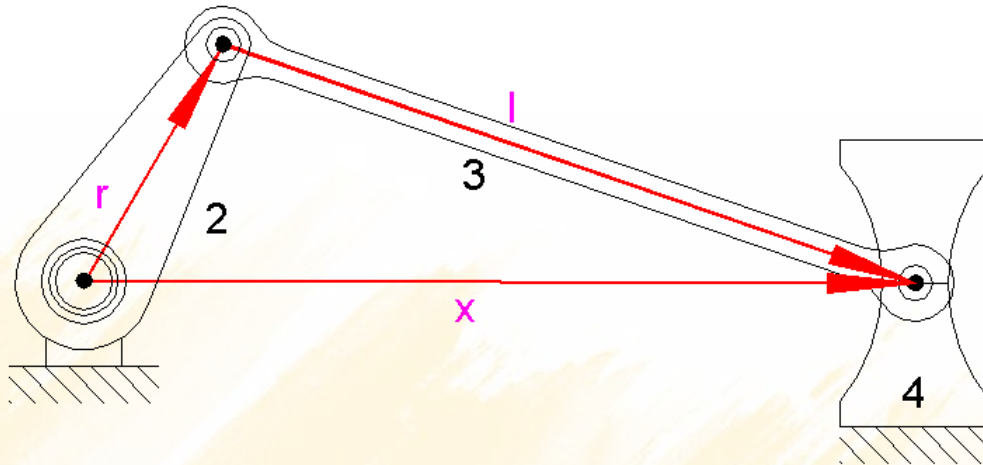


Figura 2.10. Circuito vectorial

Es importante indicar que esta simplificación es válida únicamente para eslabonamientos con relación

$$\frac{r}{l} \leq \frac{1}{3}$$

La expresión a simplificar es entonces la siguiente:

$$x(\theta_2) = r \cos(\theta_2) + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin(\theta_2)\right)^2} \quad (2.8)$$

Donde se desarrolla el radical mediante la teoría del binomio¹³

$$(a + b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{n}{1!} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \frac{n(n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots \quad (2.9)$$

$$\left[1 - \left(\frac{r}{l} \cdot \sin(\theta_2)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{1}{2} \cdot \left[-\left(\frac{r}{l} \cdot \sin(\theta_2)\right)^2\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[-\left(\frac{r}{l} \cdot \sin(\theta_2)\right)^2\right]^2 + \dots \quad (2.10)$$

Puesto que el valor r/l es menor que uno puedo omitirse todos los términos menos los dos primeros, truncándose la serie

$$\left[1 - \left(\frac{r}{l} \cdot \sin(\theta_2)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\left(\frac{r}{l} \cdot \sin(\theta_2)\right)^2}{2} = 1 - \frac{r^2}{2 \cdot l^2} \cdot \sin^2(\theta_2) \quad (2.11)$$

De la identidad trigonométrica

¹³ Norton, Robert L., Diseño de Maquinaria

$$\cos(2 \cdot \theta_2) = \cos(\theta_2)^2 - \sin(\theta_2)^2 = 1 - 2 \cdot \sin(\theta_2)^2 \quad (2.12)$$

Y reemplazando 2.12 en 2.10

$$\sin(\theta_2)^2 = \frac{1 - \cos(2 \theta_2)}{2} \quad (2.13)$$

$$\left[1 - \left(\frac{r}{l} \cdot \sin(\theta_2)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{r^2}{4l^2} \cdot (1 - \cos(2 \theta_2)) \quad (2.14)$$

Se obtiene el desplazamiento del pistón

$$\begin{aligned} x(\theta_2) &= r \cos(\theta_2) + l \left[1 - \frac{r^2}{4l^2} (1 - \cos(2 \theta_2))\right] \\ &= l - \frac{r^2}{4l} + r \left[\cos(\theta_2) + \frac{r}{4l} \cos(2 \theta_2)\right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Puesto que $\theta_2 = \omega t$, se logra la expresión del desplazamiento en función del tiempo y sus respectivas derivadas:

$$x(t) = l - \frac{r^2}{4l} + r(\cos(\omega t) + \frac{r}{4l} \cos(2\omega t)) \quad (2.16)$$

$$v(t) = -r\omega(\sin(\omega t) + \frac{r}{2l} \sin(2\omega t)) \quad (2.17)$$

$$a(t) = -r\alpha \left(\sin(\omega t) + \frac{r}{2l} \sin(2\omega t)\right) - r\omega^2 \left(\cos(\omega t) + \frac{r}{l} \cos(2\omega t)\right) \quad (2.18)$$

- **PROGRAMACIÓN EN MATHEMATICA FUNCIONES SIMPLIFICADAS**

Derivación simbólica

```
x=long-radio^2/(4*long)+radio*(Cos[ω2*t]+radio/(4*long)*Cos[2*ω2*t]);
x'[t]
x''[t]
radio (-ω2 Sin[t ω2]-(radio ω2 Sin[2 t ω2])/(2 long))
radio (-ω2 Cos[t ω2]-(radio ω2 Cos[2 t ω2])/long)
```

Graficación

```
radio=150;
long=300;
freq=100;
ω2=freq*2*π/60;
Plot[long-radio^2/(4*long)+radio*(Cos[ω2*t]+radio/(4*long)*Cos[2*ω2*t]),{t,0,1},AxesLabel->{"t","desplazamiento"},PlotLabel->{"Desplazamiento"}]
Plot[radio (-ω2 Sin[t ω2]-(radio ω2 Sin[2 t ω2])/(2 long)),{t,0,1},AxesLabel->{"t","velocidad"} , PlotLabel->{"Velocidad"}]
Plot[radio (-ω2 Cos[t ω2]-(radio ω2 Cos[2 t ω2])/long),{t,0,1},AxesLabel->{"t","aceleración"}, PlotLabel->{"Aceleración"}]
```


Los siguientes son los gráficos de desplazamiento, velocidad y aceleración

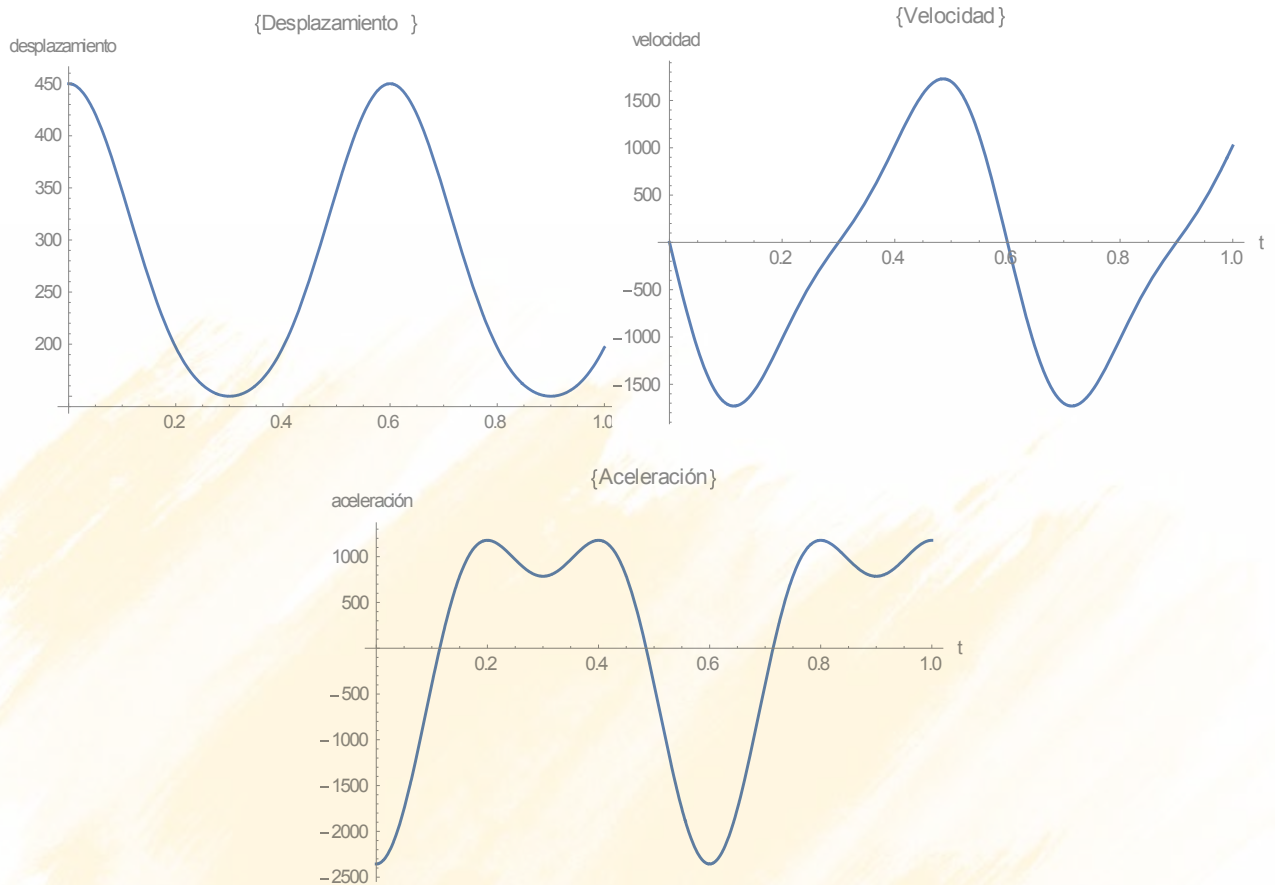


Figura 2.11. Desplazamiento, Velocidad y Aceleración

2.2.4 ANALISIS DE VELOCIDAD

Derivando la ecuación vectorial:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3 \quad (2.19)$$

$$\dot{r}_1 \cdot e^{i\theta} = \dot{r}_2 \cdot e^{i\theta_2} + r_2 \cdot i \cdot \omega_2 \cdot e^{i\theta_2} + \dot{r}_3 \cdot e^{i\theta_3} + r_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (2.20)$$

$$\cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) = r_2 \cdot i \cdot \omega_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) + r_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot (\cos(\theta_3) + i \cdot \sin(\theta_3)) \quad (2.21)$$

Igualando los términos reales e imaginarios:

$$\dot{r}_1 = -r_2 \cdot \omega_2 \sin(\theta_2) - r_3 \cdot \omega_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.22)$$

$$0 = r_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\theta_2) + r_3 \cdot \omega_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.23)$$

Se llega finalmente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, las incógnitas son la velocidad angular ω_3 y la velocidad del pistón $r_1 = v(\theta_2)$

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{-r_2 \cos(\theta_2)}{r_3 \cos(\theta_3)} \quad (2.24)$$

$$v = r_2 \omega_2 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos(\theta_3)} \quad (2.25)$$

- **GRAFICAS DE VELOCIDAD EN MATHEMATICA**

```
ClearAll[r2,r3,x,v,a,θ]
r2=150;
r3=300;

Desplazamiento;
x=r2*Cos[θ]+r3*sqrt[1-(r2/r3*Sin[θ])^2];
θ3=ArcSin[(-r2*Sin[θ])/r3];

Velocidad;
ω2=100;
ω2=%*2*π/60;
ω3=-(r2/r3)*ω2*Cos[θ]/Cos[θ3];
v=r2*ω2*Sin[θ3-θ]/Cos[θ3];

Plot[x,{θ,0,6},PlotLabel->"Desplazamiento Pistón"]
Plot[θ3,{θ,0,6},PlotLabel->"Oscilación Angular Biela"]
Plot[ω3,{θ,0,6},PlotLabel->"Velocidad Angular Biela"]
Plot[v,{θ,0,6},PlotLabel->"Velocidad Pistón"]
```

Del siguiente gráfico, Fig.2.12, se puede sacar como conclusión que las velocidades del pistón es cero en los puntos muertos 0 y 180 grados, debido a que existe un cambio de dirección, que la velocidad del pistón no es uniforme y que es máxima en 75° (1.309 rads) y 285° (4.974 rads), dependiendo de las proporciones del mecanismo

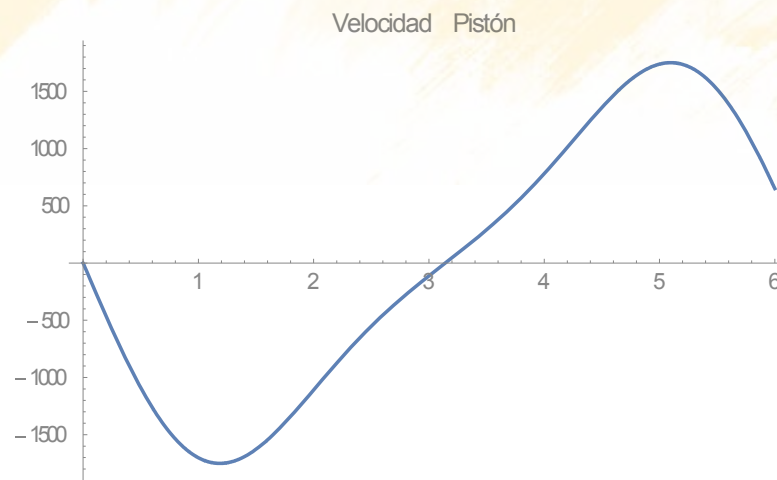


Figura 2.12. Velocidad Pistón

De la Fig. 2.13 se puede sacar como conclusión que la velocidad angular de la biela es cero cuando el ángulo de la manivela es de 90 y 270 grados, y que es máxima en 0 y 180 grados

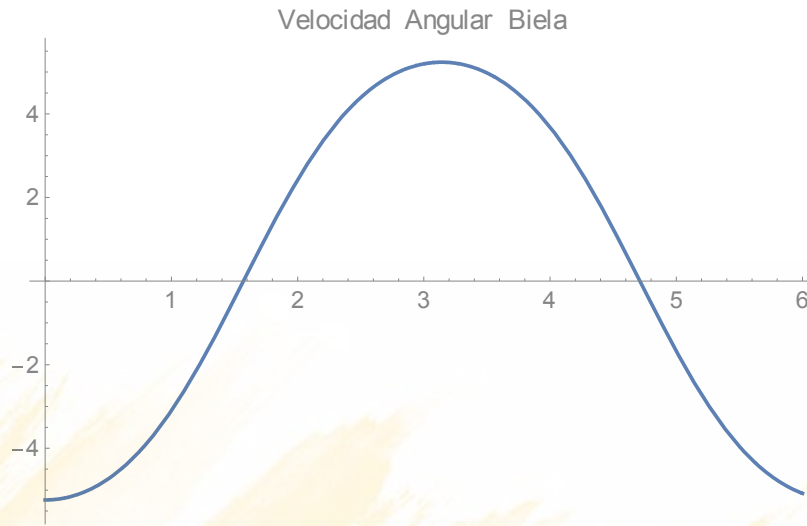


Figura 2.1.- Velocidad Angular Biela

2.2.5 ANALISIS DE LA ACELERACION

Derivando el circuito vectorial nuevamente:

$$\ddot{r}_1 = \ddot{r}_3 + \ddot{r}_2 \quad (2.26)$$

Lo que significa derivar la velocidad 2.27 obteniéndose:

$$\dot{r}_1 \cdot e^{i\theta} = r_2 \cdot i \cdot \omega_2 \cdot e^{i\theta_2} + r_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (2.27)$$

$$\ddot{r}_1 \cdot e^{i\theta} = r_2 \cdot i \cdot (\alpha_2 \cdot e^{i\theta_2} + \omega_2^2 \cdot i \cdot e^{i\theta_2}) + r_3 \cdot i \cdot (\alpha_3 \cdot e^{i\theta_3} + \omega_3^2 \cdot i \cdot e^{i\theta_3}) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{r}_1 (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= r_2 i (\alpha_2 + \omega_2^2 i) (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &+ r_3 i (\alpha_3 + \omega_3^2 i) (\cos(\theta_3) + i \sin(\theta_3)) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales se obtienen las aceleraciones

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sin(\theta_2) + r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \sin(\theta_3)}{r_3 \cdot \cos(\theta_3)} \quad (2.30)$$

$$a_p = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2) - r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \sin(\theta_3) - r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.31)$$

Donde a_p es la aceleración del pistón \ddot{r}_1

- **GRAFICAS DE ACELERACIÓN CON MATHEMATICA**

```

ClearAll[r2,r3,x,v,α3,ap,θ]
r2=150;
Manipulate[x=r2*Cos[θ]+r3*sqrt[1-(r2/r3*Sin[θ])^2];
θ3=ArcSin[(-r2*Sin[θ])/r3];
ω3=-(r2/r3)*ω2*Cos[θ]/Cos[θ3];
v=r2*ω2*Sin[θ3-θ]/Cos[θ3];
α3=(r2*(ω2^2)*Sin[θ]+r3*((ω3)^2)*Sin[θ3])/(r3*(Cos[θ3]));
ap=-r2*(ω2^2)*Cos[θ]-r3*α3*Sin[θ3]-r3*((ω3)^2)*Cos[θ3];
Plot[ap,{θ,0,6},PlotLabel->"Aceleración Pistón"],{r3,140,600},{ω2,10,100}

```

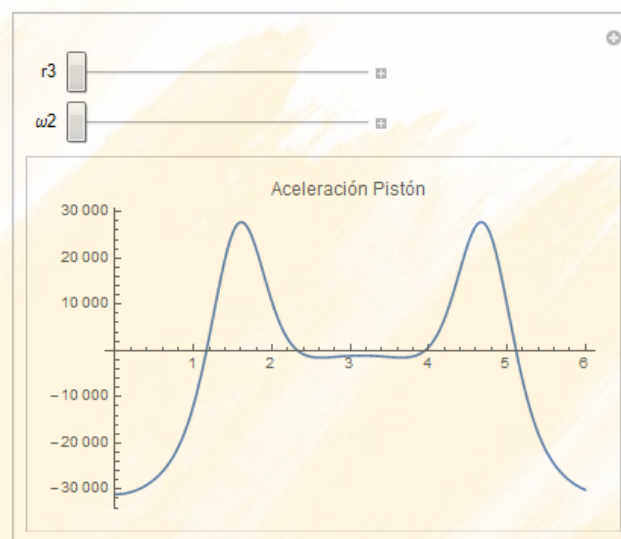


Figura 2.14. Aceleración del Pistón

La aceleración angular es la siguiente. Las aceleraciones angulares máximas ocurren en 90 y 270 grados.

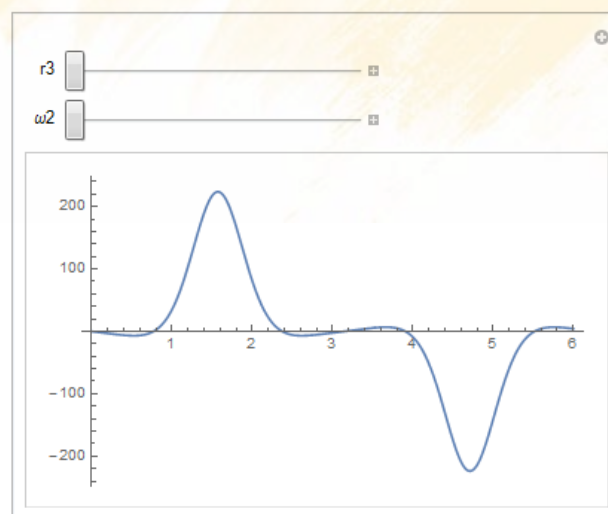


Figura 2.15. Aceleración angular de la Biela

Observando la suavidad de las curvas se concluye que mientras mayor sea la relación radio de manivela a longitud de biela (r/l) peor es el comportamiento del mecanismo. Un funcionamiento recomendable desde el punto de vista dinámico se obtiene con relaciones mayores a $r/l = 0.3$

2.2.6 ACELERACIONES DE LOS CENTROS DE GRAVEDAD

Para calcular las aceleraciones de los centros de gravedad se dibujan vectores de posición que se extienden desde un punto fijo a cualquier punto que nos interese en este caso los centros de gravedad:

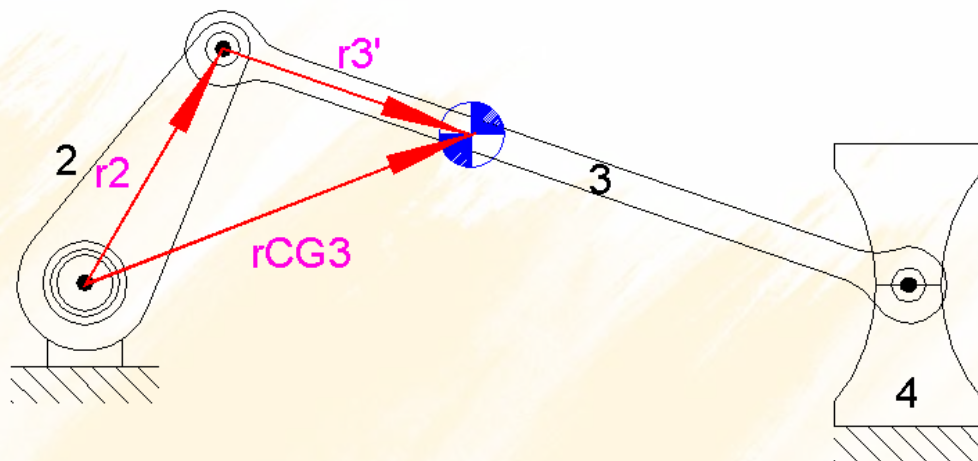


Figura 2.16. Diagrama vectorial para el cálculo de aceleraciones en los centros de gravedad

Posición del centro de gravedad del eslabón 3 (biela)

$$\mathbf{r}_{CG3} = r_2 \cdot e^{i\theta_2} + r_3' \cdot e^{i\theta_3} \quad (2.32)$$

Derivando la expresión indicada se obtiene la velocidad absoluta del centro de gravedad del eslabón 3. El vector velocidad del centro de gravedad de 3

$$\mathbf{v}_{CG3} = (r_2 \cdot \omega_2) \cdot i \cdot e^{i\theta_2} + (r_3' \cdot \omega_3) \cdot i \cdot e^{i\theta_3} \quad (2.33)$$

Donde las expresiones $(r \cdot \omega)$ son los valores absolutos de la velocidad **tangencial** y las expresiones $(i \cdot e^{i\theta})$ indican que su **dirección** es perpendicular al eslabón. El vector aceleración absoluta del centro de gravedad de 3, se obtiene de igual manera derivando la expresión anterior

$$\mathbf{a}_{CG3} = (r_2 \alpha_2) i e^{i\theta_2} - (r_2 \omega_2^2) e^{i\theta_2} + (r_3' \alpha_3) i e^{i\theta_3} - (r_3' \omega_3^2) e^{i\theta_3} \quad (2.34)$$

Aceleración tangencial

Aceleración normal

Donde las expresiones $(r \omega^2)$ son las **aceleraciones normales** y las expresiones $(r \alpha)$ son las **aceleraciones tangenciales**, la expresión $i e^{i\theta}$ indica que es perpendicular al radio y la

expresión - $e^{i,2}$ indica que la aceleración normal está dirigida hacia el centro de rotación. Finalmente las componentes reales e imaginarias del vector aceleración absoluta

$$a_{CG3x} = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2) - r_{3p} \cdot \omega_3^2 \cdot \cos(\theta_3) - r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.35)$$

$$a_{CG3y} = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sin(\theta_2) - r_{3p} \cdot \omega_3^2 \cdot \sin(\theta_3) - r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.36)$$

- **PROGRAMACIÓN EN MATHEMATICA DE LA ACELERACIÓN ABSOLUTA DEL CENTRO DE GRAVEDAD**

```
ClearAll[r2,r3,x,v,α3,ap,θ]
r2=150;r3=450;
ω2=100*2*π/60;
Manipulate[x=r2*Cos[θ]+r3*sqrt[1-(r2/r3*Sin[θ])^2];
θ3=ArcSin[(-r2*Sin[θ])/r3];
ω3=-(r2/r3)*ω2*Cos[θ]/Cos[θ3];
v=r2*ω2*Sin[θ3-θ]/Cos[θ3];α3=(r2*(ω2^2)*Sin[θ]+r3*((ω3)^2)*Sin[θ3])/(r3*(Cos[θ3]));
ap=-r2*(ω2^2)*Cos[θ]-r3*α3*Sin[θ3]-r3*((ω3)^2)*Cos[θ3];
aG3x=-r2*(ω2^2)*Cos[θ]-f*r3*α3*Sin[θ3]-f*r3*((ω3)^2)*Cos[θ3];
aG3y=-r2*(ω2^2)*Sin[θ]-f*r3*α3*Cos[θ3]+f*r3*((ω3)^2)*Sin[θ3];
ParametricPlot[{aG3x,aG3y},{θ,0,6.3}],{f,0,1}]
```

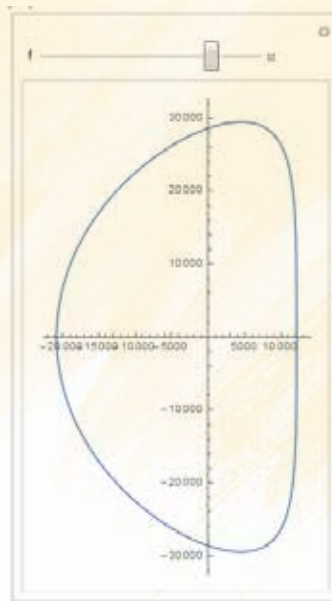


Figura 2.17. Aceleraciones en el centro de gravedad

2.2.7 ANIMACIÓN DEL MECANISMO MANIVELA CORREDERA

El software Wolfram Mathematica ofrece la posibilidad de simular el movimiento del mecanismo manivela corredera en forma bastante sencilla:

```
r2=70;
r3=140;

x[θ2_]=r2*Cos[θ2]+r3*sqrt[1-((r2/r3)*Sin[θ2])^2];

R12={0,0};
R23[θ2_]:={r2 Cos[θ2],r2 Sin[θ2]};
R14[θ2_]={x[θ2],0};

L2[θ2_]:=Graphics[{Red,Thickness[0.01],Line[{R12,R23[θ2]}]};
L3[θ2_]:=Graphics[{Blue,Thickness[0.01],Line[{R23[θ2],R14[θ2]}]};

Animate[Column[{Show[{L2[θ2],L3[θ2]},PlotRange->{{-50,150},{-50,150}},Plot[x[θ],{θ,0,2π},PlotRange->{-200,200},Epilog->{PointSize[0.05],Point[{θ2,x[θ2]}]},AxesLabel->{Subscript[θ,in],Subscript[x,out]}},{θ2,0,2 π}]
```

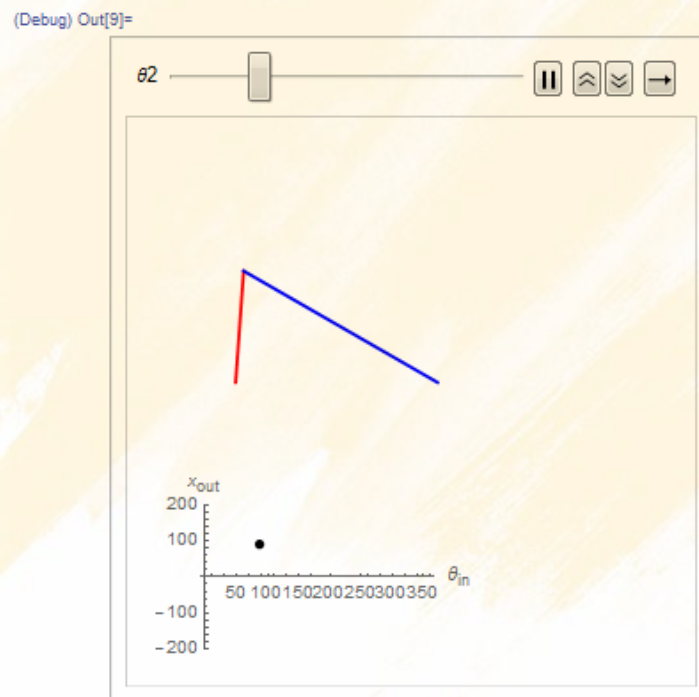


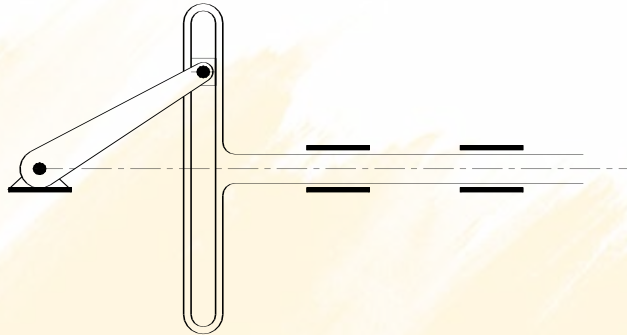
Figura 2.17. Animación resultante

2.2.8 TAREAS PARA EL ESTUDIANTE

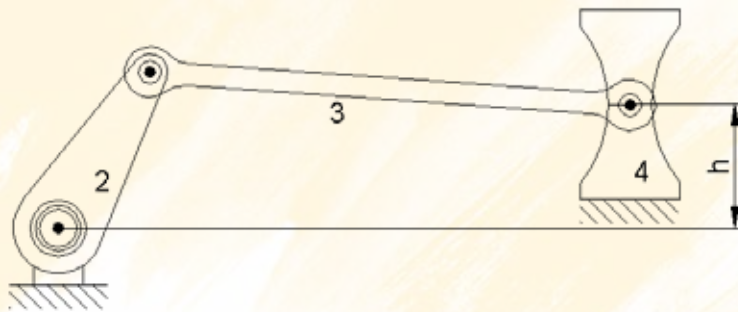
1. Usando la ecuación generada abajo, hallar una expresión que tome en cuenta el tercer término de la serie y mediante identidades trigonométricas halle sus armónicas respectivas y la fórmula completa, luego graficar en MATHEMATICA

$$\left[1 - \left(\frac{r}{l} \cdot \text{sen}(\theta_2)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[-\left(\frac{r}{l} \cdot \text{sen}(\theta_2)\right)^2\right] + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[-\left(\frac{r}{l} \cdot \text{sen}(\theta_2)\right)^2\right]^2 + \dots$$

2. Realizar el análisis del mecanismo yugo escocés o biela manivela de longitud infinita a mano.



3. Realizar el análisis del mecanismo biela manivela excéntrico y todas sus gráficas en MATHEMATICA, efectuar la animación respectiva



2.3 MECANISMO DE CUATRO BARRAS

El eslabonamiento de cuatro barras es uno de los mecanismos más utilizados y más sencillos, como el tablero de baloncesto regulable, el cual es un caso de generador de movimiento, figura 2.18.

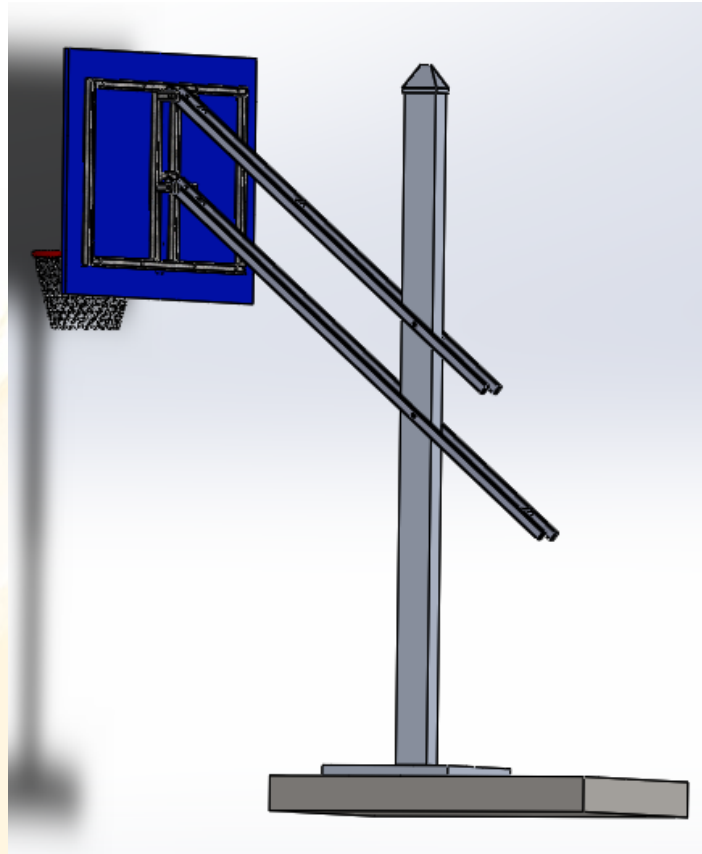


Figura 2.18. Aro de Básquet regulable

El mecanismo de Watt de cuatro barras en el guiado del eje trasero de un súper deportivo es un caso de generador de trayectoria, figura 2.19.



Figura 2.19. Mecanismo de Watt¹⁴

¹⁴ <http://www.lightningrodder.com/forum/119-flea-market-archive/162553-my-s331-sale.html>

El eslabonamiento de cuatro barras para controlar el movimiento de la pala de una cargadora frontal sería un caso de generador de función, figura 2.20.

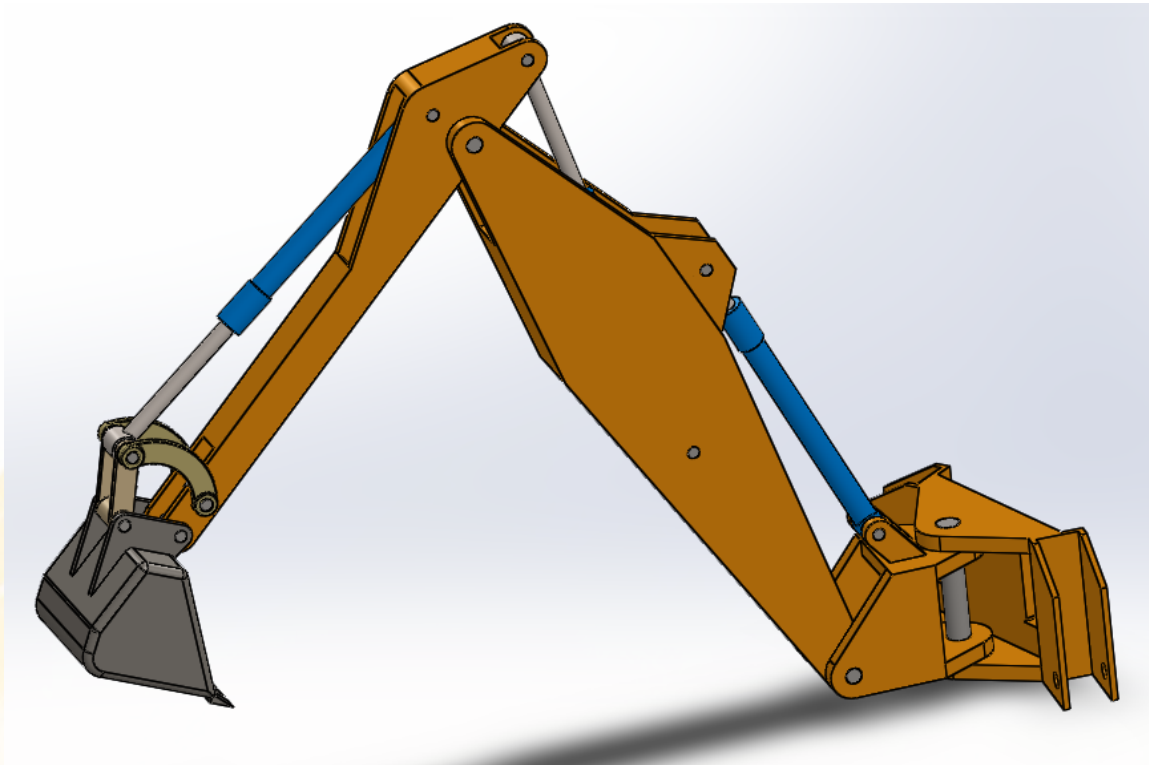


Figura 2.20. Cargadora Frontal

2.3.1 ANALISIS DE MOVIMIENTO

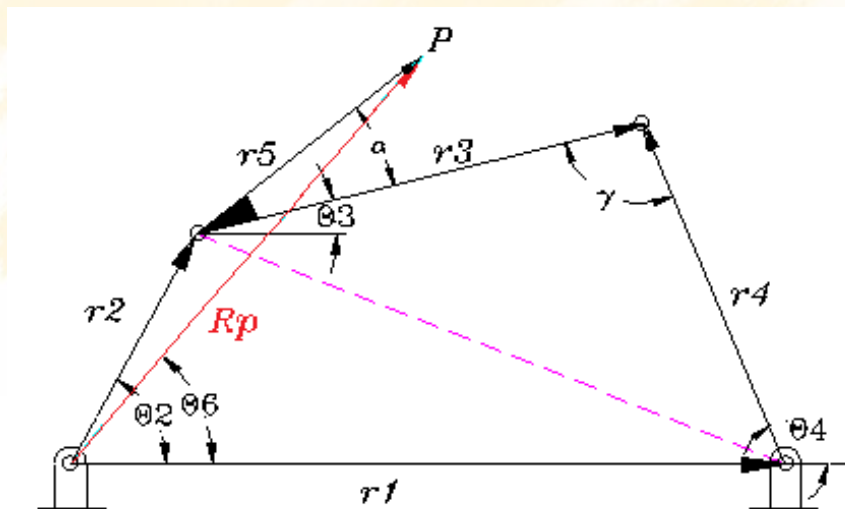


Figura 2.21. Diagrama de cuerpo libre para mecanismo de 4 barras

La ecuación del cierre del circuito de un mecanismo de cuatro barras según el esquema cinemático de la figura 2.21 es:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4 \quad (2.37)$$

Transformando a la forma compleja:

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 + r_4 e^{i\theta_4} \quad (2.38)$$

Utilizando la equivalencia de Euler se obtiene:

$$r_1 + r_4 \cos(\theta_4) = r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3) \quad (2.39)$$

$$r_4 \sin(\theta_4) = r_2 \sin(\theta_2) + r_3 \sin(\theta_3) \quad (2.40)$$

En este caso se tiene una ecuación no lineal donde las variables dependientes o incógnitas son: θ_3 y θ_4 , la variable independiente es θ_2 y las constantes son: r_1 , r_2 , r_3 , y r_4 . Se va a eliminar una incógnita en este caso θ_3

$$r_1 + r_4 \cos(\theta_4) - r_2 \cos(\theta_2) = r_3 \cos(\theta_3) \quad (2.41)$$

$$r_4 \sin(\theta_4) - r_2 \sin(\theta_2) = r_3 \sin(\theta_3) \quad (2.42)$$

Si se eleva al cuadrado y se suma:

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2) - 2 r_1 r_4 \cos(\theta_4) - 2 r_2 r_4 ((\cos(\theta_4) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_4) \sin(\theta_2))) \quad (2.43)$$

Dividiendo todo para $2 r_2 r_4$

$$\cos(\theta_4 - \theta_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_2 r_4} - \frac{r_1}{r_4} \cos(\theta_2) + \frac{r_1}{r_2} \cos(\theta_4) \quad (2.44)$$

Utilizando nuevas constantes para compactar la expresión:

$$k_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_2 r_4} \quad (2.45)$$

$$k_2 = \frac{r_1}{r_4} \quad (2.46)$$

$$k_1 = \frac{r_1}{r_2} \quad (2.47)$$

Se genera la ecuación de Freudenstein que se utiliza en síntesis de mecanismos:

$$\cos(\theta_4 - \theta_2) = k_3 - k_2 \cos(\theta_2) + k_1 \cos(\theta_4) \quad (2.48)$$

Para resolver esta ecuación se utilizan las equivalencias trigonométricas conocidas:

$$\sin(\theta_4) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)^2} = \frac{2 x}{1 + x^2} \quad (2.49)$$

$$\cos(\theta_4) = \frac{1 - \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad (2.50)$$

Reemplazando 2.50 y 2.51 en 2.49. Se obtiene una ecuación de segundo grado.

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cos(\theta_2) + \frac{2x}{1 + x^2} \sin(\theta_2) = k_3 - k_2 \cos(\theta_2) + k_1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad (2.51)$$

Del tipo:

$$A x^2 + B x + C = 0 \quad (2.52)$$

Dónde:

$$A = \cos(\theta_2) - k_1 - k_2 \cos(\theta_2) + k_3 \quad (2.53)$$

$$B = -2 \sin(\theta_2) \quad (2.54)$$

$$C = k_1 - (k_2 + 1) \cos(\theta_2) + k_3 \quad (2.55)$$

La solución para x es:

$$\theta_4 = 2 \operatorname{atan} \left[\frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right] \quad (2.56)$$

Donde el signo – del radical se utiliza para la configuración abierta y el signo + para la configuración cruzada (Norton, 2004). Procediendo de igual manera pero eliminando θ_4 se obtiene la ecuación para θ_3

$$\theta_3 = 2 \operatorname{atan} \left[\frac{-E \mp \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right] \quad (2.57)$$

Dónde:

$$D = \cos(\theta_2) - k_1 + k_4 \cos(\theta_2) + k_5 \quad (2.58)$$

$$E = -2 \sin(\theta_2) \quad (2.59)$$

$$F = k_1 + (k_4 - 1) \cos(\theta_2) + k_5 \quad (2.60)$$

Y

$$k_5 = \frac{r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}{2 r_2 r_3} \quad (2.61)$$

$$k_4 = \frac{r_1}{r_3} \quad (2.62)$$

De igual manera el signo – del radical se utiliza para la configuración abierta y el signo + para la configuración cruzada, ver figura 2.22.

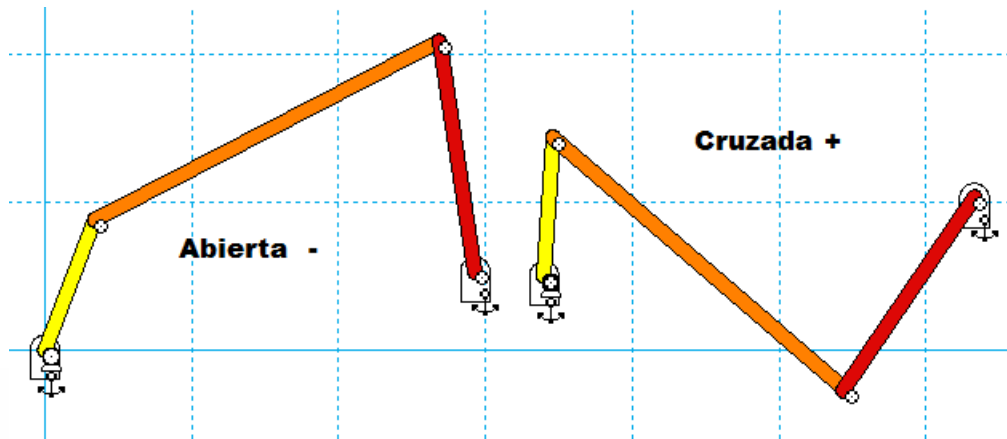


Figura 2.22. Configuración abierta y cruzada

2.3.2 ANALISIS DE LA TRAYECTORIA DE UN PUNTO DEL ACOPLADOR

La ecuación vectorial del acoplador, en base de la figura 2.21, se puede escribir como:

$$Rp = r_2 e^{i\theta_2} + r_5 e^{i(\theta_3 + \alpha)} \quad (2.63)$$

Siendo las componentes real e imaginaria:

$$Rpx = r_2 \cos(\theta_2) + r_5 \cos\left(\theta_3 + \alpha \frac{\pi}{180}\right) \quad (2.64)$$

$$Rpy = r_2 \sin(\theta_2) + r_5 \sin\left(\theta_3 + \alpha \frac{\pi}{180}\right) \quad (2.65)$$

Con dos ejercicios se explorará la importancia que tiene la curva de acoplador

1. **Ejercicio de Aplicación:** Diseñar un mecanismo transportador de viga viajera con las siguientes medidas, $r_1 = 222$; $r_2 = 100$; $r_3 = 200$; $r_4 = 233$; $r_5 = 306$; $\alpha = 31^\circ$

En primer lugar se debe verificar que el mecanismo manivela oscilador cumpla la ley de Grashof, por cuanto se espera utilizar un motor.

$$r_4 + r_2 < r_1 + r_3; 233 + 100 < 222 + 206; 333 < 408$$

El programa en **Wolfram Mathematica** para este mecanismo específico, es el siguiente:

```

r1=222; r2=100; r3=206; r4=233;
k3=(r1^2+r2^2-r3^2+r4^2)/(2 r2 r4);
k1=r1/r2; k2=r1/r4; k4=r1/r3;
k5=(r4^2-r1^2-r2^2-r3^2)/(2 r2 r3);
A=k3+(1-k2) Cos[θ]-k1;
B=-2 Sin[θ];
c=k1-(k2+1) Cos[θ]+k3;
d=k5+(k4+1) Cos[θ]-k1;
e=-2 Sin[θ];
F=k5+(k4-1) Cos[θ]+k1;
θ4=2 ArcTan[(-B-Sqrt[B^2-4 A c])/(2 A)];
θ3=2 ArcTan[(-e-Sqrt[e^2-4 d F])/(2 d)];

Plot[{θ4,θ3},{θ,0,6.3},AxesLabel->{" θ "," θ4, θ3 (θ)"}]

φ:=(θ4-θ3)*180/π

Plot[{φ},{θ,0,6.3},AxesLabel->{" θ "," Angulo de Transmisión φ (θ)"}]

α=-31 π/180;
r5=306;

Rpx=r2 Cos[θ]+r5 Cos[θ3+α];
Rpy=r2 Sin[θ]+r5 Sin[θ3+α];

ParametricPlot[{{Rpx,Rpy},{r2 Cos[θ],r2 Sin[θ]}},{θ,0,6.3}]

```

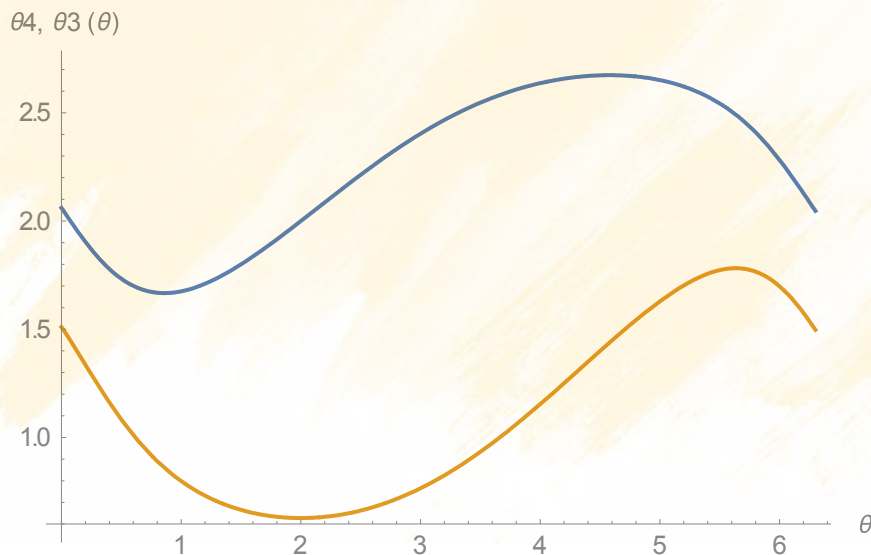


Figura 2.23. Ángulos θ_4 en azul y θ_3 en café.

Como se verá posteriormente el ángulo de transmisión se calcula mediante la fórmula, y sirve para predecir un correcto funcionamiento del mecanismo:

$$\phi = \theta_4 - \theta_3 \tag{2.66}$$

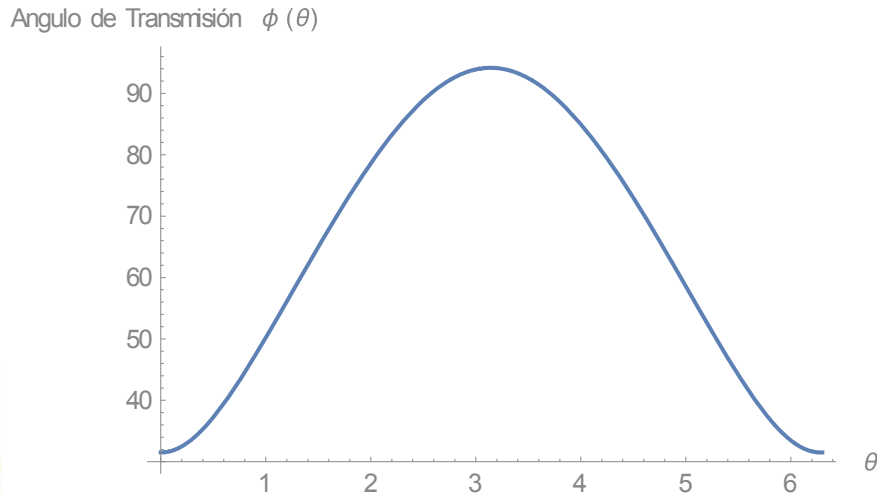


Figura 2.24. Ángulo de transmisión

Para trazar la curva de acoplador se selecciona las siguientes medidas del vector r_5 y del ángulo de diseño α ; $r_5 = 306 \text{ mm}$, $\alpha = 31^\circ$. Como se observa en la figura 2.25, la curva de acoplador se asemeja a una lágrima. Esta trayectoria como se verá más adelante cumple con la función encomendada.

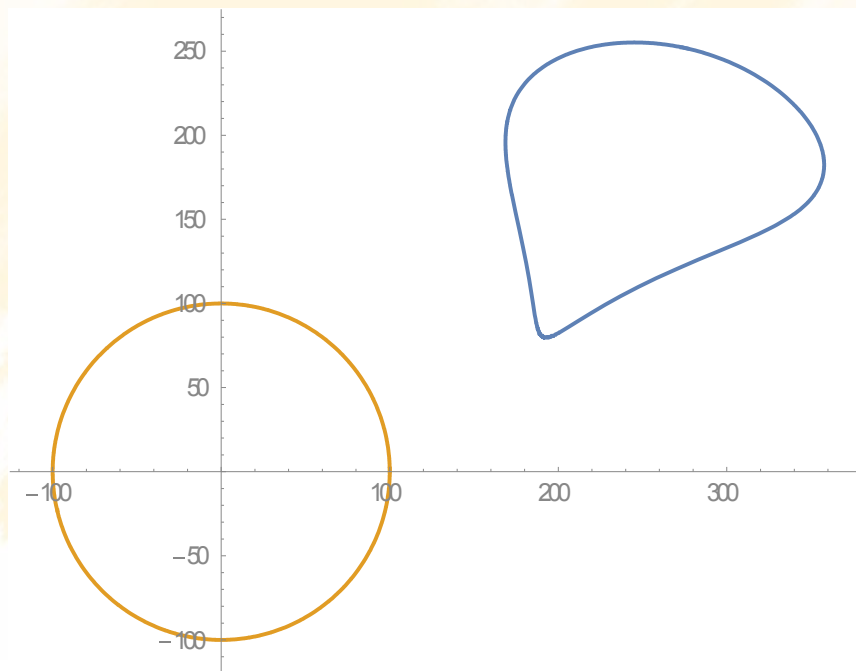


Figura 2.25. Curva de acoplador

Es importante orientar el mecanismo en la forma adecuada por lo que se debe determinar el ángulo de la porción recta del acoplador con la horizontal, esto se lo puede hacer tomando dos pares de datos del gráfico con la opción "Get Coordinates", mediante clic derecho sobre el gráfico

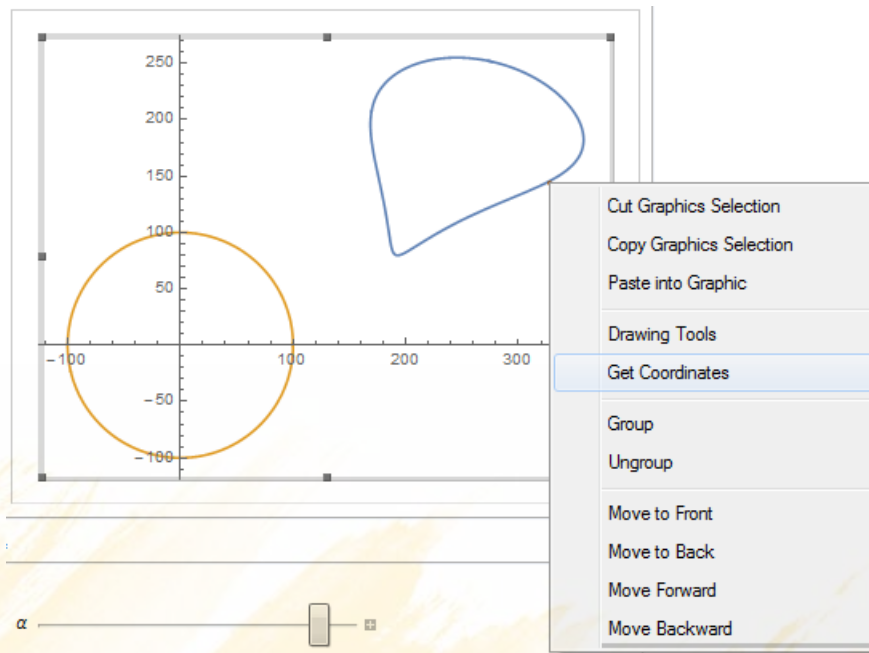


Figura 2.26. Medición del ángulo

$$\theta = \frac{180}{\pi} \text{ArcTan}\left[\frac{135.3 - 88.84}{306.5 - 217}\right]$$

$$\theta = 27.43$$

Este ángulo sirve para orientar adecuadamente el dibujo (Ver figura 2.26) que se realizará posteriormente en AutoCAD

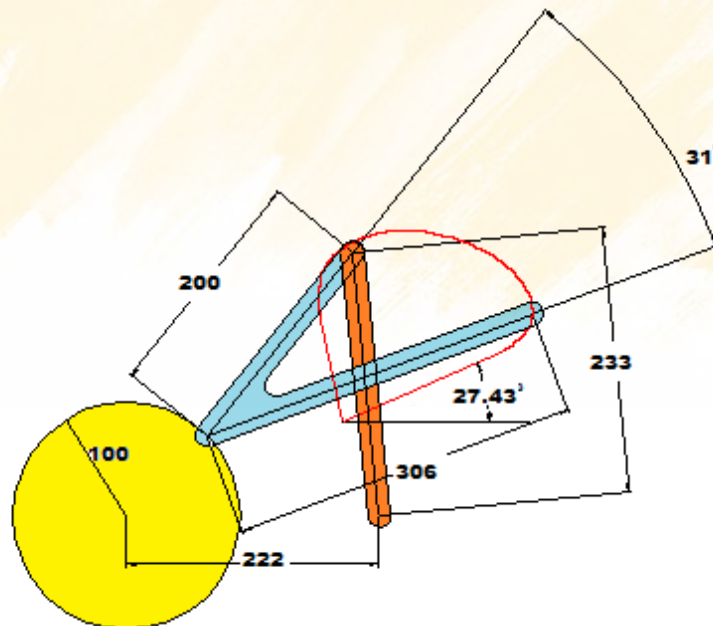


Figura 2.27. Mecanismo dibujado

En base de este diagrama se efectúa la simetría y se rota 27.43°

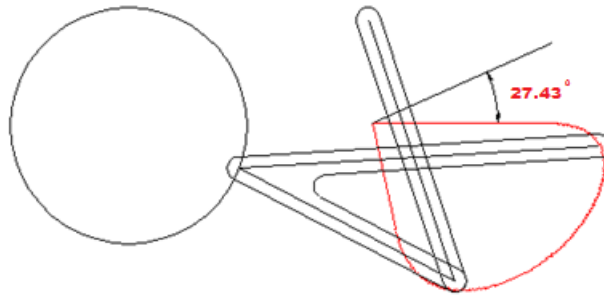


Figura 2.28. Rotación y simetría del mecanismo

Se precisa de un movimiento paralelo para mover la viga viajera, lo cual se lo puede hacer de dos formas, duplicando el mecanismo o utilizando mecanismos cognados, la forma más sencilla es duplicando el mecanismo.

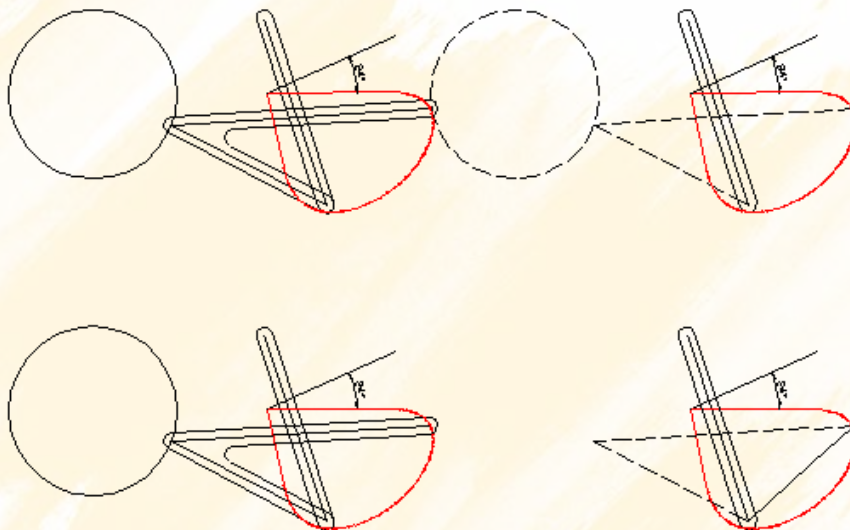


Figura 2.29. Rotación y simetría del mecanismo

Suprimiendo las barras no necesarias, añadiendo la viga viajera y un eslabón impulsor se obtiene el mecanismo resultante que puede ser simulado en Working Model 2D.

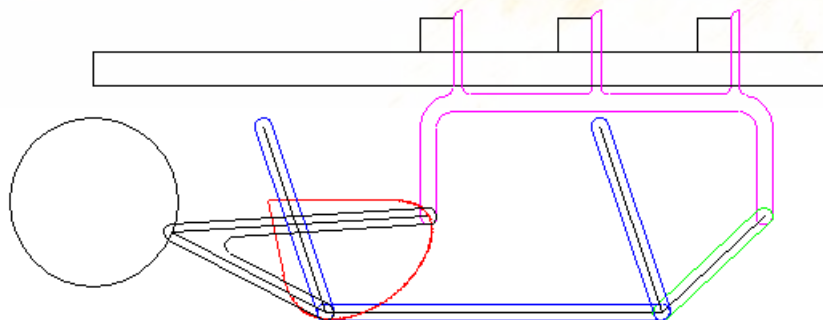


Figura 2.30. Mecanismo listo para ser exportado

Los pasos para exportar de AutoCAD a Working Model 2D son los siguientes:

- Los eslabones deben ser polilíneas cerradas
- El eslabón de entrada "Circunferencia" debe estar en el cero absoluto
- Se graba con la extensión **.dxf** de AutoCAD R12
- Se cierra el AutoCAD
- En WM2D, unidades en mm, se selecciona importar y se busca el archivo
- Colocar pares cinemáticos Working Model 2D y simular

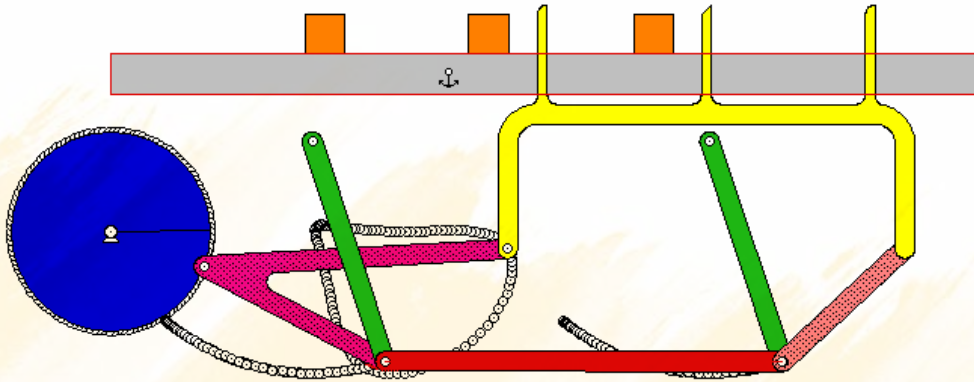


Figura 2.31. Simulación en Working Model 2D, note la curva de acoplador

2.3.3. PROGRAMACIÓN PARA OBTENER DIVERSAS CURVAS DE ACOPLADOR

El siguiente es el programa que sirve para obtener curvas de acoplador con Mathematica en forma automática:

```
Manipulate[
k3=(r1^2+r2^2-r3^2+r4^2)/(2 r2 r4);
k1=r1/r2; k2=r1/r4; k4=r1/r3;
k5=(r4^2-r1^2-r2^2-r3^2)/(2 r2 r3);
A=k3+(1-k2) Cos[θ]-k1;
B=-2 Sin[θ];
c=k1-(k2+1) Cos[θ]+k3;
d=k5+(k4+1) Cos[θ]-k1;
e=-2 Sin[θ];
F=k5+(k4-1) Cos[θ]+k1;
θ4=2 ArcTan[(-B-Sqrt[B^2-4 A c])/(2 A)];
θ3=2 ArcTan[(-e-Sqrt[e^2-4 d F])/(2 d)];
Rpy=r2 Sin[θ]+r5 Sin[θ3+α];
Rpx=r2 Cos[θ]+r5 Cos[θ3+α];
ParametricPlot[{{Rpx,Rpy},{r2
Cos[θ],r2Sin[θ]}},{θ,0,6.3}],{α,0,6.3},{r5,0,500},{r2,10,400},{r3,50,400},{r4,50
,400},{r1,50,400}]
```

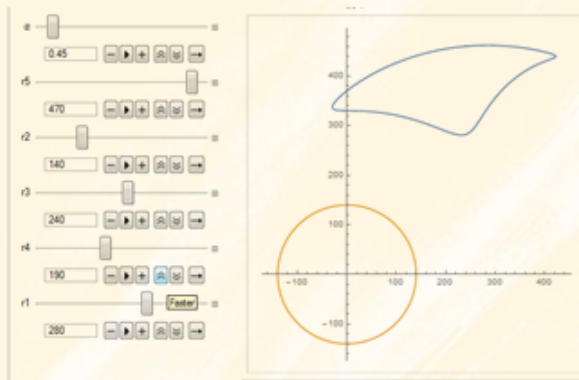


Figura 2.32. Ejemplo de curva de acoplador

EJERCICIO DE APLICACIÓN:

- DISEÑAR UN MECANISMO INDEXADOR

Explorando con las correderas interactivas se puede obtener la curva indicada, El punto trazador de la curva de acoplador, circulara en las guías ortogonales del círculo rojo en el mecanismo de la figura 2.23.

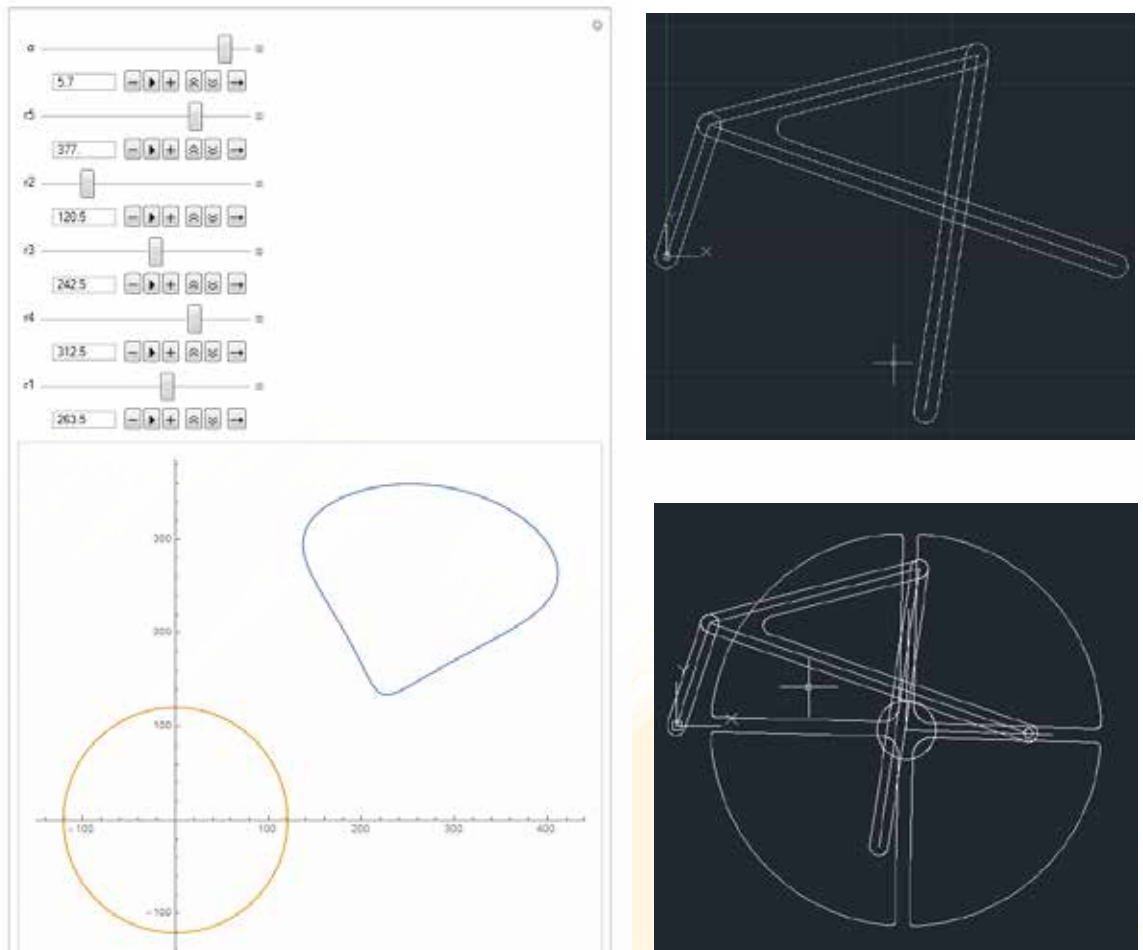
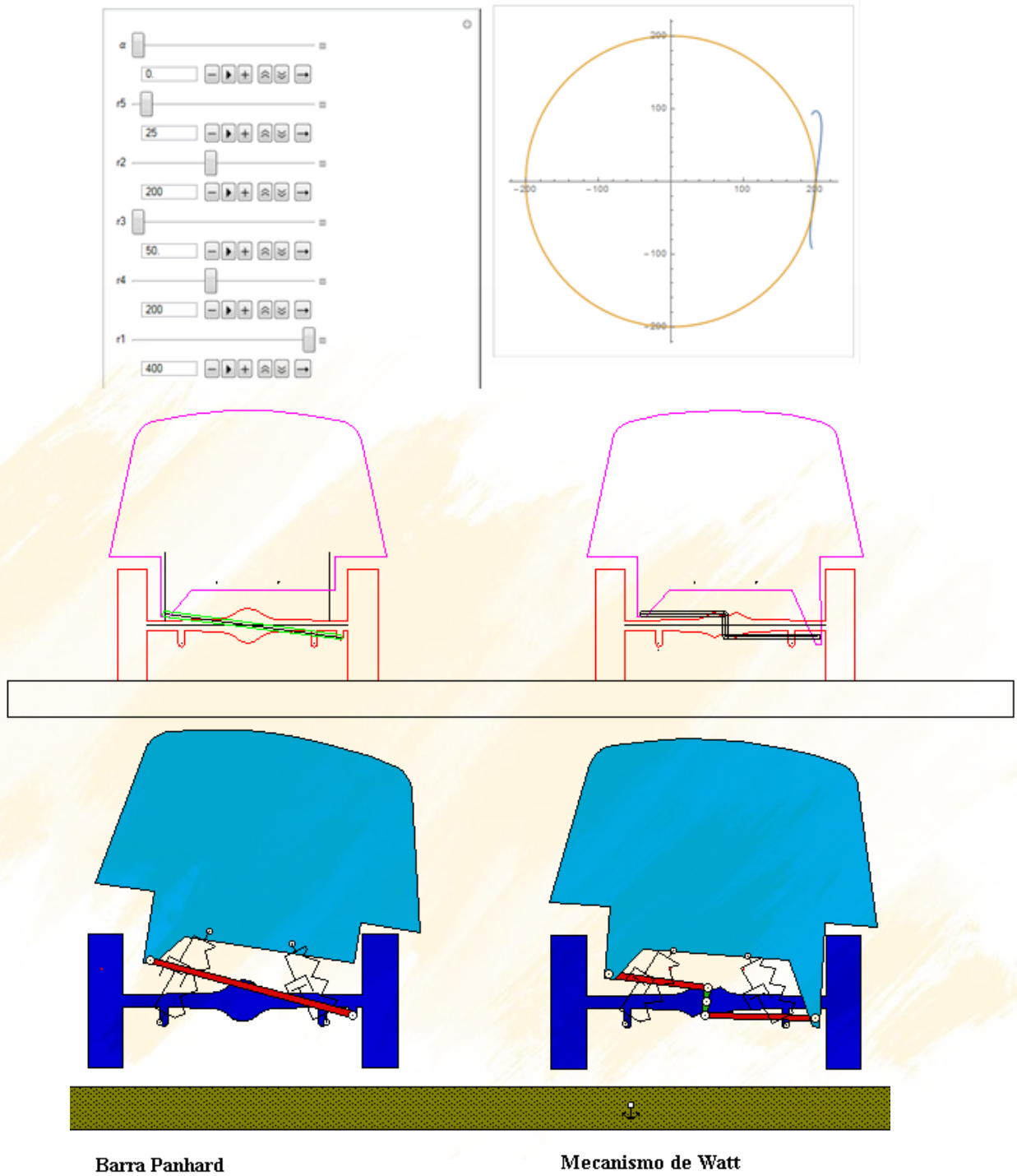


Figura 2.33. Procedimiento para obtener un mecanismo indexador

- **ANALIZAR UN MECANISMO DE SUSPENSIÓN DE WATT**

La obtención de la curva de acoplador, dibujo en AutoCAD y simulación en Working Model 2D del mecanismo, con los datos siguientes, $r_1 = 400$; $r_2 = 200$; $r_3 = 50$; $r_4 = 200$; $\alpha_3 = 0$; $r_5 = 25$, es:



Barra Panhard

Mecanismo de Watt

Figura 2.34. Simulación en Working Model

Claramente se observa que el Mecanismo de Watt impedirá oscilaciones de la carrocería, por lo que es muy utilizado en competencias.

2.3.4. ANIMACIÓN DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS

```

r1=222; r2=100; r3=206; r4=233;

k3=(r1^2+r2^2-r3^2+r4^2)/(2 r2 r4); k1=r1/r2; k2=r1/r4;

A[θ_]:=k3+(1-k2) Cos[θ]-k1;
B[θ_]:= -2 Sin[θ];
c[θ_]:=k1-(k2+1) Cos[θ]+k3;

θ4[θ2_]:=2 ArcTan[(-B[θ2]-Sqrt[B[θ2]^2-4 A[θ2] c[θ2]])/(2 A[θ2])]

R12={0,0};
R23[θ2_]:= {r2 Cos[θ2],r2 Sin[θ2]};
R14={r1,0};
R34[θ2_]:= {r1+r4 Cos[θ4[θ2]],r4 Sin[θ4[θ2]]};

L2[θ2_]:=Graphics[{Red,Thickness[0.01],Line[{R12,R23[θ2]}]}];
L3[θ2_]:=Graphics[{Black,Thickness[0.01],Line[{R23[θ2],R34[θ2]}]}];
L4[θ2_]:=Graphics[{Blue,Thickness[0.01],Line[{R14,R34[θ2]}]}];

Animate[Column[{Show[{L2[θ2],L3[θ2],L4[θ2]},PlotRange->{{-100,250},{-1000,250}}],Plot[θ4[θ*π/180]*180/π,{θ,0,360},PlotRange->{-180,180},Epilog->{PointSize[0.04],Point[{θ2*180/π,θ4[θ2]*180/π}],AxesLabel->{Subscript[θ,in],Subscript[θ,out]}},{θ2,0,2π}]]

```



Figura 2.35. Simulación con Wolfram Mathematica

2.3.5. ANALISIS DE VELOCIDAD

Se efectúa la derivación de la ecuación de cierre del circuito:

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 + r_4 e^{i\theta_4} \quad (2.67)$$

$$i \omega_2 r_2 e^{i\theta_2} + i \omega_3 r_3 e^{i\theta_3} = 0 + i \omega_4 r_4 e^{i\theta_4} \quad (2.68)$$

Igualando la parte real e imaginaria se obtiene:

$$r_2 \omega_2 \cos \theta_2 + r_3 \omega_3 \cos \theta_3 = r_4 \omega_4 \cos \theta_4 \quad (2.69)$$

$$r_2 \omega_2 \sin \theta_2 + r_3 \omega_3 \sin \theta_3 = r_4 \omega_4 \sin \theta_4 \quad (2.70)$$

Resolviendo las ecuaciones lineales:

$$\omega_3 = \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)} \omega_2 \quad (2.71)$$

$$\omega_4 = \frac{r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \omega_2 \quad (2.72)$$

Gráfica de las velocidades angulares del mecanismo propuesto para una velocidad del impulsor de 200 RPM. El programa siguiente permite graficar las velocidades angulares, variando la longitud de los eslabones

```
Manipulate [ω2=100;
r1=200;
k3=(r1^2+r2^2-r3^2+r4^2)/(2 r2 r4);
k1=r1/r2;
k2=r1/r4;
k4=r1/r3;
k5=(r4^2-r1^2-r2^2-r3^2)/(2 r2 r3);
A=k3+(1-k2) Cos[θ]-k1;
B=-2 Sin[θ];
c=k1-(k2+1) Cos[θ]+k3;
d=k5+(k4+1) Cos[θ]-k1;
e=-2 Sin[θ];
F=k5+(k4-1) Cos[θ]+k1;
θ4=2 ArcTan[(-B-Sqrt[B^2-4 A c])/(2 A)];
θ3=2 ArcTan[(-e-Sqrt[e^2-4 d F])/(2 d)];
ω3=ω2 (r2 Sin[θ-θ4])/(r3 Sin[θ4-θ3]);
ω4=ω2 (r2 Sin[θ-θ3])/(r3 Sin[θ4-θ3]);
Plot[{{(ω3,ω4)},{θ,0,6.3}},{r2,1,400},{r3,150,280},{r4,200,400}]
```

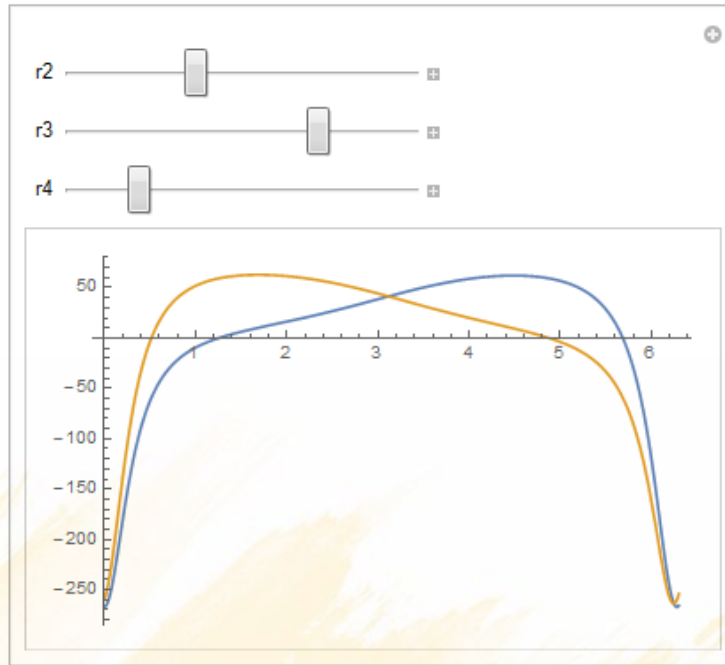


Figura 2.36. Velocidades angulares de la barra 3 y 4

2.3.6 VENTAJA MECANICA

La ventaja mecánica es la relación que existe entre la Fuerza de salida y la Fuerza de entrada en un mecanismo y es un índice de mérito del mismo. Para obtener la ventaja mecánica se igualan las potencias de entrada y salida, puesto que se puede considerar que la fricción debido al uso de rodamientos en los sistemas de eslabonamientos es nula, se puede considerar que no existen pérdidas, por lo tanto:

POTENCIA DE ENTRADA \approx POTENCIA DE SALIDA

Potencia es igual a Torque por velocidad angular o Fuerza por velocidad lineal.

$$T_2 \omega_2 = T_4 \omega_4 \quad (2.73)$$

La ventaja mecánica se define como:

$$\text{Ventaja Mecánica (VM)} = \frac{\text{Fuerza de salida}}{\text{Fuerza de entrada}} = \frac{T_{\text{salida}}/r_{\text{salida}}}{T_{\text{entrada}}/r_{\text{entrada}}} = \frac{T_{\text{salida}} r_{\text{entrada}}}{T_{\text{entrada}} r_{\text{salida}}} \quad (2.74)$$

$$VM = \frac{T_{\text{salida}} r_{\text{entrada}}}{T_{\text{entrada}} r_{\text{salida}}} = \frac{\omega_{\text{entrada}} r_{\text{entrada}}}{\omega_{\text{salida}} r_{\text{salida}}} = \frac{\omega_2 r_{\text{entrada}}}{\omega_4 r_{\text{salida}}} \quad (2.75)$$

Reemplazando 2.74 en 2.76 se obtiene:

$$VM = \frac{\omega_2 r_{entrada}}{\omega_4 r_{salida}} = \frac{r_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) r_{entrada}}{r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) r_{salida}} \quad (2.76)$$

Determinada la VM se puede hallar la Fuerza de entrada necesaria si se conoce la Fuerza de salida. Como se desprende de la ecuación 2.76, la VM máxima se obtiene cuando $\theta_2 = \theta_3$ siendo en este caso igual a ∞ , o lo que es lo mismo cuando el impulsor se alinea con el acoplador, esta posición se denomina volquete, sin embargo en esta posición no se puede realizar trabajo porque es una posición de punto muerto, (Ver Figura 2.36).

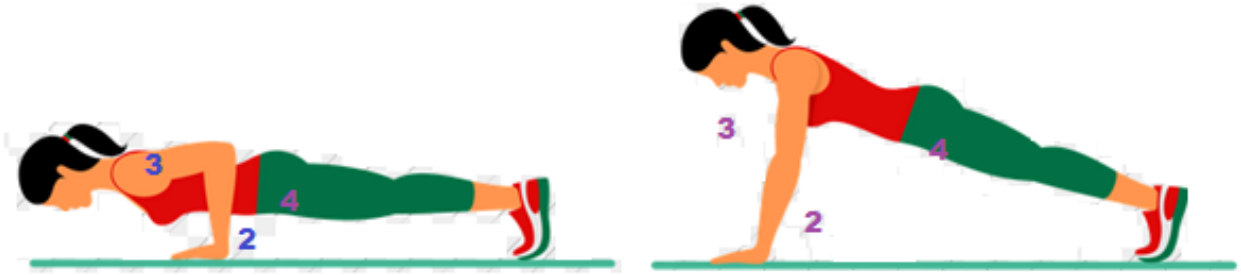


Figura 2.37. Más allá del punto muerto no se puede realizar trabajo¹⁵

Este principio lo aplican todos los mecanismos que multiplican las fuerzas como:

- Playos de presión (figura 2.37)
- Prensas
- Trituradoras de piedras (figura 2.38)
- Mecanismos de cierre de moldes en inyectoras



Figura 2.38. Alicata de presión

¹⁵ <http://rosannaqueirolo.com/claves-ejecutar-bien-los-ejercicios/>

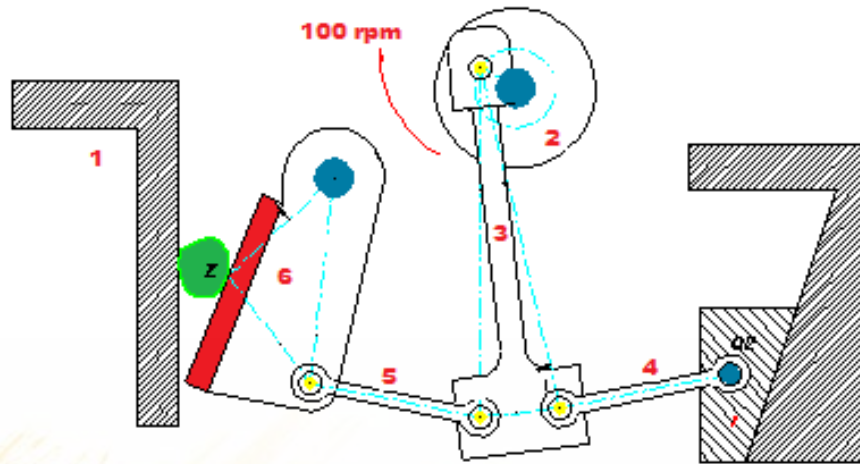


Figura 2.39. Trituradora de piedra

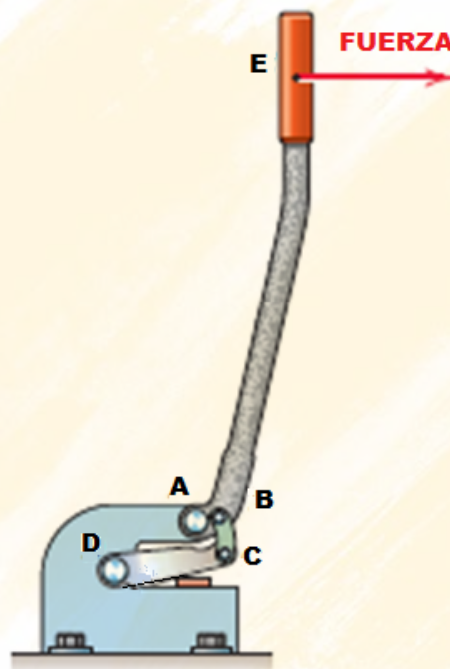


Figura 2.40. Cortador de varilla

Por otro lado la ventaja mecánica se reduce a cero cuando $\theta_4 = \theta_3$ o cuando el acoplador y el seguidor están alineados. En este punto el mecanismo simplemente no funciona. El ángulo entre el acoplador y el seguidor se llama **ángulo de transmisión** γ y para que un mecanismo tenga buenas características de funcionamiento este ángulo no debe ser menor a 30° , ni mayor a 150° . Esto significa que el ángulo máximo de oscilación del seguidor es de 120° . La ventaja mecánica puede ser obtenida en forma gráfica o analítica. A partir de las expresiones analíticas analizadas anteriormente se puede buscar relaciones geométricas para determinar gráficamente la ventaja mecánica

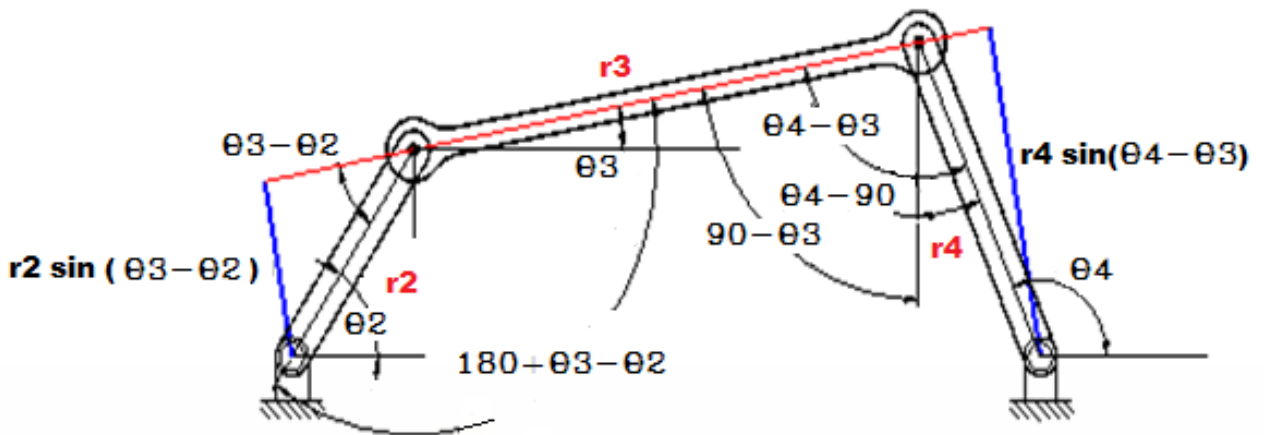


Figura 2.41. Determinación gráfica de la ventaja mecánica

Entonces la relación de transmisión ω_2 / ω_4 estaría dada por la relación entre los segmentos perpendiculares, trazados desde los polos fijos hasta la barra 3 y luego estableciendo triángulos semejantes

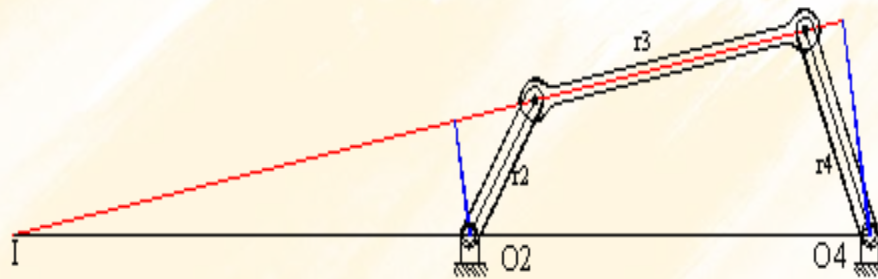


Figura 2.42. Relación de triángulos semejantes

La ventaja mecánica en un eslabonamiento de cuatro barras puede hallarse entonces a partir de la siguiente expresión:

$$VM = \frac{\overline{O_4 I} r_{entrada}}{\overline{O_2 I} r_{salida}} \quad (2.77)$$

Ejercicio de Aplicación: La figura 2.42 muestra una mordaza de cuatro barras utilizada para sostener una pieza de trabajo en su lugar, sujetándola en D. $O_2A = 70$, $O_2C = 138$, $AB = 35$, $O_4B = 34$, $O_4D = 82$, $O_2O_4 = 48$ mm. El eslabón 2 se encuentra a 104° en la posición indicada. El eslabonamiento se agarrotara cuando el eslabón 2 alcance 90° .

Calcule su ventaja mecánica en la posición mostrada

Calcule y grafique su ventaja mecánica como una función del ángulo del eslabón AB a medida que el eslabón 2 gira de 120 a 90°

Se dibuja el mecanismo en AutoCAD para tomar las medidas correspondientes:

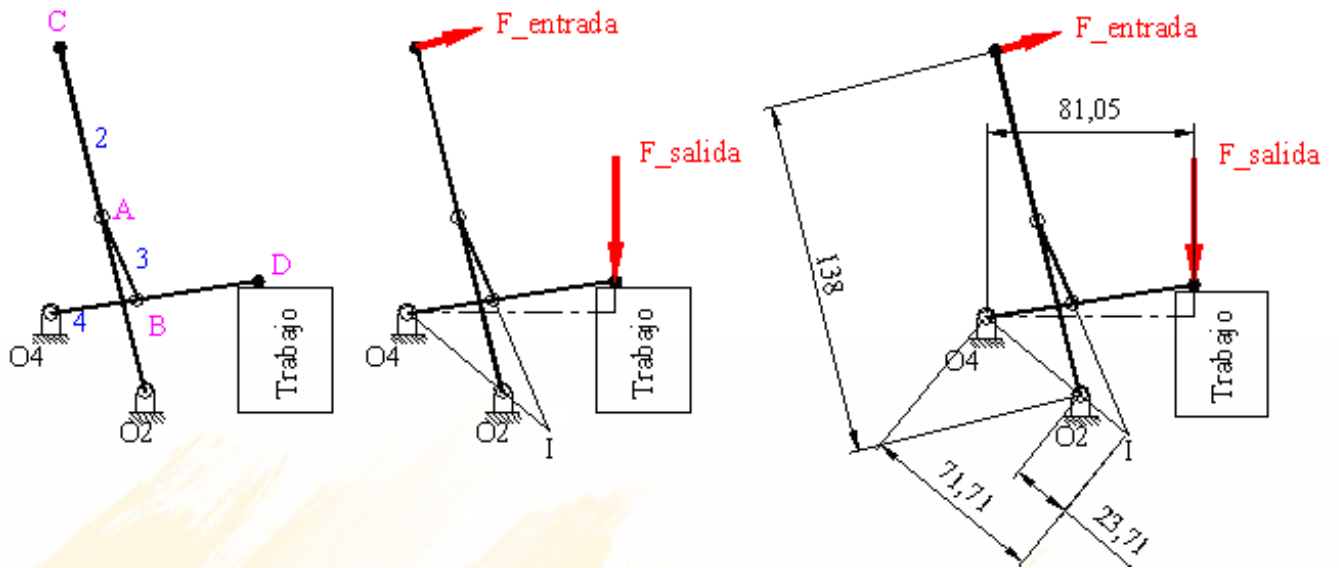


Figura 2.43. Mordaza de cuatro barras

Aplicando la ecuación 2.77 se obtiene:

$$VM = \frac{\overline{O_4I}}{\overline{O_2I}} \frac{r_{entrada}}{r_{salida}} = \frac{71,71}{23,71} \frac{138}{81,05} = 5,15$$

Se puede posteriormente variar las medidas para tener una mejor VM. Para determinar la VM por el método analítico se orienta el mecanismo en la forma convencional que corresponde a la configuración cruzada.

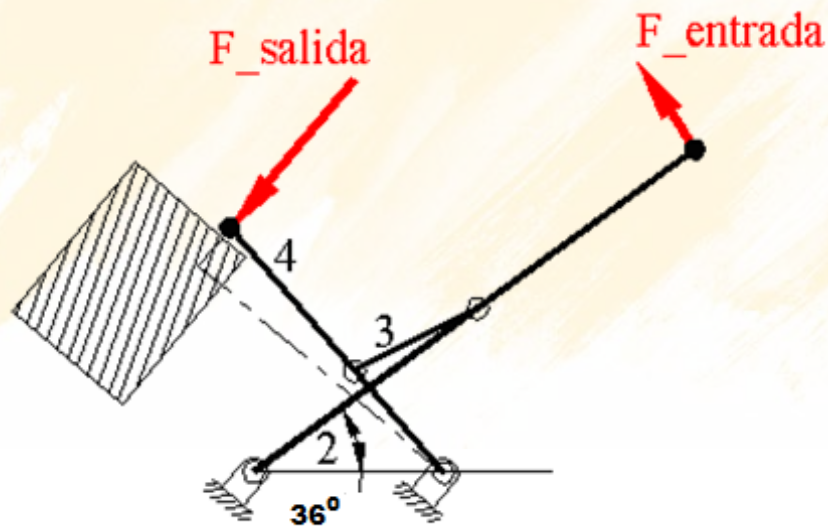


Figura 2.44. Orientación del mecanismo para obtener la VM analíticamente

Manipulate[

```
r1 = 48; rentrada = 138; rsalida = 81.05;  
k3 = ((r1^2 + r2^2 - r3^2 + r4^2))/((2 r2 r4));  
k1 = r1/r2; k2 = r1/r4; k4 = r1/r3;  
k5 = ((r4^2 - r1^2 - r2^2 - r3^2))/((2 r2 r3));  
A = k3 + (1 - k2) Cos[θ] - k1;  
B = -2 Sin[θ];  
c = k1 - (k2 + 1) Cos[θ] + k3;  
d = k5 + (k4 + 1) Cos[θ] - k1;  
e = -2 Sin[θ];  
F = k5 + (k4 - 1) Cos[θ] + k1;  
θ4 = 2 ArcTan[(-B + Sqrt[B^2 - 4 A c])]/((2 A));  
θ3 = 2 ArcTan[(-e + Sqrt[e^2 - 4 d F])]/((2 d));  
VM = (r4/r2) (rentrada/rsalida) ((Sin[θ4 - θ3])/((Sin[θ - θ3]));  
Plot[VM, {θ, 0.62, \[Pi]/4}, {r2, 60, 80}, {r3, 30, 40}, {r4, 20, 40}]
```

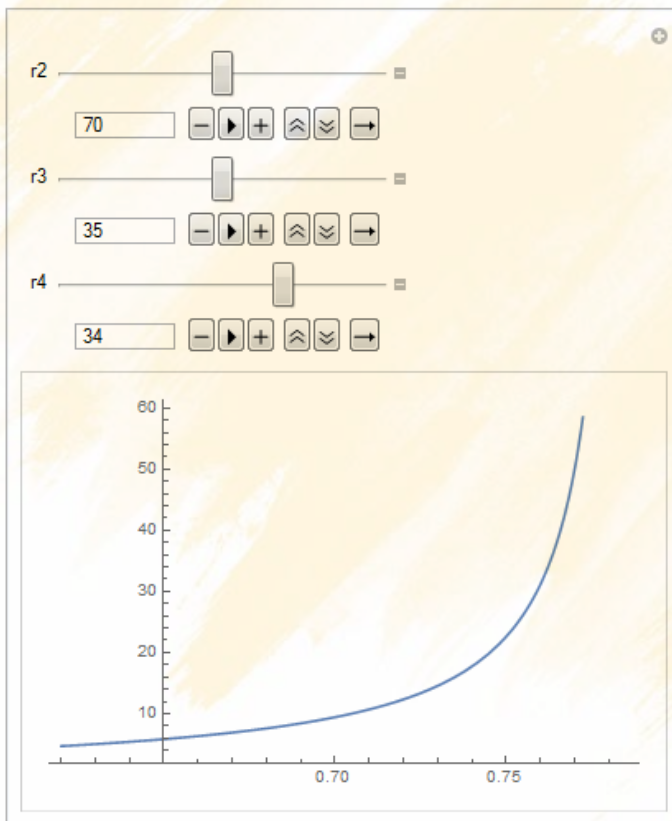


Figura 2.45. VM calculada analíticamente

Como se observa la ventaja tenderá al infinito aproximadamente a unos 44.4° y coincide también el valor que se obtuvo gráficamente de 5.15 en el origen.

2.3.7. ANALISIS DE ACELERACION

Derivando la expresión de la velocidad se obtiene:

$$i \omega_2 r_2 e^{i\theta_2} + i \omega_3 r_3 e^{i\theta_3} = 0 + i \omega_4 r_4 e^{i\theta_4} \quad (2.78)$$

$$(-\omega_2^2 r_2 + i \alpha_2 r_2) e^{i\theta_2} + (-\omega_3^2 r_3 + i \alpha_3 r_3) e^{i\theta_3} = (-\omega_4^2 r_4 + i \alpha_4 r_4) e^{i\theta_4} \quad (2.79)$$

Igualando las partes reales e imaginarias:

Parte real:

$$\begin{aligned} &(-\omega_2^2 r_2 \cos \theta_2 - \alpha_2 r_2 \sin \theta_2) + (-\omega_3^2 r_3 \cos \theta_3 - \alpha_3 r_3 \sin \theta_3) \\ &= (-\omega_4^2 r_4 \cos \theta_4 - \alpha_4 r_4 \sin \theta_4) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Parte imaginaria:

$$\begin{aligned} &(-\omega_2^2 r_2 \sin \theta_2 + \alpha_2 r_2 \cos \theta_2) + (-\omega_3^2 r_3 \sin \theta_3 + \alpha_3 r_3 \cos \theta_3) \\ &= (-\omega_4^2 r_4 \sin \theta_4 + \alpha_4 r_4 \cos \theta_4) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para α_3 y α_4 :

$$\alpha_3 = \frac{I J - G M}{G K - H J} \quad (2.82)$$

$$\alpha_4 = \frac{I K - H M}{G K - H J} \quad (2.83)$$

Donde:

$$G = r_4 \sin \theta_4$$

$$H = r_3 \sin \theta_3$$

$$I = \omega_2^2 r_2 \cos \theta_2 + \alpha_2 r_2 \sin \theta_2 + \omega_3^2 r_3 \cos \theta_3 - \omega_4^2 r_4 \cos \theta_4$$

$$J = r_4 \cos \theta_4$$

$$K = r_3 \cos \theta_3$$

$$M = -\omega_2^2 r_2 \sin \theta_2 + \alpha_2 r_2 \cos \theta_2 - \omega_3^2 r_3 \sin \theta_3 + \omega_4^2 r_4 \sin \theta_4$$

El siguiente es el gráfico de la aceleración para un mecanismo de cuatro barras:

```

ω2 = 100; α2 = 0; r1 = 200; r2 = 30; r3 = 150; r4 = 160;
k3 = (r1^2 + r2^2 - r3^2 + r4^2)/(2 r2 r4); k1 = r1/r2; k2 = r1/r4; k4 = r1/r3;
k5 = (r4^2 - r1^2 - r2^2 - r3^2)/(2 r2 r3);
A = k3 + (1 - k2) Cos[θ] - k1; B = -2 Sin[θ];
c = k1 - (k2 + 1) Cos[θ] + k3; d = k5 + (k4 + 1) Cos[θ] - k1; e = -2 Sin[θ];
F = k5 + (k4 - 1) Cos[θ] + k1;
θ4 = 2 ArcTan[(-B - Sqrt[B^2 - 4 A c])/(2 A)]; θ3 = 2 ArcTan[(-e - Sqrt[e^2 - 4 d F])/(2 d)];
ω3 = ω2 (r2 Sin[θ - θ4])/(r3 Sin[θ4 - θ3]); ω4 = ω2 (r2 Sin[θ - θ3])/(r3 Sin[θ4 - θ3]);
G = r4 Sin[θ4]; H = r3 Sin[θ3];
i = ω2^2 r2 Cos[θ] + α2 r2 Sin[θ] + ω3^2 r3 Cos[θ3] - ω4^2 r4 Cos[θ4];
J = r4 Cos[θ4]; n = r3 Cos[θ3];
M = -ω2^2 r2 Sin[θ] + α2 r2 Cos[θ] - ω3^2 r3 Sin[θ3] + ω4^2 r4 Sin[θ4];
α3 = (i J - G M)/(G n - H J); α4 = (i n - H M)/(G n - H J);
Plot[{α4, α3}, {θ, 0, 6.3},
AxesLabel -> {"θ", "Aceleraciones barra 3 y 4 (θ)"}]

```

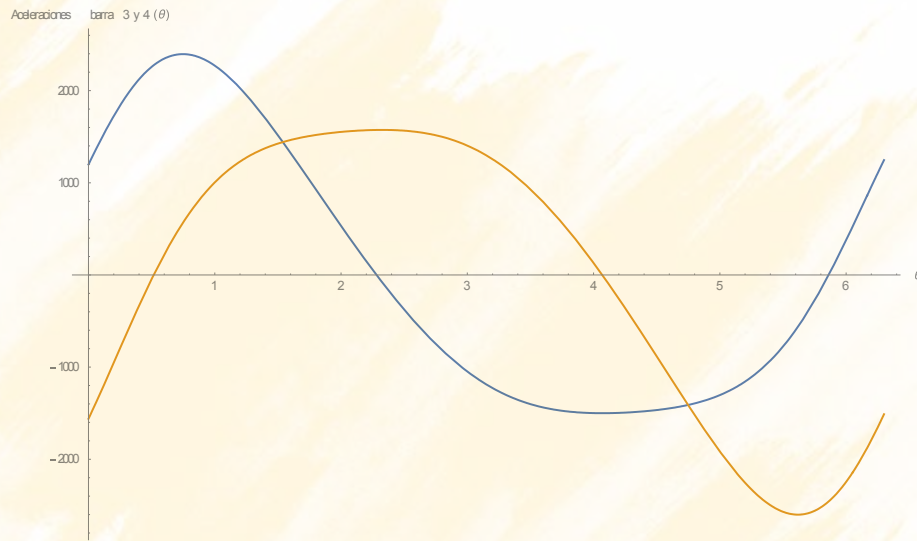


Figura 2.46. Aceleraciones angulares α_3 y α_4

2.3.8. ANALISIS DE ACELERACIONES ABSOLUTAS DE CENTROS DE GRAVEDAD

Como un ejemplo se calcula la aceleración del centro de masas del acoplador (eslabón 3) suponiendo que se halle en el centro de la barra. El vector de posición al centro de masas es:

$$\mathbf{r}_{CG3} = r_2 \cdot e^{i\theta_2} + 0.5 r_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (2.84)$$

La velocidad lineal del centro de masas es:

$$\mathbf{v}_{CG3} = r_2 \omega_2 i e^{i\theta_2} + 0.5 r_3 \omega_3 \cdot i e^{i\theta_3} \quad (2.85)$$

La aceleración del centro de masas es:

$$\mathbf{a}_{CG3} = (-\omega_2^2 r_2 + i \alpha_2 r_2) e^{i\theta_2} + 0.5 (-\omega_3^2 r_3 + i \alpha_3 r_3) e^{i\theta_3} \quad (2.86)$$

Suponiendo velocidad angular constante en el impulsor $\alpha_2 = 0$

$$\mathbf{a}_{CG3} = (-\omega_2^2 r_2) e^{i\theta_2} + 0.5 (-\omega_3^2 r_3 + i \alpha_3 r_3) e^{i\theta_3} \quad (2.87)$$

Determinando los componentes reales e imaginarios

$$a_{CG3x} = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2) - 0.5 r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \cos(\theta_3) - 0.5 r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.88)$$

$$a_{CG3y} = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sin(\theta_2) - 0.5 r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \sin(\theta_3) + 0.5 r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.89)$$

Con estas ecuaciones se puede graficar el vector aceleración absoluta del centro de gravedad del acoplador y las líneas que se deben añadir al programa de la Figura 2.44 son:

```
aCG3x = -r2 ω2^2 Cos[θ]-0.5 r3 ω3^2 Cos [θ3]-0.5 r3 α3 Sin[θ3];
aCG3y = -r2 ω2^2 Sin[θ]-0.5 r3 ω3^2 Sin [θ3]+0.5 r3 α3 Cos[θ3];
ParametricPlot[{aCG3y,aCG3x},{θ,0,6.3}]
```

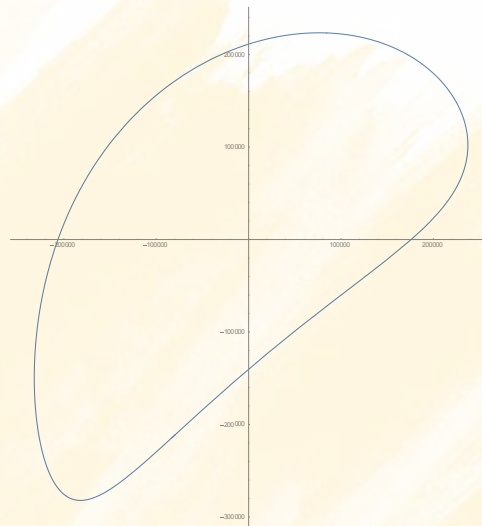


Figura 2.47. Aceleraciones angulares a_{cg3y} vs a_{cg3x}

Para la barra 4 la aceleración es:

$$a_{CG4x} = -0.5 r_4 \cdot \omega_4^2 \cdot \cos(\theta_4) - 0.5 r_4 \cdot \alpha_4 \cdot \sin(\theta_4) \quad (2.90)$$

$$a_{CG4y} = -0.5 r_4 \cdot \omega_4^2 \cdot \sin(\theta_4) + 0.5 r_4 \cdot \alpha_4 \cdot \cos(\theta_4) \quad (2.91)$$

```
aCG4x = -0.5 r4 ω4^2 Cos [θ4]-0.5 r4 α4 Sin[θ4];
aCG4y = -0.5 r4 ω4^2 Sin [θ4]+0.5 r4 α4 Cos[θ4];
ParametricPlot[{aCG4y, aCG4x}, θ 0, 6.3]
```

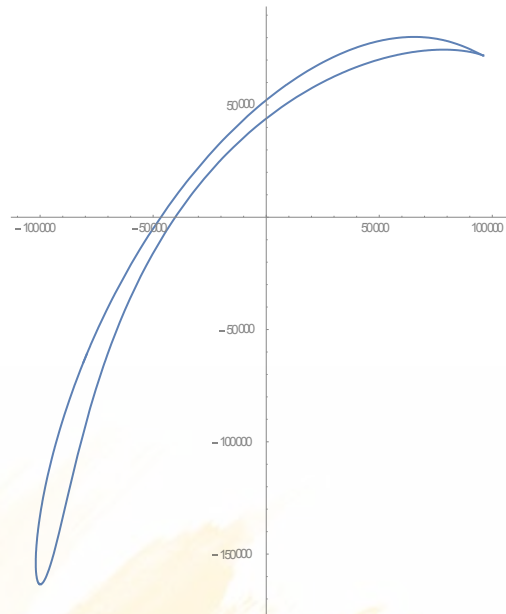
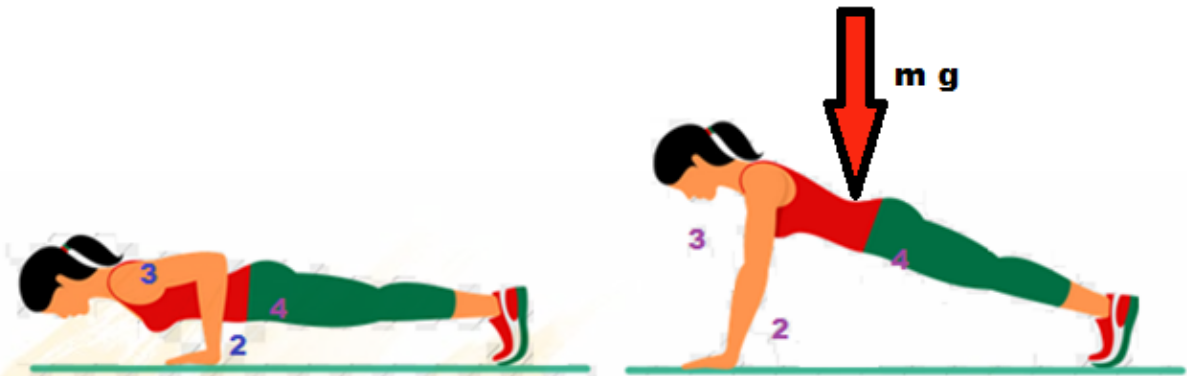



Figura 2.48. Aceleraciones angulares a_{cg4y} vs a_{cg4x}

2.3.9 TAREAS PARA EL ESTUDIANTE

4. Grafique la Ventaja Mecánica del mecanismo biomecánico siguiente, según sus propias medidas, tome en cuenta que el motor está en el par cinemático 3,4.



5. Realizar el análisis del mecanismo de 4 barras generalizado con desnivel en el suelo, efectuar un programa en Mathematica para visualizar la variación de la un punto de acoplador en base del desnivel entre los pivotes a tierra para r2, r3 y r4 fijos.



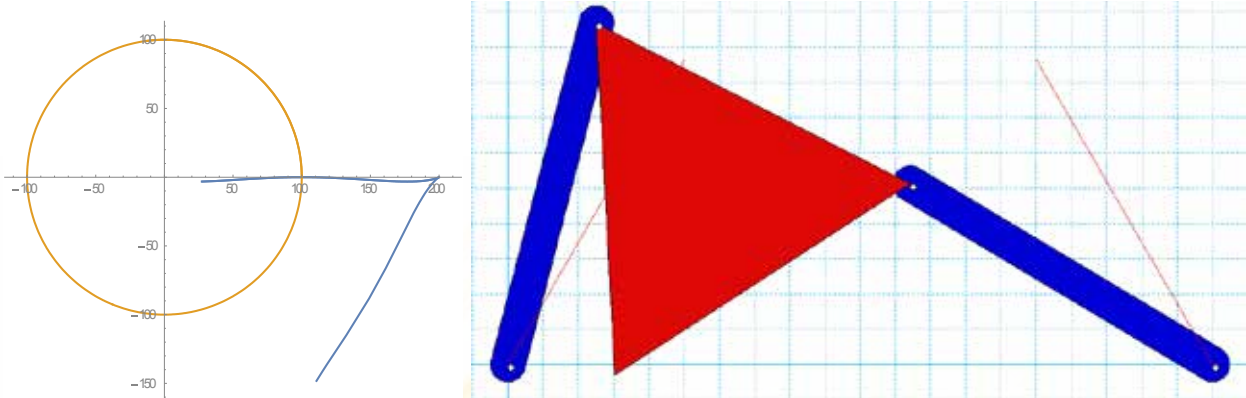
6. Diseñar usando los conceptos de ventaja mecánica un mecanismo compactador de latas de refresco, utilizando la configuración del mecanismo manivela corredera, encuentre la expresión para calcular gráficamente la VM.



7. Simular los mecanismos siguientes:

Mecanismo de Roberts:

$$r_1 = 200; r_2 = 100; r_3 = 100; r_4 = 100; r_5 = 100; \alpha = 300^\circ = 5.236 \text{ rad}$$



Mecanismo de Chevyshev:

$$r_1 = 200; r_2 = 250; r_3 = 100; r_4 = 250; r_5 = 50; \alpha = 0^\circ$$

Mecanismo de Hoekens:

$$r_1 = 200; r_2 = 100; r_3 = 250; r_4 = 250; r_5 = 500; \alpha = 0^\circ$$

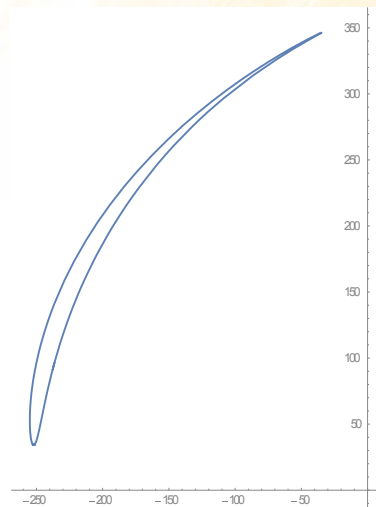
Mecanismo de Evans:

$$r_1 = 200; r_2 = 100; r_3 = 100; r_4 = 100; r_5 = 200; \alpha = 0^\circ$$

Mecanismo trasplantador de arroz:

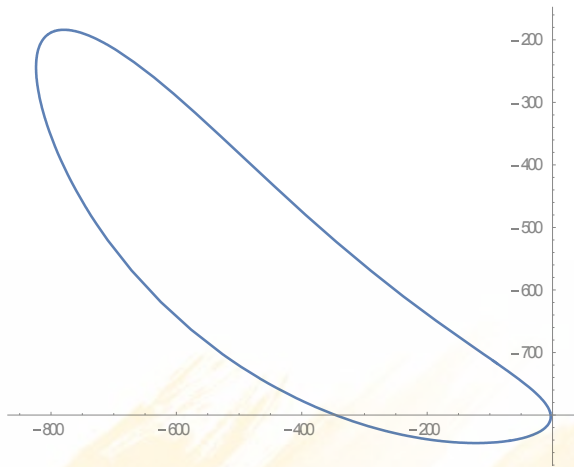
$$r_1 = 112.36; r_2 = 48; r_3 = 125; r_4 = 175; r_5 = 200; \alpha = 30^\circ$$

Rotación del mecanismo 200.85°

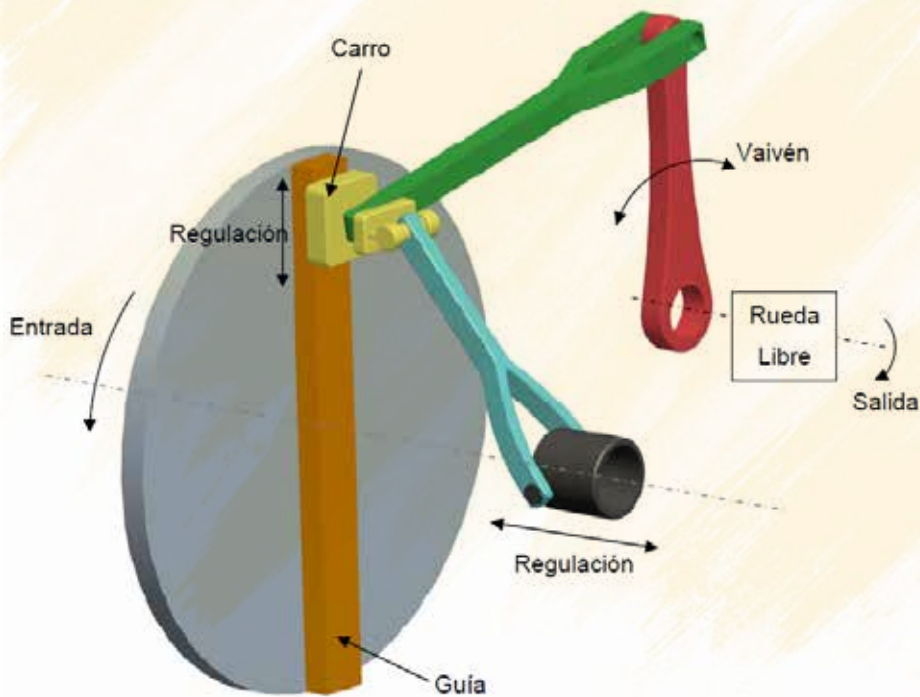


Mecanismo taladro para postes

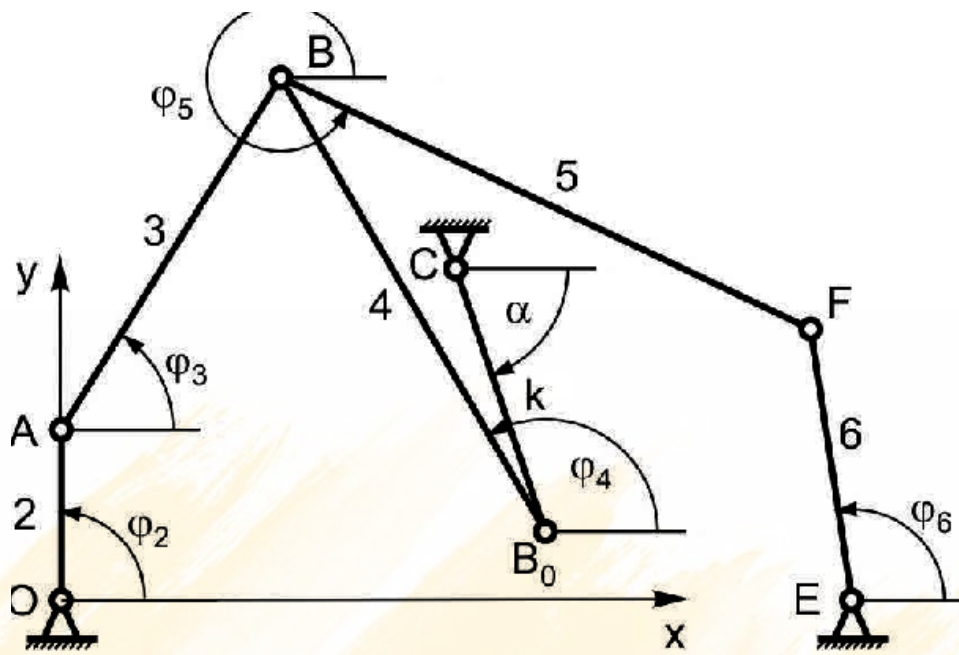
$$r_1 = 415; r_2 = 130; r_3 = 260; r_4 = 325; r_5 = 750; \alpha = 180^\circ$$



8. Analizar un CVT a partir de un mecanismo de cuatro barras con variación de r_2



9. Analizar un CVT a partir de un mecanismo de cuatro barras con variación de α



2.4 MECANISMO DE CIERRE DE UNA INYECTORA DE PLASTICO; APLICACIÓN DE VENTAJA MECANICA Y CADENAS CINEMATICAS EN SERIE

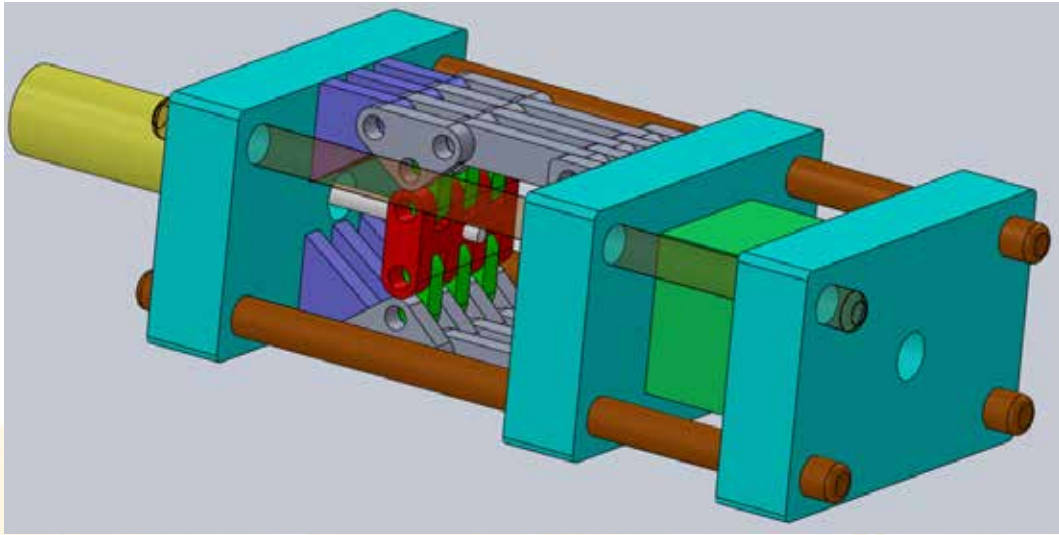


Figura 2.49. Mecanismo de cierre de una inyectora de plástico

Las máquinas inyectoras ya sean para plástico o metales fundidos, necesitan de un mecanismo que genere la suficiente fuerza para mantener cerrado el molde durante la inyección del material, por lo que se necesita de un mecanismo que genere ventaja mecánica. En esta configuración se utilizarán mecanismos en serie, el primero recibe el movimiento de entrada del pistón oleo hidráulico, mientras que la segunda cadena genera el movimiento de la placa porta moldes.

2.4.1 ECUACION DE CIERRE DEL CIRCUITO 1

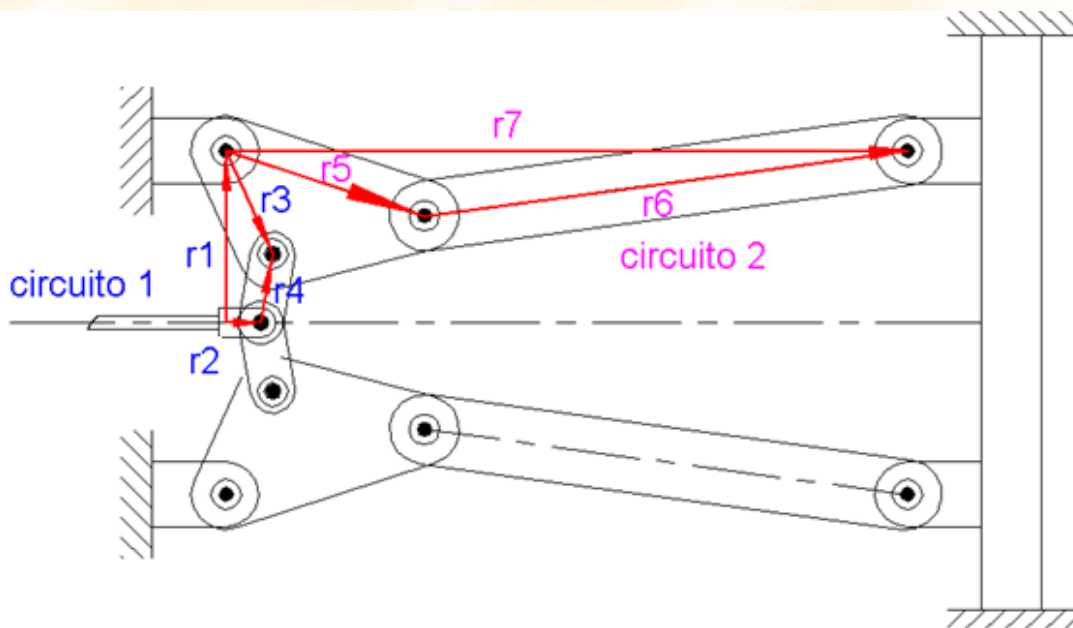


Figura 2.50. Diagrama vectorial

La ecuación vectorial según la figura es:

$$\vec{r_2} + \vec{r_4} = \vec{r_1} + \vec{r_3} \quad (2.92)$$

Transformando a la forma compleja:

$$r_2 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} + r_4 \cdot e^{i \cdot \theta_4} = r_1 \cdot e^{i \cdot \pi/2} + r_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} \quad (2.93)$$

Utilizando la equivalencia de Euler se obtiene:

$$r_2 \cdot \cos(0) + r_4 \cdot \cos(\theta_4) = r_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + r_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.94)$$

$$r_2 \cdot \sin(0) + r_4 \cdot \sin(\theta_4) = r_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.95)$$

En este caso se tiene una ecuación no lineal donde las variables dependientes o incógnitas son: θ_3 y θ_4 , la variable independiente o entrada del movimiento es r_2 y las constantes son las distancias: r_1 , r_3 , y r_4 . En primer lugar se elimina θ_4

$$r_4 \cdot \cos(\theta_4) = -r_2 + r_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.96)$$

$$r_4 \cdot \sin(\theta_4) = r_1 + r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.97)$$

Elevando al cuadrado y sumando se consigue:

$$0 = r_2^2 + r_1^2 + r_3^2 - r_4^2 - 2 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \cos(\theta_3) + 2 \cdot r_1 \cdot r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.98)$$

$$\frac{(r_2)^2 + (r_1)^2 + (r_3)^2 - (r_4)^2}{2 \cdot r_3} - r_2 \cdot \cos(\theta_3) + r_1 \cdot \sin(\theta_3) = 0 \quad (2.99)$$

Utilizando las nuevas constantes:

$$k_3 = \frac{(r_2)^2 + (r_1)^2 + (r_3)^2 - (r_4)^2}{2 \cdot r_3} \quad (2.100)$$

$$k_2 = -r_2 \quad (2.101)$$

$$k_1 = r_1 \quad (2.102)$$

Al final resulta la siguiente ecuación no lineal:

$$k_3 + k_2 \cdot \cos(\theta_3) + k_1 \cdot \sin(\theta_3) = 0 \quad (2.103)$$

Para resolver esta ecuación se utilizan las equivalencias conocidas:

$$\sin(\theta_3) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right)}{\left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\right]} = \frac{2 \cdot x}{1 + x^2} \quad (2.104)$$

$$\cos(\theta_3) = \frac{\left[1 - \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\right]}{\left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\right]} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad (2.105)$$

Donde:

$$\tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = x \quad (2.106)$$

Efectuando el reemplazo se obtiene una ecuación de segundo grado

$$k_3 \cdot (1 + x^2) + k_2 \cdot (1 - x^2) + 2 \cdot k_1 \cdot x = 0 \quad (2.107)$$

Del tipo:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (2.108)$$

Donde

$$A = k_3 - k_2 \quad (2.109)$$

$$B = 2 \cdot k_1 \quad (2.110)$$

$$C = k_3 + k_2 \quad (2.111)$$

La solución para x o $\tan(\theta_3 / 2)$ es:

$$\theta_3 = 2 \cdot \text{atan}\left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}\right) \quad (2.112)$$

Donde se utiliza el signo positivo de acuerdo a la concordancia del gráfico. El ángulo θ_4 se lo obtiene de la ecuación 2.97.

$$\theta_4 = \text{asin}\left(\frac{r_1 + r_3 \cdot \sin(\theta_3)}{r_4}\right) \quad (2.113)$$

2.4.2 ECUACION DE CIERRE DEL CIRCUITO 2

La ecuación vectorial del acoplador se puede escribir como:

$$\vec{r}_5 + \vec{r}_6 = \vec{r}_7 \quad (2.114)$$

$$r_5 \cdot e^{i \cdot \theta_5} + r_6 \cdot e^{i \cdot \theta_6} = r_7 e^{i \cdot 0^\circ} \quad (2.115)$$

Utilizando la equivalencia de Euler se logra:

$$r_5 \cdot \cos(\theta_5) + r_6 \cdot \cos(\theta_6) = r_7 \cdot \cos(0^\circ) \quad (2.116)$$

$$r_5 \cdot \text{sen}(\theta_5) + r_6 \cdot \text{sen}(\theta_6) = 0 \quad (2.117)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones se lo vio en el punto 2.1 y está dado por:

$$\theta_6 = a \sin \left(-r_5 \cdot \frac{\sin(\theta_5)}{r_6} \right) \quad (2.118)$$

$$r_7 = r_5 \cdot \cos(\theta_5) + r_6 \cdot \cos(\theta_6) \quad (2.119)$$

Adicionalmente está claro que:

$$\theta_5 = \theta_3 + \alpha \quad (2.120)$$

2.4.3 ANALISIS DE VELOCIDAD

Efectuamos la derivación de la ecuación vectorial del circuito 1

$$r_2 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} + r_4 \cdot e^{i \cdot \theta_4} = r_1 e^{i \cdot (\pi/2)} + r_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} \quad (2.121)$$

$$r_2 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} + i \cdot \omega_4 \cdot r_4 \cdot e^{i \cdot \theta_4} = 0 + i \cdot \omega_3 \cdot r_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} \quad (2.122)$$

Igualando la parte real e imaginaria:

$$r_2 - \omega_4 \cdot r_4 \cdot \sin(\theta_4) = -\omega_3 \cdot r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (2.123)$$

$$\omega_4 \cdot r_4 \cdot \cos(\theta_4) = \omega_3 \cdot r_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (2.124)$$

Resolviendo las dos ecuaciones lineales simultáneas y haciendo $r_2 = v$ se obtiene:

$$\omega_3 = \frac{v \cdot \cos(\theta_4)}{r_3 \cdot \sin(\theta_4 - \theta_3)} \quad (2.125)$$

Efectuando la derivación de la ecuación vectorial del circuito 2

$$r_5 \cdot e^{i \cdot \theta_5} + r_6 \cdot e^{i \cdot \theta_6} = r_7 e^{i \cdot 0^\circ} \quad (2.126)$$

$$i \cdot \omega_5 \cdot r_5 \cdot e^{i \cdot \theta_5} + i \cdot \omega_6 \cdot r_6 \cdot e^{i \cdot \theta_6} = r_7 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} \quad (2.127)$$

$$-\omega_5 \cdot r_5 \cdot \sin(\theta_5) - \omega_6 \cdot r_6 \cdot \sin(\theta_6) = r_7 \quad (2.128)$$

$$\omega_5 \cdot r_5 \cdot \cos(\theta_5) - \omega_6 \cdot r_6 \cdot \cos(\theta_6) = 0 \quad (2.129)$$

Tomando en cuenta que $\omega_5 = \omega_3$, y eliminando ω_6

$$v_7 = \frac{\omega_3 \cdot r_5 \cdot \sin(\theta_6 - \theta_5)}{\cos(\theta_6)} \quad (2.130)$$

2.4.4 VENTAJA MECANICA

Nuevamente se debe cumplir que

POTENCIA DE ENTRADA ≈ POTENCIA DE SALIDA

La potencia en el caso de actuadores lineales es el producto de la Fuerza por la velocidad lineal

$$F_2 v_2 = F_7 v_7 \quad (2.131)$$

La ventaja mecánica se define como:

$$\text{Ventaja Mecánica} = \frac{F_{\text{salida}}}{F_{\text{entrada}}} = \frac{F_7}{F_2} = \frac{v_2}{v_7} \quad (2.132)$$

$$VM = \frac{v}{\frac{\omega_3 \cdot r_5 \cdot \sin(\theta_6 - \theta_5)}{\cos(\theta_6)}} \quad (2.133)$$

Reemplazando ω_3

$$VM = \frac{\cos(\theta_6)}{\cos(\theta_4)} \cdot \frac{r_3}{r_5} \cdot \frac{\sin(\theta_4 - \theta_3)}{\sin(\theta_6 - \theta_5)} \quad (2.134)$$

La expresión indica claramente que la VM será máxima cuando la barra 4 sea vertical y la barra 5 y 6 estén alineadas.

2.4.5 PROGRAMA EN WOLFRAM MATHEMATICA

Ejercicio de Aplicación: Calcular la ventaja mecánica y la fuerza del cilindro oleo hidráulico para el mecanismo de cierre de la figura 2.49 con los siguientes parámetros, $r_1 = 90$; $r_3 = 60$; $r_4 = 50$; $r_5 = 100$; $r_6 = 180$; $\alpha = 41.81^\circ$

```
"Datos"
r1=90; r3=60; r4=50; r5=100; r6=180; α=41.81π/180;

k1=r1; k2=-r2;
k3=(r2^2+r1^2+r3^2-r4^2)/(2 r3);

A=k3-k2;
B=2k1;
c=k3+k2;
θ3=2 ArcTan [(-B+ Sqrt[B^2 - 4 A c] )/(2A)];
θ4 = ArcSin[(r1+r3 Sin[θ3])/r4];
θ5 = θ3+α;
θ6=ArcSin[(-r5 Sin[θ5])/r6];
r7=r5 Cos[θ5 ]+r6 Cos[θ6 ];

VM = Cos[θ6]/Cos[θ4]* r3/r5* Sin[θ4-θ3]/Sin[θ6-θ3];
Plot[{VM},{r2,10,44.72}]
Plot[{r7},{r2,10,44.72}]
ParametricPlot[{r7,VM},{r2,-20,60},PlotLabel->"Ventaja mecánica ",AxesLabel->{HoldForm[Global`r7],HoldForm[Global`VM]]}
```

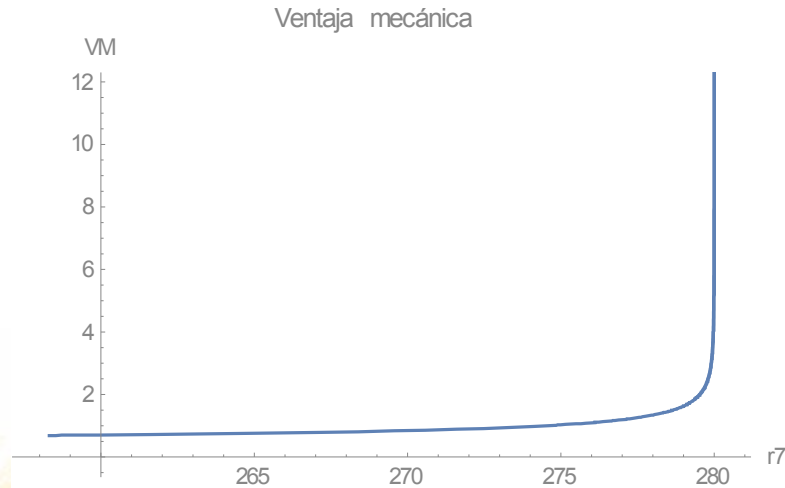



Figura 2.51. Ventaja Mecánica vs carrera placa porta molde

Para poder dimensionar el mecanismo y el actuador hidráulico se precisa saber la ventaja mecánica que producirá la deformación elástica en los ejes, suficiente para generar una fuerza de cierre que caracteriza la inyectora de 60 toneladas o 600000 N. Esta deformación elástica se la calcula mediante:

$$\Delta = \frac{P L}{E A} = \frac{\frac{600000}{4} \cdot 915}{210000 \left[\frac{\pi}{4} 50^2 \right]} = 0.333 \text{ mm} \quad (2.135)$$

Donde L es la longitud de las columnas, A el área de las mismas y E el módulo de elasticidad, El valor de 0.333 mm es la deformación elástica que deben soportar las columnas antes del cierre total. Resolviendo la ecuación (2.119) para un valor de r7 descontando la magnitud de 0.333mm se obtiene una entrada de 25.4007 en r2. Para esto se puede implementar al programa la sentencia:

```
FindRoot[r7 == r5 + r6 - 0.333, {r2, 44}]
```

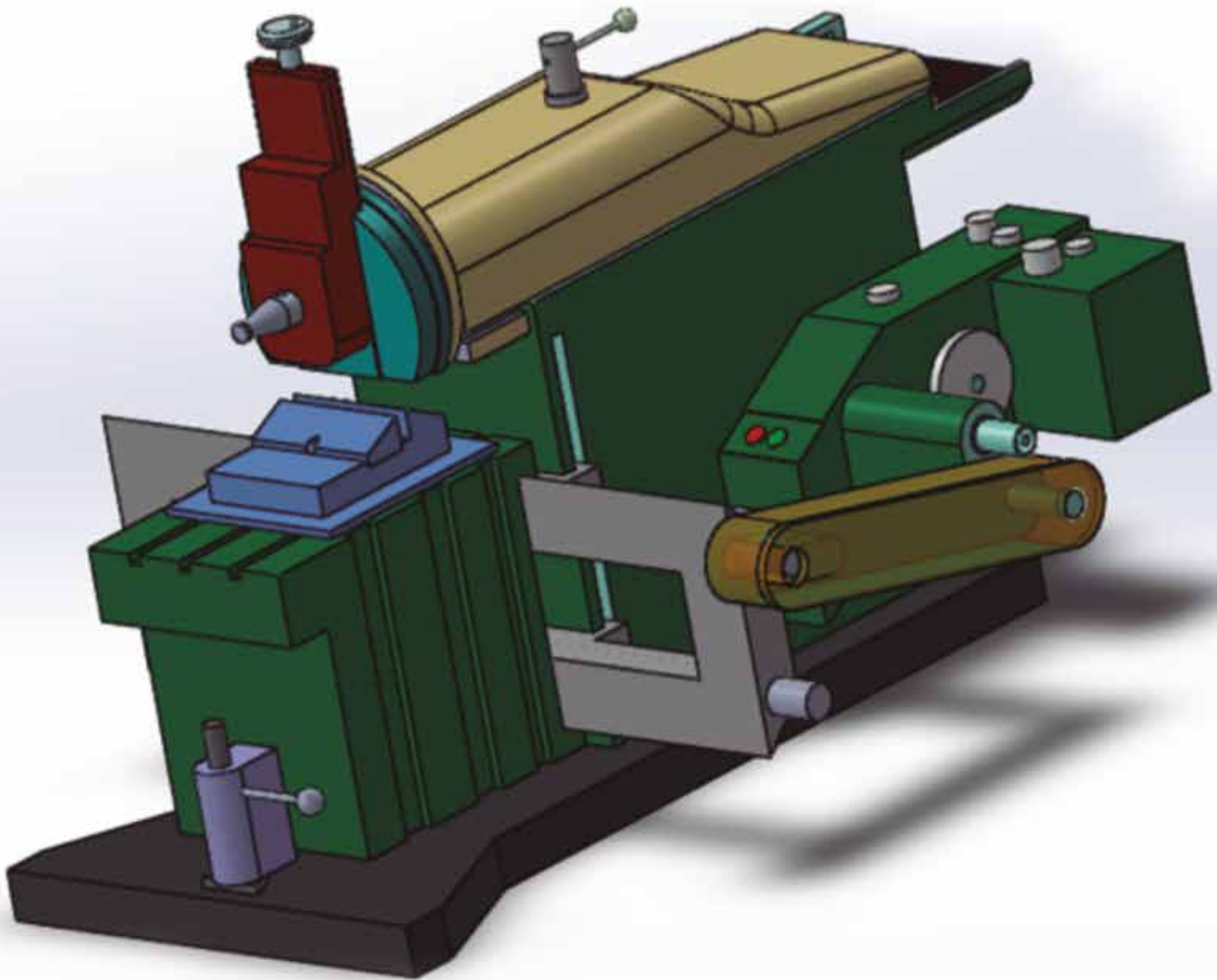
Que da como resultado

r2 → 25.4007

Finalmente la VM para este valor da 2.19. Por lo tanto si la fuerza de cierre es de 60 toneladas, el actuador podrá ser de 60/2.19, aproximadamente 30 toneladas. Para un cálculo más preciso se debe considerar la elasticidad a compresión de los moldes y eslabones y remitirse al tema de juntas empernadas correspondiente a la asignatura de elementos de máquinas.

2.4.6 TAREAS PARA EL ESTUDIANTE

1. Explorar con la sentencia Manipulate la VM de la expresión (2.134) con respecto a la relación r3/r5



CAPÍTULO 3

MECANISMOS CON JUNTAS DE CORREDERA

3.1 MECANISMO DE RETORNO RAPIDO O WITHWORTH

El mecanismo de retorno rápido o Withworth fue desarrollado por el Ingeniero Británico Joseph Withworth (1803-1887), básicamente es un mecanismo que transforma movimiento rotacional en movimiento lineal, pero a diferencia del mecanismo biela manivela, la rapidez del avance es diferente a la rapidez del retorno (Ver figura 3.1 y 3.2).

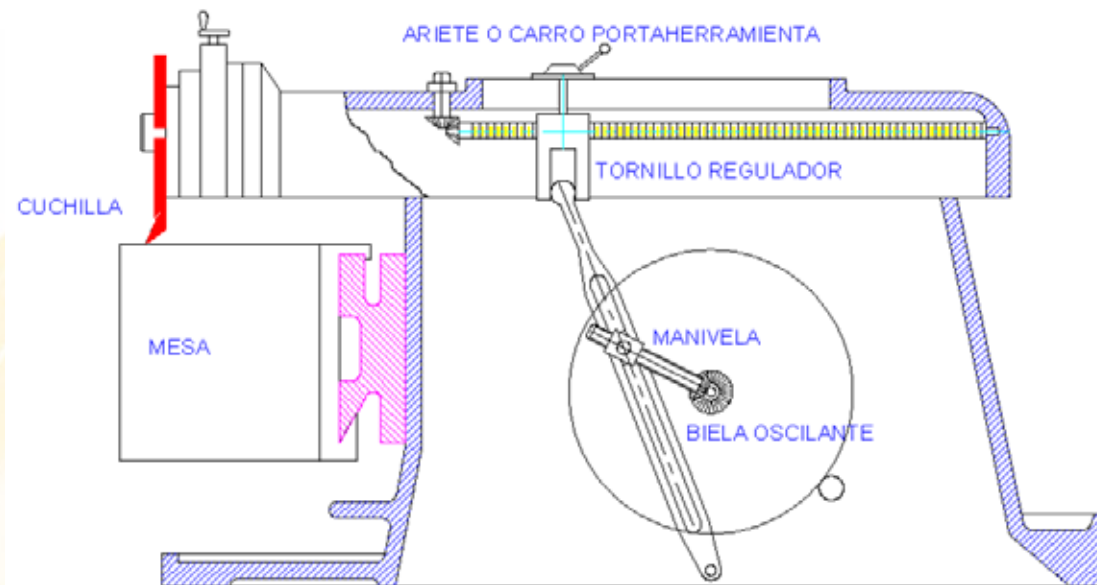


Figura 3.1. Mecanismo de Withworth

Este mecanismo es utilizado principalmente en las máquinas herramientas conocidas como cepilladoras y limadoras

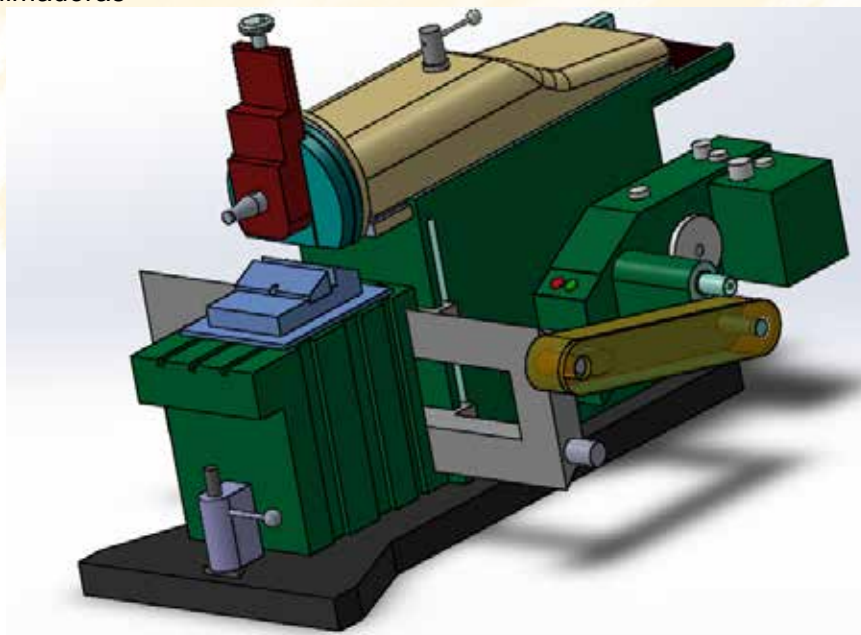


Figura 3.2. Máquina Cepilladora

Para efectuar el análisis se establecen dos ecuaciones vectoriales en base de los vectores de posición:

3.1.1ANALISIS DEL MOVIMIENTO

Partiendo del siguiente circuito vectorial denominado **CIRCUITO1** en la figura 3.3.

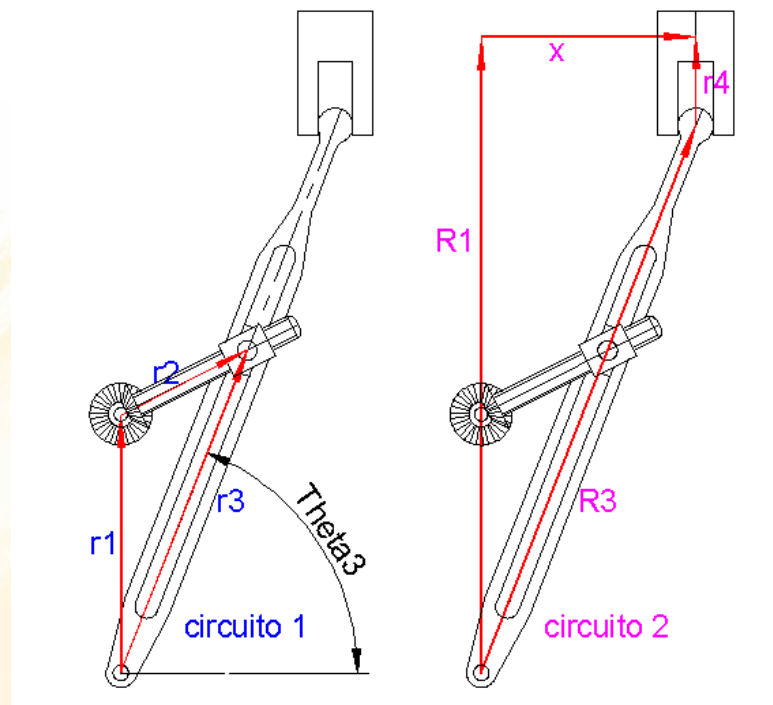


Figura 3.3. Circuito vectorial

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_3 \quad (3.1)$$

Utilizando la notación en álgebra compleja donde el eje x es el eje real y el eje y es imaginario:

$$r_1 \cdot e^{i(\pi/2)} + r_2 \cdot e^{i\theta_2} = r_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.2)$$

$$r_1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] + r_2 [\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)] = r_3 [\cos(\theta_3) + i \cdot \sin(\theta_3)] \quad (3.3)$$

Igualando la parte real y la parte imaginaria se tiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales 3.4 y 3.5:

$$r_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + r_2 \cdot \cos(\theta_2) = r_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (3.4)$$

$$r_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + r_2 \cdot \sin(\theta_2) = r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (3.5)$$

θ_2 es la variable independiente que varía de 0 a 360 °. Las incógnitas son en este caso, el ángulo θ_3 y el desplazamiento de la corredera r_3 , que pueden ser halladas fácilmente, simplemente al dividir entre si las dos expresiones, con lo cual se elimina r_3

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_3\right) = \frac{r_2 \cdot \cos(\theta_2)}{r_1 + r_2 \cdot \sin(\theta_2)} \quad (3.6)$$

$$r_3 = r_2 \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_3)} \quad (3.7)$$

El desplazamiento del carro portaherramienta se analiza en el **CIRCUITO 2**

$$\vec{R}_3 + \vec{r}_4 = \vec{R}_1 + \vec{x} \quad (3.8)$$

$$R_3 \cdot e^{i\theta_3} + r_4 \cdot e^{i(\pi/2)} = R_1 \cdot e^{i(\pi/2)} + x \cdot e^{i0^\circ} \quad (3.9)$$

$$R_3 \cdot \cos(\theta_3) + r_4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = R_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + x \cdot \cos(0^\circ) \quad (3.10)$$

$$R_3 \cdot \sin(\theta_3) + r_4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = R_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + x \cdot \sin(0^\circ) \quad (3.11)$$

$$R_3 \cdot \cos(\theta_3) = x \quad (3.12)$$

$$R_3 \cdot \sin(\theta_3) + r_4 = R_1 \quad (3.13)$$

3.1.2 GRAFICOS EN WOLFRAM MATHEMATICA

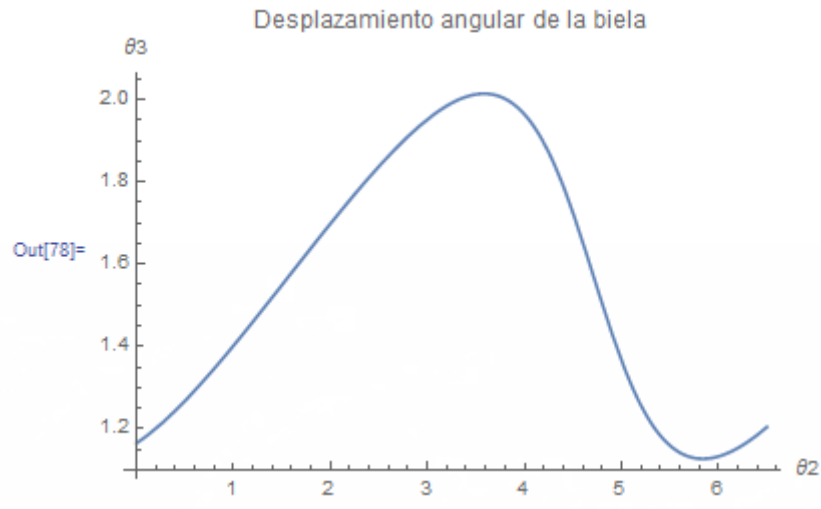
2. **Ejercicio de Aplicación:** Efectuar el análisis de un mecanismo de retorno rápido con los siguientes parámetros, $R_1 = 800$; $r_1 = 350$; $r_2 = 150$; $R_3 = 750$; $w_2 = 500$ rpm

```
r2=150;
r1=350;
R3=750;
R1=800;
```

```
θ3=(π/2)-ArcTan[(r2*Cos[θ2])/(r1+r2*Sin[θ2])];
Plot[θ3,{θ2,0,6.5},PlotLabel->"Desplazamiento angular de la biela",AxesLabel->{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`θ3]]}
```

```
x=R3*Cos[θ3];
Plot[x,{θ2,0,6.5},PlotLabel->"Desplazamiento del carro",AxesLabel->{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`x]},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}]
```


- **ROTACIÓN DE LA BIELA RANURADA**



- **DESPLAZAMIENTO DEL CARRO PORTAHERRAMIENTA**

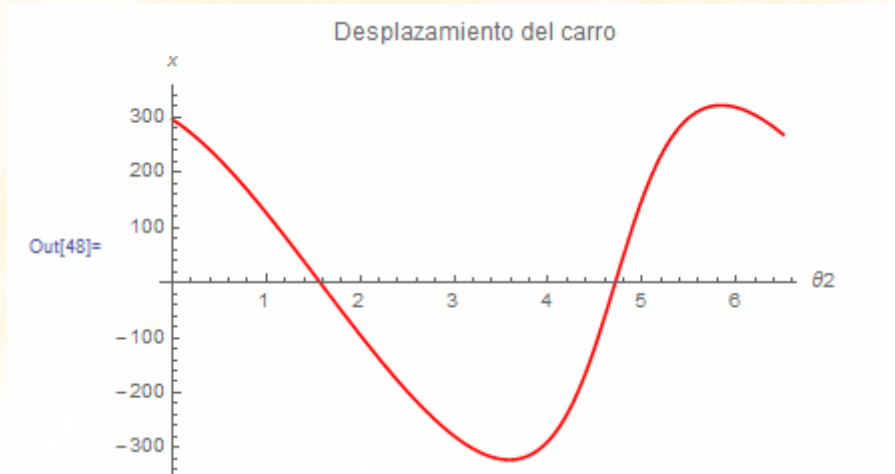


Figura 3.4. Rotación y desplazamiento del carro portaherramienta

3.1.3 ANALISIS DE VELOCIDAD

Derivando la ecuación vectorial del **CIRCUITO 1** se obtiene:

$$\dot{r}_1 + \dot{r}_2 = \dot{r}_3 \quad (3.14)$$

$$r_1 \cdot e^{i(\pi/2)} + r_2 \cdot e^{i\theta_2} = r_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.15)$$

$$0 + r_2 \cdot i \cdot \omega_2 \cdot e^{i\theta_2} = \dot{r}_3 \cdot e^{i\theta_3} + r_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} r_2 \cdot i \cdot \omega_2 \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) \\ = v_3 \cdot (\cos(\theta_3) + i \cdot \sin(\theta_3)) + r_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot (\cos(\theta_3) + i \cdot \sin(\theta_3)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$r_2 \cdot \omega_2 \cdot (-\sin(\theta_2)) = v_3 \cdot (\cos(\theta_3)) + r_3 \cdot \omega_3 \cdot (-\sin(\theta_3)) \quad (3.18)$$

$$r_2 \cdot \omega_2 \cdot (\cos(\theta_2)) = v_3 \cdot (\sin(\theta_3)) + r_3 \cdot \omega_3 \cdot (\cos(\theta_3)) \quad (3.19)$$

Resolviendo las dos ecuaciones lineales 3.18 y 3.19 cuyas incógnitas son ω_3 y v_3

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot r_2 \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{r_3} \quad (3.20)$$

$$v_3 = \omega_2 \cdot r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad (3.21)$$

Derivando la ecuación vectorial del **CIRCUITO 2** se obtiene:

$$\dot{\vec{R}}_3 + \dot{\vec{r}}_4 = \dot{\vec{R}}_1 + \dot{\vec{x}} \quad (3.22)$$

$$R_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} + \dot{r}_4 \cdot e^{i \cdot (\pi/2)} = 0 + \dot{x} \cdot e^{i \cdot (0^0)} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} R_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot (\cos(\theta_3) + i \cdot \sin(\theta_3)) + \mathcal{V}_4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ = \dot{x} \cdot (\cos(0^0) + i \cdot \sin(0^0)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$R_3 \cdot \omega_3 \cdot (-\sin(\theta_3)) = \dot{x} \quad (3.25)$$

- **VELOCIDAD ANGULAR DE LA BIELA RANURADA**

```
r2=150;
r1=350;
R3=750;
R1=800;
ω2=500*2*π/60;
θ3=π/2-ArcTan[(r2*Cos[θ2 ])/(r1+r2*Sin[θ2 ]]);
r3=r2*Cos[θ2 ]/Cos[θ3 ];
ω3=ω2*r2*Cos[θ3 -θ2 ]/r3;
Plot[ω3,{θ2,0,6.5},PlotLabel->"Velocidad angular de la biela",AxesLabel->{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`ω3]},PlotStyle->{RGBColor[0,1,0]} ]
```

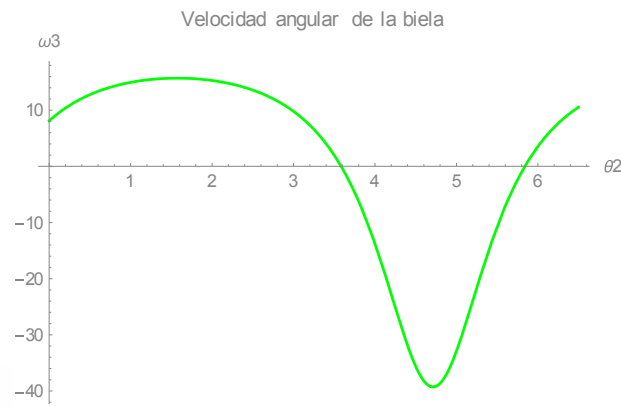


Figura 3.5. Velocidad angular de la biela

- **VELOCIDAD DEL CARRO PORTAHERRAMIENTA**

```

Manipulate[
R3=750;
R1=800;
ω2=500*2*π/60;
θ3=π/2-ArcTan[(r2*Cos[θ2 ])/(r1+r2*Sin[θ2 ]]);
r3=r2*Cos[θ2 ]/Cos[θ3 ];
ω3=ω2*r2*Cos[θ3 -θ2 ]/r3;
vx=-R3*ω3*Sin[θ3];
Plot[vx,{θ2,0,8},PlotLabel->"Velocidad del carro
portaherramienta",AxesLabel-
>{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`vx]}], {r2,0.5,150},{r1,150,500}]

```

Como se aprecia la velocidad de la carrera de trabajo es bastante uniforme, lo cual hace que este mecanismo sea adecuado para ser utilizado en una máquina herramienta. El mecanismo biela manivela a pesar de moverse en línea recta no tiene esta característica de velocidad como podemos apreciar en la figura 3.6

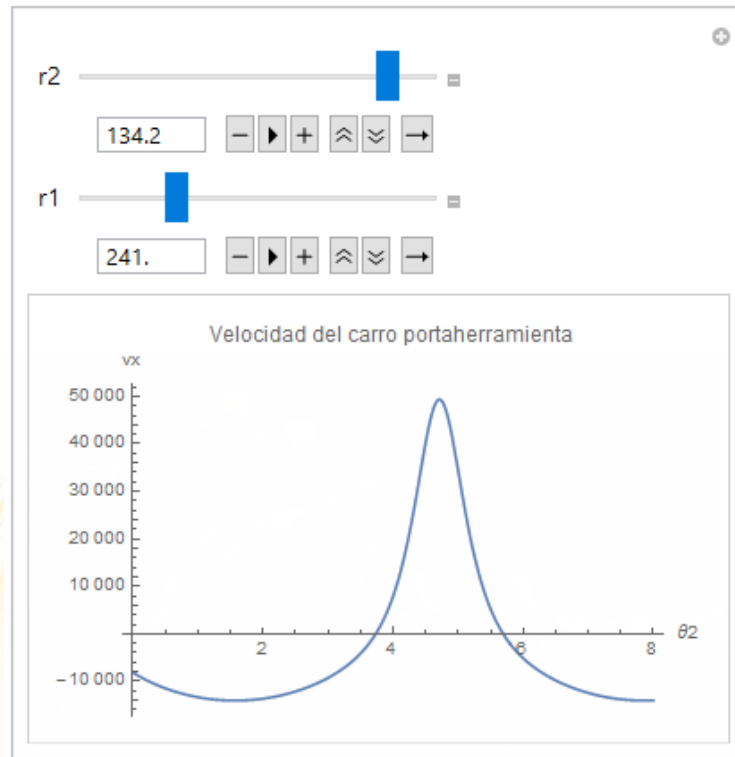


Figura 3.6. Velocidad del carro portaherramienta

3.1.4. ANALISIS DE ACELERACIÓN

Derivando la ecuación vectorial del **CIRCUITO 1** se obtiene:

$$\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = \ddot{r}_3 \quad (3.26)$$

$$r_2 \cdot i \cdot \omega_2 \cdot e^{i\theta_2} = \dot{r}_3 \cdot e^{i\theta_3} + r_3 \cdot i \cdot \omega_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.27)$$

Derivando 3.26

$$-r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot e^{i\theta_2} = \ddot{r}_3 \cdot e^{i\theta_3} + 2 \dot{r}_3 \cdot \omega_3 \cdot i e^{i\theta_3} + r_3 \cdot \alpha_3 \cdot i e^{i\theta_3} - r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.28)$$

Aquí aparece un nuevo término $2 \dot{r}_3 \cdot \omega_3 \cdot i e^{i\theta_3}$ denominado aceleración de Coriolis perpendicular a la corredera y la aceleración deslizando $\ddot{r}_3 \cdot e^{i\theta_3}$. De igual manera la descomposición en reales e imaginarios genera:

$$-r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2) = a_3 \cdot \cos(\theta_3) - 2 v_3 \cdot \omega_3 \cdot \sin(\theta_3) - r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \sin(\theta_3) - r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \cos(\theta_3) \quad (3.29)$$

$$-r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sin(\theta_2) \\ = a_3 \cdot \sin(\theta_3) + 2 v_3 \cdot \omega_3 \cdot \cos(\theta_3) + r_3 \cdot \alpha_3 \cdot \cos(\theta_3) - r_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \sin(\theta_3) \quad (3.30)$$

Eliminando α_3 de 3.29 y 3.30.

$$a_3 = r_3 \cdot \omega_3^2 - r_2 \cdot \omega_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_3) \quad (3.31)$$

Eliminando a_3 de 3.29 y 3.30

$$r_3 \cdot \alpha_3 = r_2 \cdot \omega_2^2 \sin(\theta_3 - \theta_2) - 2 v_3 \cdot \omega_3 \quad (3.32)$$

Derivando la ecuación vectorial del **CIRCUITO 2** se obtiene:

$$\ddot{R}_3 + \ddot{r}_4 = \ddot{x} \quad (3.33)$$

$$-R_3 \cdot \omega_3^2 \cdot e^{i\theta_3} + R_3 \cdot i \cdot \alpha_3 \cdot e^{i\theta_3} + \ddot{r}_4 \cdot e^{i(\pi/2)} = \ddot{x} \cdot e^{i(0^0)} \quad (3.34)$$

$$-R_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \cos(\theta_3) - R_3 \cdot \alpha_3 \cdot \sin(\theta_3) = \ddot{x} \quad (3.35)$$

$$R_3 \cdot \omega_3^2 \cdot \sin(\theta_3) - R_3 \cdot \alpha_3 \cdot \cos(\theta_3) = \ddot{r}_4 \quad (3.36)$$

El programa que permite visualizar la aceleración del carro portaherramienta es el siguiente

• ACELERACIÓN DEL CARRO PORTAHERRAMIENTA

```
r2=150;
r1=350;
R3=150;
R1=800;

ω2=500 2 π/60;
θ3=π/2-ArcTan[(r2*Cos[θ2])/(r1+r2*Sin[θ2])];
r3=r2 Cos[θ2]/Cos[θ3];
ω3=ω2 r2 Cos[θ3-θ2]/r3;
v3 = ω2 r2 Sin[θ3-θ2];

vx=-R3 ω3 Sin[θ3];
a3 = r3 ω3^2 - r2 ω2^2 Cos[θ2-θ3];
α3 = (r2 ω2^2 Sin[θ3-θ2]-2v3 ω3)/r3;
ax = -R3 ω3^2 Cos[θ3]-R3 α3 Sin[θ3];
Plot[ax ,{θ2,0,2 π},PlotLabel->"Aceleración del carro
portaherramienta",AxesLabel-
>{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`a3]}, PlotStyle-
>{RGBColor[0,0,1]}]
```

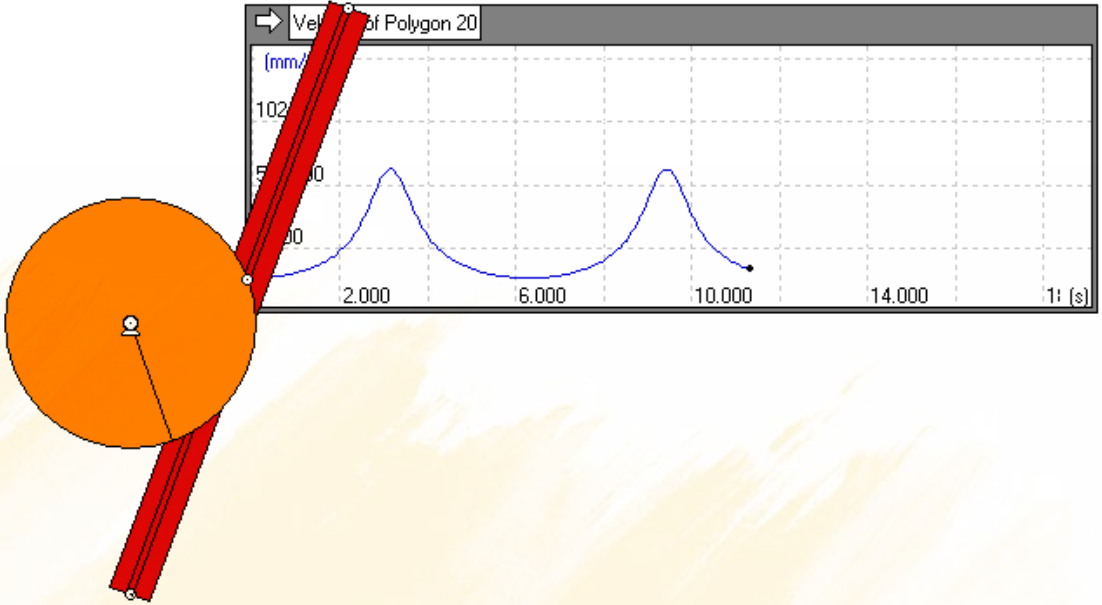
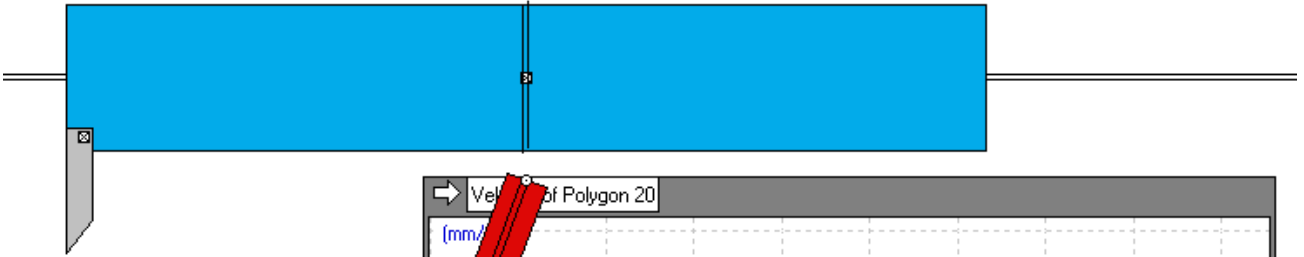

La aceleración de Coriolis definitivamente incrementa el valor de la aceleración del carro portaherramienta



Figura 3.7. Aceleración del carro portaherramienta

3.1.5 TAREA PARA EL ESTUDIANTE

- Efectuar la simulación del mecanismo en Working Model 2D



3.2 MECANISMO INDEXADOR BASADO EN UNA CORREDERA INVERTIDA

Mecanismo indexador es aquel que produce una función de salida intermitente, en el caso de la figura 3.8, la rueda dentada describe un desplazamiento angular con detenimientos instantáneos.

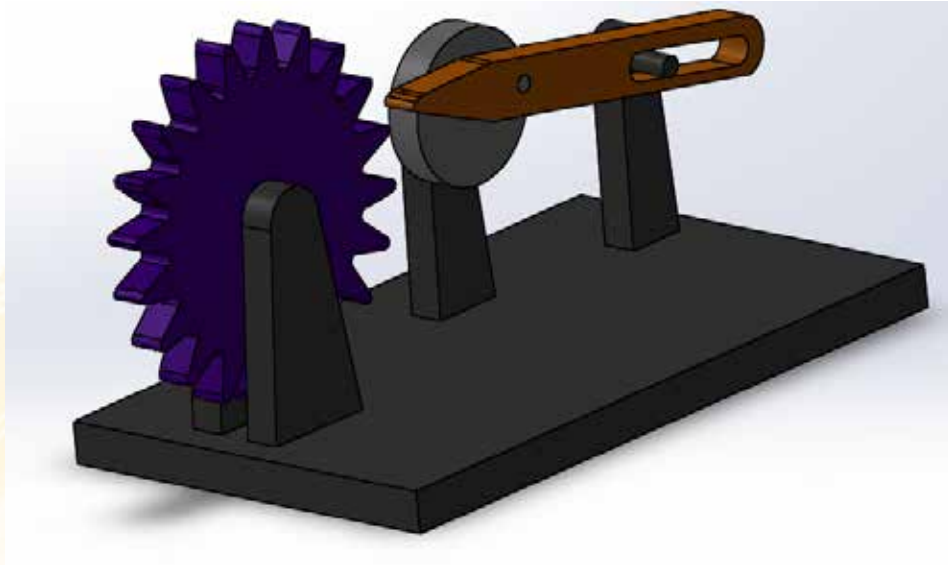


Figura 3.8. Rueda indexadora

Consta de:

- Rueda de Salida
- Resorte
- Disco de Entrada
- Corredera Invertida

Para cada revolución del disco de entrada, la corredera avanza y desplaza un diente de la rueda de salida. Un resorte mantiene la rueda fija cuando no es impulsada. Se desea efectuar el análisis de movimiento, dibujar la trayectoria del punto trazador y efectuar el análisis de velocidad y aceleración.

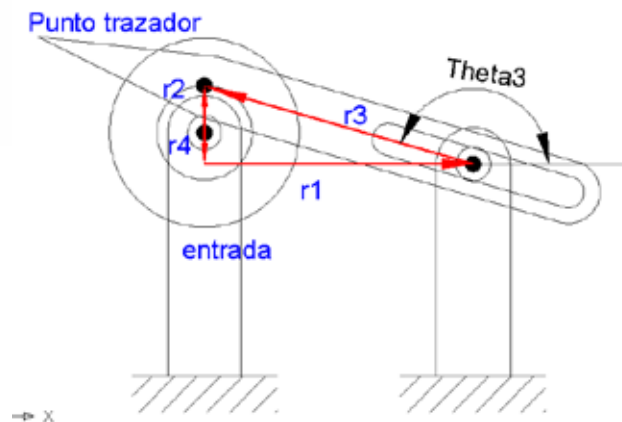


Figura 3.9. Circuito Vectorial

3.2.1 ANALISIS DE MOVIMIENTO

Antes de efectuar el análisis de posición, se detallan las características de cada vector que conforma el circuito vectorial.

r_2 es un vector giratorio que gira a velocidad constante

r_3 es un vector deslizante cuya longitud varía

r_1 es un vector fijo

r_4 es un vector fijo y nos da la medida vertical que existe entre los pivotes

La ecuación de cierre del circuito es:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4 + \vec{r}_3 \quad (3.38)$$

Utilizando la equivalencia de Euler se tiene:

$$r_2 \cdot e^{i\theta_2} = r_1 + r_4 \cdot e^{i(3/2\pi)} + r_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.39)$$

Reemplazando e igualando la parte real e imaginaria:

$$r_2 \cdot \cos(\theta_2) = r_1 + r_4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + r_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (3.40)$$

$$r_2 \cdot \sin(\theta_2) = r_4 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (3.41)$$

En este caso las incógnitas son θ_3 , y r_3 , la variable independiente es θ_2 , y las constantes son r_1 , r_2 , r_4

$$r_3 \cdot \cos(\theta_3) = r_2 \cdot \cos(\theta_2) - r_1 \quad (3.42)$$

$$r_3 \cdot \sin(\theta_3) = r_2 \cdot \sin(\theta_2) + r_4 \quad (3.43)$$

Eliminando r_3 , dividiendo entre si las expresiones 3.42 y 3.43:

$$\tan(\theta_3) = \frac{r_2 \cdot \sin(\theta_2) + r_4}{r_2 \cdot \cos(\theta_2) - r_1} \quad (3.44)$$

$$r_3 = \frac{r_2 \cdot \sin(\theta_2) + r_4}{\sin(\theta_3)} \quad (3.45)$$

Y r_3 , puede ser despejada de cualquiera de las expresiones anteriores (3.42 o 3.43). De especial interés es la trayectoria del punto trazador

3.2.2 TRAYECTORIA DEL PUNTO TRAZADOR

Para determinar la trayectoria que hace el punto trazador o curva de acoplador, se parte del siguiente gráfico (Ver figura 3.10).

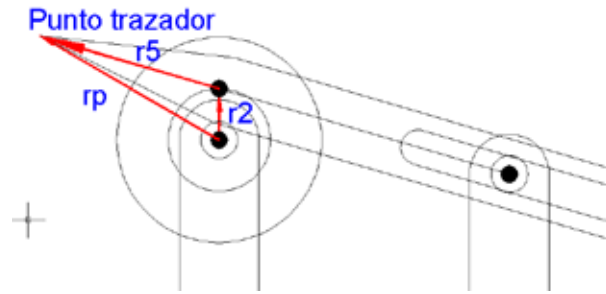


Figura 3.10. Circuito para el punto trazador

En este gráfico se aprecia que el punto trazador está definido por el vector r_p , que a su vez es la suma de r_2 y r_5 , el ángulo que subtiende r_5 es también θ_3 .

$$R_p = r_2 \cdot e^{i \cdot \theta_2} + r_5 \cdot e^{i \cdot \theta_3} \quad (3.46)$$

$$R_{px} = r_2 \cdot \cos(\theta_2) + r_5 \cdot \cos(\theta_3 + \pi) \quad (3.47)$$

$$R_{py} = r_2 \cdot \sin(\theta_2) + r_5 \cdot \sin(\theta_3 + \pi) \quad (3.48)$$

3.2.3 GRAFICOS EN WOLFRAM MATHEMATICA

3. **Ejercicio de Aplicación:** Efectuar el análisis de un mecanismo indexador con los siguientes parámetros, $r_1 = 170$; $r_4 = 20$; $r_2 = 30$; $r_5 = 110$; $w_2 = 500$ rpm

```
r2=30; r1=170; r4=20; r5=110;
θ3=ArcTan[(r2*Sin[θ2]+r4)/(r2*Cos[θ2]-r1)];
r3=(r2*Sin[θ2]+r4)/Sin[θ3];
Rpx=r2*Cos[θ2]+r5*Cos[θ3+π];
Rpy=r2*Sin[θ2]+r5*Sin[θ3+π];
ParametricPlot[{{Rpx,Rpy},{r2*Sin[θ2],r2*Cos[θ2]}},{θ2,0,6.3},PlotLabel->"Trayectoria del punto trazador",AxesLabel->{HoldForm[Global`x],HoldForm[Global`y]}
```

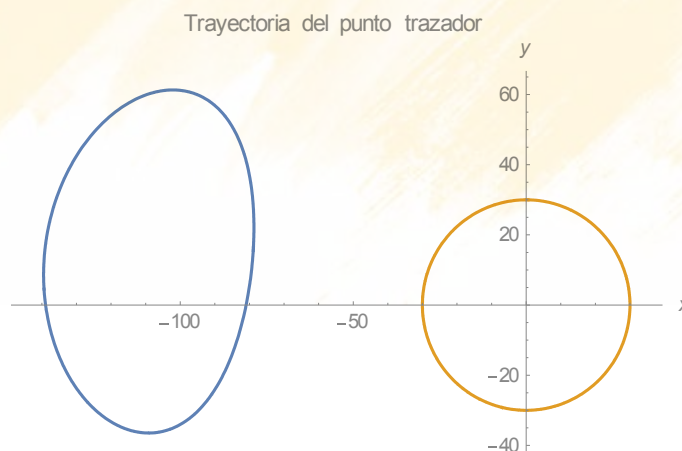


Figura 3.11. Trayectoria del punto trazador

Como se aprecia en la figura 3.11. La forma simétrica de la trayectoria es adecuada para la aplicación que se le va a dar al mecanismo

3.2.4 ANALISIS DE VELOCIDAD

Derivando la siguiente expresión (3.49):

$$r_2 \cdot e^{i\theta_2} = r_1 + r_4 \cdot e^{i(3/2\pi)} + r_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.49)$$

Se obtiene:

$$i \cdot \omega_2 \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} = v_3 \cdot e^{i\theta_3} + i \cdot \omega_3 \cdot r_3 \cdot e^{i\theta_3} \quad (3.50)$$

Haciendo el reemplazo correspondiente, e igualando la parte real e imaginaria se tiene el siguiente sistema de ecuaciones, en donde las nuevas incógnitas son ω_3 , v_3 , note que v_3 es la **VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO**, la misma que es la velocidad relativa entre la ranura y su guía

$$-\omega_2 \cdot r_2 \cdot \sin(\theta_2) = -\omega_3 \cdot r_3 \cdot \sin(\theta_3) + v_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (3.51)$$

$$\omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta_2) = \omega_3 \cdot r_3 \cdot \cos(\theta_3) + v_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (3.52)$$

La velocidad angular de la barra 3 se halla despejándola de 3.51 y 3.52, eliminando v_3 de las expresiones anteriores y considerando una $\omega_2 = 100$ rpm.

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot r_2 \cdot \frac{\cos(\theta_3 - \theta_2)}{r_3} \quad (3.53)$$

La velocidad v_3 se determina de 3.51 y 3.52:

$$v_3 = \omega_2 r_2 \sin(\theta_3 - \theta_2) \quad (3.54)$$

```
r2=30; r1=170;r4=20;r5=110; ω2 = 100 2π/60;
θ3=ArcTan[(r2*Sin[θ2]+r4)/(r2*Cos[θ2]-r1)]; r3=(r2*Sin[θ2]+r4)/Sin[θ3];
ω3=ω2*r2*Cos[θ3 -θ2 ]/r3;
v3 = ω2 r2 Sin[θ3 -θ2];
Plot[ω3,{θ2,0,6.3},PlotLabel->"Velocidad angular de la barra 3",AxesLabel->{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`ω3]]}
Plot[v3,{θ2,0,6.3},PlotLabel->"Velocidad de deslizamiento de la barra3",AxesLabel->{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`ω3]]}
```

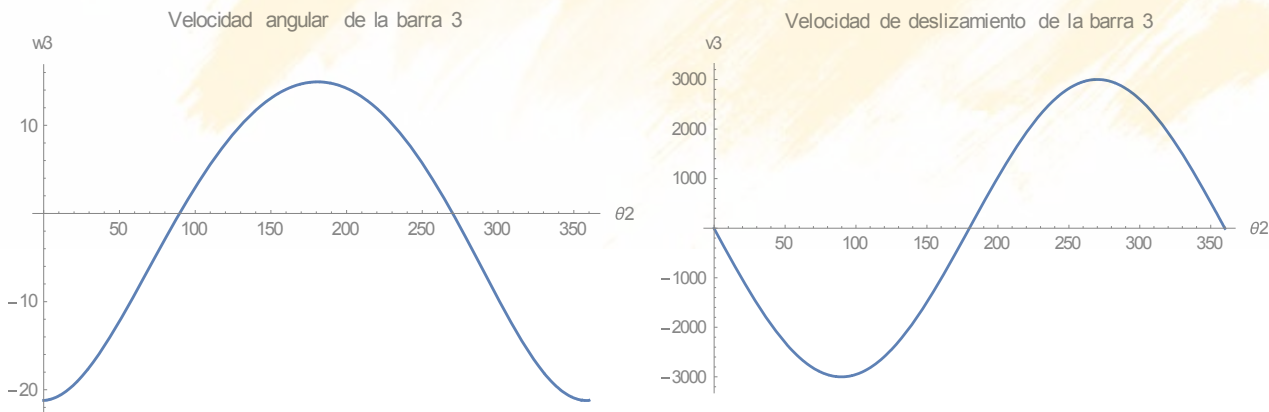


Figura 3.12. Velocidades del sistema

3.2.5 ANALISIS DE ACELERACIÓN

Derivando la siguiente expresión:

$$i \cdot \omega_2 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \theta_2} = v_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} + i \cdot \omega_3 \cdot r_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} \quad (3.55)$$

Se obtiene:

$$-\omega_2^2 \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \theta_2} = a_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} + 2 v_3 \cdot \omega_3 \cdot i e^{i \cdot \theta_3} - \omega_3^2 \cdot r_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} + \alpha_3 \cdot r_3 \cdot i e^{i \cdot \theta_3} \quad (3.56)$$

Aquí aparecen nuevamente a_3 que es la aceleración de deslizamiento y $2 v_3 \cdot \omega_3$ que es la aceleración de Coriolis, que siempre estarán presentes en los mecanismos de corredera. Haciendo el reemplazo correspondiente e igualando la parte real e imaginaria se tiene el siguiente par de ecuaciones lineales:

$$-\omega_2^2 r_2 \cos(\theta_2) = -\omega_3^2 r_3 \cos(\theta_3) - \alpha_3 r_3 \sin(\theta_3) + a_3 \cos(\theta_3) - 2v_3 \omega_3 \sin(\theta_3) \quad (3.57)$$

$$-\omega_2^2 r_2 \sin(\theta_2) = -\omega_3^2 r_3 \sin(\theta_3) + \alpha_3 r_3 \cos(\theta_3) + a_3 \sin(\theta_3) + 2 v_3 \omega_3 \cos(\theta_3) \quad (3.58)$$

En donde las nuevas incógnitas son α_3 y a_3 obtenidas de las funciones, se procede a despejarlas

$$a_3 = \omega_3^2 \cdot r_3 - \omega_2^2 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta_3 - \theta_2) + 2 \cdot v_3 \cdot \omega_3 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_3) \quad (3.59)$$

$$\alpha_3 = \frac{\omega_2^2 \cdot r_2 \cdot \sin(\theta_3 - \theta_2) - \omega_3^2 \cdot r_3 - 2 \cdot v_3 \cdot \omega_3}{r_3} \quad (3.60)$$

```
r2=30; r1=170;r4=20;r5=110; ω2 = 100 2π/60;
θ3=ArcTan[(r2 Sin[θ2]+r4)/(r2 Cos[θ2]-r1)]; r3=(r2 Sin[θ2]+r4)/Sin[θ3];
ω3=ω2 r2 Cos[θ3 -θ2 ]/r3;
v3 = ω2 r2 Sin[θ3 -θ2];
a3=ω3^2 r3-ω2^2 r2 Cos[θ3 -θ2 ]+2v3 ω3 Sin[θ2 -θ3 ];
α3=(ω2^2 r2 Sin[θ3 -θ2 ]-ω3^2 r3-2v3 ω3)/r3;
Plot[a3,{θ2,0,2π},PlotLabel->"Aceleración deslizante de la
corredera",AxesLabel->{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`a3]]}
Plot[α3,{θ2,0,2π},PlotLabel->"Aceleración angular de la corredera",AxesLabel-
>{HoldForm[Global`θ2],HoldForm[Global`α3]]}
```

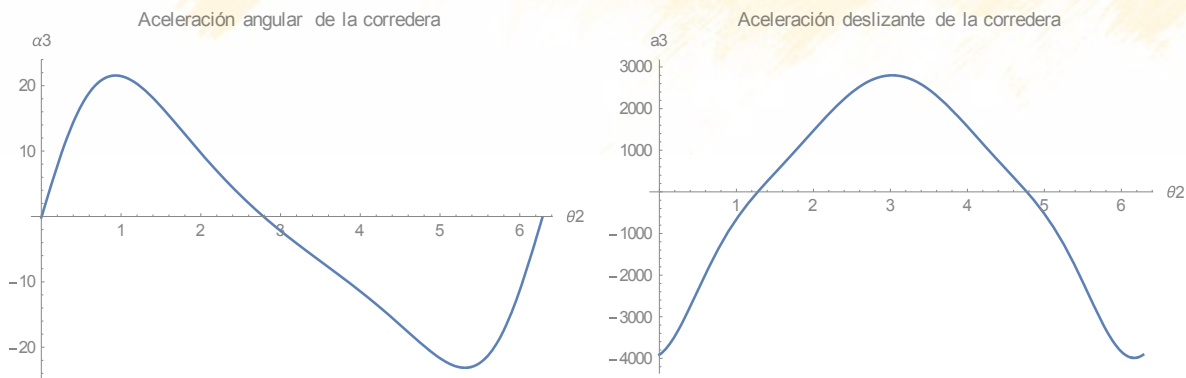
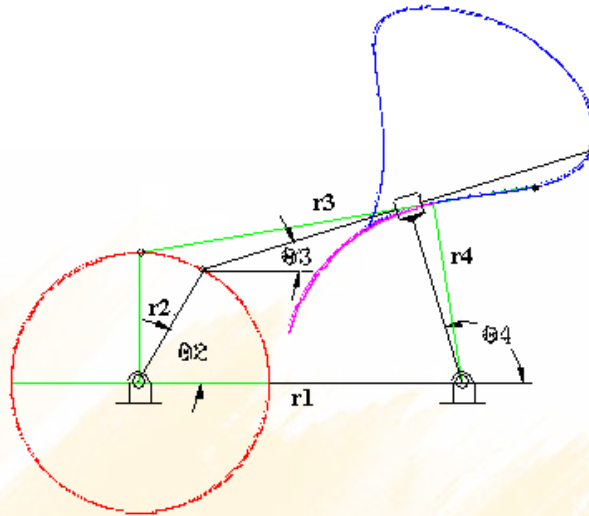


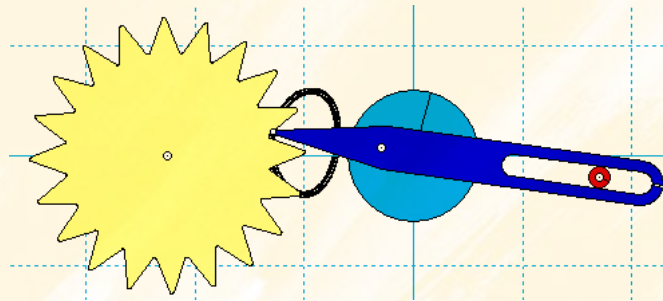
Figura 3.12. Aceleraciones del sistema

3.2.6 TAREA PARA EL ESTUDIANTE

4. Dado el siguiente mecanismo obtener las curva de acoplador indicada SUGERENCIA: Considerar que $\theta_4 - \theta_3 = \pi/2$, eliminar r_3 y utilizar la equivalencia $\sin(\theta_3) = 2x / (1+x^2)$, $\cos(\theta_3) = (1-x^2) / (1+x^2)$



5. Efectuar la simulación en Working Model 2D de ambos mecanismos, para lo cual se dibuja según se indica



3.3. MECANISMO DE CORREDERA Y RUEDAS DENTADAS PARA DESPLAZAR PELICULA

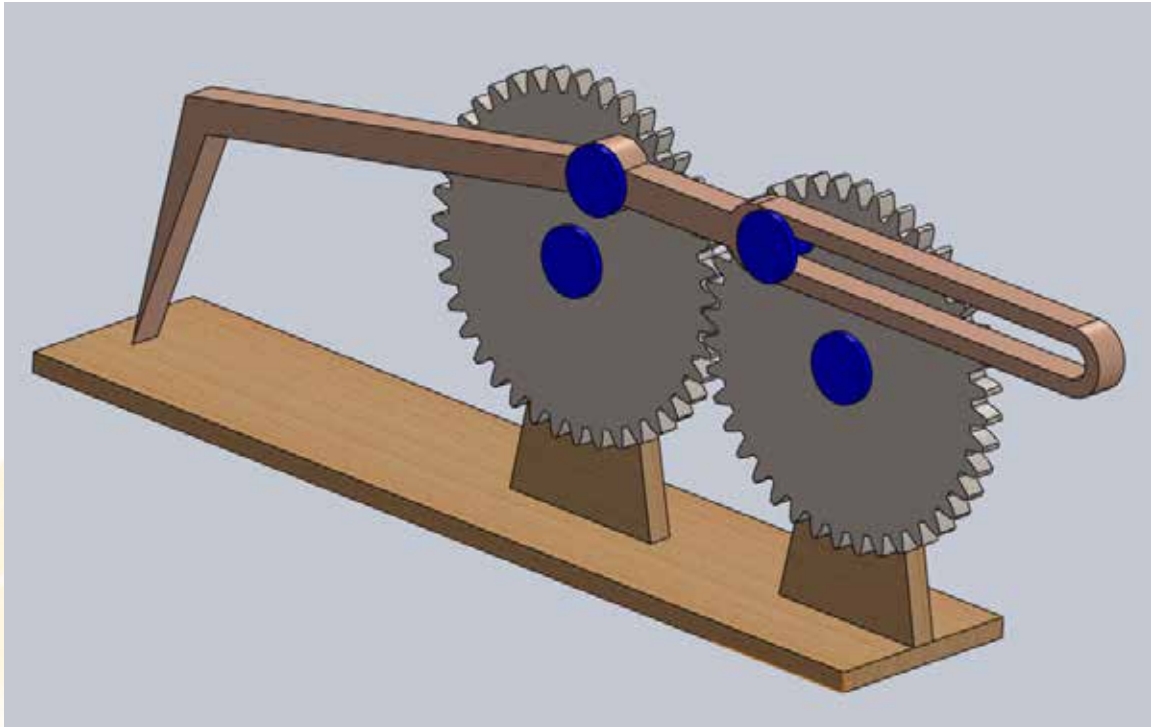


Figura 3.13. Mecanismo de corredera y ruedas dentadas

La aplicación de ruedas dentadas junto con eslabonamientos es muy ventajosa, por cuanto se puede conseguir una gran variedad de movimientos de salida, implementar reposos y mejorar la transmisión de fuerza, con mecanismos de levas se puede realizar lo mismo pero existe una serie de problemas inherentes al uso de levas como son las vibraciones y la limitación de la velocidad.

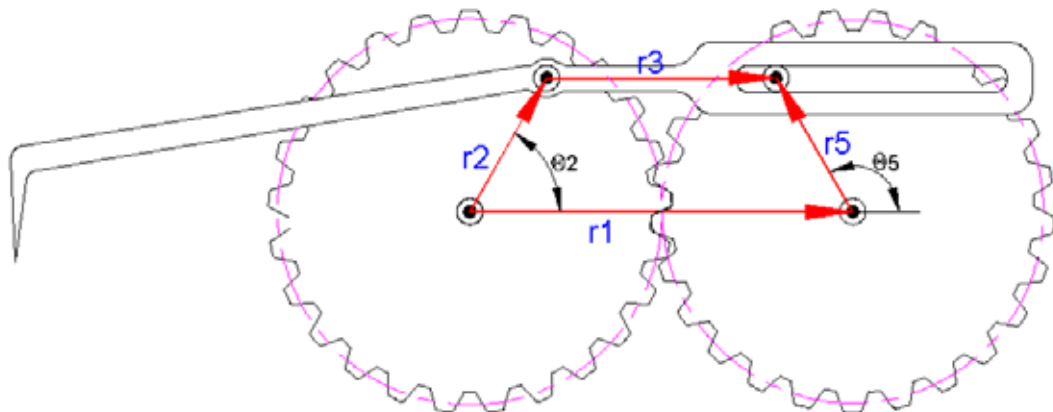


Figura 3.14. Circuito del mecanismo

3.3.1 ANALISIS DE MOVIMIENTO

El modelo matemático del mecanismo es el siguiente:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_5 = \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \quad (3.61)$$

La expresión en álgebra compleja:

$$r_1 \cdot e^{i \cdot 0^\circ} + r_5 \cdot e^{i \cdot \theta_5} = r_2 \cdot e^{i \cdot \theta_2} + r_3 \cdot e^{i \cdot \theta_3} \quad (3.62)$$

Descomponiendo mediante Euler y agrupando la parte real e imaginaria se obtiene:

$$r_1 \cdot \cos(0^\circ) + r_5 \cdot \cos(\theta_5) = r_2 \cdot \cos(\theta_2) + r_3 \cdot \cos(\theta_3) \quad (3.63)$$

$$r_1 \cdot \sin(0^\circ) + r_5 \cdot \sin(\theta_5) = r_2 \cdot \sin(\theta_2) + r_3 \cdot \sin(\theta_3) \quad (3.64)$$

Donde las incógnitas son r_3 y θ_3 , puesto que θ_5 es función de θ_2 debido a que existe una conexión por medio de engranes.

Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene:

$$r_3 \cdot \sin(\theta_3) = r_5 \cdot \sin(\theta_5) - r_2 \cdot \sin(\theta_2) \quad (3.65)$$

$$r_3 \cdot \cos(\theta_3) = r_1 + r_5 \cdot \cos(\theta_5) - r_2 \cdot \cos(\theta_2) \quad (3.66)$$

$$\tan(\theta_3) = \frac{r_5 \cdot \sin(\theta_5) - r_2 \cdot \sin(\theta_2)}{r_1 + r_5 \cdot \cos(\theta_5) - r_2 \cdot \cos(\theta_2)} \quad (3.67)$$

Y que el vector de desplazamiento de la corredera es:

$$r_3 = \frac{r_5 \cdot \sin(\theta_5) - r_2 \cdot \sin(\theta_2)}{\sin(\theta_3)} \quad (3.68)$$

Tomando en cuenta que la velocidad lineal en el punto de tangencia de las ruedas es igual:

$$v = \omega_2 r_2 = -\omega_5 r_5 \quad (3.69)$$

Donde el signo negativo predice que las ruedas giran en diferente sentido

$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_5} = -\frac{Dp_2}{Dp_5} = -\frac{m Z_2}{m Z_5} = \frac{d\theta_5/dt}{d\theta_2/dt} \quad (3.70)$$

Donde m es el módulo del engrane y Z el número de dientes

$$\frac{d\theta_5}{d\theta_2} = -\frac{Z_2}{Z_5}; \int_{\theta_{50}}^{\theta_5} d\theta_5 = -\frac{Z_2}{Z_5} \int_{\theta_{20}}^{\theta_2} d\theta_2; \theta_5 - \theta_{50} = -\frac{Z_2}{Z_5} (\theta_2 - \theta_{20}) \quad (3.71)$$

Por tanto el ángulo θ_5 y θ_2 están relacionados mediante la expresión:

$$\theta_5 = -\frac{Z_2}{Z_5} (\theta_2 - \theta_{20}) + \theta_{50} = \lambda \cdot \theta_2 + \Phi \quad (3.72)$$

Donde λ es la relación de transmisión y Φ es el ángulo de fase:

$$\lambda = -\frac{Z_2}{Z_5} \quad (3.73)$$

Puesto que los engranes son iguales $\lambda = -1$. Para determinar el ángulo de fase verificamos los ángulos iniciales que son tomados del gráfico

$$\theta_5 = -1(\theta_2 - 45) + 120 = -\theta_2 + 165; \Phi = 165 \quad (3.74)$$

3.3.2 TRAYECTORIA DEL PUNTO TRAZADOR

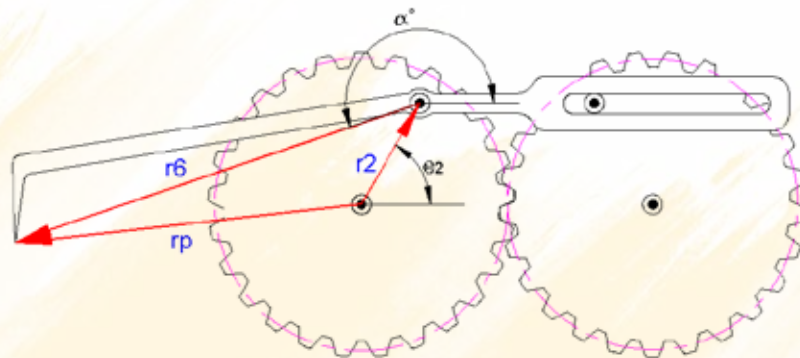


Figura 3.15. Circuito del punto trazador

La ecuación de la trayectoria del punto trazador es:

$$\mathbf{Rp} = r_2 \cdot e^{i\theta_2} + r_6 \cdot e^{i(\theta_3 + \alpha)} \quad (3.75)$$

Se asumirá que

$$r_6 = 470 \quad \alpha := 210 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Las ecuaciones paramétricas a ser graficadas son:

$$Rpx = r_2 \cos(\theta_2) + r_6 \cdot \cos(\theta_3 + \alpha) \quad (3.76)$$

$$Rpy = r_2 \sin(\theta_2) + r_6 \cdot \sin(\theta_3 + \alpha) \quad (3.77)$$

3.3.3 GRAFICOS EN WOLFRAM MATHEMATICA

6. **Ejercicio de Aplicación:** Efectuar el análisis de un mecanismo indexador con los siguientes parámetros: $r_1 = 320$; $r_2=128$; $r_5 = 128$; $r_6 = 470$; $\alpha=210^\circ$

```
r1=320; r2=128; r5=128; r6 = 470;  $\alpha = 210 \pi / 180$ ;  $\lambda = -1$ ;
 $\theta_{20} = 45 \pi / 180$ ;  $\theta_{50} = 120 \pi / 180$ ;
 $\theta_5 = \lambda(\theta_2 - \theta_{20}) + \theta_{50}$ ;
 $\theta_3 = \text{ArcTan}[(r_5 \text{Sin}[\theta_5] - r_2 \text{Sin}[\theta_2]) / (r_1 + r_5 \text{Cos}[\theta_5] - r_2 \text{Cos}[\theta_2])]$ ;

Rpx=r2 Cos[ $\theta_2$ ]+r6 Cos[ $\theta_3 + \alpha$ ];
Rpy=r2 Sin[ $\theta_2$ ]+r6 Sin[ $\theta_3 + \alpha$ ];

ParametricPlot[{{Rpx,Rpy},{r2*Sin[ $\theta_2$ ],r2*Cos[ $\theta_2$ ]},{ $\theta_2, 0, 6.3$ },PlotLabel->"Trayectoria del punto trazador",AxesLabel->{HoldForm[Global`x],HoldForm[Global`y]}}
```

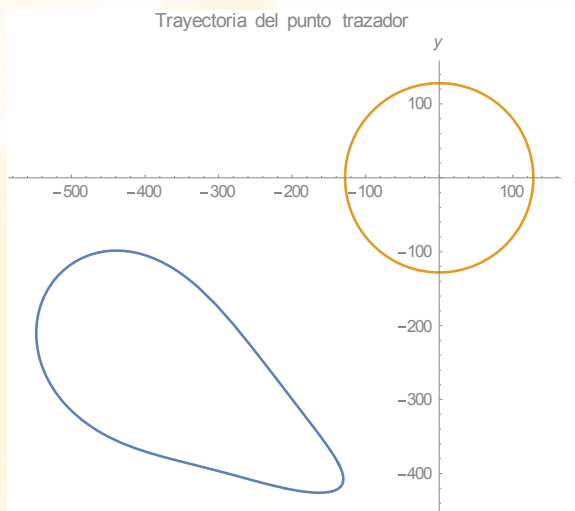


Figura 3.16. Trayectoria del punto trazador

Efectuando el análisis de sensibilidad con Manipulate se encuentra una variedad infinita de trayectorias basadas en este mecanismo

```
Manipulate[r1 = 320; r2 = 140; r5 = 140;  $\theta_5 = \lambda(\theta_2 - \theta_{20}) + \theta_{50}$ ;
 $\theta_3 = \text{ArcTan}[(r_5 \text{Sin}[\theta_5] - r_2 \text{Sin}[\theta_2]) / (r_1 + r_5 \text{Cos}[\theta_5] - r_2 \text{Cos}[\theta_2])]$ ;
Rpx = r2 Cos[ $\theta_2$ ] + r6 Cos[ $\theta_3 + \alpha$ ];
Rpy = r2 Sin[ $\theta_2$ ] + r6 Sin[ $\theta_3 + \alpha$ ];
ParametricPlot[{{Rpx, Rpy}, {r2 Sin[ $\theta_2$ ],
r2*Cos[ $\theta_2$ ]},{ $\theta_2, 0, 6 \pi$ },
PlotLabel -> "Trayectoria del punto trazador",
AxesLabel -> {HoldForm[Global`x],
HoldForm[Global`y]},{  $\lambda, -4, 4, 0.5$ }, { $\theta_{20}, 0, 2 \pi$ }, { $\theta_{50}, 0, 2 \pi$ }, {r6, 0, 600}, { $\alpha, 0, 2 \pi$ }]
```

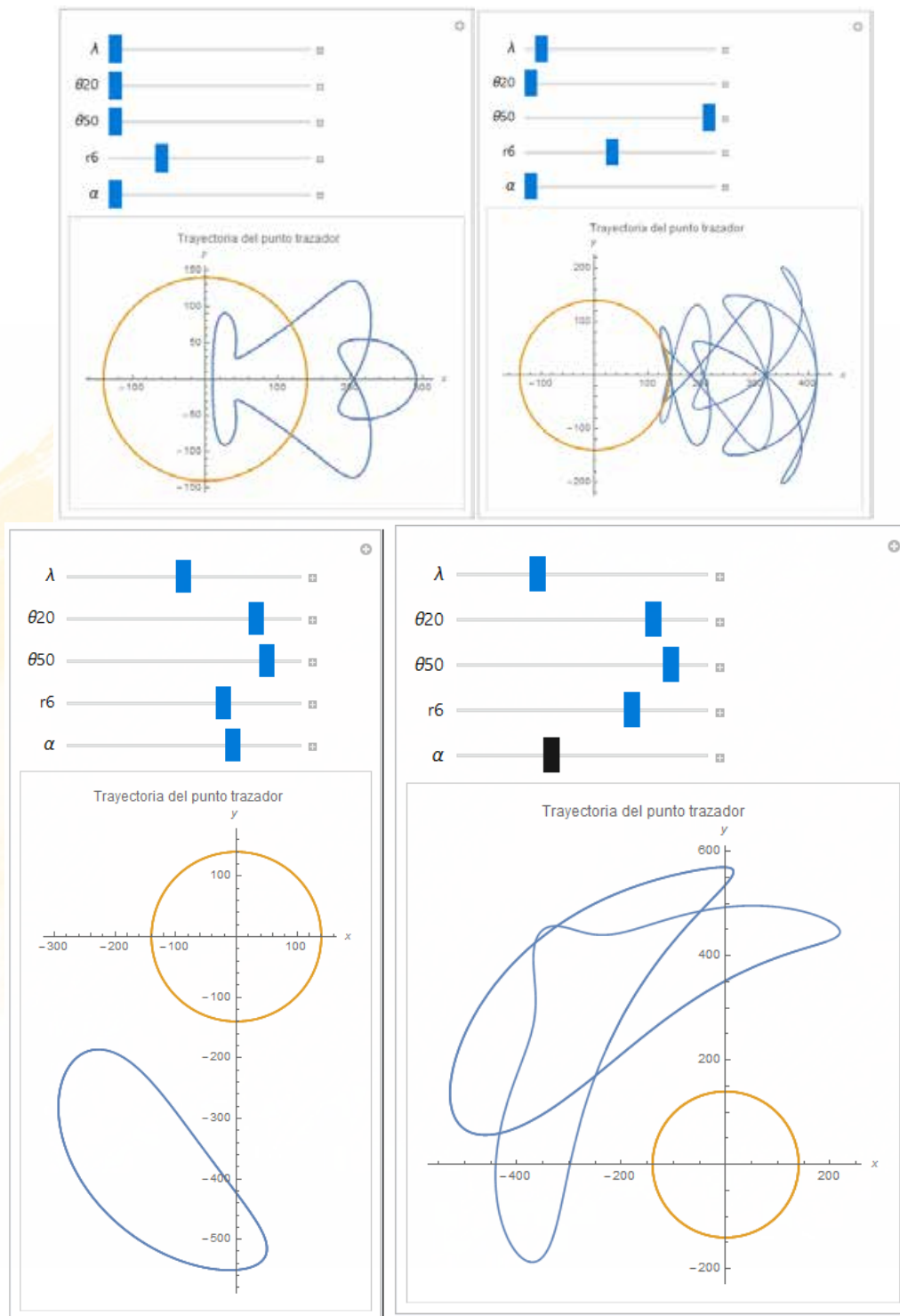
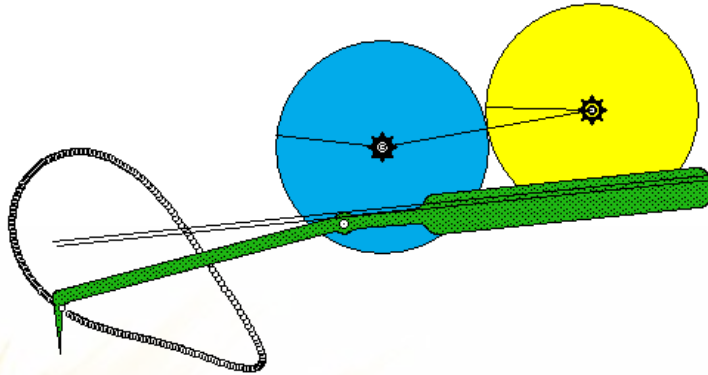


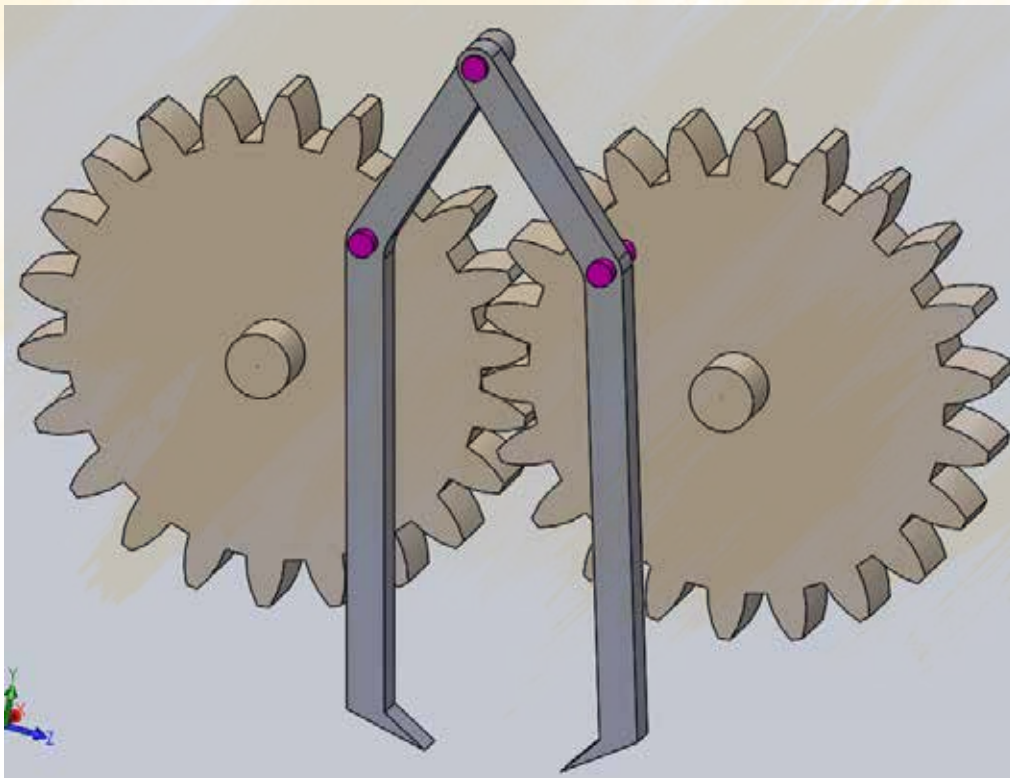
Figura 3.17. Familias de trayectorias

3.3.4 TAREA PARA EL ESTUDIANTE

7. Efectuar la simulación en Working Model del mecanismo analizado.



8. Graficar las trayectorias del punto de acoplador en MathCAD del siguiente mecanismo, para lo cual se deberá dibujar en AutoCAD un prototipo en base del cual se realizara el circuito vectorial y se tomarán las medidas respectivas.



- 9.

3.4. MECANISMO DE ESLABONAMIENTOS Y ENGRANAJES PLANETARIOS

El siguiente mecanismo que se analizará se denomina monowhiper.



Figura 3.18. Mecanismo Monowhiper

El mecanismo monowhiper fue desarrollado por Mercedes Benz para el modelo C220 el cual mueve una pluma limpiaparabrisas grande a través del parabrisas en lugar de los dos limpiadores más pequeños que se encuentran en otros vehículos.

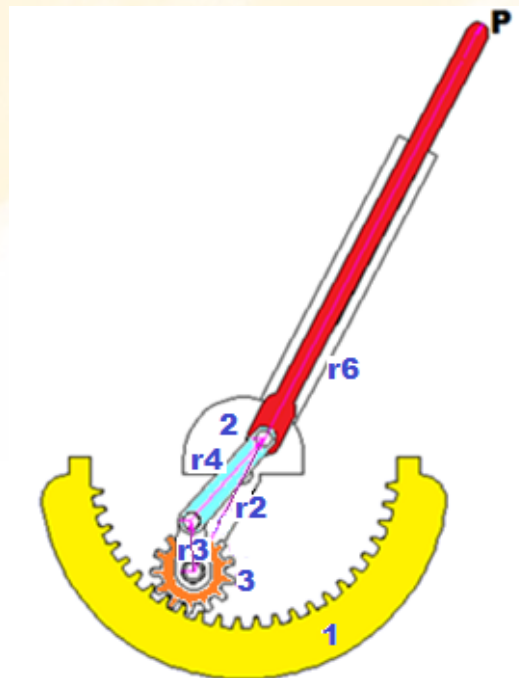


Figura 3.19. Mecanismo Monowhiper, vectores

3.4.1 ANALISIS DE MOVIMIENTO

Este mecanismo se compone de una corona de dientes internos fija 1, un engrane planetario 3, un brazo motriz porta planeta 2 que a su vez es guía de la corredera r6 (pluma) que es impulsada por el mecanismo biela (r3) manivela (r4). En primer lugar se analizara el sistema planetario, para determinar la rotación θ_3 se utiliza el concepto de velocidades angulares relativas:

$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21} \quad (3.78)$$

Despejando ω_{31} y dividiendo todo para ω_{21}

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{\omega_{32} + \omega_{21}}{\omega_{21}} = 1 + \frac{\omega_{32}}{\omega_{21}} = 1 - \frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = 1 - \frac{Z_1}{Z_3} \quad (3.79)$$

El signo + cambia a – por el cambio en la relación ω_{21} a ω_{12}

También se tiene que:

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{12}} = \pm \frac{Z_1}{Z_3} \quad (3.80)$$

Puesto que por tener la rueda 1 dientes internos, tendría el mismo sentido de giro que la rueda 3, en referencia al porta planeta 2 y por tanto el signo es +

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = \frac{d\theta_3/dt}{d\theta_2/dt} = 1 - \frac{Z_1}{Z_3} \quad (3.81)$$

Quedando

$$\frac{d\theta_3}{d\theta_2} = 1 - \frac{Z_1}{Z_3} \quad (3.82)$$

Integrando ambos lados

$$\int_{\theta_{30}}^{\theta_3} d\theta_3 = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_3}\right) \int_{\theta_{20}}^{\theta_2} d\theta_2 \quad (3.83)$$

$$\theta_3 - \theta_{30} = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_3}\right) (\theta_2 - \theta_{20}) \quad (3.84)$$

Parametrizando se obtiene:

$$\theta_3 = \theta_{30} + (1 - s) (\theta_2 - \theta_{20}) \quad (3.85)$$

El punto P es determinado por el mecanismo biela manivela cuya ecuación vectorial es:

$$\vec{r}_3 + \vec{r}_4 = \vec{r}_2 \quad (3.86)$$

La notación en números complejos tomando r_2 como eje positivo real instantáneo es:

$$r_3 e^{i\alpha} + r_4 e^{i\beta} = r_2 \quad (3.87)$$

Donde $\alpha = \theta_3 - \theta_2$ es el ángulo de r_3 con respecto a r_2 y β es el ángulo de r_4 con respecto a r_2

Desarrollando Euler obtenemos las ecuaciones escalares siguientes:

$$r_2 = r_3 \cos \alpha + r_4 \cos \beta \quad (3.88)$$

$$0 = r_3 \sin \alpha + r_4 \sin \beta \quad (3.89)$$

Resolviendo la ecuación de la forma conocida

$$\sin \beta = -\frac{r_3}{r_4} \sin \alpha \quad (3.90)$$

$$r_2 = r_3 \cos \alpha + r_4 \cos \beta = r_3 \cos \alpha + r_4 \sqrt{1 - (\sin \beta)^2} \quad (3.91)$$

Reemplazando

$$r_2 = r_3 \cos \alpha + r_4 \sqrt{1 - \left(\frac{r_3}{r_4} \sin \alpha\right)^2} = r_3 \cos \alpha + r_4 \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{q}\right)^2} \quad (3.92)$$

Donde q es r_4/r_3

Finalmente tomando en cuenta la distancia fija r_6 obtenemos las coordenadas que traza el punto P son por tanto las ecuaciones paramétricas son:

$$x = (r_2 + r_6) \cos \theta_2 \quad (3.93)$$

:

$$y = (r_2 + r_6) \sin \theta_2 \quad (3.94)$$

3.4.2 GRAFICOS EN WOLFRAM MATHEMATICA

10. **Ejercicio de Aplicación:** Efectuar un análisis de sensibilidad del mecanismo Monowhiper

Manipulate[

```
r6 = 500; r3 = 80; r4 = q*r3;
θ20 = 90*π/180;
θ30 = 270*π/180;
z3 = 12;
z1 = s*z3;
θ3 = θ30 + (1 - z1/z3)*(θ2 - θ20);
α = θ3 - θ2;
β = ArcSin[-r3/r4*Sin[α]];
r2 = r3*Cos[α] + r4 Sqrt[1 - (Sin[β])^2];
x = (r2 + r6) Cos[θ2];
y = (r2 + r6) Sin[θ2];
ParametricPlot[{x, -y}, {θ2, 200*π/180,
340*π/180}], {q, 1, 10}, {s, 1, 10}]
```

El primer resultado que se puede observar es que efectivamente la trayectoria del punto P describe el perfil de un parabrisas y que además se pueden explorar otras opciones y generar muchas curvas interesantes

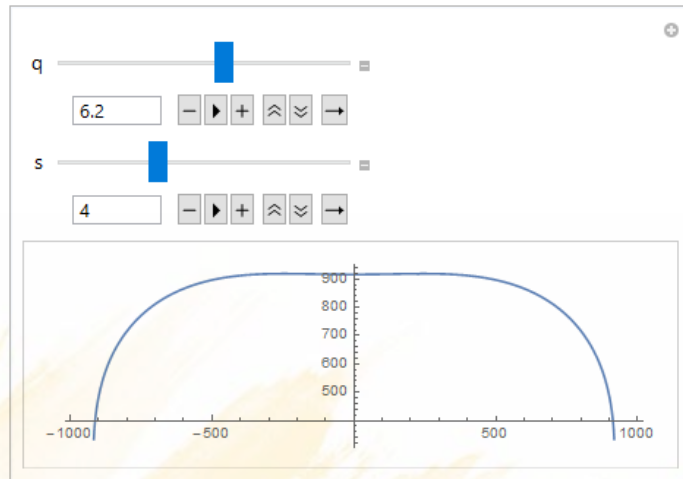


Figura 3.20. Trayectoria que describe el parabrisas

Por ejemplo incrementando el rango de rotación y cambiando las relaciones de transmisión se obtienen las siguientes trayectorias que abren un abanico de aplicaciones

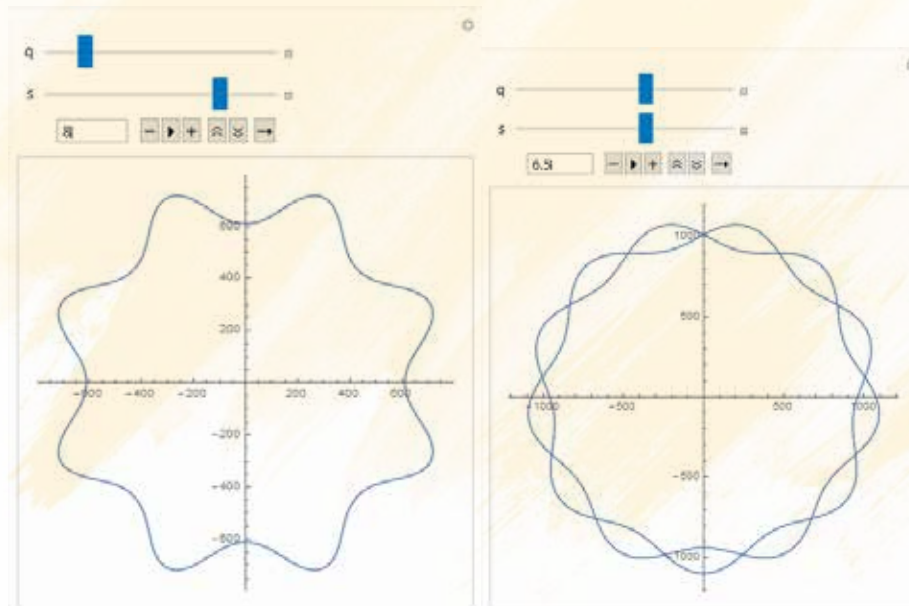
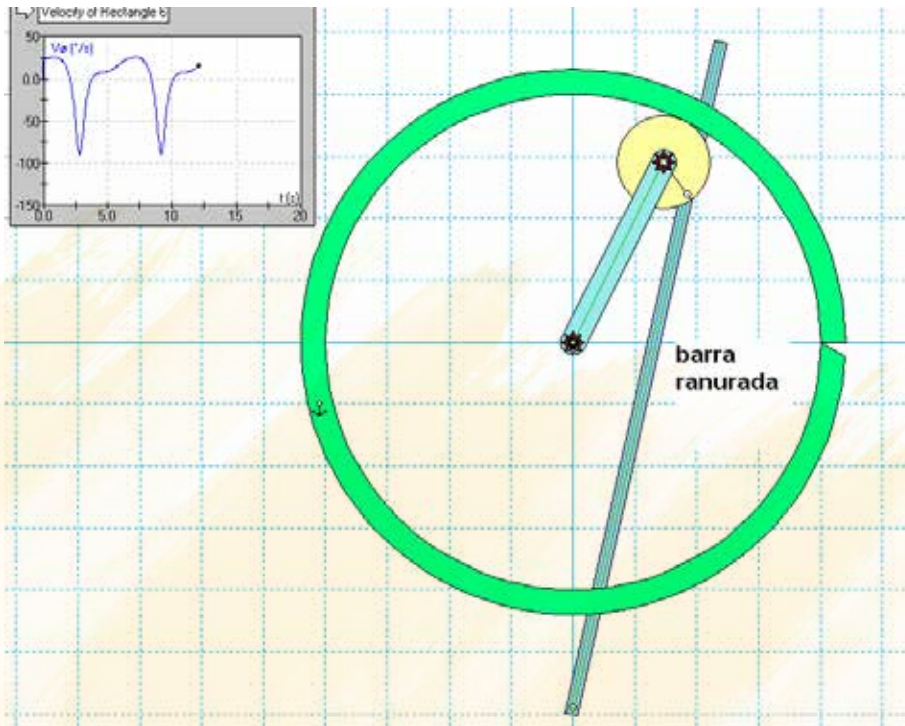
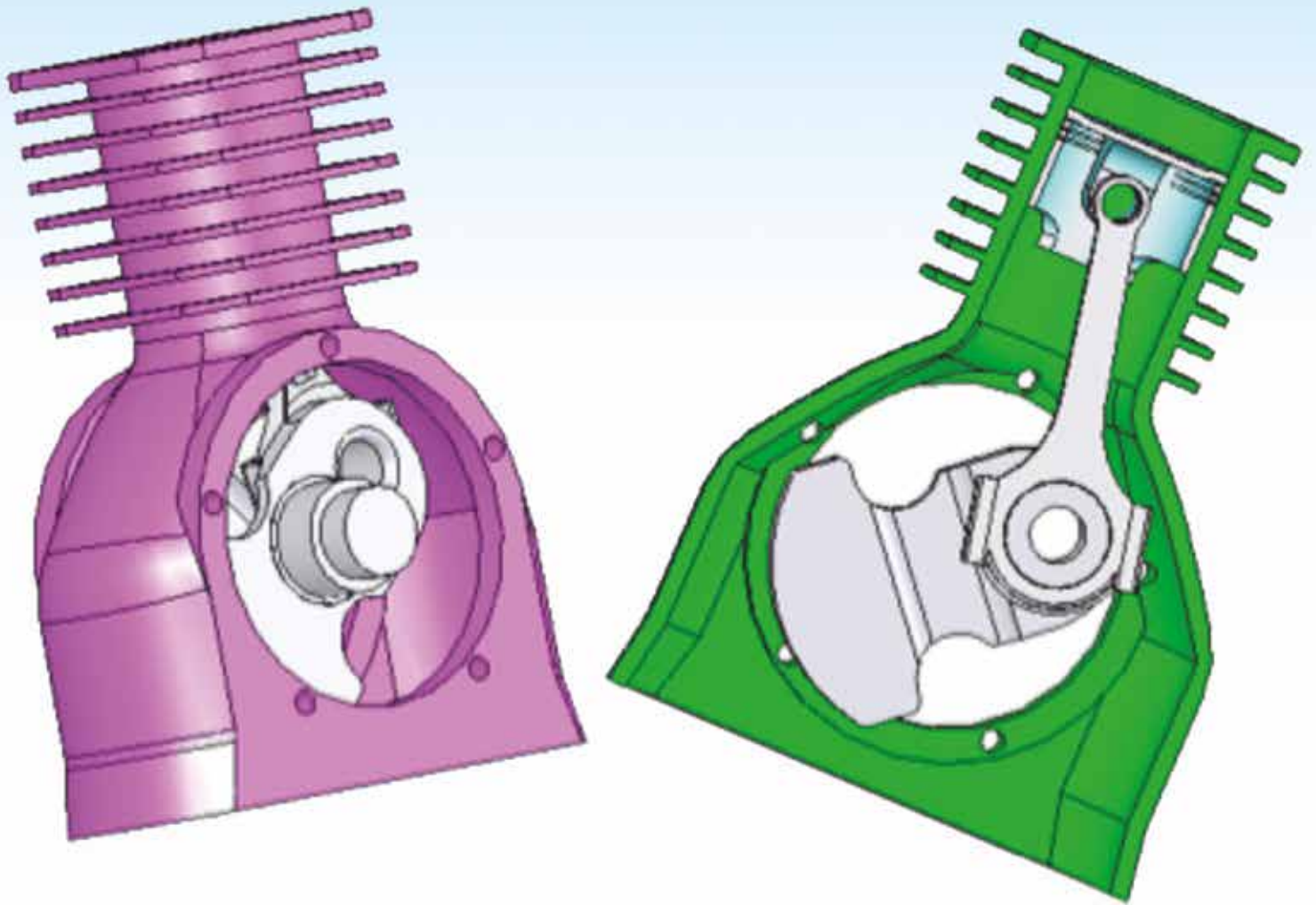


Figura 3.21. Otras posibilidades

3.3.4 TAREA PARA EL ESTUDIANTE

11. En el mecanismo anterior sustituir la corona por una engrane solar y su planetario y efectuar el mismo análisis.
12. Efectuar el análisis cinemático en el siguiente mecanismo





CAPÍTULO 4

ANALISIS DE FUERZAS DINAMICAS

4.1. - INTRODUCCION

Todo el material revisado en el capítulo 1,2 y 3 desemboca en este capítulo. El análisis de fuerzas dinámicas es el siguiente paso en el que se deberá utilizar toda la información generada en el análisis cinemático de un mecanismo. En un mecanismo que gire a alta velocidad deberá precisarse fuerzas y momentos que actúan en los eslabones individuales, para especificar:

- La resistencia de los componentes
- El torque y la potencia necesaria del motor
- El tamaño del volante de inercia para minimizar el tamaño del motor
- Las fuerzas de sacudimiento y el aislamiento más adecuado con respecto al piso
- El balanceo del mecanismo para minimizar las fuerzas internas

El análisis de las fuerzas dinámicas se centra en la aplicación de las tres leyes de movimiento de Newton especialmente la segunda ley, definida como:

$$\sum F = ma \quad (4.1)$$

$$\sum T = I_{CG} \alpha \quad (4.2)$$

Donde $a \left[\frac{mm}{s^2} \right]$ es la aceleración, $m [kg]$ es la masa, $\alpha \left[\frac{rad}{s^2} \right]$ es la aceleración angular, $I_{CG} [kg \text{ mm}^2]$ es el momento de inercia. Estas ecuaciones aplicadas a cada eslabón conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas.

4.1.1. PARÁMETROS INERCIALES

Los eslabones de una máquina suelen ser complicados, sin embargo para el análisis de fuerzas dinámicas se opta por un sistema simplificado consistente en un conjunto de masas puntuales unidas por líneas inateriales o una masa global en el centro de gravedad del cuerpo. Para que este sistema sea dinámicamente equivalente es necesario que:

- La masa del modelo sea igual a la masa del eslabón, la masa del eslabón se supone en una primera aproximación dando un tamaño y forma razonable. La masa se calcula multiplicando la densidad por el volumen:

Material	Densidad en kg/ m ³
Acero	7850
Aluminio	2698
Bronce	8900
Titanio	4506
Polipropileno	915

Tabla 4.1. Densidades de algunos materiales típicos.

Se debe recordar que añadir masa en un sistema dinámico con el objeto de hacer el cuerpo más robusto tiene el efecto contraproducente de incrementar las fuerzas inerciales.

- El centro de gravedad CG debe estar en la misma ubicación que en el cuerpo original. Se necesita calcular el CG de todos los eslabones de nuestro diseño, esto se lo puede hacer utilizando las fórmulas de integración conocida o mediante el modelado de sólidos con cualquier programa CAD.

- El momento de inercia debe ser igual al del cuerpo original. El momento de inercia es un indicador de la capacidad de almacenar Energía Cinética Rotacional, y también la capacidad del Torque necesario para acelerar angularmente un cuerpo.

4.2 ANÁLISIS DINAMICO DE UN COMPRESOR ALTERNATIVO

La asimilación del procedimiento del análisis dinámico en cualquier máquina se lo hará a través de un estudio de caso práctico. El cual consistirá en realizar un análisis dinámico del mecanismo biela manivela de un compresor figura 4.1, a partir de los datos iniciales se efectuará el modelamiento en un software CAD, para especificar centros de gravedad, masas e Inercias

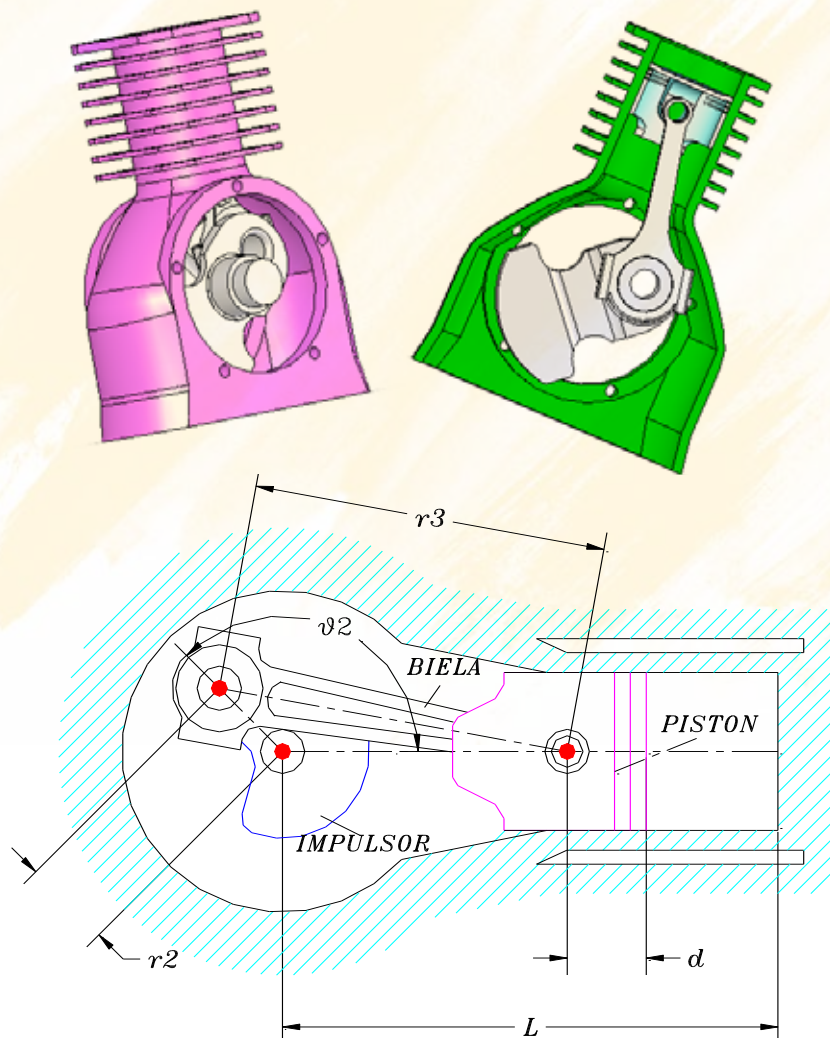


Figura 4.1. Mecanismo biela manivela de un compresor

4.2.1 DATOS DEL PROBLEMA

$$\begin{aligned}\omega_2 &= 1500 \text{ rpm} \\ r_2 &= 40 \text{ mm} \\ r_3 &= 140 \text{ mm} \\ \text{diámetro del cilindro} &= 73 \text{ mm} \\ L &= 212.5 \text{ mm} \\ d &= 20 \text{ mm} \\ \text{aceleración angular } \alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

4.2.2. CÁLCULO DE LA FUERZA ESTÁTICA EXTERNA DEBIDO A LA PRESIÓN DEL AIRE

Es imprescindible conocer la sollicitación externa a la que va estar sometidos una máquina o mecanismo. El compresor de nuestro estudio debe comprimir aire que ingresa a su cámara. Para determinar la fuerza se utilizará la ecuación de los gases para un proceso politrópico.

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \quad (4.3)$$

Donde p_1 es la presión atmosférica y v_1 es el volumen del cilindro expandido hasta el punto muerto inferior definido como V_{max} . Si la biela está extendida se tiene que el volumen máximo V_{max} es:

$$V_{max} = A (L + r_2 - r_3 - d) \quad (4.4)$$

Mientras que p_2, v_2 sería la presión y volumen del gas comprimido en el punto muerto superior o en cualquier otro lugar. Utilizando la ecuación del desplazamiento del pistón para cualquier ángulo y la presión atmosférica p_{atm} de 101325 Pa y aplicando las expresiones conocidas de la cinemática.

$$x = r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \sqrt{1 - \left(\frac{r_2}{r_3} \sin(\theta_2)\right)^2} \quad (4.5)$$

$$V = A (L - d - x) \quad (4.6)$$

La presión relativa reemplazando 4.6 y 4.4 en 4.3 es:

$$presion = patm \left[\left(\frac{V_{max}}{V} \right)^{1.13} - 1 \right] \quad (4.7)$$

El exponente de la ley de los gases es asumido como de 1.13, puesto que el proceso no es ni isotérmico ($k=1$) ni adiabático ($k=1.4$). Combinando estas funciones y utilizando la expresión para funciones discontinuas que expresa que la presión se verifica solo cuando las válvulas del compresor se cierran y se obtiene:

$$presión(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } \theta \leq \pi \\ patm \left[\left(\frac{V_{max}}{V} \right)^{1.13} - 1 \right] \text{ si } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

4.2.3. PROGRAMA EN WOLFRAM MATHEMATICA PARA EL CALCULO DE LA FUERZA ESTÁTICA EXTERNA

```

w2 = 1500 2 π / 60;
r2 = 40;
r3 = 140;
Diámetro = 73;
L = 212.5;
d = 20;
A = π/4 Diámetro^2;
Patm = 0.1013;
x = r2 Cos[θ] + r3 Sqrt[1 - (r2/r3 Sin[θ])^2];
Vmax = A (L + r2 - r3 - d);
V = A (L - d - x);
presión = Piecewise[{{0, θ <= π}, {Patm *((Vmax/V)^1.13 - 1), θ <= 2 π}}];
Fuerza = presión A;
Plot[{Fuerza}, {θ, 0, 2.2 π}, PlotRange -> All]

```

La fuerza del gas en el pistón y cabeza del cilindro debido a la presión se la obtiene multiplicando la presión por el área entonces:

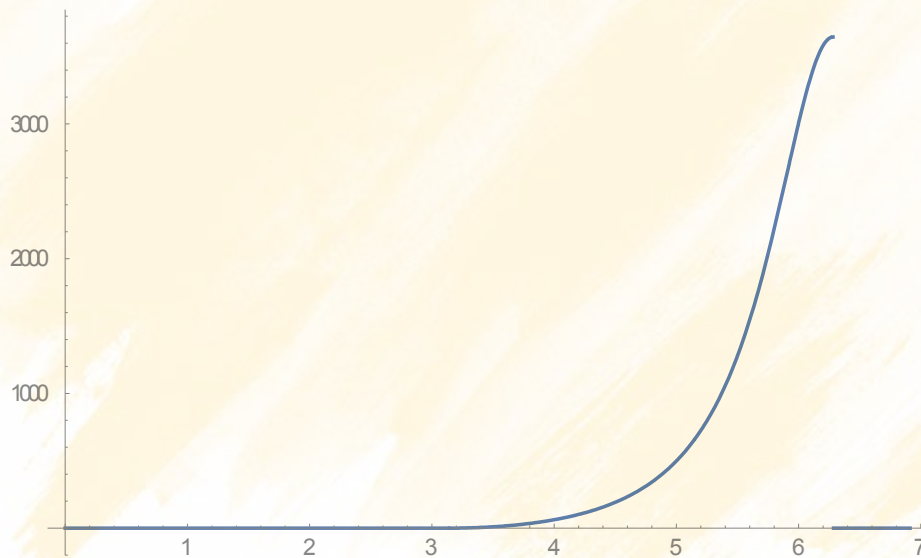


Figura 4.2. Fuerza externa en el compresor

Donde se aprecia que la fuerza máxima debido a los gases es de 3647 N. Para caracterizar nuestro compresor se valora el **volumen de desplazamiento** que es el volumen barrido en la unidad de tiempo por la cara o caras del pistón de la primera etapa, en el caso de doble efecto, hay que tener en cuenta el vástago del pistón. El volumen desplazado VD por un compresor es el volumen de la cilindrada de la máquina multiplicado por el número de revoluciones de la misma.

Para las dimensiones dadas:

$$V_{min} = A (L - r_2 - r_3 - d) \quad (4.9)$$

$$Q = (V_{max} - V_{min}) \omega_2 \frac{60}{2\pi} \frac{1}{0.3048^3} = 17.737 \text{ cfm} \quad (4.10)$$

El caudal es de 17.737 cfm.

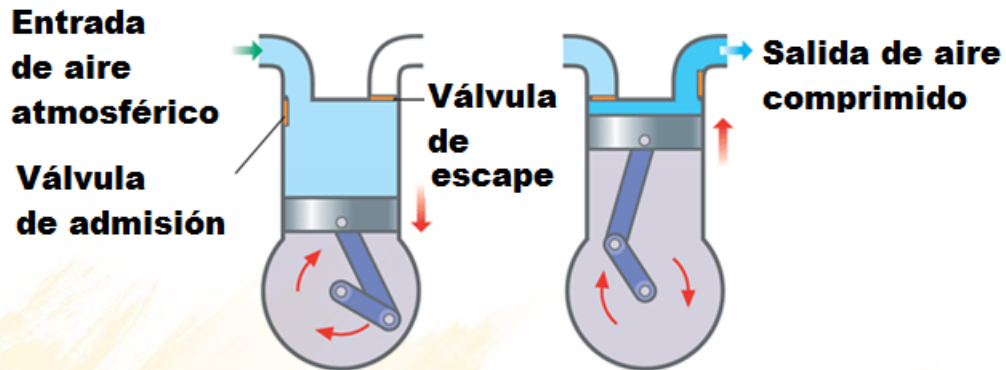


Figura 4.3. Esquema del funcionamiento de un compresor alternativo¹⁶

4.2.4. MODELADO DE LOS ESLABONES EN SOFTWARE CAD

A continuación se efectúa la determinación de los parámetros inerciales de los eslabonamientos principales, para obtener los modelos dinámicos de cada uno.

- **ANÁLISIS DE LA BIELA**

El modelo CAD está realizado en SolidWorks.

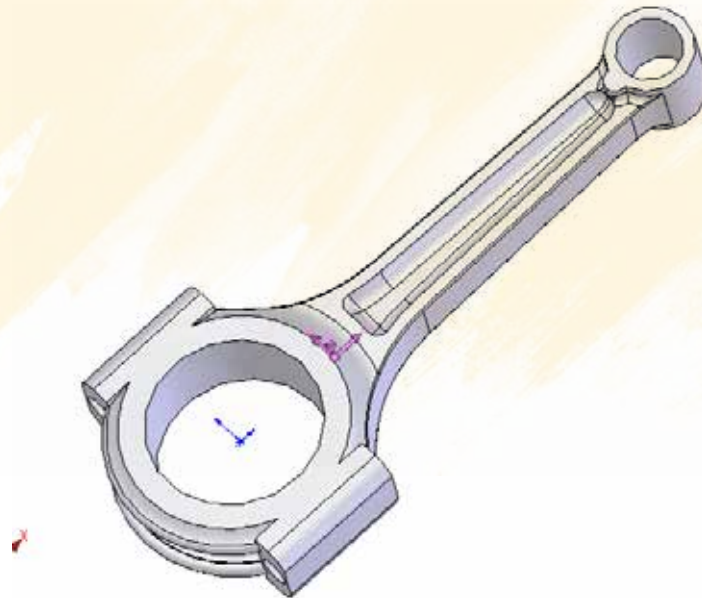


Figura 4.4. Biela dibujada en SolidWorks

En la barra de comandos principal se encuentra la opción **Herramientas** y en esta a su vez la opción **Propiedades Físicas**, que se despliega de esta forma:

¹⁶ <https://sites.google.com/site/aire135jovanipablo/home/5-2-compresores-o-generadores-de-aire-comprimido>

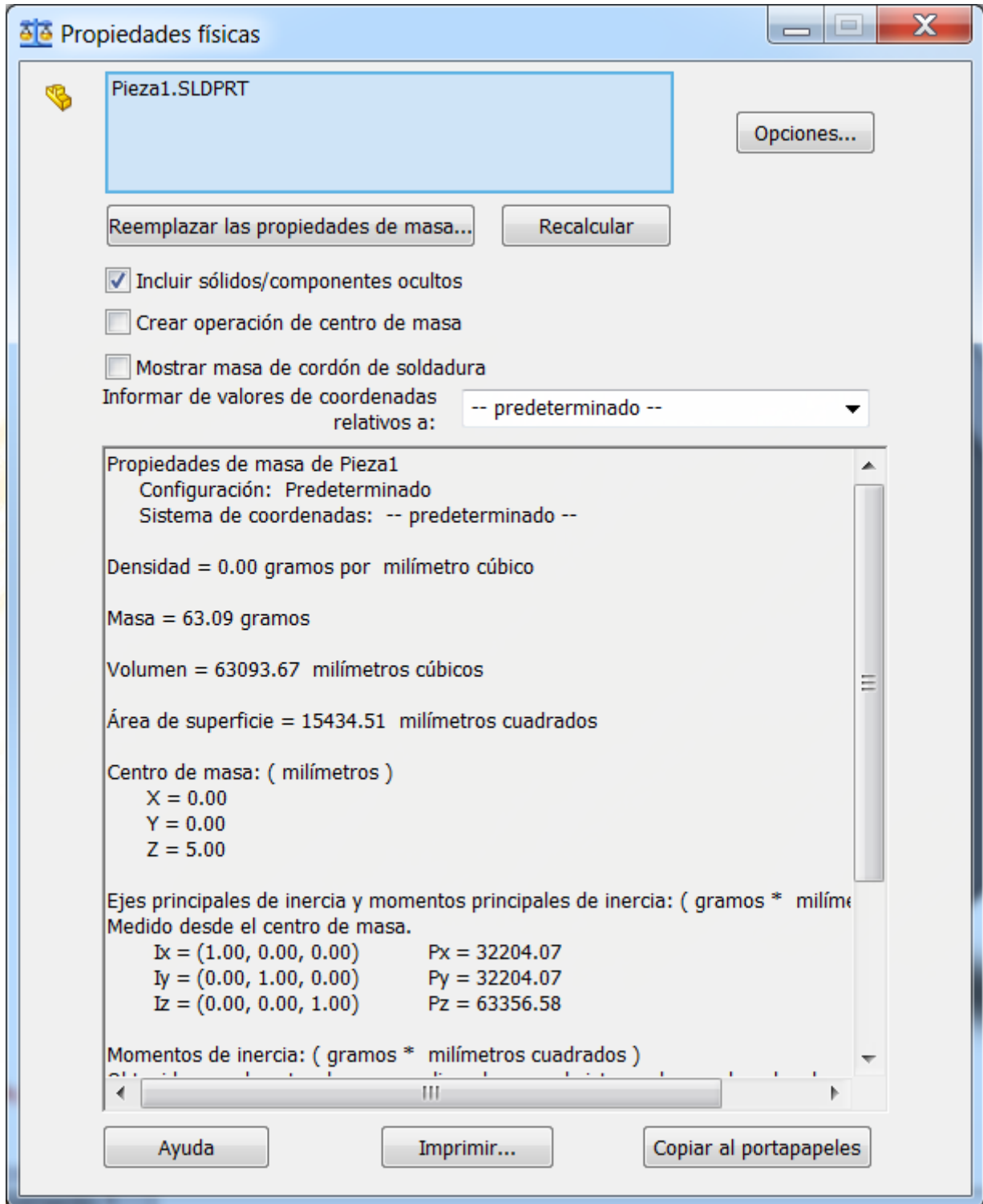


Figura 4.5. Barra de comandos de propiedades físicas¹⁷

¹⁷ SolidWorks

En el botón **opciones** se cambia la densidad del material

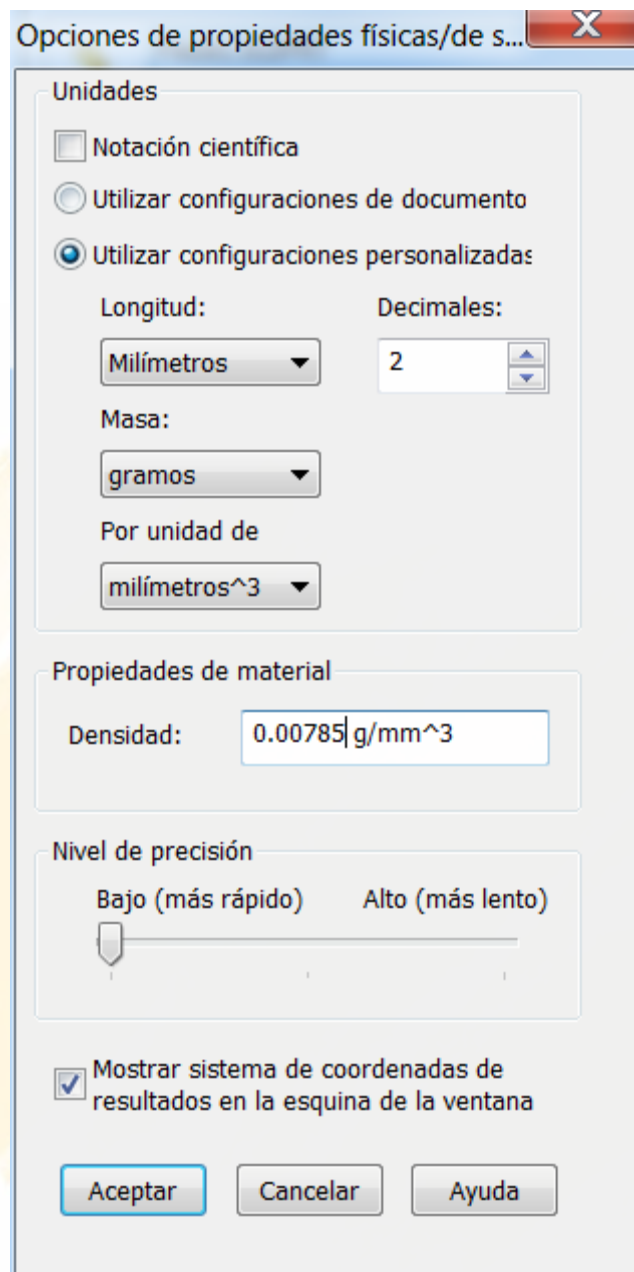


Figura 4.6. Menú de edición de propiedades del material (SolidWorks)

Y se generan las propiedades inerciales del elemento:

Propiedades físicas de BIELA (Part Configuration - Predeterminado)		
Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --		
Densidad = 7850.00000000 kilogramos por metro cúbico		
Masa = 0.49774743 kilogramos		
Volumen = 0.00006341 metros^3		
Área de superficie = 0.02380753 metros^2		
Centro de masa: (metros)		
X = 0.03174790		
Y = 0.00000000		
Z = 0.00000000		
Ejes principales de inercia y momentos principales de inercia: (kilogramos * metros^2)		
Medido desde el centro de masa.		
lx = (1.00000000, 0.00000000, 0.00000000)	Px = 0.00018685	
ly = (0.00000000, 1.00000000, 0.00000000)	Py = 0.00123022	
lz = (0.00000000, 0.00000000, 1.00000000)	Pz = 0.00138443	
Momentos de inercia: (kilogramos * metros^2)		
(Medido desde el centro de masa y alineado con el sistema de coordenadas resultante)		
Lxx = 0.00018685	Lxy = 0.00000000	Lxz = 0.00000000
Lyx = 0.00000000	Lyy = 0.00123022	Lyz = 0.00000000
Lzx = 0.00000000	Lzy = 0.00000000	Lzz = 0.00138443
Momentos de inercia: (kilogramos * metros^2)		
Medido desde el sistema de coordenadas de salida.		
lxx = 0.00018685	lxy = 0.00000000	lxz = 0.00000000
lyx = 0.00000000	lyy = 0.00173192	lyz = 0.00000000
lzx = 0.00000000	lzy = 0.00000000	lzz = 0.00188613

Tabla 4.2. Propiedades inerciales de la biela

Los términos resaltados en rojo son los que interesan:

$$m_3 = 0.497 \text{ kg}, \quad I_{CG3} = 0.00188 \text{ kg m}^2 = 1886.13 \text{ kg mm}^2, \quad r_{CG3} = 31.748 \text{ mm}$$

Con estos datos se construye el modeló dinámico de la biela:

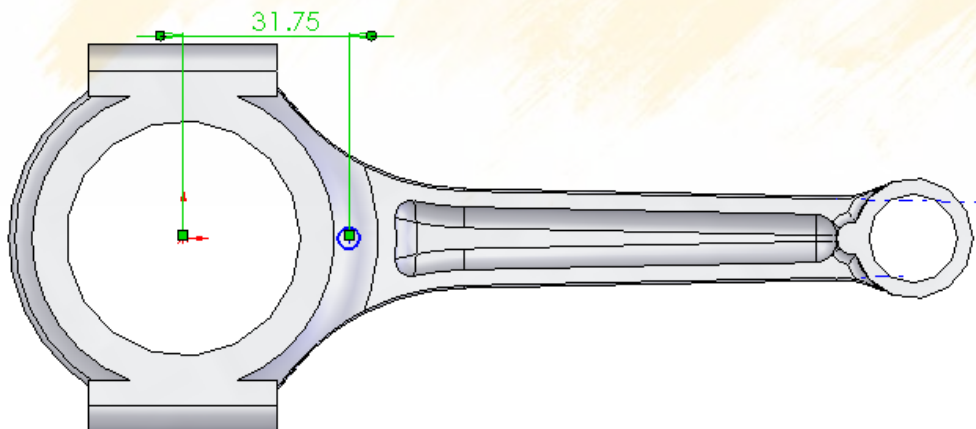


Figura 4.7. Biela o acoplador

Y el modelo de péndulo doble con el objeto de balancear el mecanismo manivela corredera será:

$$l = 140 \text{ mm}; \quad l_a = 31.75 \text{ mm}; \quad l_b = l - l_a = 108.252 \text{ mm}$$

$$m_{3a} = m_3 \frac{l_b}{l} = 0.385 \text{ kg}; \quad m_{3b} = m_3 \frac{l_a}{l} = 0.113 \text{ kg} \quad (4.11)$$

La inercia calculada con el modelo de péndulo doble, es ligeramente inferior al modelo real.

$$I_{CG3} = m_{3a} [l_a]^2 + m_{3b} [l_b]^2 = 1711 \text{ kg mm}^2; \quad (4.12)$$

- **ANALISIS DEL PISTON**

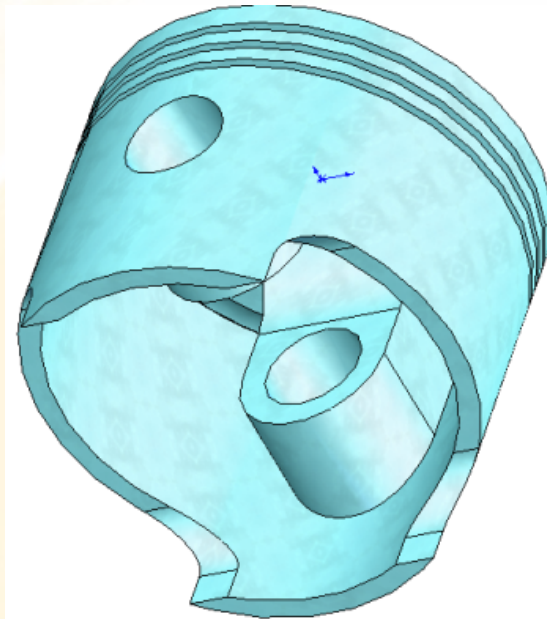


Figura 4.8. Pistón

Utilizando la densidad del aluminio de 2700 Kg. /m³ y evaluando de la misma manera se obtiene:

Propiedades físicas de PISTÓN (Part Configuration - Predeterminado)
 Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --
 Densidad = 2700.00000 kilogramos por metro cúbico
Masa = 0.18973 kilogramos
 Volumen = 0.00007 metros³
 Área de superficie = 0.03746 metros²
 Centro de masa: (metros)
 X = 0.00000
 Y = 0.00000
 Z = -0.01944
 Ejes principales de inercia y momentos principales de inercia: (kilogramos * metros²)
 Medido desde el centro de masa.
 I_x = (1.00000, -0.00001, -0.00000) P_x = 0.00011

$I_y = (0.00001, 1.00000, 0.00000)$	$P_y = 0.00014$
$I_z = (0.00000, 0.00000, 1.00000)$	$P_z = 0.00016$
Momentos de inercia: (kilogramos * metros ²)	
(Medido desde el centro de masa y alineado con el sistema de coordenadas resultante)	
$L_{xx} = 0.00011$	$L_{xy} = 0.00000$
$L_{yx} = 0.00000$	$L_{yy} = 0.00014$
$L_{zx} = 0.00000$	$L_{zy} = 0.00000$
$L_{xz} = 0.00000$	$L_{zz} = 0.00016$
Momentos de inercia: (kilogramos * metros ²)	
Medido desde el sistema de coordenadas de salida.	
$I_{xx} = 0.00018$	$I_{xy} = 0.00000$
$I_{yx} = 0.00000$	$I_{yy} = 0.00021$
$I_{zx} = 0.00000$	$I_{zy} = 0.00000$
$I_{xz} = 0.00000$	$I_{zz} = 0.00016$

Tabla 4.3. Propiedades inerciales del pistón

El único dato que se necesita es la masa ya que el pistón no rota. $m_4 = 0.189 \text{ kg}$

• **ANÁLISIS DE LA MANIVELA**

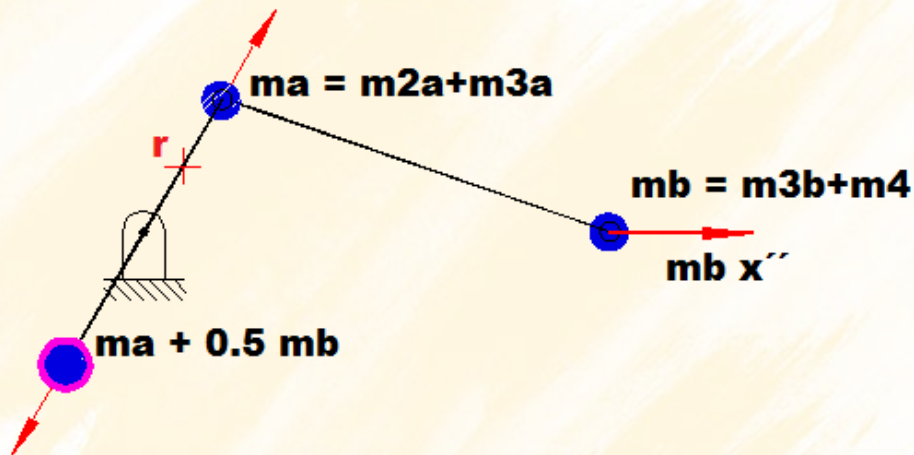


Figura 4.9. Esquema para efectuar el balanceo del mecanismo, caso sobre equilibrado¹⁸

La figura 4.9 representa la configuración de las masas para lograr un balanceo en el mecanismo. El mecanismo será diseñado para que este sobre equilibrado con un factor de 0.5 m_b ; por lo tanto el desbalance rotacional que debe tener la manivela estará dado por:

$$m r = [m_{2a}r_2 - (m_{2a} + m_{3a} + m_p)r_2] = -(m_{3a} + 0.5 m_b) r_2 \quad (4.13)$$

$$= -[m_{3a} + 0.5 (m_{3b} + m_4)] r_2$$

Reemplazando los datos previos de 4.11 en la ecuación 4.13, el desbalance rotacional en el lado del contrapeso será:

$$m r = -[m_{3a} + 0.5 (m_{3b} + m_4)] r_2 = -0.021 \text{ kg m} \quad (4.14)$$

Y con este parámetro se puede modelar la manivela con el contrapeso apropiado

¹⁸ Guías de práctica, Laboratorio de mecanismos

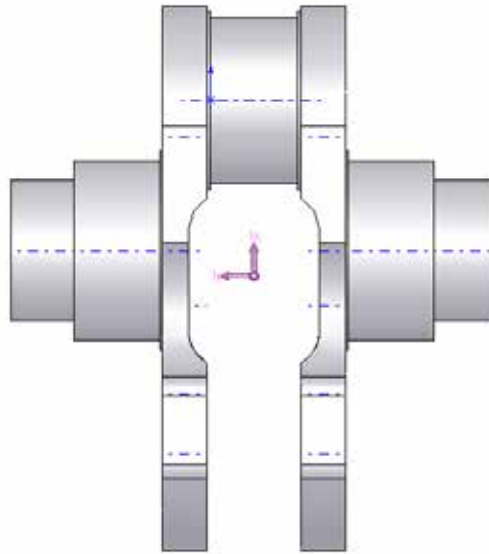


Figura 4.10. Modelado de la manivela

Cuyas propiedades inerciales son:

Propiedades físicas de manivela (Part Configuration - Predeterminado)	
Sistema de coordenadas de salida: -- predeterminado --	
Densidad = 0.00001 kilogramos por milímetro cúbico	
Masa = 2.94766 kilogramos	
Volumen = 0.00038 metros ³	
Área de superficie = 0.06817 metros ²	
Centro de masa: (metros)	
X = -0.00026	
Y = -0.04677	
Z = -0.01150	
Ejes principales de inercia y momentos principales de inercia: (kilogramos * metros ²)	
Medido desde el centro de masa.	
lx = (0.01179, 0.99993, 0.00000)	Px = 0.00382
ly = (0.00000, 0.00000, 1.00000)	Py = 0.00512
lz = (0.99993, -0.01179, 0.00000)	Pz = 0.00638
Momentos de inercia: (kilogramos * metros ²)	
(Medido desde el centro de masa y alineado con el sistema de coordenadas resultante)	
Lxx = 0.00638	Lxy = 0.00003
Lyy = 0.00003	Lyz = 0.00000
Lzz = 0.00512	Lzx = 0.00000
Momentos de inercia: (kilogramos * metros ²)	
Medido desde el sistema de coordenadas de salida.	
lxx = 0.01322	lxy = 0.00007
lyx = 0.00007	lyy = 0.00421
lzz = 0.00001	lyz = 0.00159
	lzz = 0.01156

Tabla 4.4. Propiedades inerciales manivela

De esta tabla se obtienen los siguientes datos:

$$m_2 = 3.95 \text{ kg}, \quad I_{CG2} = 0.01156 \text{ kg m}^2 = 11560 \text{ kg mm}^2, \quad r_{CG2} = r_2 - 46.77 \text{ mm}$$

$$= -6.77 \text{ mm}$$

El resumen definitivo de los parámetros inerciales que se utilizan en el cálculo es:

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= 1500 \text{ rpm} \\
 r_2 &= 40 \text{ mm} \\
 m_2 &= 3.95 \text{ kg} \\
 I_{CG2} &= 11560 \text{ kg mm}^2 \\
 r_3 &= 140 \text{ mm} \\
 m_3 &= 0.497 \text{ kg} \\
 I_{CG3} &= 1886.13 \text{ kg mm}^2 \\
 r_{CG2} &= -6.77 \text{ mm} \\
 r_{CG3} &= 31.748 \text{ mm} \\
 m_4 &= 0.189 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

4.2.5. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL IMPULSOR O MANIVELA

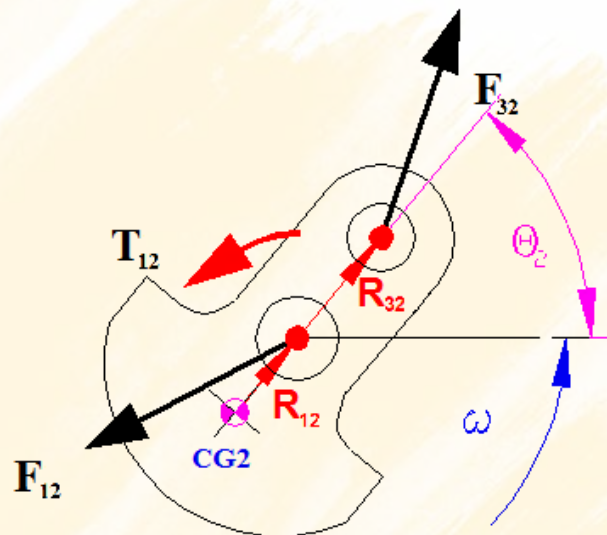


Figura 4.11. Diagrama de cuerpo libre de la manivela

Dónde:

F_{12} representa la fuerza de reacción que ejerce el bastidor 1 sobre el elemento 2.

F_{32} es la fuerza de reacción del elemento 3 sobre el elemento 2.

T_{12} es el Torque externo que necesitamos aplicar al mecanismo para que pueda girar a esa velocidad dada y para que venza la fuerza externa F .

R_{32} es el vector de posición desde el centro de gravedad a la F_{32} .

R_{12} es el vector de posición desde el centro de gravedad a la F_{12} .

Utilizando la segunda ley de Newton planteamos las condiciones de equilibrio:

$$\sum F_x = m_2 \cdot a_{CG2x} \quad (4.15)$$

$$\sum F_y = m_2 \cdot a_{CG2y} \quad (4.16)$$

La expresión de la aceleración del centro de gravedad de la manivela 2 es la siguiente:

$$a_{CG2}(\theta) = r_{CG2} \cdot \alpha_2 \cdot i e^{i\theta} - r_{CG2} \cdot \omega_2^2 \cdot e^{i\theta} \quad (4.17)$$

Se asume que $\alpha_2 = 0$, por cuanto el compresor es operado por un motor eléctrico a velocidad constante.

Por lo tanto se tiene las dos componentes reales e imaginarias:

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 \cdot a_{CG2x} = -m_2 r_{CG2} \cdot \omega_2^2 \cos(\theta) \quad (4.18)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 \cdot a_{CG2y} = -m_2 r_{CG2} \cdot \omega_2^2 \sin(\theta) \quad (4.19)$$

La segunda ley de Newton aplicada a elementos rotatorios dice:

$$\sum T = I_{CG2} \alpha_2 \quad (4.20)$$

$$T_{12} + R_{32x} \otimes F_{32y} + R_{12y} \otimes F_{12x} = I_{CG2} \alpha_2 \quad (4.21)$$

$$T_{12} + [R_{32x} F_{32y} - R_{32y} F_{32x}] + [R_{12x} F_{12y} - R_{12y} F_{12x}] = I_G \alpha_2 = 0 \quad (4.22)$$

Es importante también definir R_{32x} , R_{32y} , R_{12x} y R_{12y} , puesto que r_{CG2} esta hacia afuera de r_2 se lo toma como un valor negativo

$$R_{32x} = [r_2 - r_{CG2}] \cos(\theta) \quad (4.23)$$

$$R_{32y} = [r_2 - r_{CG2}] \sin(\theta) \quad (4.24)$$

$$R_{12x} = [-r_{CG2}] \cos(\theta) \quad (4.25)$$

$$R_{12y} = [-r_{CG2}] \sin(\theta) \quad (4.26)$$

Para r_{CG2} considerar un valor de -6.77 mm. Resumiendo se obtienen las tres primeras ecuaciones vectoriales con cinco incógnitas:

$$F_{12x} + F_{32x} = -m_2 r_{CG2} \cdot \omega_2^2 \cos(\theta) \quad (4.27)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = -m_2 r_{CG2} \cdot \omega_2^2 \sin(\theta)$$

$$T_{12} + [R_{32x} F_{32y} - R_{32y} F_{32x}] + [R_{12x} F_{12y} - R_{12y} F_{12x}] = 0$$

4.2.6. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL ACOPLADOR O BIELA

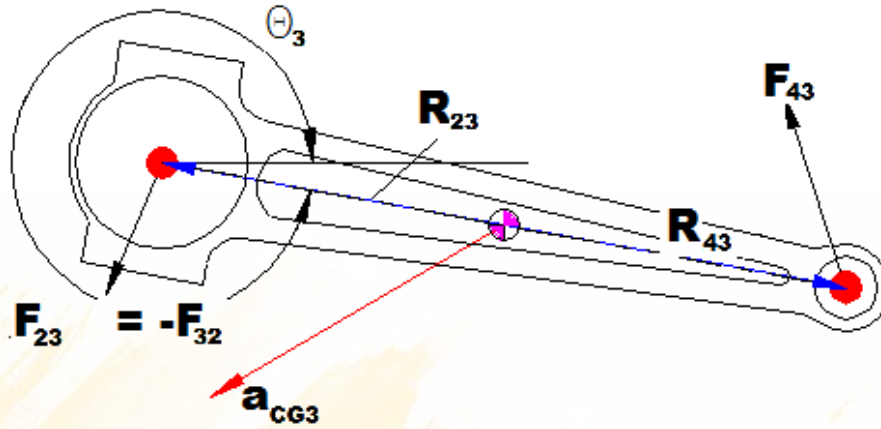


Figura 4.12. Diagrama de cuerpo libre de la biela

De acuerdo a la tercera ley de Newton $F_{23} = -F_{32}$ con lo que se eliminarán incógnitas adicionales:

$$\sum F_x = m_3 \cdot a_{CG3x} \quad (4.28)$$

$$\sum F_y = m_3 \cdot a_{CG3y} \quad (4.29)$$

$$F_{43x} - F_{32x} = m_3 \cdot a_{CG3x} \quad (4.30)$$

$$F_{43y} - F_{32y} = m_3 \cdot a_{CG3y} \quad (4.31)$$

$$\sum T = I_{CG3} \alpha_3 \quad (4.32)$$

$$-R_{23} \otimes F_{32} + R_{43} \otimes F_{43} = I_{CG3} \alpha_3 \quad (4.33)$$

$$-[R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}] + [R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}] = I_{CG3} \alpha_3 \quad (4.34)$$

Los vectores de posición tienen los siguientes valores:

$$R_{23x} = [-r_{CG3}] \cos(\theta_3) \quad (4.35)$$

$$R_{23y} = [-r_{CG3}] \sin(\theta_3) \quad (4.36)$$

$$R_{43x} = [r_3 - r_{CG3}] \cos(\theta_3) \quad (4.37)$$

$$R_{43y} = [r_3 - r_{CG3}] \sin(\theta_3) \quad (4.38)$$

Se obtiene 3 ecuaciones vectoriales adicionales, en total 6 ecuaciones con 7 incógnitas:

$$F_{43x} - F_{32x} = m_3 \cdot a_{CG3x} \quad (4.39)$$

$$F_{43y} - F_{32y} = m_{32} \cdot a_{CG3y}$$

$$-[R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}] + [R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}] = I_{CG3} \alpha_3$$

• **DETERMINACION DE a_{CG3x} , a_{CG3y}**

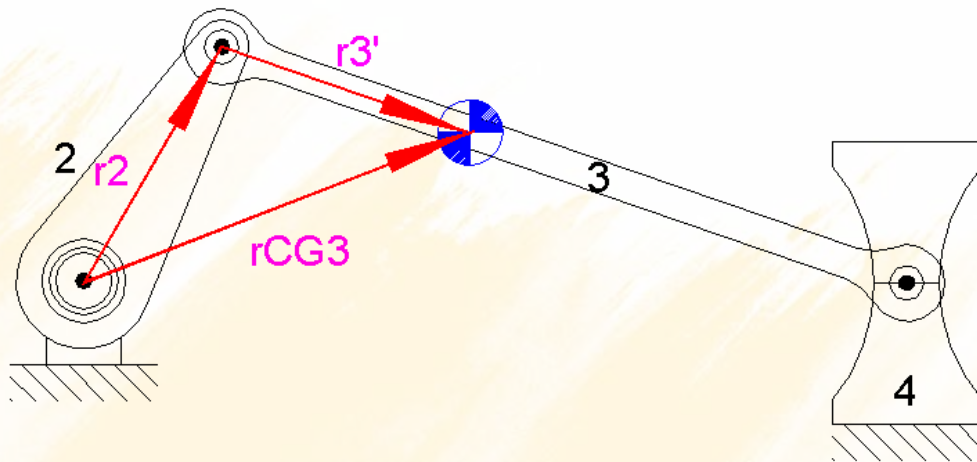


Figura 4.13. Diagrama vectorial aceleración centro de gravedad barra

Derivando el vector de posición r_{CG3} dos veces, obtenemos la aceleración del centro de gravedad

$$a_{CG3x}(\theta_2) = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2) - r_{3p} \cdot \omega_3(\theta_2)^2 \cdot \cos(\theta_3(\theta_2)) - r_{3p} \cdot \alpha_3(\theta_2) \cdot \sin(\theta_3(\theta_2)) \quad (4.40)$$

$$a_{CG3y}(\theta_2) = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sin(\theta_2) - r_{3p} \cdot \omega_3(\theta_2)^2 \cdot \sin(\theta_3(\theta_2)) - r_{3p} \cdot \alpha_3(\theta_2) \cdot \cos(\theta_3(\theta_2)) \quad (4.41)$$

Donde

$$\theta_3 = \sin^{-1} \left(-\frac{r_2}{r_3} \sin(\theta_2) \right)$$

$$\omega_3(\theta_2) = \omega_2 \frac{-r_2 \cos(\theta_2)}{r_3 \cos(\theta_3(\theta_2))}$$

$$\alpha_3(\theta_2) = \frac{r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sin(\theta_2) + r_3 \cdot \omega_3(\theta_2)^2 \cdot \sin(\theta_3(\theta_2))}{r_3 \cdot \cos(\theta_3(\theta_2))}$$

4.2.7. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL PISTON

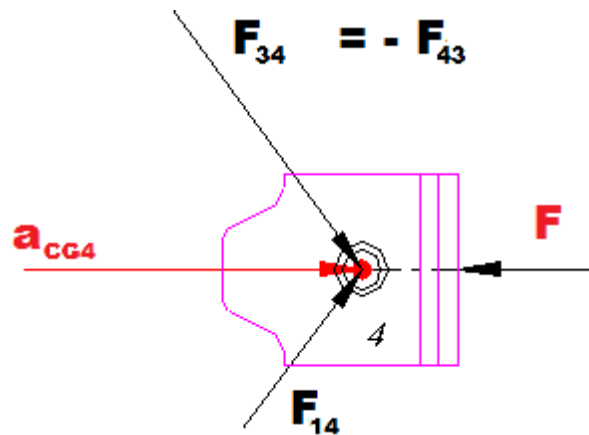


Figura 4.14. Diagrama de cuerpo libre del pistón

$$\sum F_x = m_4 \cdot a_{CG4x} \quad (4.42)$$

$$F_{14x} - F_{43x} - F = m_4 \cdot a_{CG4x} \quad (4.43)$$

$$\sum F_y = m_4 \cdot a_{CG4y} \quad (4.44)$$

Puesto que no existe desplazamiento en y

$$F_{14y} - F_{43y} = 0 \quad (4.45)$$

Resumiendo se tiene en total 8 ecuaciones y 9 incógnitas, para poder eliminar una incógnita, se utiliza el concepto de fuerza normal y fuerza de fricción.

$$N = F_{14y} \quad (4.46)$$

$$\pm \mu N = F_{14x}; \pm \mu F_{14y} = F_{14x} \quad (4.47)$$

Por tanto reemplazando 4.47 en 4.43 se obtiene 4.48

$$\pm \mu F_{14y} - F_{43x} - F = m_4 \cdot a_{CG4x} \quad (4.48)$$

Y de esta manera son compatibles las ecuaciones con el número de incógnitas:

$$\pm \mu F_{14y} - F_{43x} - F = m_4 \cdot a_{CG4x} \quad (4.49)$$

$$F_{14y} - F_{43y} = 0$$

Es importante tomar en cuenta el signo de la fuerza de fricción $\pm \mu F_{14y}$. Si se conoce que la dirección de la fuerza de fricción está en sentido contrario al movimiento y si la rotación del compresor es en sentido contrario a las manecillas del reloj, De 0 a 180° de movimiento de la manivela se deberá utilizar el signo + y de 180 a 360° el signo -.

El coeficiente de fricción puede ser representado por la función siguiente, si la manivela gira en sentido CMR:

$$\mu(\theta) = \begin{cases} \mu & \text{si } \theta \leq \pi \\ -\mu & \text{si } \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.50)$$

Mathematica utiliza la función Piecewise para graficar las funciones discontinuas:

```

μ=0.1;
μ=Piecewise[{{μ,θ<=π},{-μ,θ<=2 π}}];
Plot[μ,{θ,0,2.2 π},PlotRange->All]

```

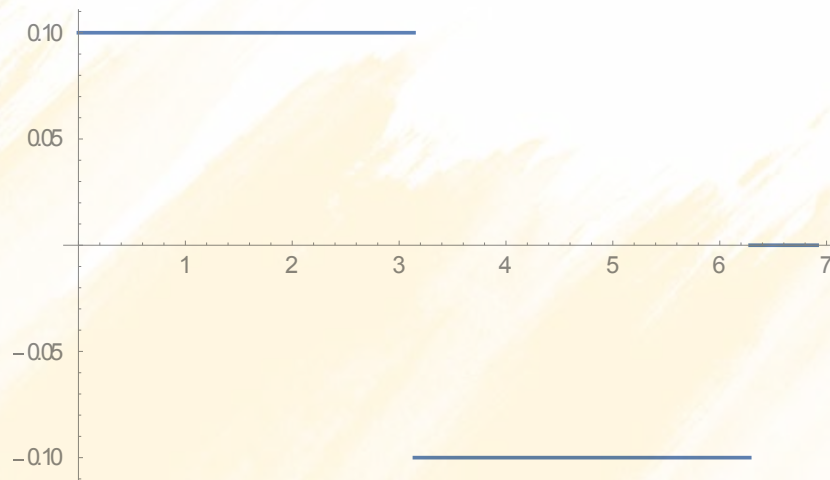


Figura 4.15. Fuerza de fricción

La a_{CG4x} es la aceleración del pistón determinada anteriormente en el capítulo 1:

$$ap(\theta_2) = -r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2) - r_3 \cdot \alpha_3(\theta_2) \cdot \text{sen}(\theta_3(\theta_2)) - r_3 \cdot \omega_3(\theta_2)^2 \cdot \cos(\theta_3(\theta_2)) \quad (4.51)$$

4.2.8. SOLUCION DE LAS ECUACIONES VECTORIALES

El siguiente paso es efectuar un arreglo matricial con las 8 ecuaciones vectoriales obtenidas, para lo cual se construye la siguiente tabla:

F_{12x}	F_{12y}	F_{32x}	F_{32y}	F_{43x}	F_{43y}	F_{14y}	T_{12}		Constantes
F_{12x}		F_{32x}						=	$m_2 a_{CG2x}$
	F_{12y}		F_{32y}					=	$m_2 a_{CG2y}$
$-R_{12y}F_{12x}$	$R_{12x}F_{12y}$	$-R_{32y}F_{32x}$	$R_{32x}F_{32y}$				T_{12}	=	0
		$-F_{32x}$		F_{43x}				=	$m_3 a_{CG3x}$
			$-F_{32y}$		F_{43y}			=	$m_3 a_{CG3y}$
		$R_{23y}F_{32x}$	$-R_{23x}F_{32y}$	$-R_{43y}F_{43x}$	$R_{43x}F_{43y}$			=	$I_{CG3} \alpha_3$
				$-F_{43x}$		$\pm \mu F_{14y}$		=	$m_4 a_{CG4x} + F$
					$-F_{43y}$	F_{14y}		=	0

Tabla 4.5. Arreglo de las ecuaciones a ser utilizadas

De la tabla anterior se genera un arreglo matricial donde todas las incógnitas, fuerzas y torques pasan a formar un vector columna.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \mu & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_2 a_{CG2x} \\
 m_2 a_{CG2y} \\
 0 \\
 m_3 a_{CG3x} \\
 m_3 a_{CG3y} \\
 I_{CG3} \alpha_3 \\
 m_4 a_{CG4x} + F \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Tabla 4.6. Arreglo matricial de las ecuaciones a ser utilizadas

Utilizando las propiedades de las matrices se tiene que:

$$[M(\theta)] [F(\theta)] = [C(\theta)] \Rightarrow [F(\theta)] = [M(\theta)]^{-1} [C(\theta)] \quad (4.52)$$

En Wolfram Mathematica las matrices y su solución se estructuran de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; Co = \begin{pmatrix} m_2 a_{CG2x} \\ m_2 a_{CG2y} \\ 0 \\ m_3 a_{CG3x} \\ m_3 a_{CG3y} \\ ICG3 \alpha_3 \\ m_4 a_p + Fuerza \\ 0 \end{pmatrix};$$

`F = LinearSolve[M, Co];`

`F12x = F[[1]]; F12y = F[[2]];`

`F32x = F[[3]]; F32y = F[[4]];`

`F43x = F[[5]]; F43y = F[[6]];`

`F14y = F[[7]]; F14x = μ F14y;`

`T12 = F[[8]];`

Tabla 4.7. Arreglo matricial en Wolfram Mathematica

4.2.9. PROGRAMACIÓN EN WOLFRAM MATHEMATICA

```

ClearAll
"Datos" ;
Diámetro=73/1000; L=212.5/1000;d=20/1000;
A=(π/4) Diámetro^2;
Patm=101325;
x=r2 Cos[θ]+r3 Sqrt[1-(r2/r3 Sin[θ])^2];
Vmax=A (L+r2-r3-d); V=A (L-d-x);
ω2=1500 2 π/60;
r2=40/1000; m2 = 3.95; ICG2= 0.01156;
r3=140/1000; m3= 0.497; ICG3 = 0.00188613;
rCG2 = -6.77/1000; rCG3 = 31.748/1000; m4 = 0.189;
"Fuerza Externa y Fricción" ;
presión=Piecewise[{{0,θ<=π},{Patm*((Vmax/V)^1.13-1),θ<=2 π}}];
Fuerza=presión A;
μ=0.1;
μ=Piecewise[{{μ,θ<=π},{-μ,θ<=2 π}}];
"Aceleraciones";
aCG2x = -m2 rCG2 ω2^2 Cos[θ]; aCG2y = -m2 rCG2 ω2^2 Sin[θ];
θ3=ArcSin[(-r2*Sin[θ])/r3];
ω3=-r2/r3*ω2*Cos[θ]/Cos[θ3];
α3=(r2*(ω2^2)*Sin[θ]+r3*((ω3)^2)*Sin[θ3])/(r3*(Cos[θ3]));
aCG3x=-r2*(ω2^2)*Cos[θ]-rCG3*α3*Sin[θ3]-rCG3*((ω3)^2)*Cos[θ3];
aCG3y=-r2*(ω2^2)*Sin[θ]-rCG3*α3*Cos[θ3]+rCG3*((ω3)^2)*Sin[θ3];
ap=-r2*(ω2^2)*Cos[θ]-r3*α3*Sin[θ3]-r3*((ω3)^2)*Cos[θ3];
"Distancias"
R32x = (r2-rCG2) Cos[θ]; R32y = (r2-rCG2) Sin[θ];
R12x = -rCG2 Cos[θ]; R12y = -rCG2 Sin[θ];
R23x = -rCG3 Cos[θ3]; R23y = -rCG3 Sin[θ3];
R43x = (r3-rCG3) Cos[θ3]; R43y = (r3-rCG3) Sin[θ3];
M = ( { {1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0}, {-R12y, R12x, -R32y, R32x, 0, 0, 0, 1},
{0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, R23y, -R23x, -R43y, R43x, 0, 0},
{0, 0, 0, 0, -1, 0, μ, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0} } );
Co = ( { {m2 aCG2x}, {m2 aCG2y}, {0}, {m3 aCG3x}, {m3 aCG3y}, {ICG3 α3}, {m4 ap + Fuerza}, {0} } );
F=LinearSolve[M,Co];
F12x=F[[1]]; F12y=F[[2]];
F32x=F[[3]]; F32y=F[[4]];
F43x=F[[5]]; F43y=F[[6]];
F14y=F[[7]]; F14x = μ F14y;
T12=F[[8]];
F12 = Sqrt[F12x^2 + F12y^2] ; PolarPlot[F12,{θ,0,2 π},PlotLabel->"F12"]
F32 =Sqrt[F32x^2 + F32y^2] ;PolarPlot[F32,{θ,0,2 π},PlotLabel->"F32"]
F43 =Sqrt[F43x^2 + F43y^2] ;PolarPlot[F43,{θ,0,2 π},PlotLabel->"F43"]
F14 =Sqrt[F14x^2 + F14y^2] ;PolarPlot[F43,{θ,0,2 π},PlotLabel->"F14"
Plot[{T12},{θ,0,2 π}, PlotRange->All, PlotLabel->"Torque"]
Tmed = NIntegrate[T12/(2π),{θ,0,6.283}]
FindRoot[T12-8.71245,{θ,4.44}]
FindRoot[T12-8.712245,{θ,6.18}]
T1 = NIntegrate[T12-8.71245,{θ,0,4.39875}]
T2 = NIntegrate[T12-8.71245,{θ,4.39875,6.232981151910303}]
T3 = NIntegrate[T12-8.71245,{θ,6.232981151910303,2π}]
Plot[{T12},{θ,0,2 π}, GridLines->{{},{8.7125}}]
Plot[{F12x,F12y},{θ,0,2π}, PlotLegends->Automatic]
Plot[{F32x,F32y},{θ,0,2π}, PlotLegends->Automatic]
Plot[{F43x,F43y},{θ,0,2π}, PlotLegends->Automatic,PlotRange->All ]

```


4.2.10 ANALISIS DEL TORQUE

El siguiente es el gráfico del Torque T_{1-2} que utilizaremos para seleccionar el motor y el tamaño del volante para regularizar el giro.

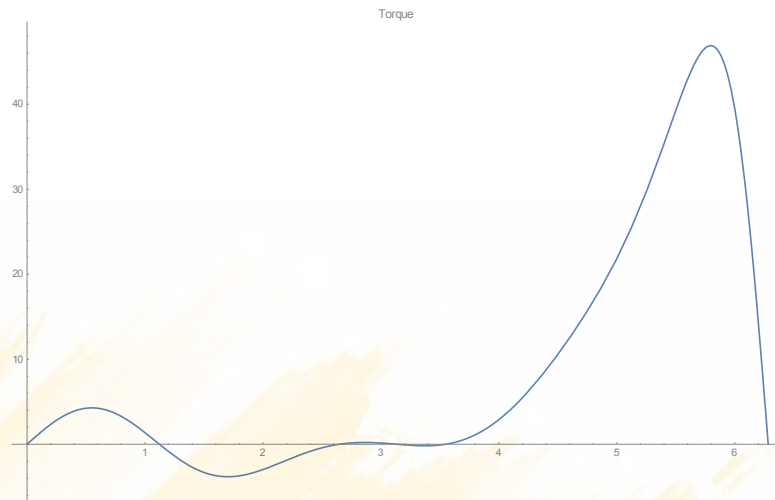


Figura 4.16. Torque a 1500 rpm

Es interesante observar gráficas a diferente velocidad, por ejemplo a 0 rpm. El torque dominante es el que proviene de la Fuerza estática.

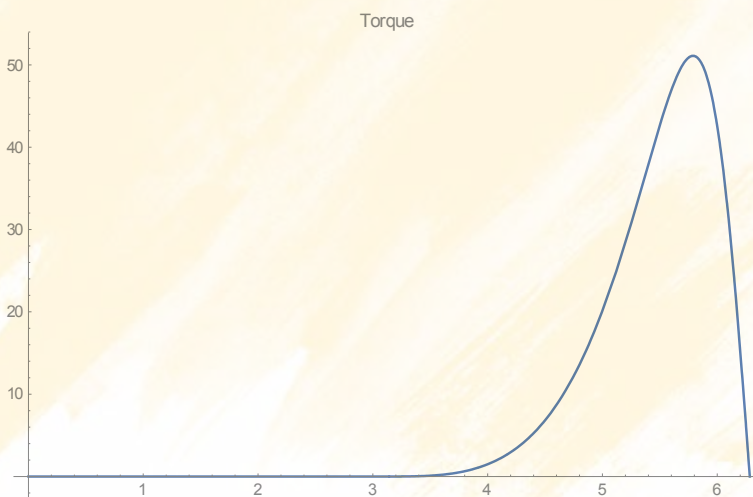


Figura 4.17. Torque a 0 rpm

A 3000 y 5000 rpm domina el Torque de inercia y se tiene una gran fluctuación del mismo.

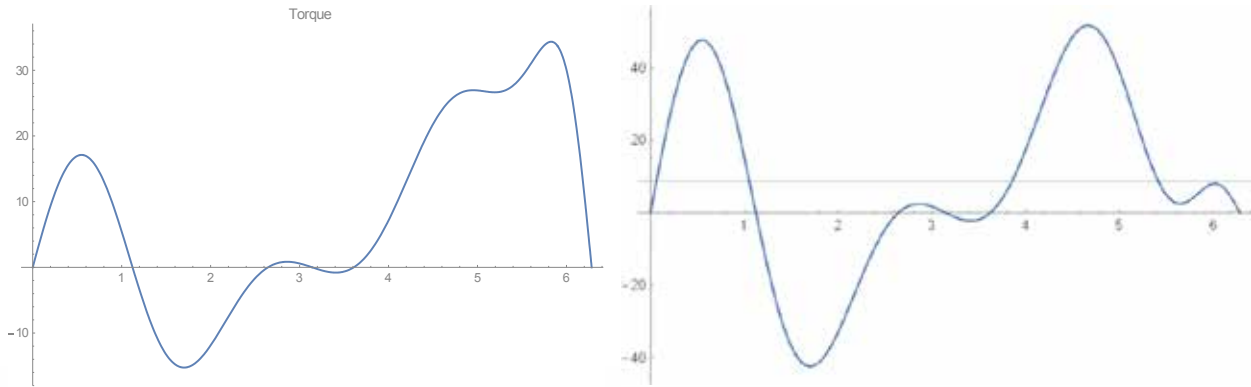


Figura 4.18. Torque a 3000 y 5000 rpm

4.2.11 CALCULO DEL VOLANTE DE INERCIA

La presencia de un torque fluctuante evidencia que la frecuencia del impulsor no podrá ser constante porque los motores de inducción se aceleran o desaceleran dependiendo de la sollicitación. Con lo cual se tendría que la velocidad del impulsor ya no es constante como se especifica.

Como puede verse en el diagrama Torque este presenta una fluctuación desde 46.73 N-m a -3.862 N-m., el bucle positivo nos indica que el compresor demanda energía para funcionar, en cambio el bucle negativo nos indican que la inercia almacenada en las partes rotatorias puede ceder energía. Si se selecciona el motor eléctrico para esta aplicación tendremos que hacerlo para el Torque máximo.

$$Potencia = T_{MAX} \omega_{med} = 45.181 [N m] 1500 [rpm] \frac{2\pi}{60} = 7.97 kW \quad (4.53)$$

La potencia así calculada resulta en un motor sobredimensionado, que trabajaría en forma ineficiente por cuanto solo en un punto se necesita toda la energía del mismo. Un método para minimizar el tamaño del motor y regularizar la velocidad del compresor es mediante la utilización del volante de inercia, que no es sino un disco pesado que va unido al eje del mecanismo. Entonces la energía cinética de los elementos rotatorios del mecanismo (bucles negativos) es transferida al volante, el cual la almacena y que a su vez será entregada al mecanismo cuando este lo necesite (bucles positivos).



Figura 4.19. Volante de inercia

La mecánica del volante se deriva de la segunda ley de Newton:

$$\sum T = T_{12} - T_{med} = I \alpha \quad (4.54)$$

Dónde:

T_{12} = Torque de la carga, el cual varía con el tiempo

T_{med} = Torque del motor que se requiere que sea lo más constante posible y es igual al promedio

I = Inercia del volante

La aceleración equivale a:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \frac{d\theta}{d\theta} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (4.55)$$

Reemplazando 4.55 en 4.54

$$T_{12} - T_{med} = I \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (4.56)$$

$$\int_{\theta_{\omega_{MIN}}}^{\theta_{\omega_{MAX}}} [T_{12} - T_{med}] d\theta = \int_{\omega_{MIN}}^{\omega_{MAX}} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I [\omega_{MAX}^2 - \omega_{MIN}^2] \quad (4.57)$$

La expresión indica un balance de energía, la integral significa la energía que cede el mecanismo cuando este se acelera debido a su propia energía cinética y corresponde al bucle negativo, el término de la derecha significa la energía que recibe el volante la cual lo acelerara y esta energía será posteriormente entregada al mecanismo cuando este lo necesite. La razón del cambio de velocidad se denomina coeficiente de fluctuación k y es igual a:

$$k = \frac{\omega_{MAX} - \omega_{MIN}}{\omega_{med}} \quad (4.58)$$

Los coeficientes de fluctuación se encuentran tabulados en la literatura de mecanismos de la siguiente manera:

Máquina	Coficiente de fluctuación k
Bombas	1/5 - 1/30
Máquinas de Campo	1/10 - 1/50
Máquinas Herramientas para labrar metales	1/20 - 1/50
Máquinas de tejer, poligráficas, molinos	1/20 - 1/50
Motores marinos	1/20 - 1/100
Motores de combustión interna, compresores	1/80 - 1/150
Generadores eléctricos de corriente continua	1/100 - 1/200
Generadores eléctricos de corriente alterna	1/200 - 1/300
Motores de aviación	1/100

Tabla 4.8. Coficiente de fluctuación

Reemplazando 4.58 en la expresión 4.57 se obtiene:

$$\int_{\theta_{\omega MIN}}^{\theta_{\omega MAX}} [T_{12} - T_{med}] d\theta = \frac{1}{2} I [\omega_{MAX}^2 - \omega_{MIN}^2] = I k \omega_{med}^2 \quad (4.59)$$

Para determinar el tamaño del volante para el ejemplo se efectúan los siguientes pasos:

a.- Se calcula el Torque medio del diagrama T externo vs θ_2 integrando:

$$T_{med} = \frac{\int_0^{2\pi} [T_{12}] d\theta}{2\pi} \quad (4.60)$$

Para lo cual se utiliza la siguiente estructura en Wolfram Mathematica

```
Tmed = NIntegrate[T12/2π, {θ, 0, 6.283}]
```

Esta operación genera un valor de 8.71245 N-m

b.- Se dibuja el torque medio en el diagrama de Torque externo con la sentencia **gridlines**

```
Plot[{T12}, {θ, 0, 2π}, GridLines -> {{}, {8.71}}]
```

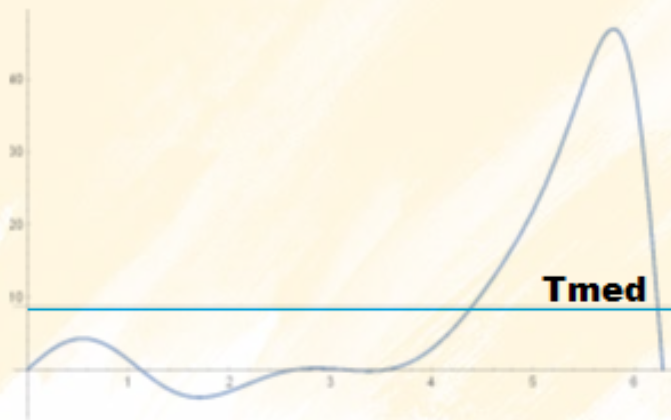


Figura 4.20. Diagrama Torque T_{12} y T_{med}

c.- Se hallan los ángulos, en los cuales la función T_{12} interseca con el torque medio T_{med} . En primer lugar con **Get Coordinates** (Clic derecho sobre el gráfico) se halla aproximadamente el valor del ángulo de intersección y con este valor, se resuelve la ecuación no lineal 4.61.

$$T_{med} - T_{12} = 0 \quad (4.61)$$

```
FindRoot[T12 - 8.71245, {θ, 4.44}]
```

```
{θ -> 4.39875088479636}
```

Es decir el ángulo $\theta = 4.39 \text{ rad}$ representa un corte con el eje T_{med} , se repite luego con $\theta = 6.18 \text{ rad}$

FindRoot[T12 - 8.712245, {θ, 6.18}]

{θ → 6.232981151910303}

Estos ángulos son los límites de integración

d.- A continuación se determina las áreas seccionadas por el eje T_{med} . Por medio de la integración numérica

T1 = NIntegrate[T12-8.71245,{θ,0,4.39875}]

T2 = NIntegrate[T12-8.71245,{θ,4.39875, 6.23298}]

T3 =NIntegrate[T12-8.71245,{θ,6.23298, 2π}]

T1 = -35.8509 N-m radian

T2 = 36.0687 N-m radian

T3 = -0.2177 N-m radian

La suma de estas áreas debe dar cero:

e.- Sobre las intersecciones del diagrama se colocan las sumas acumuladas de las áreas, esto significa la energía que ha consumido el mecanismo en ese instante

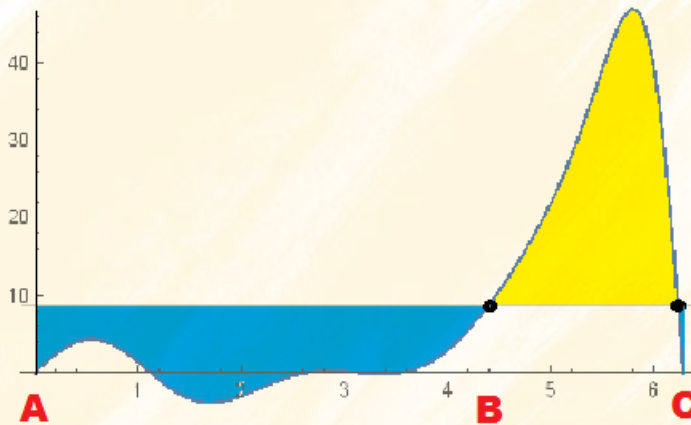


Figura 4.21. Integración de áreas

Integración de las áreas			
DESDE	Δ Área [Nm rad]	Suma acumulada[Nm rad]	Máximos y mínimos
A hasta B	-35.8509	-35.8509 en el punto B	$\theta_{\omega max}$
B hasta C	36.0687	0.218 en el punto C	$\theta_{\omega min}$
C hasta A	-0.2177	0 en A	
Energía que se transfiere al volante $\int_{\theta_{\omega MIN}}^{\theta_{\omega MAX}} [T_{12} - T_{med}] d\theta = E_{\omega max} - E_{\omega min} = -35.8509 - 0.298 = -36.149 Nm radian$			

Tabla 4.9. Cálculo y tabulación de áreas integradas

Este procedimiento coincide con el total de las áreas negativas en celeste, como puede verse este caso parecería un ejercicio trivial, sin embargo si la velocidad fuera mayor se incrementa el número de áreas y el método descrito es de suma utilidad.

La menor suma -35.8509 N-m radian corresponde al punto de velocidad angular máxima $\omega_{\text{máx}}$. En este punto $\theta = 241.731^\circ$, el mecanismo se ha **acelerado** al máximo gracias a la inercia de los propios eslabones del compresor.

La mayor suma + 0.218 N-m radian corresponde al punto de velocidad angular mínima ω_{min} . Porque en este punto $\theta = 356.895^\circ$, el mecanismo se ha **desacelerado** al máximo

$$\int_{\theta_{\omega MIN}}^{\theta_{\omega MAX}} [T_{12} - T_{med}] d\theta = E_{\omega max} - E_{\omega min} = -35.8509 - 0.298 = -36.149 \quad (4.62)$$

La programación de Mathematica para los cálculos descritos es la siguiente:

```
Tmed = NIntegrate[T12/(2 \[Pi]), {\[Theta], 0, 6.283}]
FindRoot[T12 - 8.71245, {\[Theta], 4.44}]
FindRoot[T12 - 8.712245, {\[Theta], 6.18}]
T1 = NIntegrate[T12 - 8.71245, {\[Theta], 0, 4.39875}]
T2 = NIntegrate[T12 - 8.71245, {\[Theta], 4.39875, 6.232981151910303}]
T3 = NIntegrate[T12 - 8.71245, {\[Theta], 6.232981151910303, 2 \[Pi]}]
Plot[{T12}, {\[Theta], 0, 2 \[Pi]}, GridLines -> {{}, {8.7125}}]
```

f.- Dimensionado del volante:

Seleccionando un valor de k de 1/80 y una frecuencia de 1500 rpm se aplica la expresión:

$$-36.149 = I k \omega_{med}^2 = I \frac{1}{80} \left[1500 \frac{2\pi}{60} \right]^2 \quad (4.63)$$

La inercia por tanto es 0.117 Kg. m². Para un aro pesado sujeto con en el cubo mediante rayos, la inercia es igual a

$$I_{volante} = \rho_{hierro} espesor \frac{\pi}{32} [D^4 - d^4] \quad (4.64)$$

La geometría que coincide con el valor de la inercia es un aro con las medidas:

Diámetro externo	320 mm
Diámetro interno	280 mm
Espesor	35 mm

Tabla 4.10. Dimensiones del volante de inercia

Mientras más pequeño el valor de k más grande deberá ser el volante

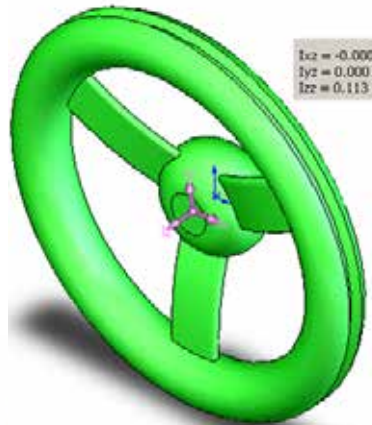


Figura 4.16. Diseño del volante de inercia

Con el valor del T_{med} se calcula la potencia real, tomando en cuenta la potencia de arranque necesaria para que el compresor empiece a funcionar en 2 segundos a velocidad nominal.

$$Potencia = [T_{med} + T_{arranque}] \omega_{med} = [T_{med} + I_{total} \alpha_2] \omega_{med} \quad (4.65)$$

Donde

$$\alpha_2 = \frac{\omega_{final} - \omega_{inicial}}{t_{arranque}} = \frac{1500 \frac{2\pi}{60} - 0}{2} = 8.225 \frac{rad}{s^2} \quad (4.66)$$

$$I_{total} = I_{volante} + I_{CG2} = 0.117 + 0.011 = 0.128 [kg \cdot m^2] \quad (4.67)$$

Reemplazando 4.67 en 4.65

$$Potencia = [T_{med} + I_{total} \alpha_2] \omega_{med} = [8.712 + 0.128 \cdot 8.225] 1500 \left[\frac{2\pi}{60} \right] = 1.534 \text{ kW} \quad (4.68)$$

Se podría por tanto adquirir un motor de 1.5 kW (2HP) para nuestra aplicación.

g.- Dependiendo del coeficiente k seleccionado, también se selecciona el motor eléctrico.

Tipo de diseño	Deslizamiento	Aplicaciones
NEMA A	0.5-5%	Ventiladores, Bombas, Torque de arranque bajo
NEMA B	0.5-5%	Motor de propósito general, igual a NEMA A
NEMA C	1-5%	Alto torque de arranque, transportadores, agitadores, bombas reciprocantes y compresores
NEMA D	5-8%	Alto torque de arranque, prensas, elevadores, winchas

Tabla 4.10. Selección del motor según NEMA¹⁹

¹⁹ http://www.engineeringtoolbox.com/nema-a-b-c-d-design-d_650.html

4.2.12. ANÁLISIS DE LAS FUERZAS

- **FUERZA DE SACUDIMIENTO**

Del análisis general de las fuerzas se observa que la preocupación principal del diseñador de este tipo de máquinas es asegurar que los elementos resistan la fatiga. En forma general las fuerzas inerciales correspondientes a los movimientos de los eslabones a la velocidad de 1500 rpm es aproximadamente un 36%. Para obtener las fuerzas de sacudimiento, simplemente se calcula con presión atmosférica = 0, puesto que la presión interna del aire se cancela dentro del compresor, y solo intervienen las fuerzas inerciales.

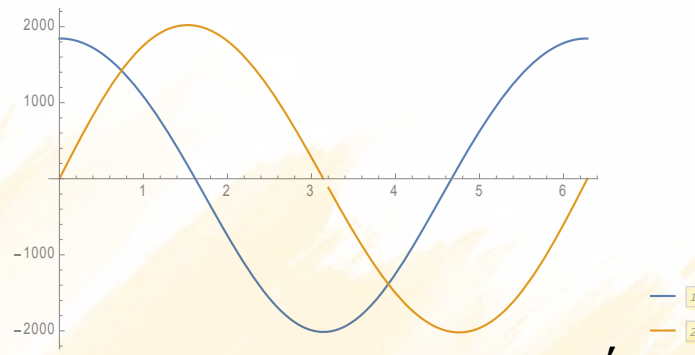


Figura 4.17. Fuerzas de sacudimiento, 1 es F_{12x} y 2 es F_{12y}

En base de estas fuerzas se efectúa el análisis armónico, para obtener la fuerza de sacudimiento en forma de serie de Fourier, se obtiene la fuerza transmitida y luego el correspondiente cálculo de frecuencias naturales, con el fin de seleccionar los resortes o cojines de instalación, esta temática corresponde a la asignatura de vibraciones.

- **FUERZA 12, REACCIONES EN LOS COJINETES DE BANCADA**

Con la Fuerza siguiente se puede diseñar los cojinetes de bancada para un máximo de 5500 N considerando que está involucrada la fatiga

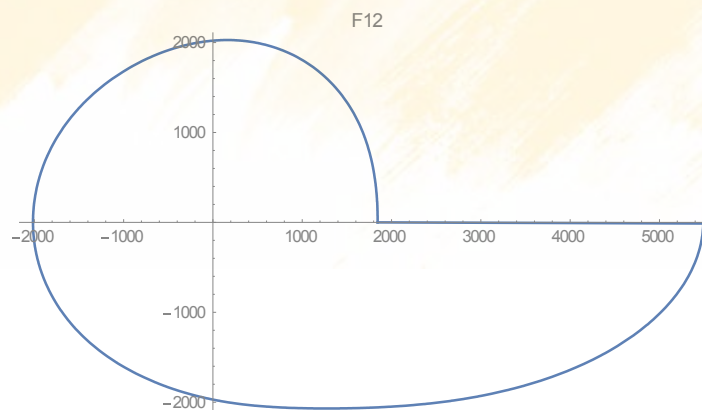


Figura 4.18. Fuerzas en el cojinete de bancada 12

- **FUERZA 32, REACCIONES EN EL MUÑON DE MANIVELA**

La Fuerza 32 corresponde a las fuerzas aplicadas en el muñón de la manivela o cigüeña, fundamental para el cálculo a fatiga del cigüeñal o manivela.



Figura 4.19. Fotografía de cigüeñal muy similar al calculado²⁰

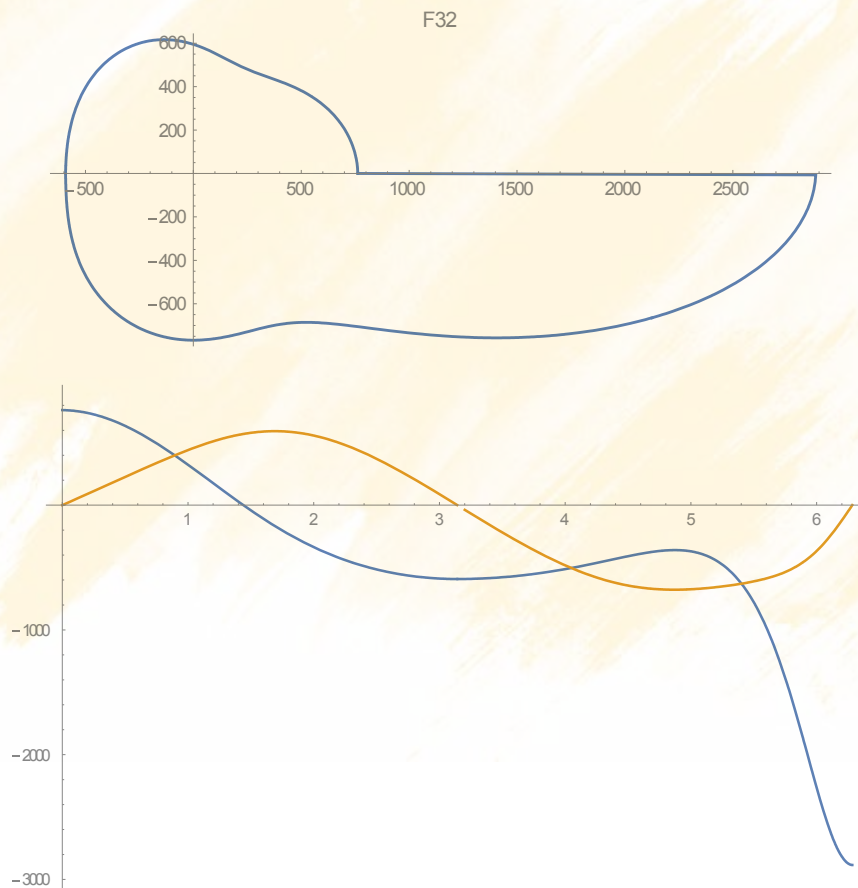


Figura 4.19. Fuerzas en el cigüeñal máxima y componentes

La Fuerza 32 sirve para diseñar el cigüeñal del compresor utilizando las teorías de fatiga, para lo cual solo es necesario hacer un análisis de la sollicitación máxima y mínima. Un estado de

²⁰ <https://spanish.alibaba.com/product-detail/forged-crank-shaft-crankshaft-for-tractor175-s1110-rd85-knd-180-ts50-ts60-single-cylinder-4-stroke-diesel-engine-crankshaft-60462912116.html>

carga crítica es el representado en la figura 4.20 con -2900 N, Otro estado de carga es con 780 N que flexiona el cigüeñal en sentido contrario. Un programa CAE puede ser de mucha utilidad, dada la complicación de formas que tienen los eslabones.

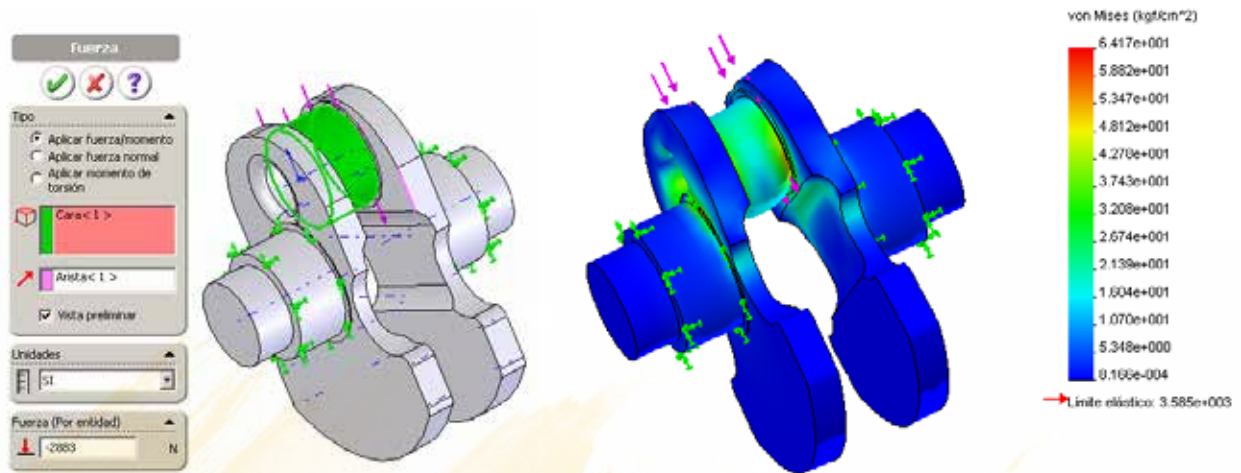


Figura 4.20. Aplicación de fuerzas al cigüeñal y análisis por elementos finitos

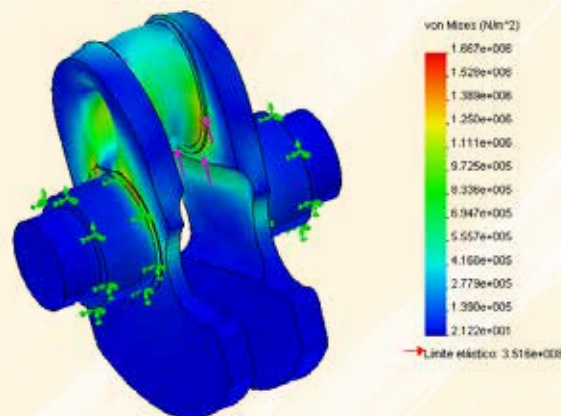


Figura 4.21. Deflexión del cigüeñal aplicando una fuerza de sentido contrario

Con lo cual una misma fibra del material estará sometida a tensión y compresión, según la siguiente relación de carga:

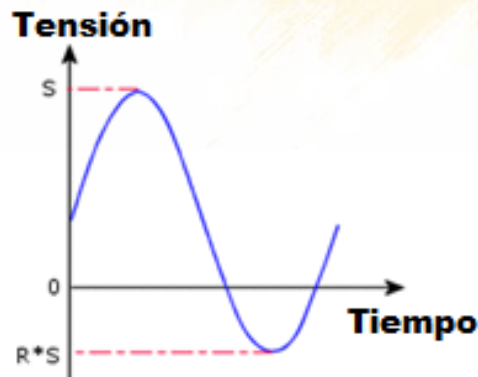


Figura 4.22. Relación de carga

Donde $R = -780/2900 = -0.268$

Efectuando el respectivo análisis de fatiga, se obtienen los siguientes resultados:

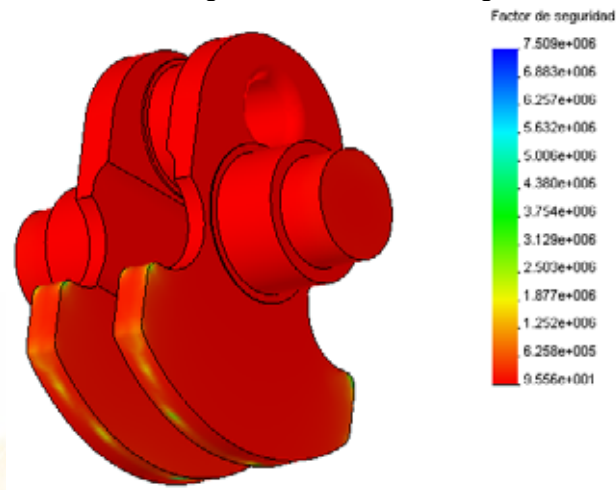


Figura 4.23. Análisis de fatiga

Lo cual significa un factor de seguridad de 95.5

Un tercer estado de carga que también se debe analizar es la torsión producida por el torque, existiendo por tanto un estado de carga combinado de flexión y torsión

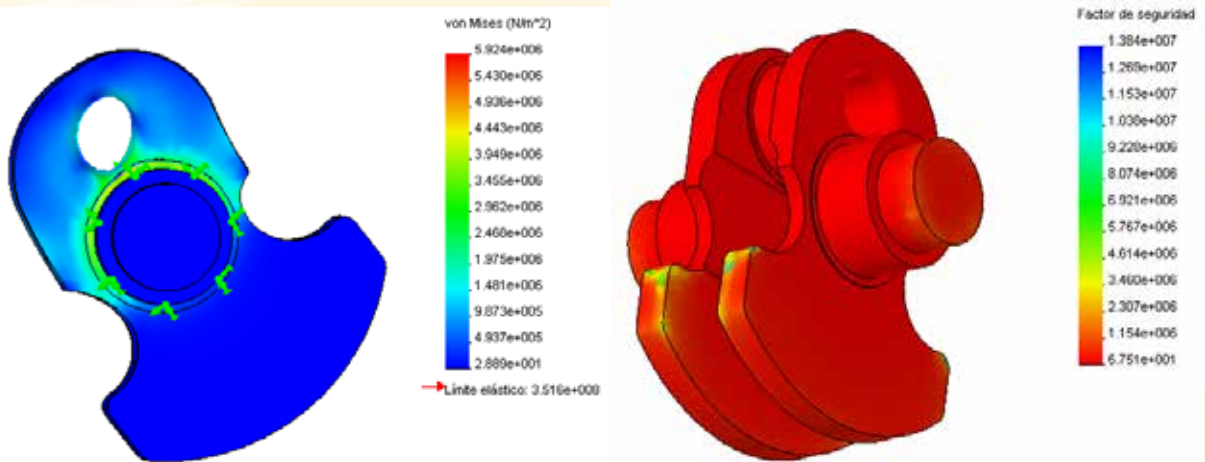


Figura 4.24. Análisis de torsión

Del análisis se desprende un factor de seguridad de 67.5 para fatiga de torsión

- **FUERZA 43, REACCIONES EN EL PASADOR DEL PISTON**



Figura 4.24. Pasador del pistón ²¹

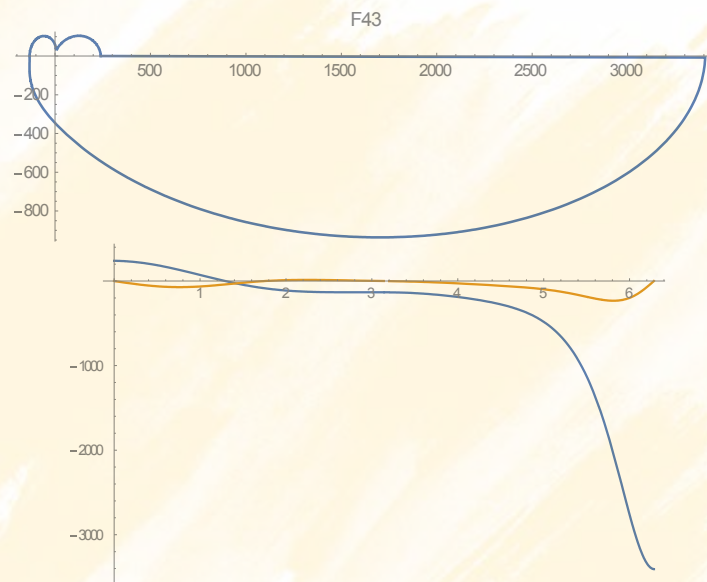


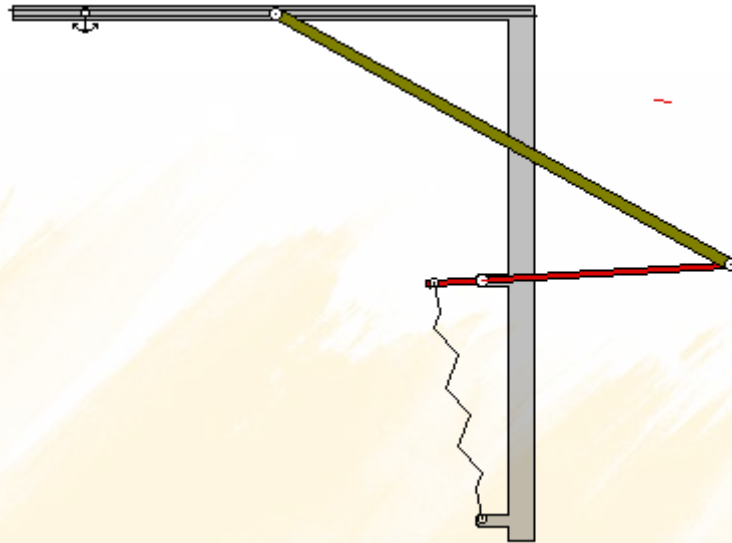
Figura 4.24. Fuerzas en el pasador 4,3, total y componentes

Con el diagrama de fuerzas se calcula el tamaño del bulón o pasador del pistón, el cálculo se efectúa utilizando fatiga en un eje no rotatorio sometido a una fuerza alternante que fluctúa entre -3416 N a 236 N

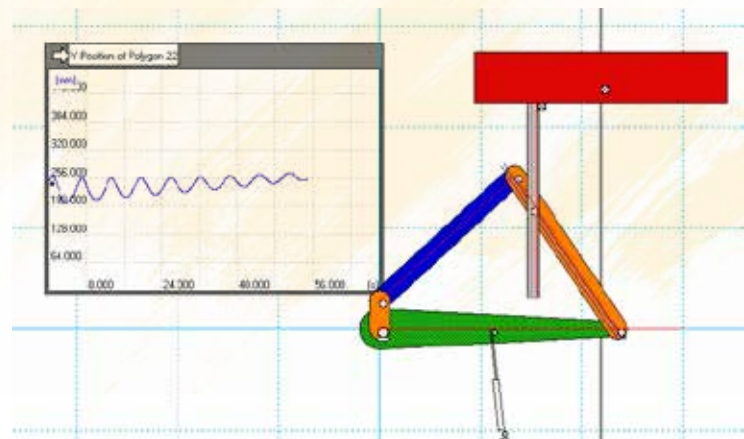
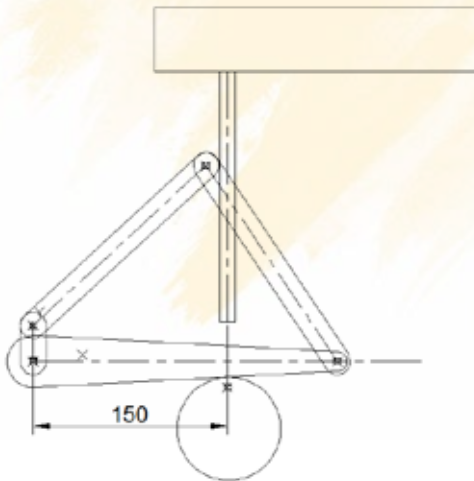
²¹ <http://eficiencia-empresarial.blogspot.com/2013/05/el-motor-funcionamiento-y-subsistemas.html>

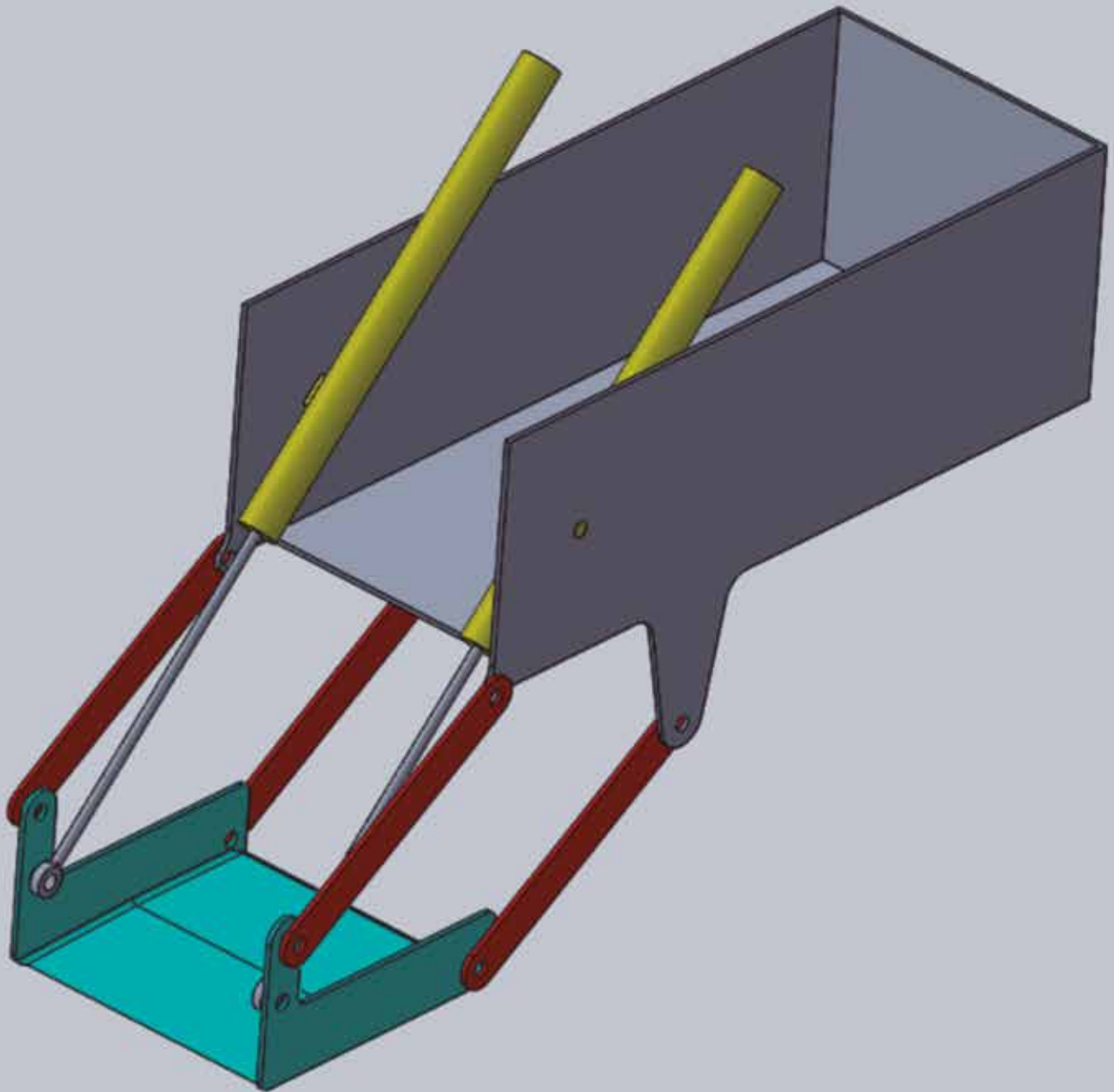
4.2.13 TAREA PARA EL ESTUDIANTE

1. Calcular el volante de inercia del mecanismo anterior suponiendo una velocidad de 4500 rpm.
2. Aplicando los conocimientos adquiridos efectuar el análisis dinámico de una puerta automática de garaje, tomar datos y dimensiones de puertas existentes



3. Efectuar el análisis dinámico de una mortajadora, con datos $r_1 = 235$ mm, $r_2 = 28$ mm, $r_3 = 182$ mm, $r_4 = 182$ mm. La barra r_4 es ranurada y r_1 es regulable.





CAPÍTULO 5

SÍNTESIS DE MECANISMOS

5.1 DEFINICIÓN

El estudio del movimiento en las máquinas puede ser considerado desde dos diferentes puntos de vista, el análisis cinemático y la síntesis cinemática. En los capítulos anteriores se trató el primer tópico donde se constató que el análisis cinemático es la determinación del movimiento inherente en un mecanismo o máquina dada. La síntesis cinemática es el problema contrario: es la determinación del mecanismo que logra ciertas especificaciones de desplazamiento, velocidad o aceleración, en forma simple o combinada. En definitiva la síntesis determina el mecanismo capaz de ofrecer una respuesta determinada de antemano.

Ejemplos de requerimientos cinemáticos para efectuar la síntesis.

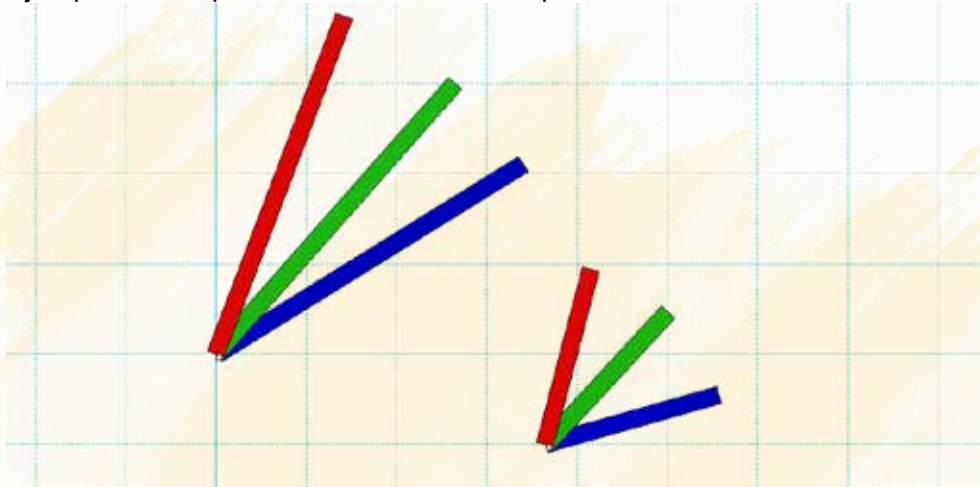
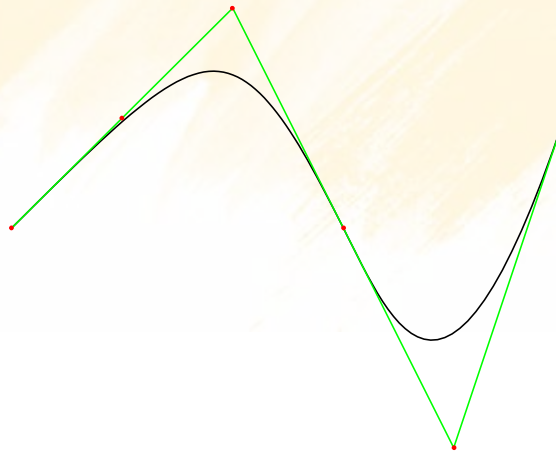


Figura 5.1. Diseñar un mecanismo que coordine los ángulos de entrada con los ángulos de salida de las barras indicadas, generación de función



```
pts={{0,0},{1,1},{2,2}, {3,0}, {4,-2}, {5,1}}; Graphics[{BSplineCurve[pts], Green, Line[pts],Red, Point[pts]}
```

Figura 5.2. Diseñar un mecanismo que genere la trayectoria especificada con el mínimo error, generador de trayectoria

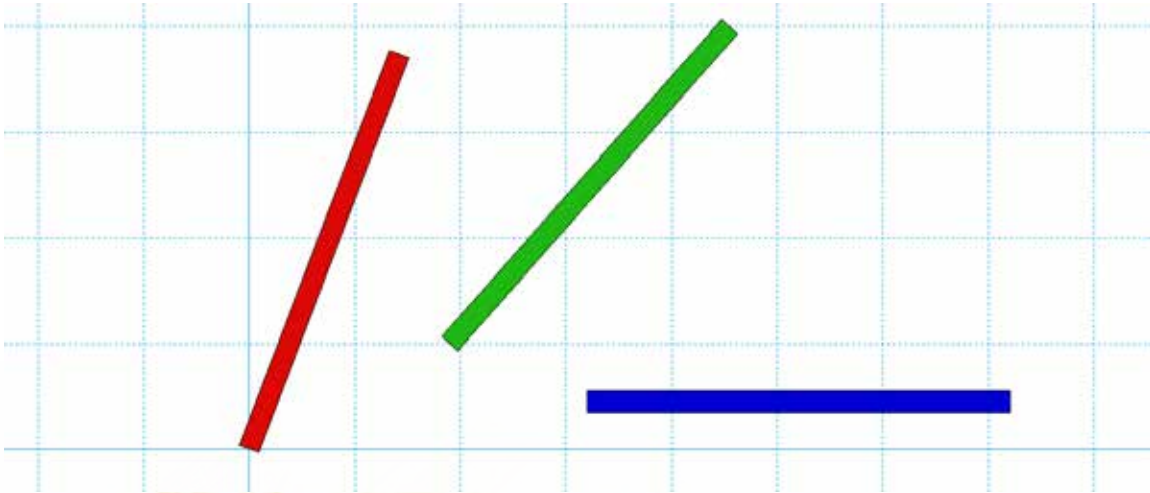


Figura 5.3. Diseñar un mecanismo que traslada la barra por las posiciones especificadas, generador de movimiento

5.2 TIPOS DE SINTESIS

5.2.1 SÍNTESIS DE TIPO

La síntesis de tipo busca predecir cuál combinación de topología de eslabonamientos y tipo de juntas es la mejor para resolver una tarea dada. La selección del tipo del mecanismo a usarse también depende de parámetros que entran fuera del campo de los mecanismos como son las condiciones de uso, los materiales y procesos de manufactura disponibles.

5.2.2 SÍNTESIS DE NÚMERO

La síntesis numérica se encarga de predecir el número de eslabones y juntas que se requiere para un grado de libertad deseado.

5.2.2 SÍNTESIS DIMENSIONAL

Por síntesis dimensional se entiende la determinación de las longitudes y ángulos necesarios para crear un mecanismo que efectuara las transformaciones de movimiento deseadas. Las dos herramientas básicas de la síntesis dimensional son la construcción geométrica que ofrece al diseñador un procedimiento de diseño relativamente rápido y directo y los métodos de síntesis analíticos adecuados para el cálculo automático que tienen la ventaja de exactitud y repetitividad.

A su vez la síntesis analítica se puede dividir en

- **SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIONES**

Trata el problema de coordinar las barras de entrada y salida en un número especificado de posiciones.

- **SÍNTESIS DE MOVIMIENTO O GUIADO DEL ACOPLADOR**

Sitúa el acoplador de un mecanismo en un número especificado de posiciones.

- **SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS**

Estudia la correspondencia de las trayectorias descritas por puntos pertenecientes al acoplador de un mecanismo.

5.3 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIONES.

5.3.1 COORDINACION DE UN ANGULO DADO θ DE OSCILACION DEL SEGUIDOR CON UN MEDIO GIRO DEL IMPULSOR, METODO GRAFICO

Con este método se busca el mecanismo que permita oscilar la barra de salida 4 un ángulo determinado, para lo cual se sigue el siguiente procedimiento gráfico

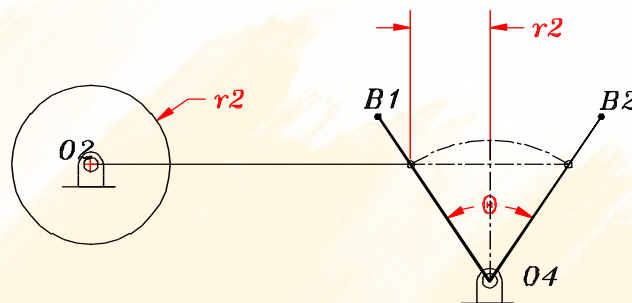


Figura 5.4. Método gráfico²²

- 1.- Trazar el seguidor en sus dos posiciones extremas O_4B_1 y O_4B_2 .
- 2.- Trazar un arco cualquiera y su respectiva cuerda B_1B_2 , halle el punto medio de la cuerda B_1B_2 , la mitad del segmento B_1B_2 es el radio del impulsor r_2
- 3.- Prolongue la cuerda y seleccione el pivote fijo O_2 , dependiendo del espacio disponible
- 4.- Trace la circunferencia de radio igual a r_2 en O_2 , esta es la rueda impulsora
- 5.- se construye el mecanismo en cualquiera de las posiciones extremas indicadas.

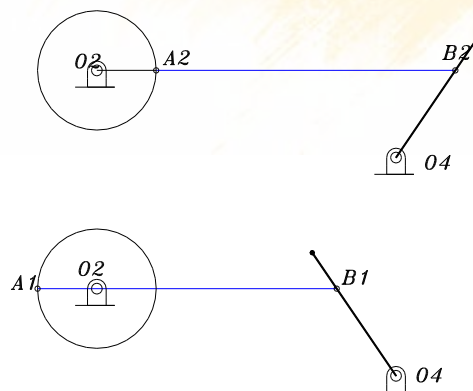


Figura 5.5. Método gráfico, paso 5

²² Diseño de Maquinaria de Robert L. Norton

La distancia $A_2B_2 = A_1B_1$ representa la longitud del acoplador.

Cuando el impulsor r_2 gire 180° obtendremos una oscilación del seguidor. La máxima rotación que se puede obtener con este método es 120° , si se supera este valor el ángulo de transmisión se hace menor a 30° y por lo tanto el mecanismo se traba. En el caso de que se necesite una mayor rotación se puede recurrir a trenes de engranajes.

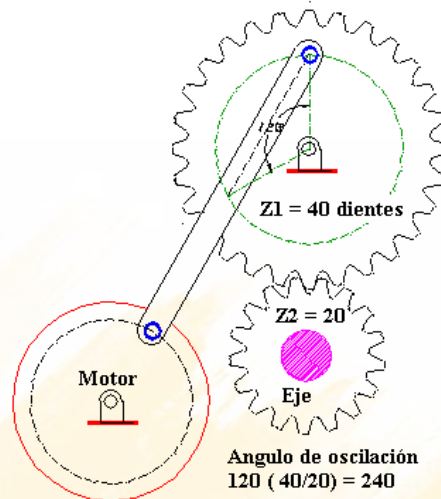


Figura 5.6. Amplificando el giro con ruedas dentadas

El mecanismo de la Fig. 5.6 utiliza la coordinación de la barra con un giro total del impulsor, el ángulo que subtende el engrane Z_1 es de 120° el cual es incrementado a 240° en Z_2 gracias a la relación de transmisión utilizada.

Mecanismos que invierten la rotación de tanques son utilizados muy a menudo en la industria textil, para lavar, tinturar, mezclar, etc.

- Efectuar la simulación en Working Model del mecanismo anterior

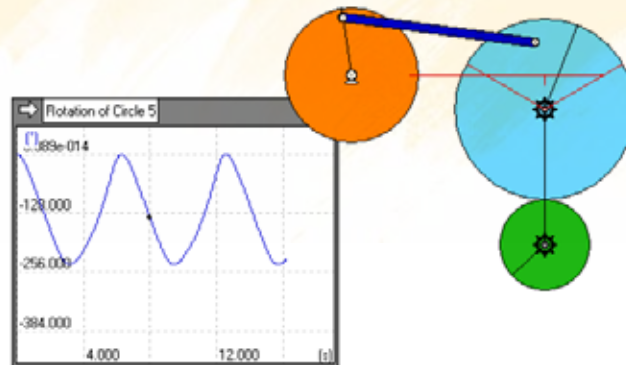


Figura 5.7. Amplificando el giro con ruedas dentadas, simulación en Working Model

- Efectuar la simulación en Working Model del siguiente mecanismo, que utiliza corredera y eslabón ranurado para multiplicar la oscilación.

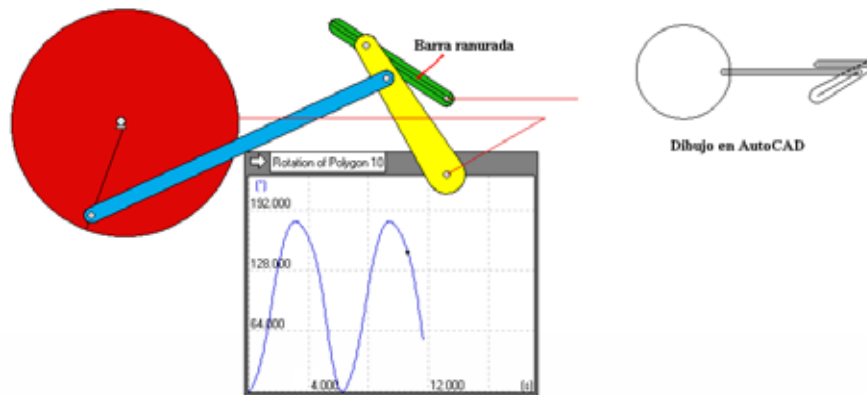


Figura 5.8. Amplificando el giro con correderas, simulación en Working Model

Una aplicación adicional de esta síntesis es la que se usa para impulsar un trinquete, en este caso la rueda dentada no retorna, existe solo avance pero con reposos.

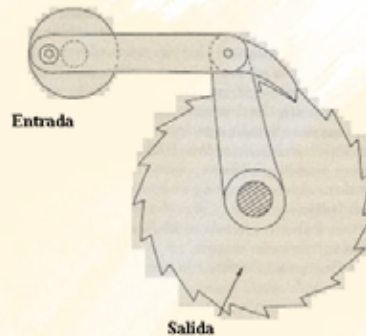


Figura 5.9. Mecanismos de trinquete impulsado por un eslabonamiento de cuatro barras

5.3.2 COORDINACION DE UN ANGULO DADO θ DE OSCILACION DEL SEGUIDOR CON UN GIRO COMPLETO DEL IMPULSOR CON PIVOTES PRESCRITOS, METODO GRAFICO

En este caso los pivotes prescritos se especifican, y lo oscilación permisible es menos de 120° , en este caso hemos seleccionado 100°

1.- Se dibuja el seguidor en sus dos posiciones extremas O_4B_1 y O_4B_2 .

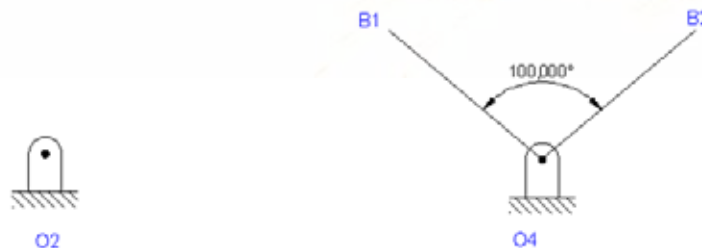


Figura 5.10. Pasó 1²³

²³ Diseño de Maquinaria de Robert L. Norton

2.- Trazar segmentos O_2B_2 y O_2B_1 y verificamos que el ángulo de transmisión $O_2B_2O_4$ no disminuya de 30° y que el ángulo de transmisión $O_2B_1O_4$ no supere 150° .

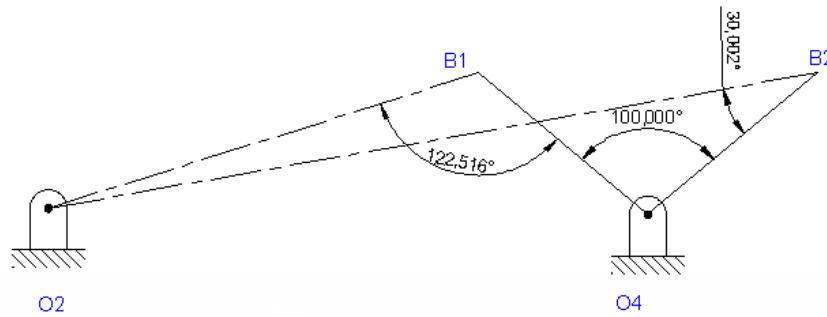


Figura 5.11. Paso 2

3.- Medir el segmento O_2B_2 que debe ser igual a la suma de $r_2 + r_3$ correspondiente a los eslabones alineados, y la medida O_2B_1 corresponde a los eslabones alineados pero superpuestos es decir $r_3 - r_2$.

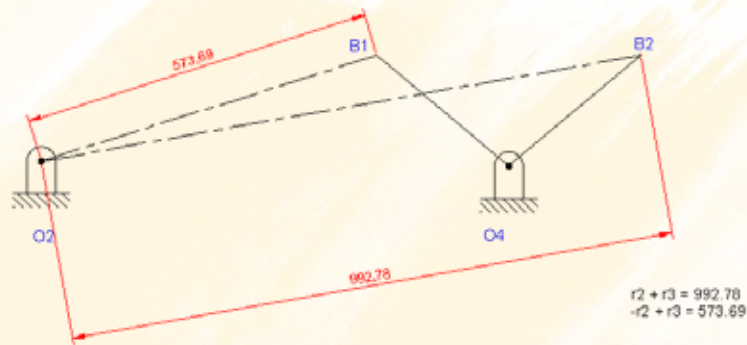


Figura 5.12. Paso 3

4.- Se resuelve el sistema de ecuaciones de donde se obtiene $r_3 = 783.235$ y $r_2 = 209.545$ y con estas medidas se dibujan los eslabones.

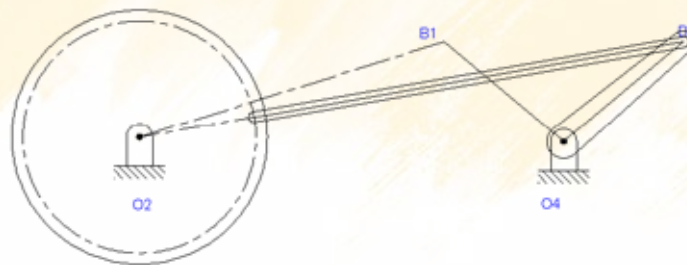


Figura 5.13. Paso 4

5.- Se efectúa la simulación en MathCAD, donde se verifica que existe diferencia en la rapidez con la que oscila el seguidor en uno y otro sentido.

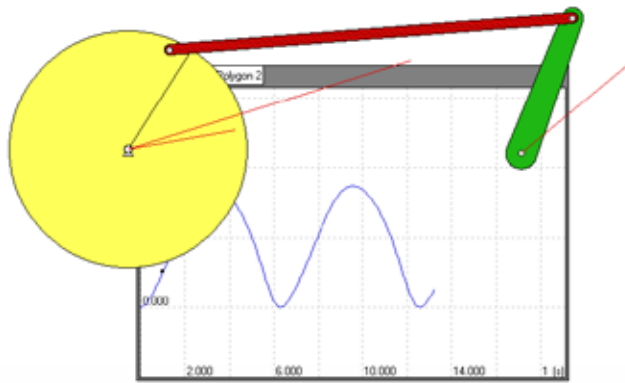


Figura 5.14. Pasó 5

- **EJERCICIO DE APLICACIÓN:** Se necesita voltear sobre sí mismo una placa en una línea de transporte, diseñar el mecanismo aplicando los procedimientos revisados.

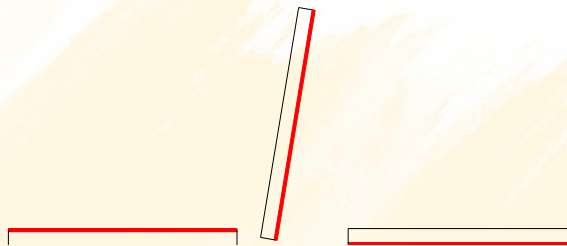


Figura 5.15. Ejercicio de aplicación

- 1.- Se necesitan dos mecanismos en paralelo, un mecanismo que levante la placa aproximadamente 100° y otro que la reciba y la deposite en la banda transportadora
- 2.- Para diseñar el primer mecanismo se dibuja un eslabón apropiado y se efectúa la síntesis dimensional de generación de funciones del punto 5.3.1, es decir obtener una rotación del eslabón de salida por medio de medio giro de la barra impulsora.

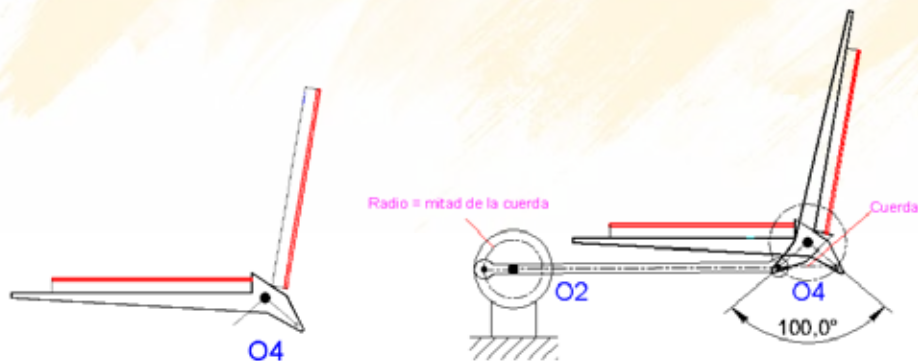


Figura 5.16. Síntesis 5.3.1

- 3.- Diseñamos un eslabón apropiado para tomar la placa y por simplicidad ocupamos el centro del impulsor, por lo cual la síntesis se convierte en generación de funciones con pivotes prescritos del acápite 5.3.2.

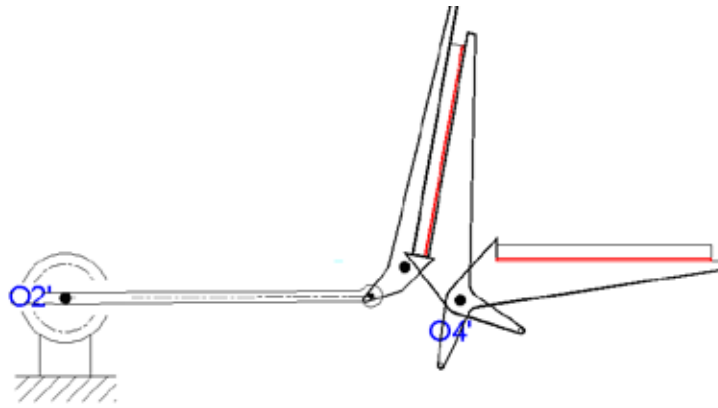


Figura 5.17. Síntesis 5.3.2

4.- De las medidas obtenidas en AutoCAD, resolvemos las siguientes ecuaciones:

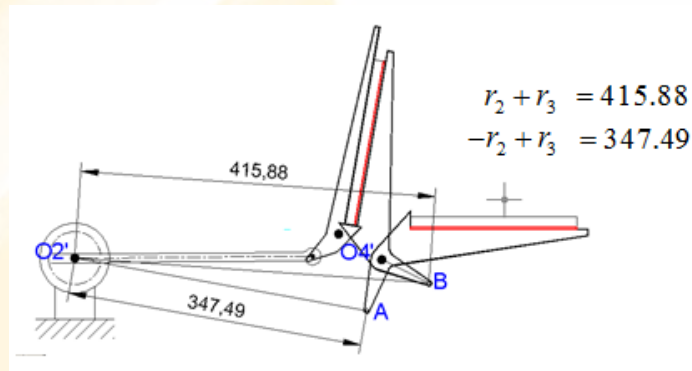


Figura 5.18. Dimensionamiento y ecuaciones

De donde $r_3 = 381.7$ y $r_2 = 34.2$

6.- Se efectúa la simulación en Working Model 2D del dibujo indicado, la banda transportadora puede ser substituida por una mesa de rodillos y se inclina todo el mecanismo para que la placa se deslice por gravedad

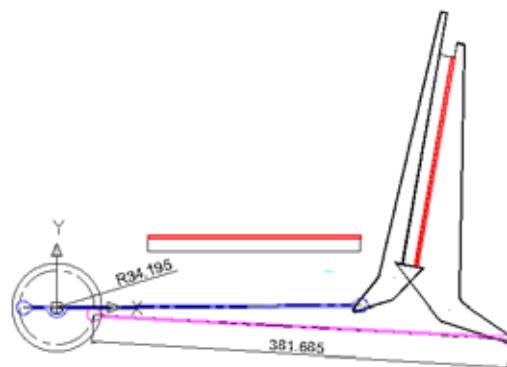


Figura 5.19. Diseño final

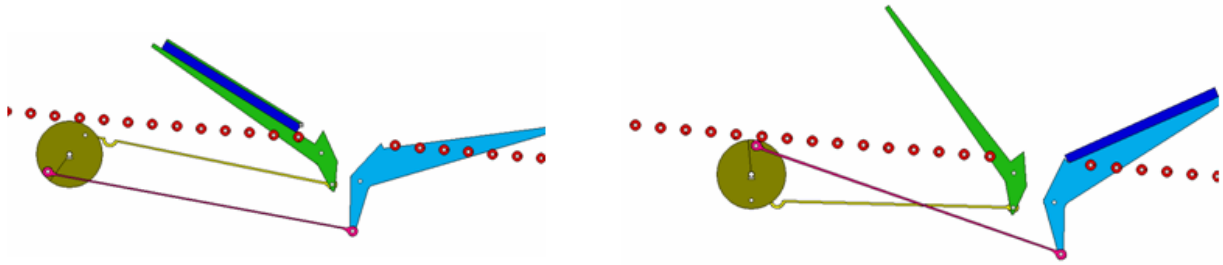


Figura 5.20. Simulación Working Model 2D

5.3.3 COORDINACION DE TRES ANGULOS DE SALIDA CON TRES ÁNGULOS DE ENTRADA, METODO ANALÍTICO

Este método se basa en el análisis de un eslabonamiento de cuatro barras.

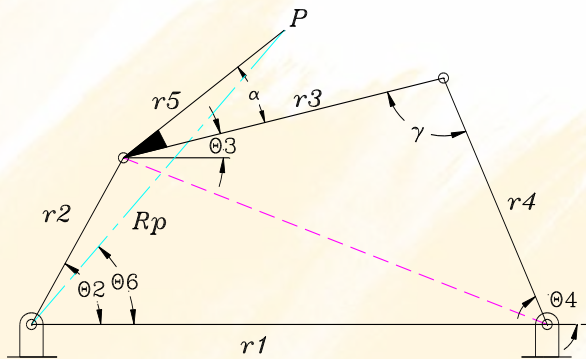


Figura 5.21. Eslabonamiento de cuatro barras

La ecuación del cierre del circuito de un mecanismo de cuatro barras según el esquema cinemático de la figura 2.21 es:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{r}_1 + \vec{r}_4 \quad (5.1)$$

Transformando a la forma compleja:

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_1 + r_4 e^{i\theta_4} \quad (5.2)$$

Utilizando la equivalencia de Euler se obtiene:

$$r_1 + r_4 \cos(\theta_4) = r_2 \cos(\theta_2) + r_3 \cos(\theta_3) \quad (5.3)$$

$$r_4 \sin(\theta_4) = r_2 \sin(\theta_2) + r_3 \sin(\theta_3) \quad (5.4)$$

En este caso se tiene una ecuación no lineal donde las variables dependientes o incógnitas son: θ_3 y θ_4 , la variable independiente es θ_2 y las constantes son: r_1 , r_2 , r_3 , y r_4 . Se va a eliminar una incógnita en este caso θ_3

$$r_1 + r_4 \cos(\theta_4) - r_2 \cos(\theta_2) = r_3 \cos(\theta_3) \quad (5.5)$$

$$r_4 \sin(\theta_4) - r_2 \sin(\theta_2) = r_3 \sin(\theta_3) \quad (5.6)$$

Si se eleva al cuadrado y se suma:

$$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2) - 2 r_1 r_4 \cos(\theta_4) - 2 r_2 r_4 ((\cos(\theta_4) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_4) \sin(\theta_2))) \quad (5.7)$$

Dividiendo todo para $2 r_2 r_4$

$$\cos(\theta_4 - \theta_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_2 r_4} - \frac{r_1}{r_4} \cos(\theta_2) + \frac{r_1}{r_2} \cos(\theta_4) \quad (5.8)$$

Utilizando nuevas constantes para compactar la expresión:

$$k_3 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_2 r_4} \quad (5.9)$$

$$k_2 = \frac{r_1}{r_4} \quad (5.10)$$

$$k_1 = \frac{r_1}{r_2} \quad (5.11)$$

Se genera la ecuación de Freudenstein que se utiliza en síntesis de mecanismos:

$$\cos(\theta_4 - \theta_2) = k_3 - k_2 \cos(\theta_2) + k_1 \cos(\theta_4) \quad (5.12)$$

Para obtener las longitudes del cuadrilátero articulado r_1 , r_2 , r_3 y r_4 se necesitan las tres coordinaciones angulares:

θ_4	θ_{4I}	θ_{4II}	θ_{4III}
θ_2	θ_{2I}	θ_{2II}	θ_{2III}

Se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} k_3 - k_2 \cos(\theta_{2I}) + k_1 \cos(\theta_{4I}) &= \cos(\theta_{4I} - \theta_{2I}) \\ k_3 - k_2 \cos(\theta_{2II}) + k_1 \cos(\theta_{4II}) &= \cos(\theta_{4II} - \theta_{2II}) \\ k_3 - k_2 \cos(\theta_{2III}) + k_1 \cos(\theta_{4III}) &= \cos(\theta_{4III} - \theta_{2III}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Diseñar una tenaza quirúrgica que cumpla con las siguientes condiciones.

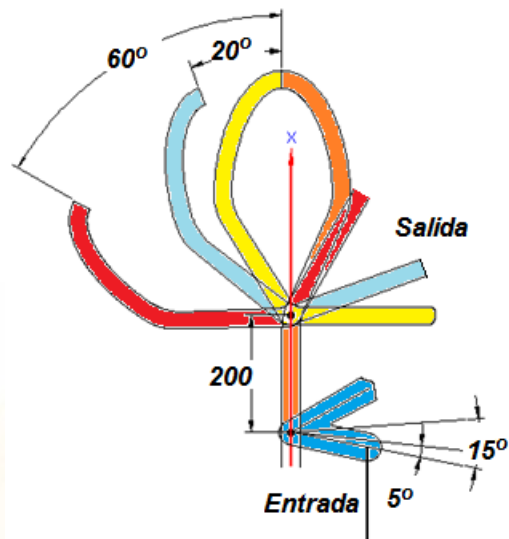


Figura 5.21. Tenaza quirúrgica

Se puede observar del esquema que se pretende tener una gran apertura en el eslabón de salida con pequeñas aperturas en la barra de entrada.

1.- En primer lugar dibujamos el eje positivo de las x , que va desde el eslabón de entrada al eslabón de salida, en el sentido positivo de este eje se miden las rotaciones angulares

θ_4	$\theta_{4I} = 90^\circ$	$\theta_{4II} = 90 - 20 = 70^\circ$	$\theta_{4III} = 90 - 60 = 30^\circ$
θ_2	$\theta_{2I} = 60^\circ$	$\theta_{2II} = 60 - 5 = 55^\circ$	$\theta_{2III} = 60 - 15 = 45^\circ$

Los primeros valores $\theta_{4I} = 90^\circ$ y $\theta_{2I} = 60^\circ$ son opciones libres

2.- Se resuelve el sistema de ecuaciones 5.13 con Wolfram Mathematica


```

ClearAll;
θ21=60; θ41=90;
θ22=55; θ42=70;
θ23=45; θ43=30;
r1=200;

results={k1,k2,k3}/. NSolve[
{k1 Cos[θ41 Degree]-k2 Cos[θ21 Degree]+k3==Cos[θ41 Degree-θ21 Degree],
k1 Cos[θ42 Degree]-k2 Cos[θ22 Degree]+k3==Cos[θ42 Degree-θ22 Degree],
k1 Cos[θ43 Degree]-k2 Cos[θ23 Degree]+k3==Cos[θ43 Degree-θ23 Degree]}]

K1 = results[[1,1]];
K2 = results[[1,2]];
K3 = results[[1,3]];
r2=r1/K1;
r4 = r1/K2;
r3 = Sqrt[r1^2 + r4^2 + r2^2 - 2 K3 r2 r4];

puntos1= {{r2 Cos[θ21 Degree],r2 Sin[θ21 Degree]},{0,0},{r1,0}, {r1+ r4 Cos [θ41 Degree],r4 Sin[θ41 Degree]},{r2 Cos[θ21 Degree],r2 Sin[θ21 Degree]} }
puntos2= {{r2 Cos[θ22 Degree],r2 Sin[θ22 Degree]},{0,0},{r1,0}, {r1+ r4 Cos [θ42 Degree],r4 Sin[θ42 Degree]},{r2 Cos[θ22 Degree],r2 Sin[θ22 Degree]} }
puntos3= {{r2 Cos[θ23 Degree],r2 Sin[θ23 Degree]},{0,0},{r1,0}, {r1+ r4 Cos [θ43 Degree],r4 Sin[θ43 Degree]},{r2 Cos[θ23 Degree],r2 Sin[θ23 Degree]} }
ListLinePlot[{puntos1,puntos2, puntos3} ]

```

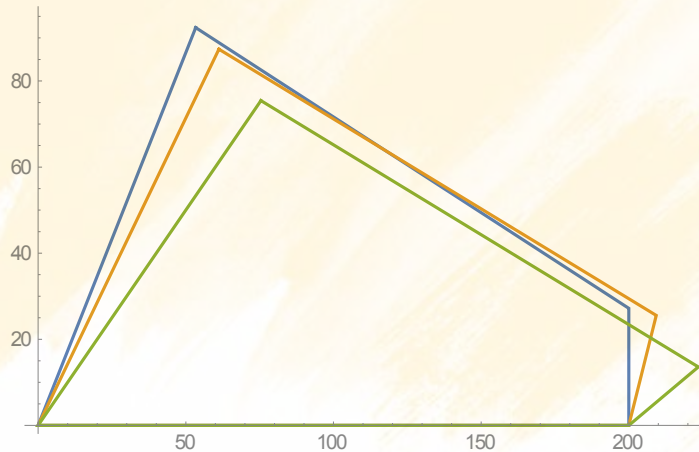
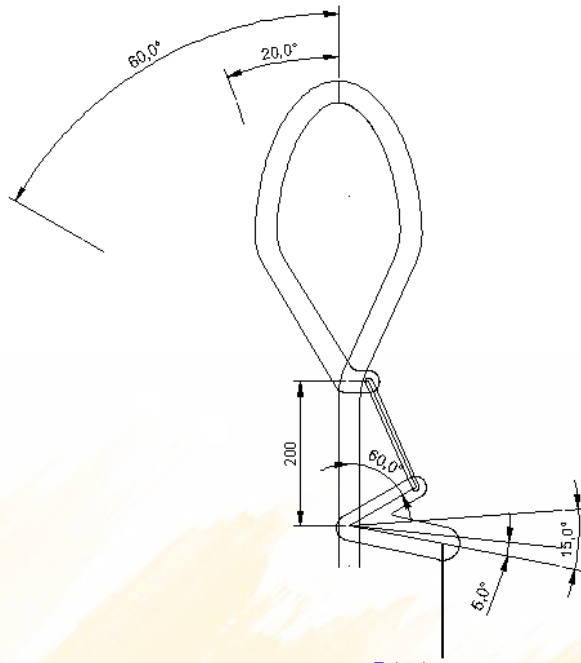


Figura 5.22. Secuencia del movimiento

4.- Se efectúa la simulación en Working Model, ver Fig.5.24, para lo cual previamente se dibuja en AutoCAD con las medidas dadas:



Entrada
Figura 5.23. Diseño final

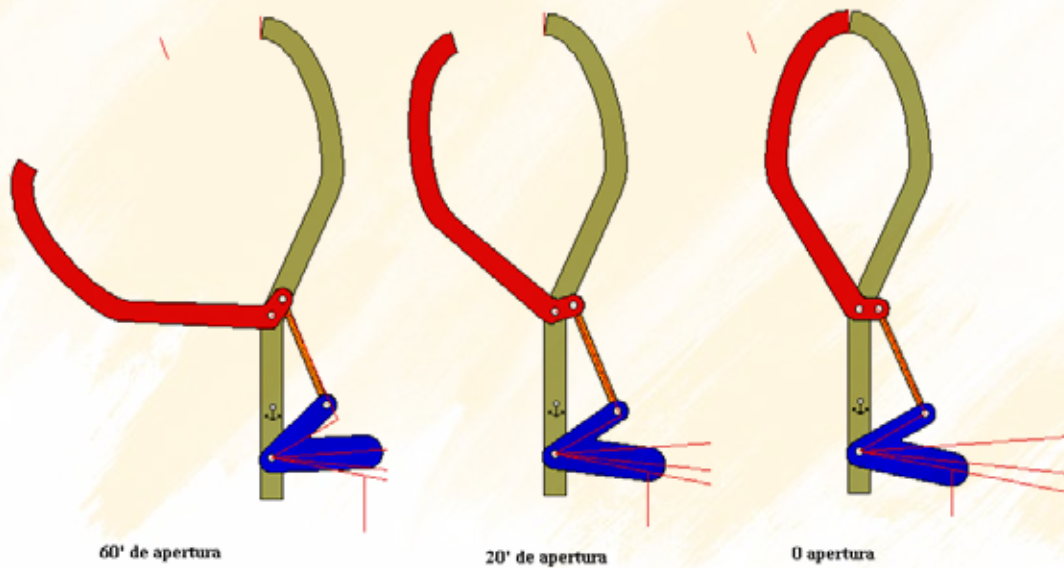


Figura 5.24. Simulación en Working Model 2D

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Diseñar el mecanismo de dirección de Ackerman

El mecanismo de Ackerman permite cuando un vehículo gire los ejes de las cuatro ruedas se intersecten en un punto común denominado centro instantáneo de rotación haciendo el vehículo controlable y minimizando el desgaste de las ruedas.

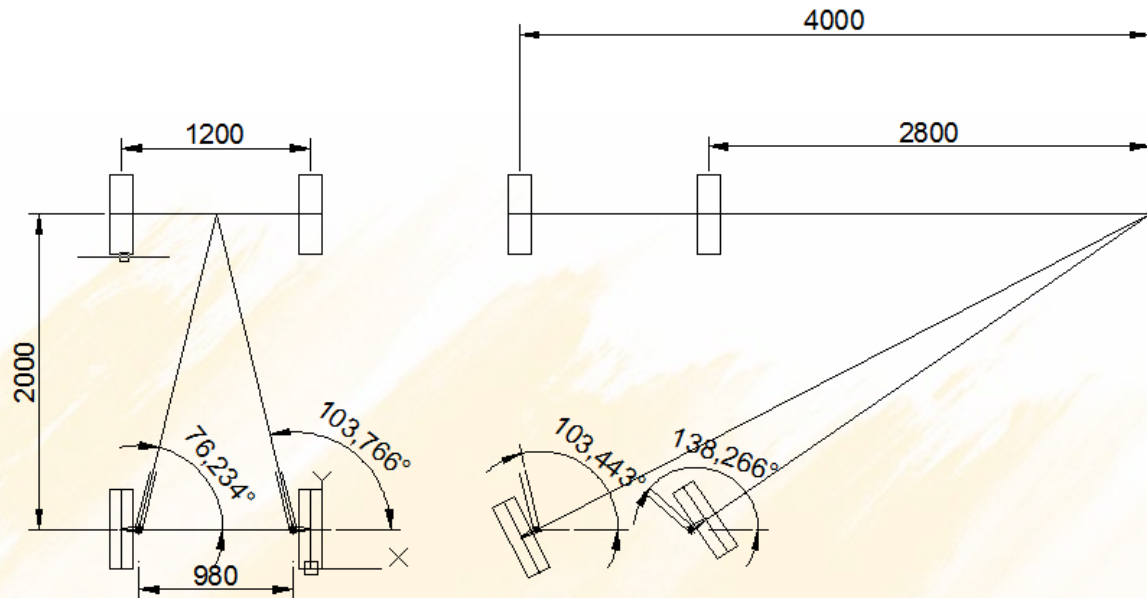


Figura 5.25. Datos para generar la síntesis de una dirección de Ackerman

Se parte de la ecuación 5.12 y en vista de que se tienen únicamente dos posiciones se puede deducir que $r_2 = r_4$ por tanto $k_1 = k_2$

$$\cos(\theta_4 - \theta_2) = k_3 - k_1 \cos(\theta_2) + k_1 \cos(\theta_4) \quad (5.14)$$

```

θ21= 76.234 π/180;
θ22 = 103.443 π/180;
θ41 = 103.766 π/180;
θ42 = 138.266 π/180;
r1 = 980;

NSolve[{k1 Cos[θ41]-k1 Cos[θ21]+k3 == Cos[θ41-θ21],
k1 Cos[θ42]-k1 Cos[θ22]+k3 == Cos[θ42-θ22] }, {k1,k3}]

r2 = r1/1.739254812835508
    
```

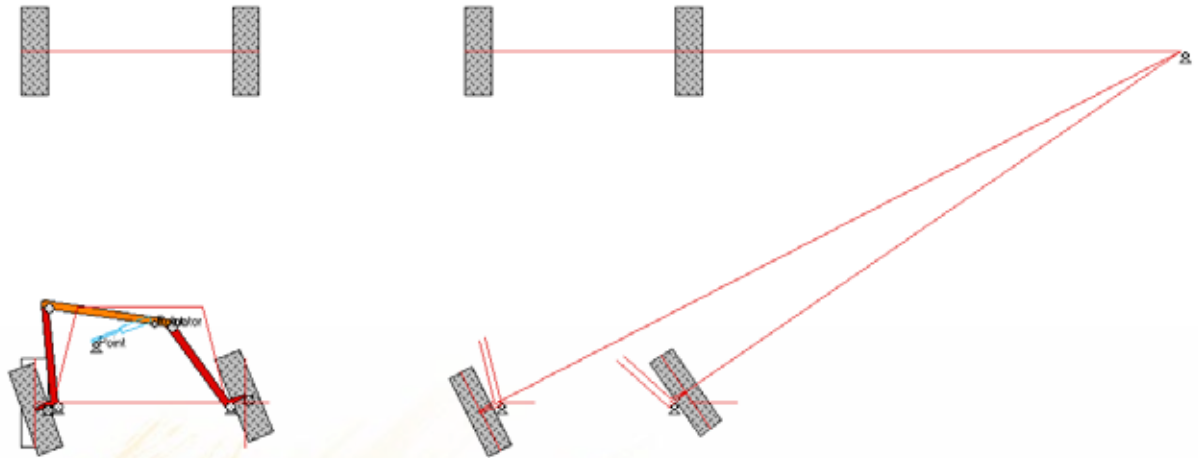


Figura 5.26. Simulación en Working Model 2D

5.3.4. TAREAS PARA EL ESTUDIANTE

1. Genere las ecuaciones que se deberían utilizar para resolver la síntesis de generación de funciones en el mecanismos manivela corredera

5.4 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO, MÉTODOS GRÁFICOS

5.4.1 SÍNTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO O GUIADO DEL ACOPLADOR CON DOS POSICIONES DE PRECISIÓN, METODO GRÁFICO.

- **EJERCICIO DE APLICACIÓN:** Parte del diseño de una línea de ensamble requiere retirar una caja de una banda transportadora, girarla 90°, y colocarla en otra banda transportadora. Encuentre un eslabonamiento de cuatro barras aceptable

1.- El problema consiste en trasladar una barra AB de la posición A_1B_1 a la posición A_2B_2 , la barra AB es una barra acopladora

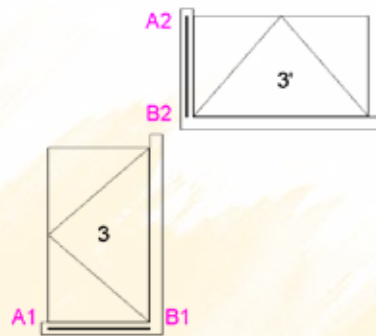


Figura 5.27. Esquema para el ejercicio de aplicación

2.- Para lo cual en primer lugar se trazan los segmentos auxiliares A_1A_2 y B_1B_2

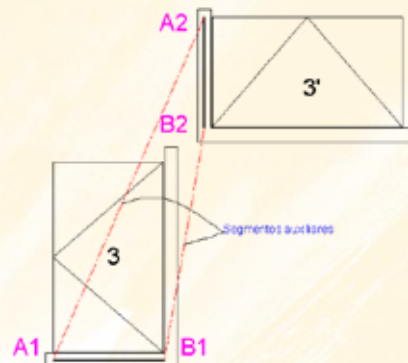


Figura 5.28. Segmentos auxiliares

3.- A continuación se trazan las mediatrices de los segmentos A_1A_2 y B_1B_2

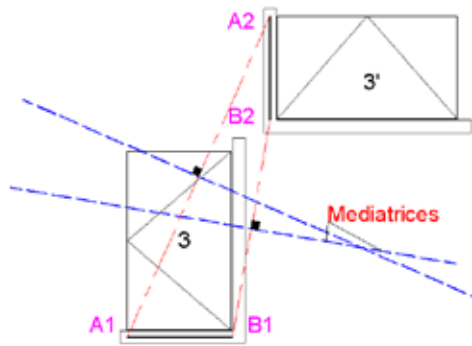


Figura 5.29. Mediatrices

4.- Cualquier punto sobre la mediatriz de A_1A_2 es el polo de rotación A_0 y cualquier punto sobre la mediatriz de B_1B_2 es el polo de rotación B_0 , se debe luego verificar el ángulo de transmisión.

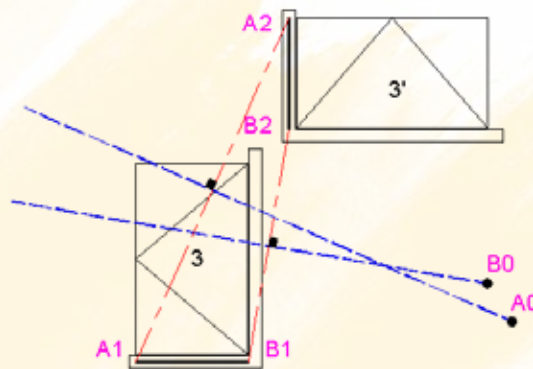


Figura 5.30. Selección de los pivotes fijos a lo largo de las mediatrices

5.- Siendo A_0A_1 y B_0B_1 las barras que complementan el mecanismo.

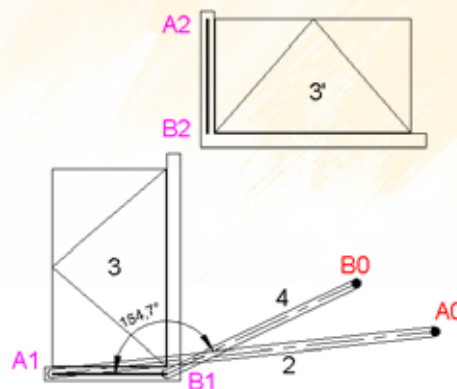


Figura 5.31. Mecanismo final

6.- Simulación en Working Model

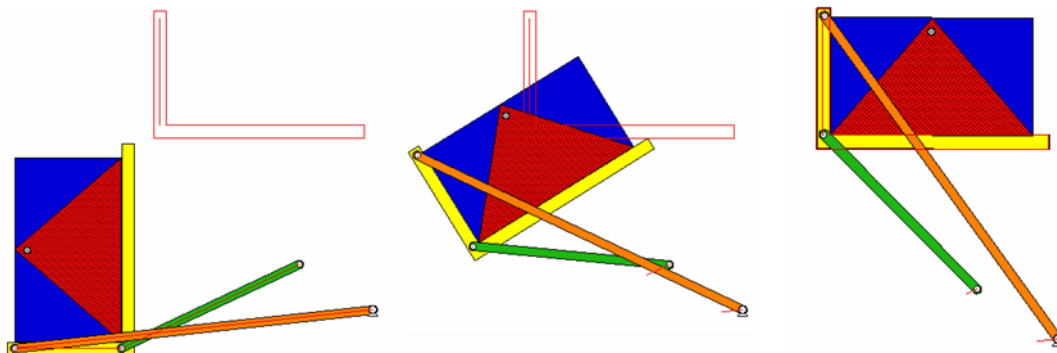


Figura 5.32. Simulación

5.4.2 TAREAS PARA EL ESTUDIANTE

1.- Diseñar un mecanismo capaz de levantar una puerta de un horno de tratamientos térmicos y que sea capaz de sostenerse por sí sola en la posición abierta, de tal modo que el operario pueda introducir sin dificultad cualquier elemento.

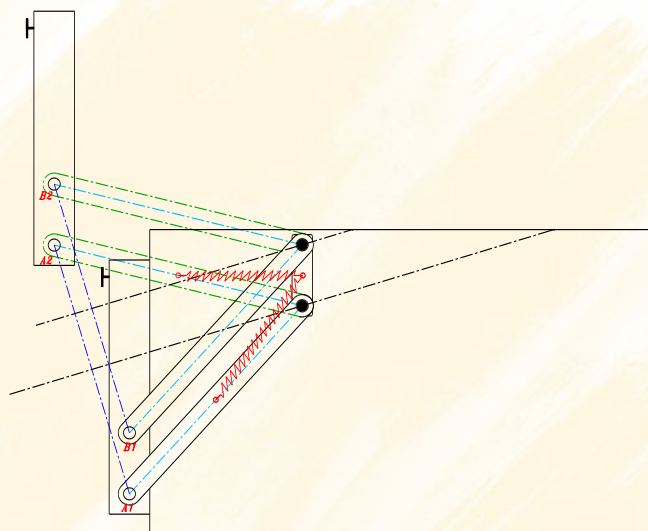


Figura 5.33. Esquema del horno

El resorte actúa como un eslabón de longitud variable que reduce a cero el número de grados de libertad siempre y cuando no haya una fuerza externa superior a la fuerza del resorte.

2.- Diseñar un tablero de baloncesto de altura regulable, en donde el tablero se desplace en forma paralela

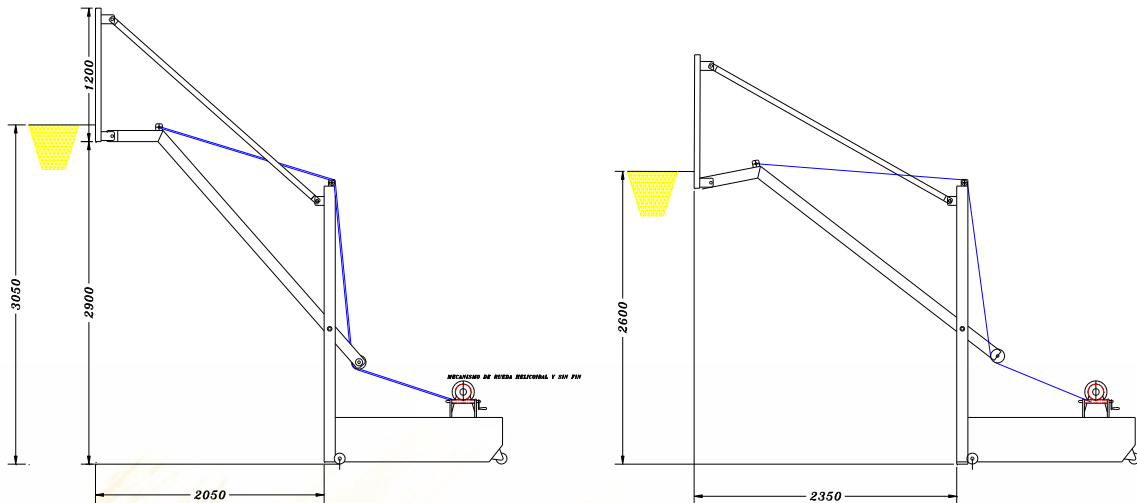


Figura 5.34. Tablero de baloncesto regulable

3.- Diseñar un sistema para mezclado de pintura que invierta alternativamente la lata



Figura 5.35. Invierta alternativamente la lata de pintura

5.4.3 SÍNTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO CON DOS POSICIONES DE PRECISIÓN Y SALIDA DE BALANCIN, METODO GRÁFICO.

Otra solución para el problema anterior es determinar la intersección de las mediatrices, punto denominado **roto polo**. Del roto polo partirían segmentos que son solidarios con A_1B_1 o A_2B_2 , para luego sincronizar la oscilación de este eslabón que pasaría a ser seguidor, con un giro completo de la manivela, o con cualquier forma de accionamiento, por lo tanto es una solución trivial de la generación de funciones.

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Diseñar el accionamiento para abrir la puerta de un silo, usando el método del roto polo

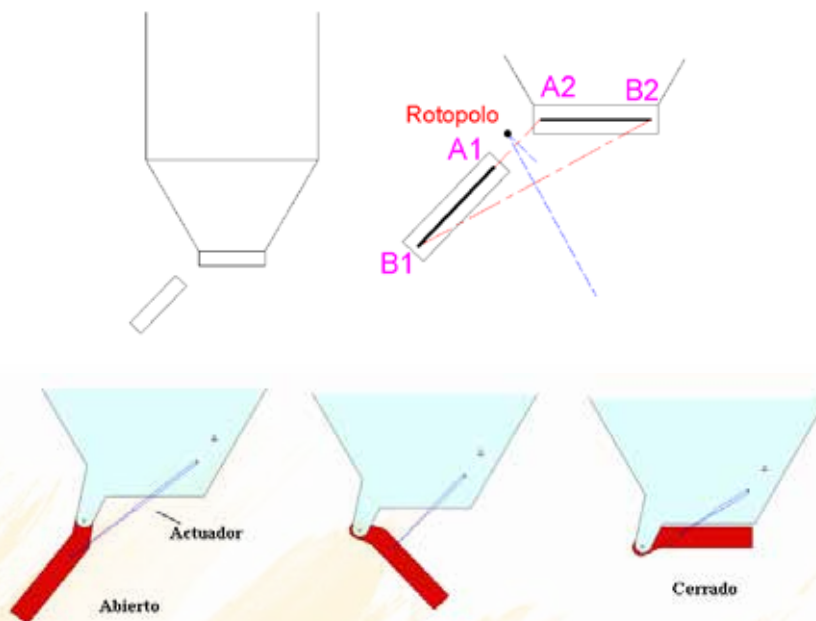


Figura 5.36. Esquema y simulación en Working Model 2D

5.4.4 SÍNTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO CON DOS POSICIONES DE PRECISIÓN Y UTILIZACION DE CORREDERA, METODO GRÁFICO.

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Diseñar una puerta de garaje

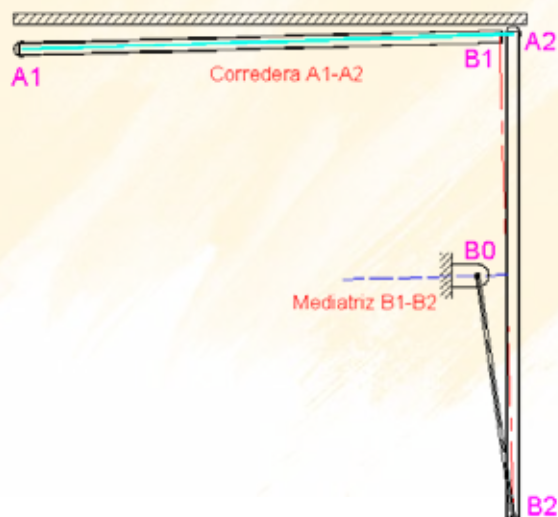


Figura 5.37. Esquema de una puerta de garaje

El procedimiento consiste en seleccionar el punto del eslabón que formara la junta de corredera, en nuestro caso el punto A y la guía que suele ser un riel, va de A_1 a A_2 . Para B_1 - B_2 se busca el centro de rotación por el método anterior.



Figura 5.38. Simulación

5.4.5 SÍNTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO CON TRES POSICIONES DE PRECISIÓN

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se desea sintetizar un eslabonamiento para guiar la repisa móvil a través de las tres posiciones que se muestran en la figura 5.39. La primera posición está en el mismo nivel que la parte superior del mueble para poder escribir sobre esta y la tercera posición es una posición de guardado.

El problema consiste en guiar el acoplador, que en este caso es la repisa, por tres posiciones A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3

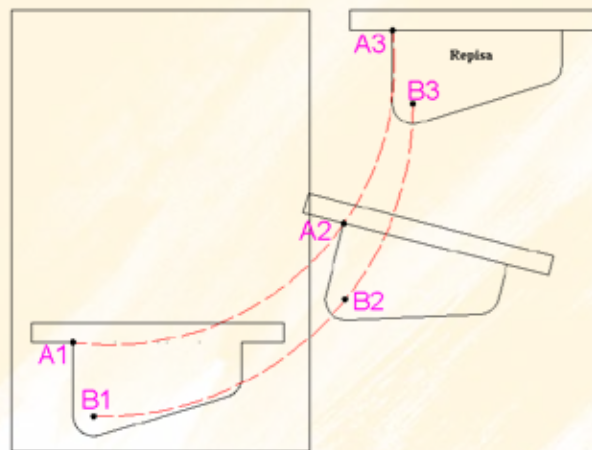


Figura 5.39. Planteamiento del problema

En este caso se selecciona puntos convenientes en la repisa que corresponderán a los pivotes móviles, a continuación se trazan por estos tres puntos arcos de circunferencia y se determinan sus centros.

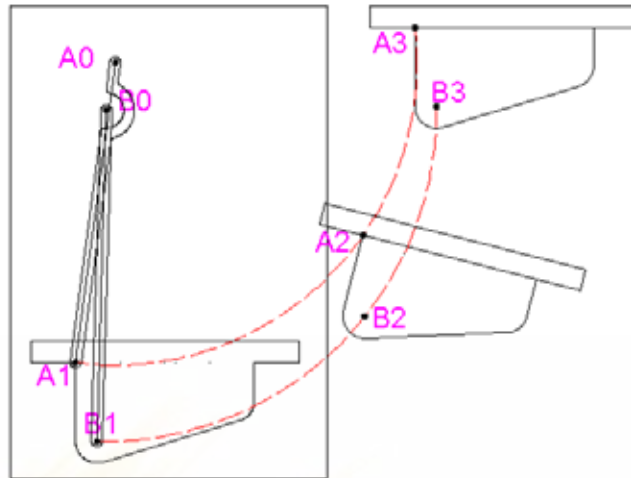


Figura 5.40. Mecanismo desarrollado

Los centros mencionados son los pivotes de tierra o fijos. Finalmente se comprueba con el programa Working Model el funcionamiento del mecanismo.

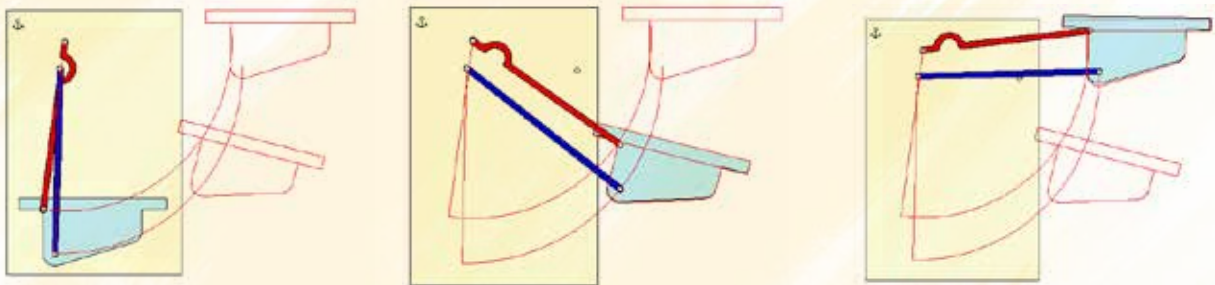


Figura 5.41. Simulación

Es posible que se necesite realizar algunos intentos antes de obtener una solución óptima.

5.5 SINTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO (GUIADO DEL ACOPLADOR) EN TRES POSICIONES DE PRECISIÓN METODO ANALÍTICO

5.5.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO

El problema de generación de un mecanismo que guie un acoplador se plantea del siguiente modo: Dada las coordenadas en el plano x, y de un punto común y tres ángulos que determinen la orientación del objeto, generar el mecanismo.

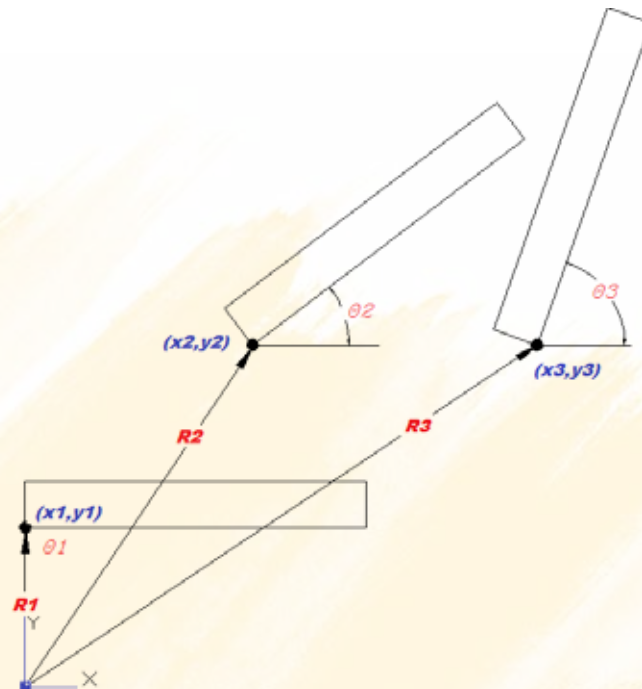


Figura 5.42. Planteamiento problema de guiado del acoplador

5.5.2 EL OPERADOR ROTACIÓN

Se puede expresar matemáticamente la rotación de un eslabón de la siguiente manera

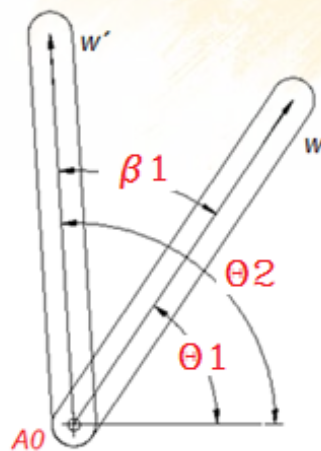


Figura 5.43. Rotación de un eslabón

Un vector se denota por medio de la ecuación 5.15

$$\vec{W} = W e^{i\theta_1} \quad (5.15)$$

Según la Fig. 5.43 para la posición 2 del vector \vec{W}

$$\vec{W}' = W e^{i\theta_2} = W e^{i(\theta_1 + \beta_1)} \quad (5.16)$$

De la propiedad de los exponentes

$$\vec{W}' = W e^{i\theta_1} e^{i\beta_1} = \vec{W} e^{i\beta_1} \quad (5.17)$$

Por tanto $e^{i\beta_1}$ se denomina el operador rotación

5.5.2 LA DIADA ESTANDAR

La generación de movimiento de un eslabonamiento de cuatro barras se puede modelar mediante díadas. Para lo cual se conoce las coordenadas de los puntos P_1 , P_2 , P_3 y las rotaciones relativas α_2 y α_3

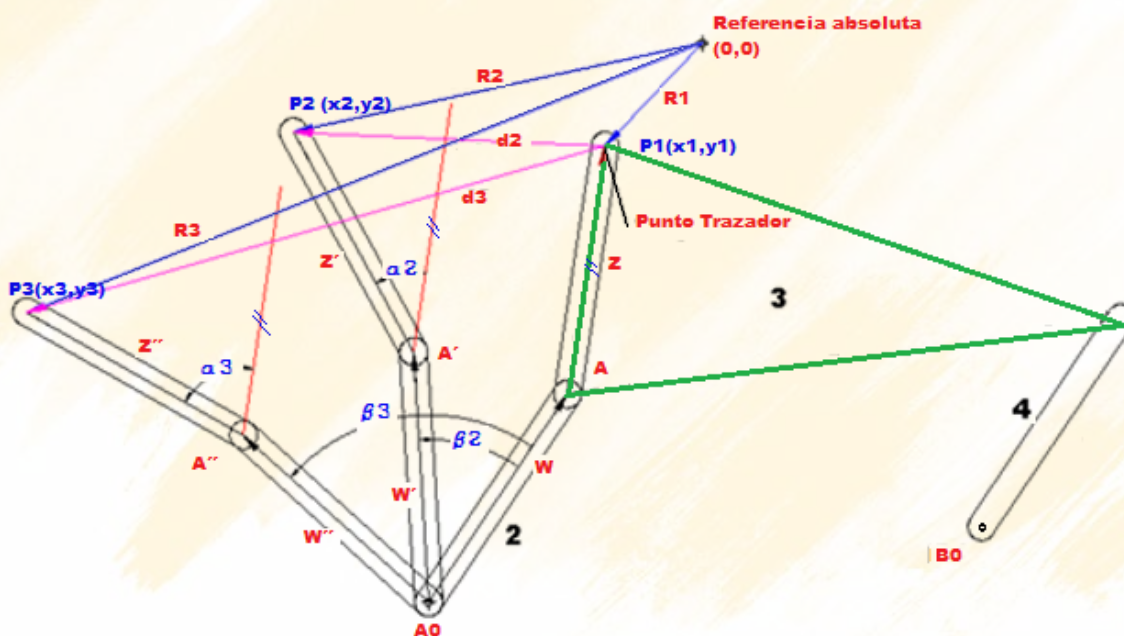


Figura 5.44. Modelamiento de un eslabonamiento de 4 barras²⁴

En base de los circuitos vectoriales $A_0AP_1P_2A'$ de la Fig. 5.44, se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$\vec{W} + \vec{Z} + \vec{d}_2 = \vec{W}' + \vec{Z}' \quad (5.18)$$

Despejando \vec{d}_2

²⁴ Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis, ERDAM y SANDOR

$$\vec{d}_2 = \vec{W}' - \vec{W} + \vec{Z}' - \vec{Z} \quad (5.19)$$

Utilizando el operador rotación de la ecuación 5.17

$$\vec{d}_2 = \vec{W}e^{i\beta_2} - \vec{W} + \vec{Z}e^{i\alpha_2} - \vec{Z} \quad (5.20)$$

Agrupando se obtiene, la siguiente ecuación con dos incógnitas:

$$\vec{d}_2 = \vec{W}(e^{i\beta_2} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_2} - 1) \quad (5.21)$$

Extrapolando el procedimiento al circuito $A_0AP_1P_3A''$

$$\vec{d}_3 = \vec{W}(e^{i\beta_3} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_3} - 1) \quad (5.22)$$

Obteniéndose un sistema de ecuaciones complejas, lineales en las incógnitas vectoriales \vec{W} y \vec{Z} , puesto que α_2 y α_3 son las rotaciones de la barra 3, los vectores \vec{d}_2 y \vec{d}_3 están determinados mediante coordenadas conocidas de los puntos P_1 , P_2 y P_3 , y los ángulos β_2 y β_3 de temporización, necesariamente son opciones libres, por lo que existe infinitas de soluciones para el problema

$$\begin{aligned} \vec{d}_2 &= \vec{W}(e^{i\beta_2} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_2} - 1) \\ \vec{d}_3 &= \vec{W}(e^{i\beta_3} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_3} - 1) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dónde:

$$\begin{aligned} \vec{d}_2 &= \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \\ \vec{d}_3 &= \vec{R}_3 - \vec{R}_1 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Finalmente el pivote fijo se determina

$$\vec{A}_0 = \vec{R}_1 - \vec{W} + \vec{Z} \quad (5.25)$$

Y el pivote móvil

$$\vec{A} = \vec{R}_1 - \vec{Z} \quad (5.26)$$

Hasta este punto está resuelto la mitad del problema se debe repetir para determinar la barra 4 simplemente cambiando otro par de valores β_2 y β_3

En base del siguiente ejercicio se entenderá mejor el procedimiento:

- **EJERCICIO DE APLICACIÓN:** Para prevenir un sellado defectuoso de una tapa presurizada conviene que la aproximación de la misma sea en forma paralela, diseñe el mecanismo para la aplicación, sugerencia para opciones libres, $15^\circ, 25^\circ, 25^\circ, 80^\circ$

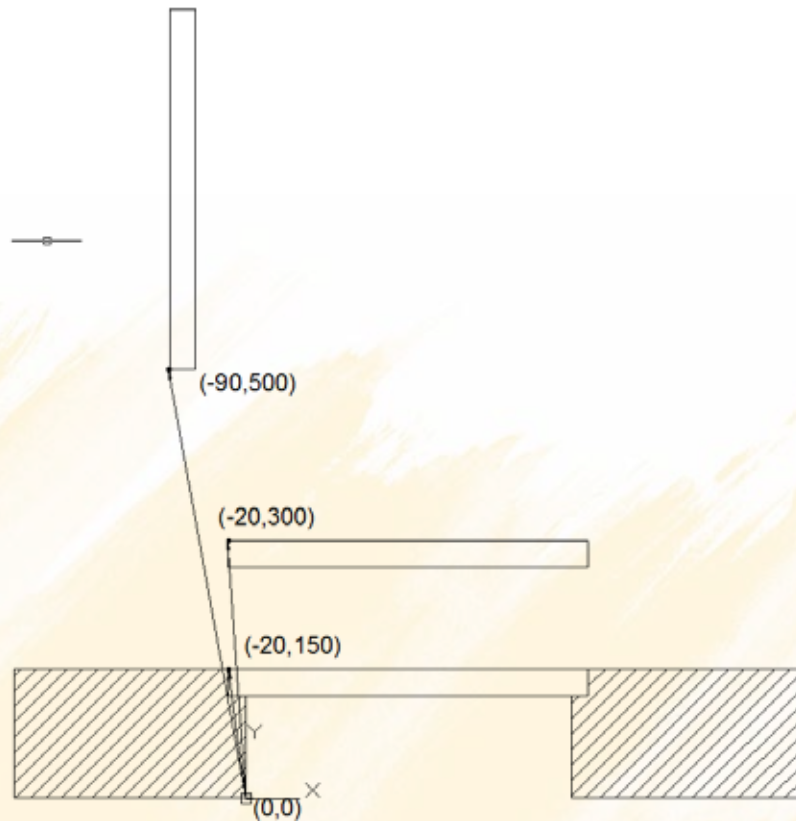


Figura 5.45. Control de una tapa de recipiente

Los vectores \vec{R}_1 , \vec{R}_2 y \vec{R}_3 se calculan mediante

$$\vec{R}_1 = [-20 - 0] + [150 - 0]i$$

$$\vec{R}_2 = [-20 - 0] + [300 - 0]i$$

$$\vec{R}_3 = [-90 - 0] + [500 - 0]i$$

Las diadas son por tanto:

$$\vec{d}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = 150i$$

$$\vec{d}_3 = \vec{R}_3 - \vec{R}_1 = -70 + 350i$$

Las rotaciones relativas

$$\alpha_2 = \theta_2 - \theta_1 = 0^\circ$$

$$\alpha_3 = \theta_3 - \theta_1 = 90^\circ - 0^\circ$$

Las selecciones libres de β_2 y β_3 , donde el primer par es para la barra 2 y el otro para la barra 4 serán:

$$\beta = \begin{pmatrix} 15 \frac{\pi}{180} \\ 25 \frac{\pi}{180} \\ 20 \frac{\pi}{180} \\ 80 \frac{\pi}{180} \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones a resolverse por cualquier método es:

$$\begin{aligned} \vec{d}_2 &= \vec{W}(e^{i\beta_2} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_2} - 1) \\ \vec{d}_3 &= \vec{W}(e^{i\beta_3} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_3} - 1) \end{aligned}$$

El programa en Mathematica es el siguiente:

```

ClearAll;
"Datos"
R1 = (-20-0)+(150-0)I;
R2 = (-20-0)+(300-0)I;
R3 = (-90-0)+(500-0)I;
θ1 = 0 π/180;   θ2 = 0 π/180;   θ3 = 90 π/180;
"Las diadas son";
d2 = R2-R1;    d3 = R3 - R1;
α2 = θ2-θ1;    α3 = θ3-θ1;
"Las opciones libres son"
\Beta = (\Pi/180) ( { {x}, {y},{z}, {w} } );
"Las matrices"
M1= ({
  {Ei β[[1,1]]-1, Ei α2-1},
  {Ei β[[2,1]]-1, Ei α3-1}
});
M2= ({
  {Ei β[[3,1]]-1, Ei α2-1},
  {Ei β[[4,1]]-1, Ei α3-1}
});
d = ( { {d2}, {d3} });
"La solución del sistema de ecuaciones lineales para la barra 2"
WZ1=LinearSolve[M1,d];
W1 = N[WZ1[[1,1]]];
Z1 = N[WZ1[[2,1]]];
A1 = R1-Z1
A10 = A1-W1
"La solución del sistema de ecuaciones lineales para la barra 4"
WZ2 = LinearSolve[M2, d];
W2 = N[WZ2[[1, 1]]];
Z2 = N[WZ2[[2, 1]]];
A2 = R1 - Z2
A20 = A2 - W2
"Graficación"
puntos = {{Re[A10], Im[A10]}, {Re[A1], Im[A1]}, {Re[A2],
  Im[A2]}, {Re[A20], Im[A20]} };
acoplador = {{-20, 150}, {500, 150}, {500, 130}, {-20, 130}, {-20,
  150} };

```

```

{Manipulator[Dynamic[x],{0,360,1}],Dynamic[x]}
{Manipulator[Dynamic[y],{0,360,1}],Dynamic[y]}
{Manipulator[Dynamic[z],{0,360,1}],Dynamic[z]}
{Manipulator[Dynamic[w],{0,360,1}],Dynamic[w]}
ListLinePlot[{puntos,acoplador}]

```

Los valores de los manipuladores dinámicos que se ingresan son, Fig. 5.46

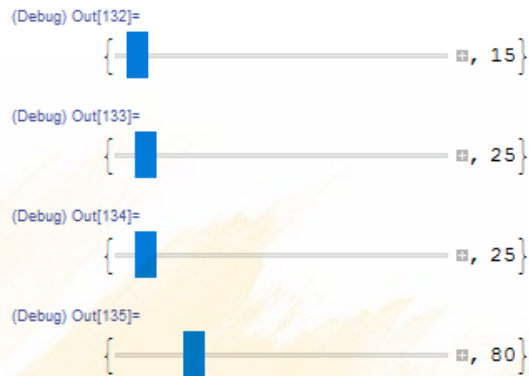


Figura 5.46. Manipuladores dinámicos

Los resultados que arroja el programa son una visualización del eslabonamiento

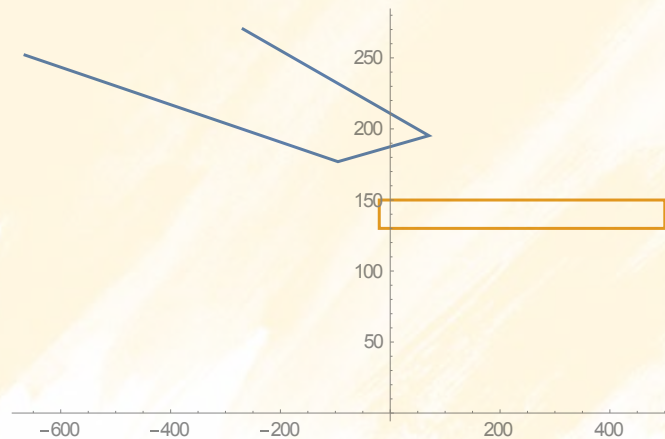


Figura 5.47. Mecanismo resultante

Y las coordenadas de los pivotes fijos y móviles

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -95.26844889128716 + 176.9468051567362i \\
 A_{10} &= -664.9500073456736 + 251.94680515673616i \\
 A_2 &= 70.41838627449118 + 195.27844665067428i \\
 A_{20} &= -267.8847515001631 + 270.2784466506743i
 \end{aligned}$$

Con estas coordenadas se procede a dibujar el eslabonamiento de cuatro barras

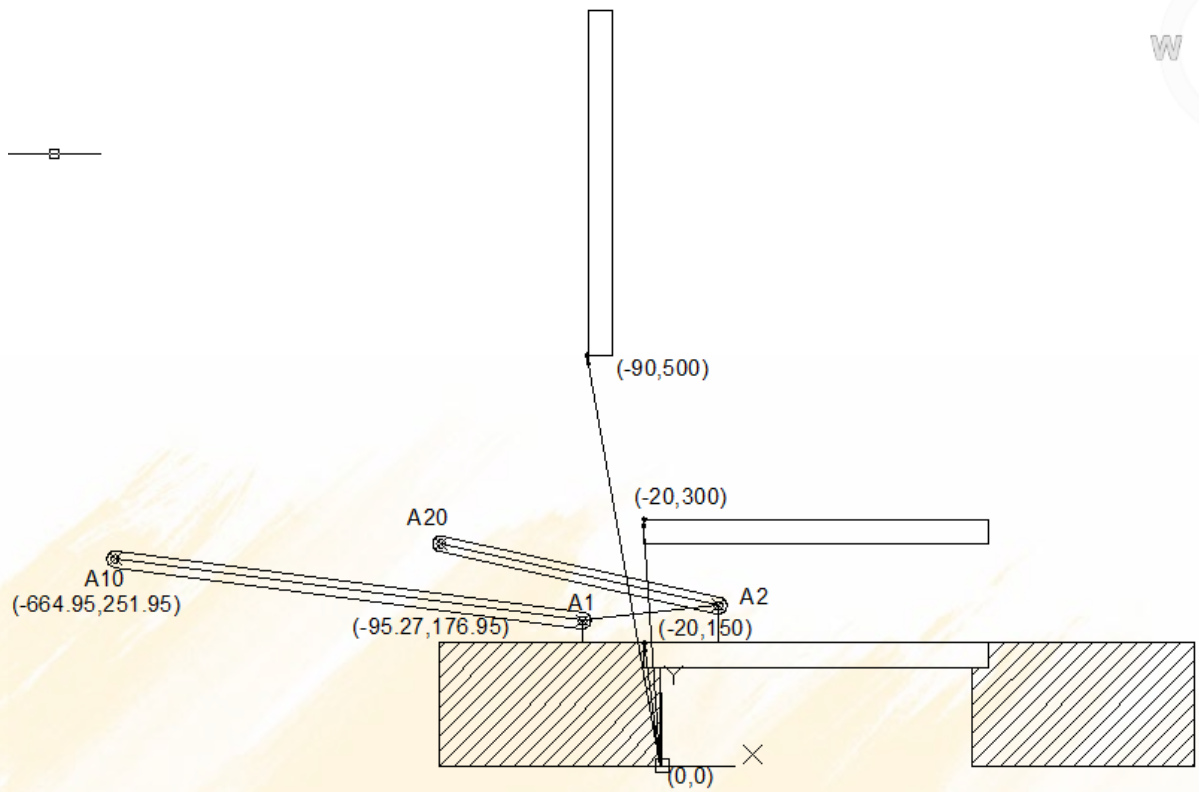


Figura 5.48. Mecanismo resultante en AutoCAD

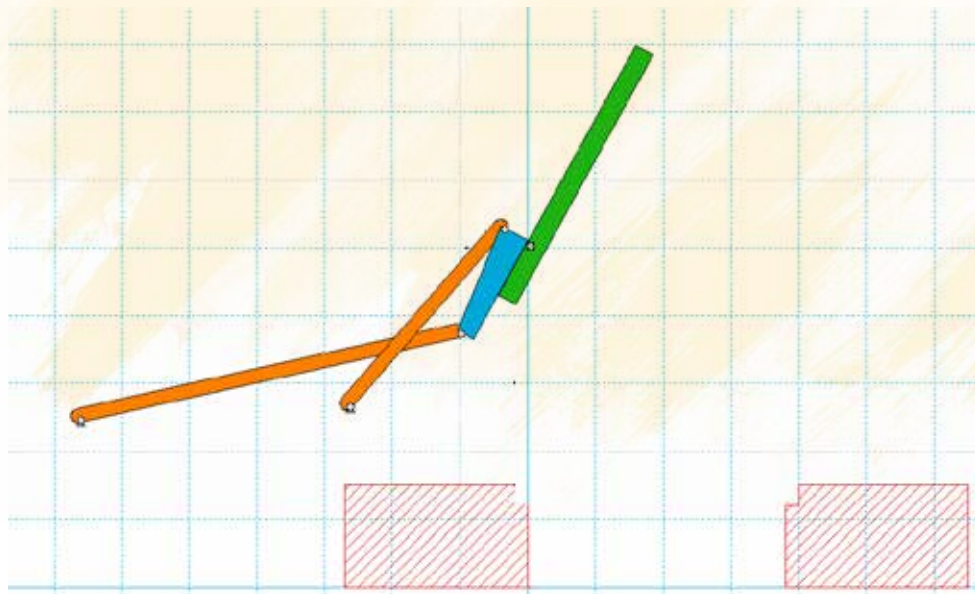


Figura 5.48. Simulación resultante en Working Model

- **EJERCICIO DE APLICACIÓN:** Diseñe un eslabonamiento compacto que se pueda agregar al vehículo de la figura de modo que el operador pueda mantener una posición horizontal mientras el tractor recorre un terreno inclinado

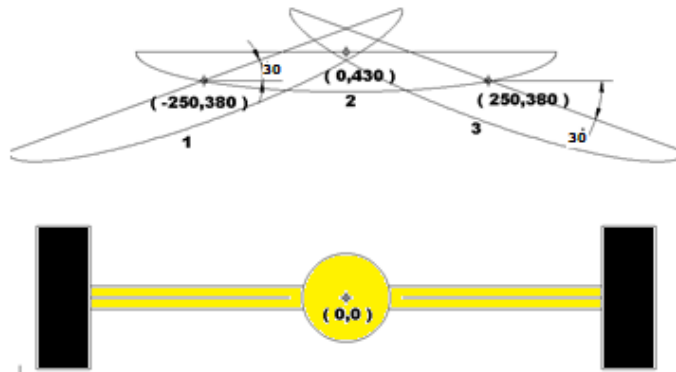


Figura 5.49. Suspensión auto nivelante

Los vectores \vec{R}_1 , \vec{R}_2 y \vec{R}_3 se calculan mediante

$$\vec{R}_1 = [-250 - 0] + [380 - 0]i$$

$$\vec{R}_2 = [0 - 0] + [430 - 0]i$$

$$\vec{R}_3 = [250 - 0] + [380 - 0]i$$

Las rotaciones relativas

$$\alpha_2 = \theta_2 - \theta_1 = -30^\circ$$

$$\alpha_3 = \theta_3 - \theta_1 = 340^\circ - 30^\circ = 310^\circ$$

Las selecciones libres de β_2 y β_3 , donde el primer par es para la barra 2 y el otro para la barra 4 serán:

$$\beta = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 15 \\ -57 \\ -68 \end{array} \frac{\pi}{180} \right\}$$

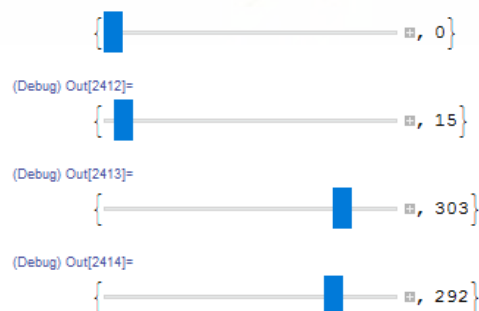


Figura 5.50. Manipuladores dinámicos

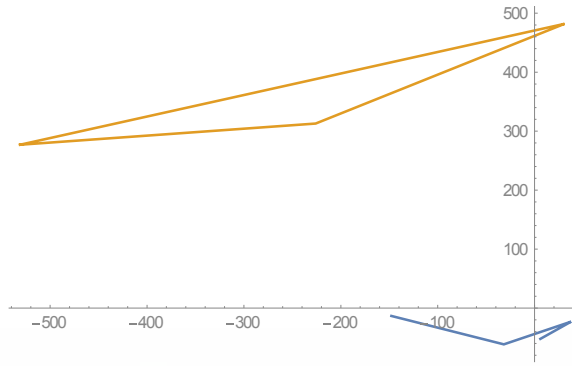


Figura 5.51. Mecanismo resultante

Con estos datos se puede generar el eslabón 2 del mecanismo que está dado por el segmento $A_{10}-A_1$, suele ser necesario probar varias veces

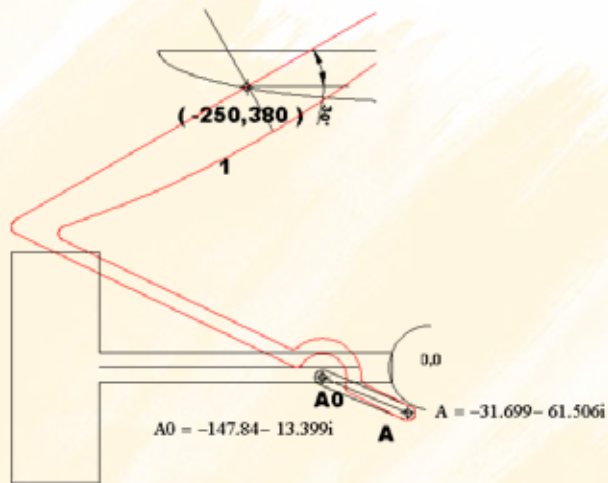


Figura 5.52. Barra 2

Y luego escogiendo así mismo en forma arbitraria los ángulos:

$$\beta_2 = -57 \frac{\pi}{180} ; \beta_3 = -68 \frac{\pi}{180}$$

Se obtiene el eslabón 4 del mecanismo

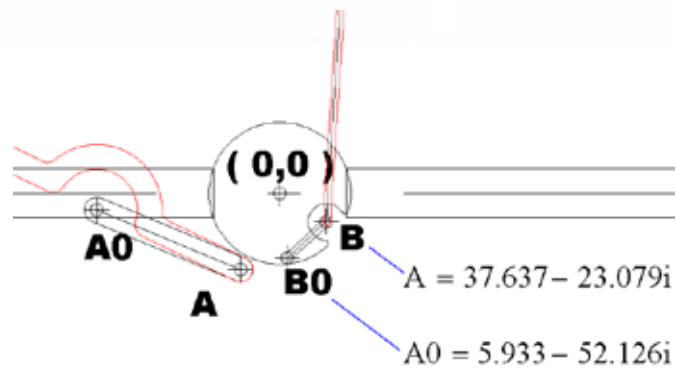


Figura 5.53. Barra 4

La simulación en Working Model 2D es la siguiente

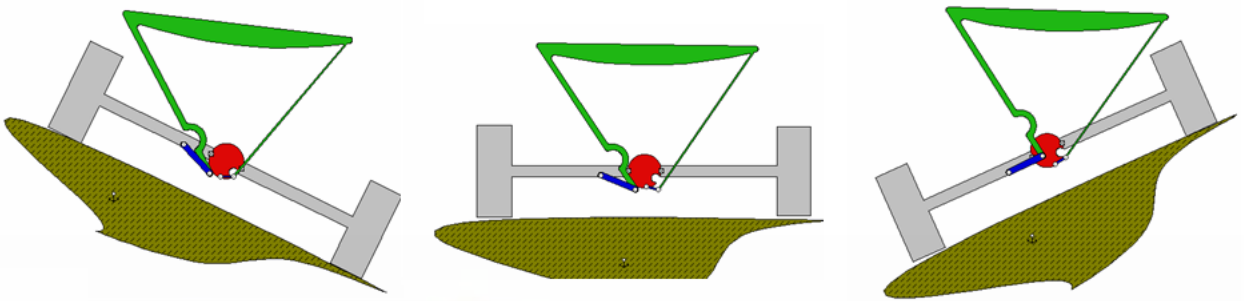


Figura 5.54. Simulación en Working Model

5.6 SINTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO (GUIADO DEL ACOPLADOR) EN TRES POSICIONES DE PRECISIÓN Y CON PIVOTES DE TIERRA PRESCRITOS

Para eliminar la incertidumbre de valorar adecuadamente los ángulos β_2 y β_3 es preferible definir previamente las posiciones de los pivotes fijos, de la Fig. 5.55, donde P_1, P_2, P_3 son coordenadas de un mismo punto del acoplador en sus tres posiciones, adicionalmente α_2, α_3 , del arreglo geométrico se obtiene tres ecuaciones vectoriales, Ec. 5.27, se empieza con el pivote A_0

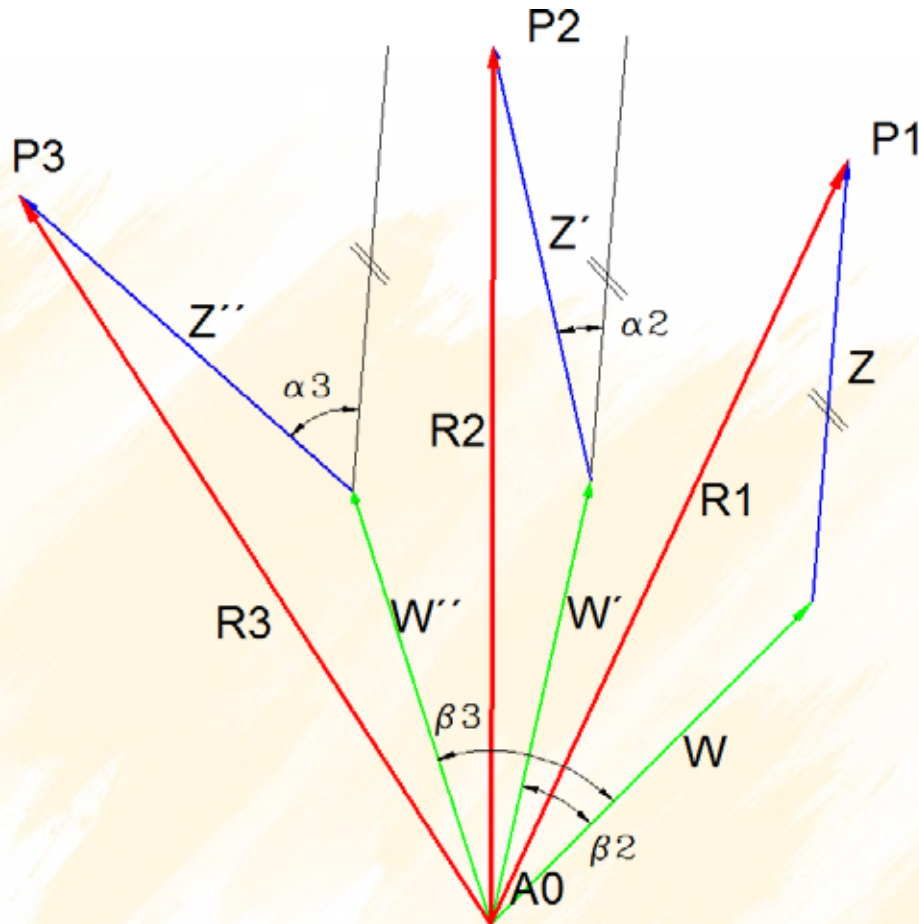


Figura 5.55. Planteamiento con pivotes prescritos

$$\begin{aligned} \vec{W} + \vec{Z} &= \vec{R}_1 \\ \vec{W}' + \vec{Z}' &= \vec{R}_1' \\ \vec{W}'' + \vec{Z}'' &= \vec{R}_1'' \end{aligned} \quad (5.27)$$

Utilizando el concepto del operador rotación, Ec.5.28

$$\begin{aligned} \vec{W} + \vec{Z} &= \vec{R}_1 \\ \vec{W}e^{i\beta_2} + \vec{Z}e^{i\alpha_2} &= \vec{R}_2 \\ \vec{W}e^{i\beta_3} + \vec{Z}e^{i\alpha_3} &= \vec{R}_3 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Las incógnitas son W y Z, cuando se tienen 3 ecuaciones y 2 incógnitas la solución solo existe cuando dos de las ecuaciones del sistema son combinaciones lineales, lo que implica que el valor del determinante de la matriz de los coeficientes tiene que ser nulo, Ec. 5.29

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \overrightarrow{R_1} \\ e^{i\beta_2} & e^{i\alpha_2} & \overrightarrow{R_2} \\ e^{i\beta_3} & e^{i\alpha_3} & \overrightarrow{R_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.29)$$

Desarrollando el determinante se obtiene la siguiente expresión, Ec. 5.30

$$1(e^{i\alpha_2}\overrightarrow{R_3} - \overrightarrow{R_2}e^{i\alpha_3}) - 1(e^{i\beta_2}\overrightarrow{R_3} - \overrightarrow{R_2}e^{i\beta_3}) + \overrightarrow{R_1}(e^{i\beta_2}e^{i\alpha_3} - e^{i\alpha_2}e^{i\beta_3}) = 0 \quad (5.30)$$

Agrupando terminos, Ec.5.31

$$e^{i\alpha_2}\overrightarrow{R_3} - \overrightarrow{R_2}e^{i\alpha_3} + e^{i\beta_2}(-\overrightarrow{R_3} + \overrightarrow{R_1}e^{i\alpha_3}) + e^{i\beta_3}(\overrightarrow{R_2} - \overrightarrow{R_1}e^{i\alpha_2}) = 0 \quad (5.31)$$

Simplificando la expresión 5.31, se obtiene la Ec. 5.32 (Arthur Erdman, 1998)²⁵ que representaría un circuito vectorial cerrado, donde los ángulos β_2 y β_3 son las incógnitas, mientras que D1, D2, D3 son vectores conocidos. Los ángulos β_2 y β_3 pueden ser determinados gráficamente mediante la Fig. 5.55.

$$D1 + D2 e^{i\beta_2} + D3 e^{i\beta_3} = 0 \quad (5.32)$$

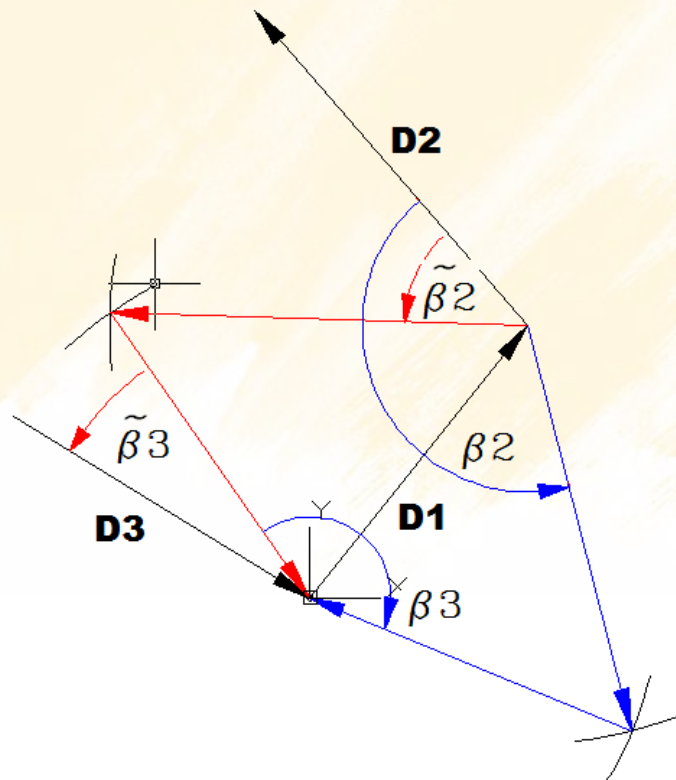


Figura 5.55. Solución gráfica de la Ec.5.32²⁵

²⁵ Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis, ERDAM y SANDOR

Es posible resolver numéricamente la Ec. 5.32 desarrollando parte real e imaginaria, sin embargo la opción más práctica es la presentada en el Texto Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis de Erdman y Sandor

$$\beta_2 = 2 \operatorname{Arg}(-D1) - \operatorname{Arg}(D2) - \operatorname{Arg}(D2 e^{i\alpha_2}) \quad (5.33)$$

$$\beta_3 = 2 \operatorname{Arg}(-D1) - \operatorname{Arg}(D3) - \operatorname{Arg}(D3 e^{i\alpha_3}) \quad (5.34)$$

Obteniendo β_2 y β_3 se puede resolver dos ecuaciones del sistema 5.28 mediante Ec. 5.35

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\beta_2} & e^{i\alpha_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{W} \\ \vec{Z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Posteriormente, se obtienen las longitudes de las barras ya que r_2 es \vec{W} mientras que \vec{Z} es parte del eslabón móvil 3 y Finalmente se repite el procedimiento con el pivote B_0

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Como parte del proceso de automatización, hay que diseñar un eslabonamiento de cuatro barras para retirar cajas de una banda transportadora inferior y depositarlas en una banda transportadora superior, como se muestra en la Fig. 5.56. Es preciso situar los pivotes tanto de tierra como móvil entre las bandas transportadoras inferior y superior.

1.- Dibujar en AutoCAD las tres posiciones del acoplador, con la orientación y coordenadas especificadas y los pivotes de tierra. Con la opción de AutoCAD "DDPTYPE" se visualizan mejor los puntos.

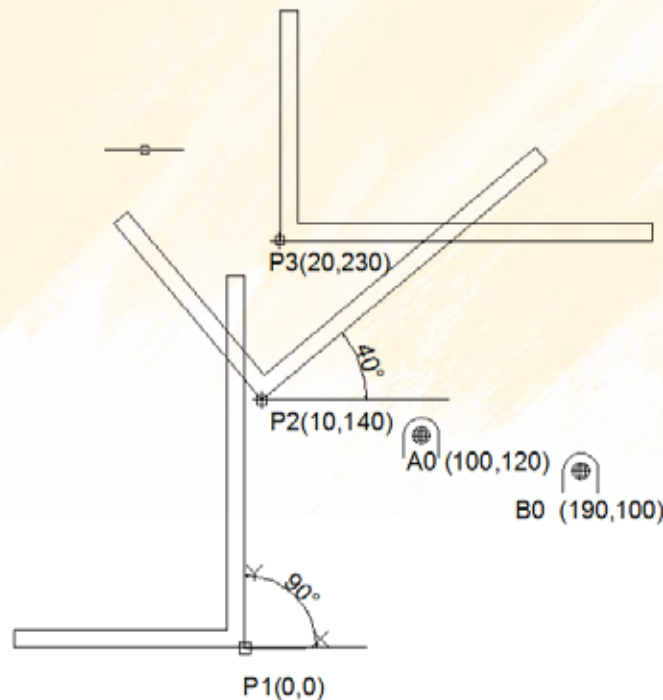


Figura 5.56. Planteamiento del problema

DATOS: $P_1, P_2, P_3, A_0, B_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$

2.- De esta construcción lo importante es la orientación de la posición que sería: 90° , 40° , 0° , las coordenadas absolutas de las posiciones: $(0,0)$, $(10,140)$, $(20,230)$ y de los pivotes $A_0 (100,120)$ y $B_0 (190,100)$.

3.- En el programa de Wolfram Mathematica, introducimos los datos de ángulos y vectores de posición desde A_0

$$\theta_1 = 90 \frac{\pi}{180}; \theta_2 = 40 \frac{\pi}{180}; \theta_3 = 0 \frac{\pi}{180}$$

$$\alpha_2 = \theta_2 - \theta_1 = -50 \frac{\pi}{180}$$

$$\alpha_3 = \theta_3 - \theta_1 = -90 \frac{\pi}{180}$$

Los vectores de posición \vec{R}_1 , \vec{R}_2 y \vec{R}_3 se los halla por medio de resta de la coordenada final menos la coordenada inicial

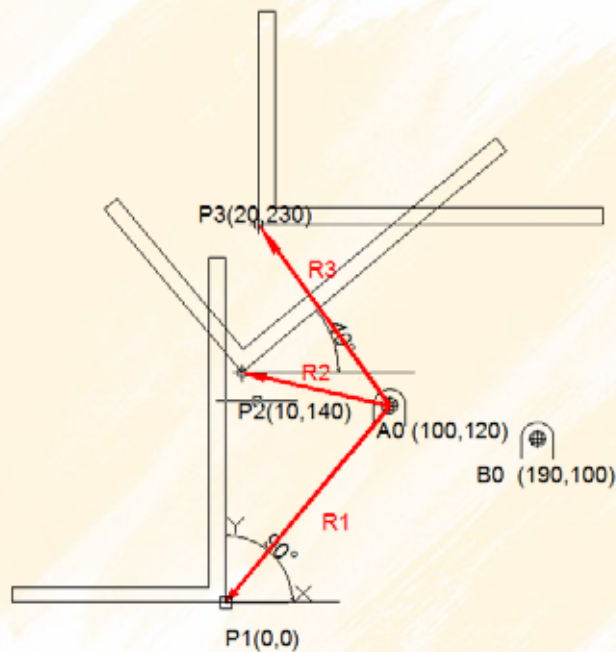


Figura 5.57. Determinación de los vectores de posición

$$\vec{R}_1 = (0 - 100) + (0 - 120)i$$

$$\vec{R}_2 = (10 - 100) + (140 - 120)i$$

$$\vec{R}_3 = (20 - 100) + (230 - 120)i$$

4.- El código del programa de Wolfram Mathematica para resolver el problema es el siguiente:


```

ClearAll;
"Datos";
A0 = 100 + 120 I; B0 = 190 + 100 I;
\[\Theta]1 = 90 \[Pi]/180;
\[\Theta]2 = 40 \[Pi]/180;
\[\Theta]3 = 0 \[Pi]/180;
\[\Alpha]2 = \[\Theta]2 - \[\Theta]1;
\[\Alpha]3 = \[\Theta]3 - \[\Theta]1;
P1 = 0 + 0 I; P2 = 10 + 140 I; P3 = 20 + 230 I;

"Vectores de posición";

R1A = (Re[P1] - Re[A0]) + (Im[P1] - Im[A0]) I;
R2A = (Re[P2] - Re[A0]) + (Im[P2] - Im[A0]) I;
R3A = (Re[P3] - Re[A0]) + (Im[P3] - Im[A0]) I;

R1B = (Re[P1] - Re[B0]) + (Im[P1] - Im[B0]) I;
R2B = (Re[P2] - Re[B0]) + (Im[P2] - Im[B0]) I;
R3B = (Re[P3] - Re[B0]) + (Im[P3] - Im[B0]) I;

"Diadas ";

D1A = N[R3A E^(I \[\Alpha]2) - R2A E^(I \[\Alpha]3)];
D2A = N[R1A E^(I \[\Alpha]3) - R3A];
D3A = N[R2A - R1A E^(I \[\Alpha]2)];

D1B = N[R3B E^(I \[\Alpha]2) - R2B E^(I \[\Alpha]3)];
D2B = N[R1B E^(I \[\Alpha]3) - R3B];
D3B = N[R2B - R1B E^(I \[\Alpha]2)];

"Angulos Beta";

\[\Beta]2A = 2 Arg[-D1A] - Arg[D2A] - Arg[D2A E^(I \[\Alpha]2)];
\[\Beta]3A = 2 Arg[-D1A] - Arg[D3A] - Arg[D3A E^(I \[\Alpha]3)];

\[\Beta]2B = 2 Arg[-D1B] - Arg[D2B] - Arg[D2B E^(I \[\Alpha]2)];
\[\Beta]3B = 2 Arg[-D1B] - Arg[D3B] - Arg[D3B E^(I \[\Alpha]3)];

MA = ( { {1, 1}, {E^(I \[\Beta]2A), E^(I \[\Alpha]2)}} );
MB = ( { {1, 1}, {E^(I \[\Beta]2B), E^(I \[\Alpha]2)}} );
RA = ( { {R1A}, {R2A} } );
RB = ( { {R1B}, {R2B} } );

"Solución";

SA = LinearSolve[MA, RA] ; SB = LinearSolve[MB, RB] ;

r2 = N[SA[[1, 1]]]
r3A = N[SA[[2, 1]]] ;
r4 = N[SB[[1, 1]]]
r3B = N[SB[[2, 1]]] ;

barra2 = {{Re[A0], Im[A0]}, {Re[A0] + Re[r2], Im[A0] + Im[r2]}};
barra4 = {{Re[B0], Im[B0]}, {Re[B0] + Re[r4], Im[B0] + Im[r4]}};
acoplador = {{0, 0}, {0, 210}, {-10, 210}, {-10, 10}, {-130, 10}, {-130, 0}, {0, 0}};

ListLinePlot[{barra2, barra4, acoplador}]

```

5.- Luego de correr el programa se despliega la siguiente solución:

$$r2 = -24.3915 - 27.3479 i$$
$$r4 = -8.66327 + 53.2886 i$$

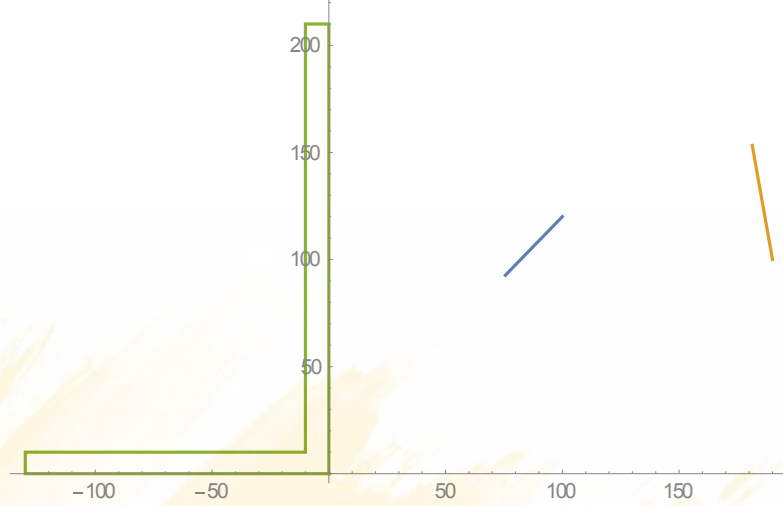


Figura 5.58. Mecanismo Propuesto

6.- En el esquema de AutoCAD, Fig. 5.59 se trazan los vectores indicados, el vector $r2$ desde A_0 que corresponde a la barra impulsora y el $r4$ que es parte del eslabón seguidor 4 desde B_0 .

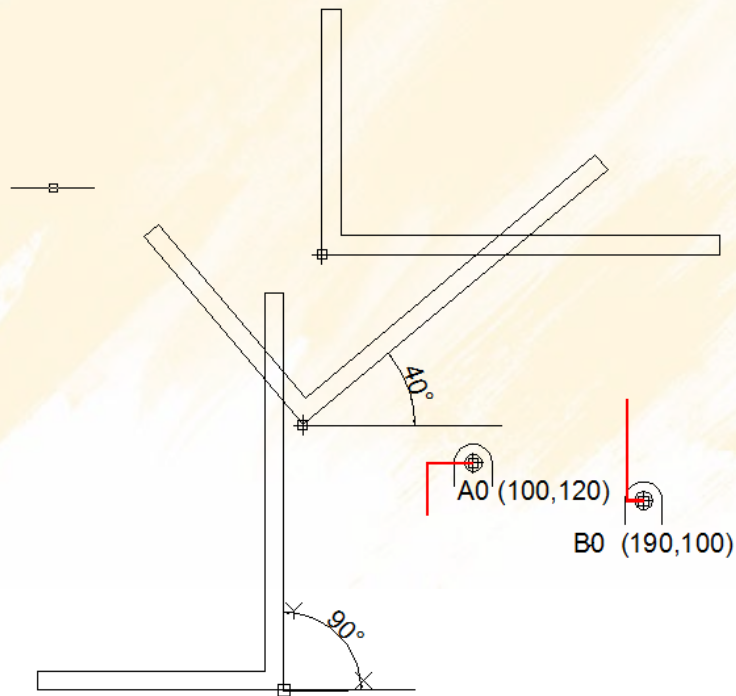


Figura 5.59. Graficación de la solución

En base de los vectores se grafican las respectivas barras 2 y 4.

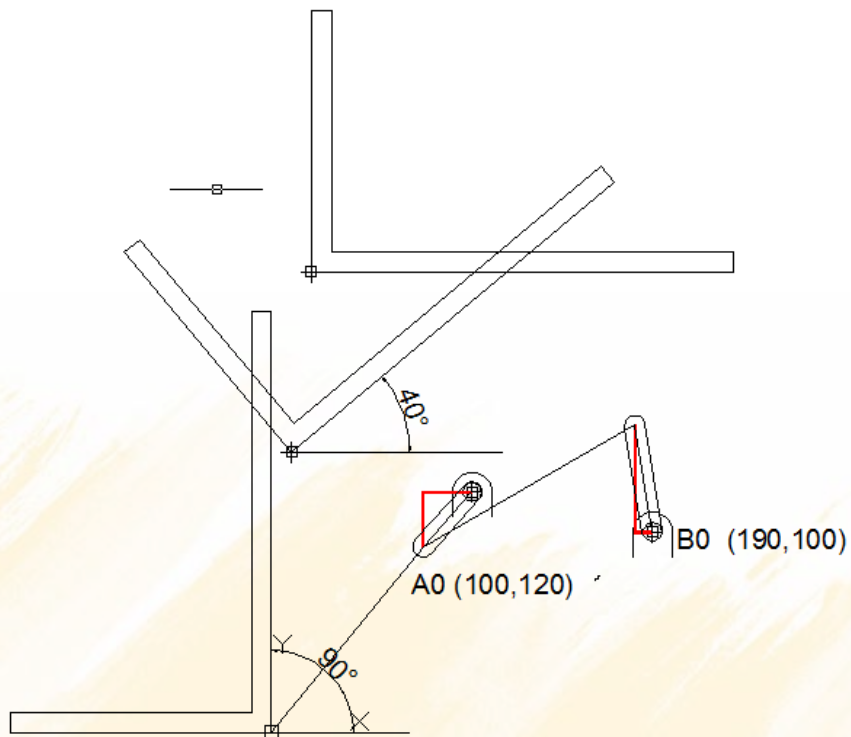


Figura 5.60. Graficación de las barras 2 y 4

8.- Finalmente dibujamos la barra 3 o acoplador, solidario con el soporte indicado, comprobamos y simulamos en Working Model, Fig. 5.62 y 5.63

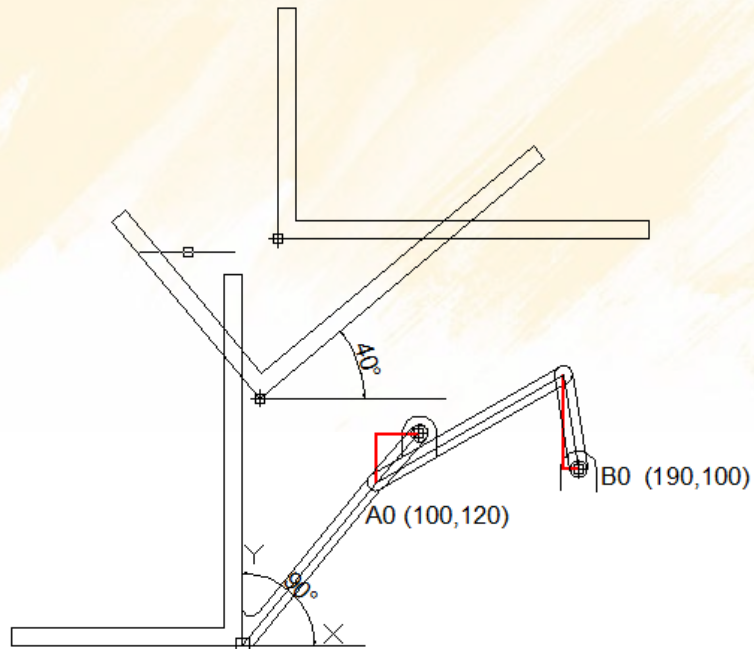


Figura 5.61. Mecanismo completo

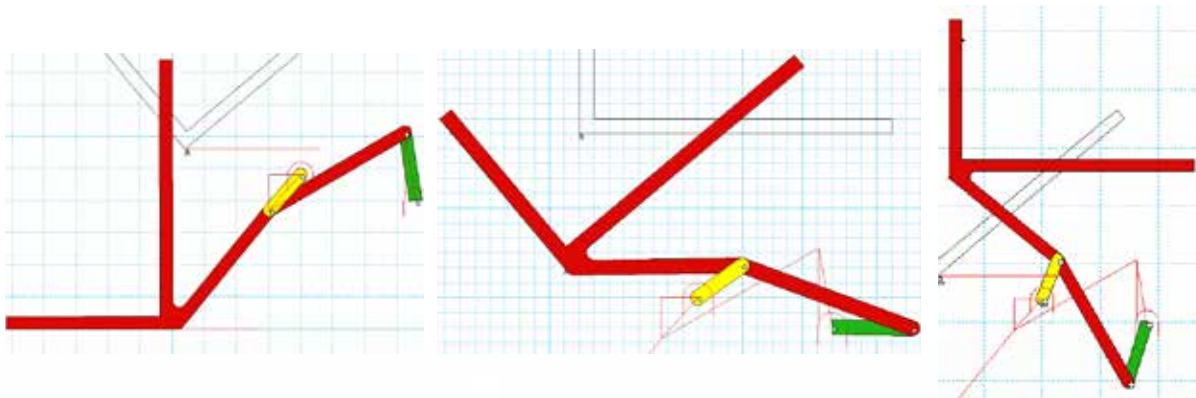


Figura 5.63. Simulación en Working Model 2D

La aplicación práctica de esta síntesis queda establecida de mejor manera con la siguiente simulación., la cual corresponde a un mecanismo que toma el un paquete de una banda transportadora y la sitúa en otra banda pero con diferente orientación, Fig. 5.64

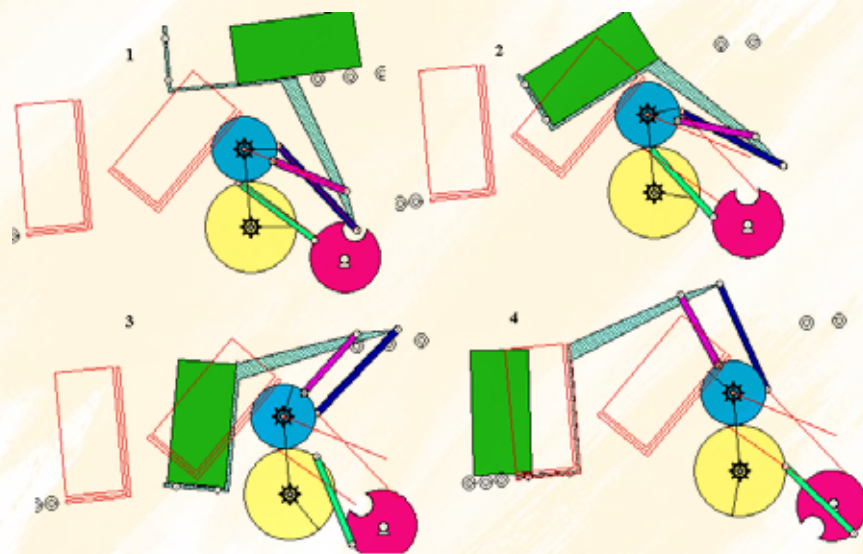


Figura 5.64. Simulación sistema completo

5.7 SINTESIS DE GENERACION DE MOVIMIENTO EN TRES POSICIONES DE PRECISI3N APLICADO A MECANISMOS MULTILAZOS

El m3todo desarrollado en el punto 3.5 y 3.6 puede ser extendida a mecanismos m3s complejos como son las configuraciones de 6 barras. Como es la configuraci3n Stephenson III de la Fig. 5.65

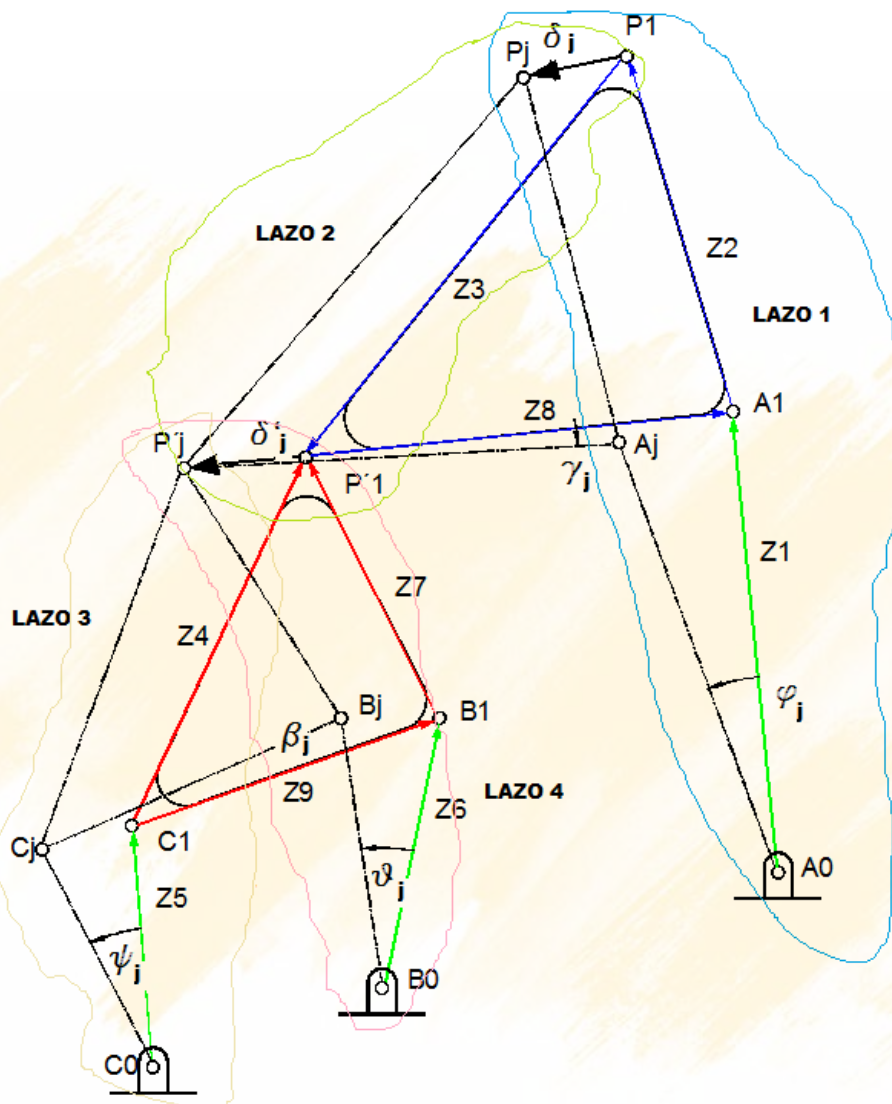


Figura 5.65. Mecanismo de 4 lazos

En este mecanismo se establecen los siguientes datos:

P_j es decir P_1, P_2 y P_3 que determinara δ_j , las orientaciones γ_j es decir γ_1, γ_2 y γ_3 y las orientaciones β_j o β_1, β_2 y β_3

Las selecciones libres en cambio ser3n:

El vector $Z_3, \phi_j, \psi_j, \theta_j$

En el lazo 1 se identifica la diada est3ndar

$$\vec{\delta}_j = \vec{Z}_1(e^{i\theta_j} - 1) + \vec{Z}_2(e^{i\gamma_j} - 1) \quad (5.36)$$

En el lazo 2

$$\vec{\delta}'_j = \vec{d}_j + \vec{Z}_3(e^{i\gamma_j} - 1) \quad (5.37)$$

En el lazo 3 y 4 se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\vec{\delta}_j + \vec{Z}_3(e^{i\gamma_j} - 1) = \vec{\delta}'_j = \vec{Z}_5(e^{i\psi_j} - 1) + \vec{Z}_4(e^{i\beta_j} - 1) \quad (5.38)$$

$$\vec{\delta}_j + \vec{Z}_3(e^{i\gamma_j} - 1) = \vec{\delta}'_j = \vec{Z}_6(e^{i\theta_j} - 1) + \vec{Z}_7(e^{i\beta_j} - 1) \quad (5.49)$$

La resolución de las ecuaciones vectoriales permitirá obtener los vectores Z y los pivotes fijos y móviles, se puede aplicar el método del punto 5.6 cuando se conocen los pivotes prescritos.

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere incorporar un montacargas a un camión que pueda levantar carga desde el nivel del piso hasta el nivel de la caja y que posteriormente se retraiga.

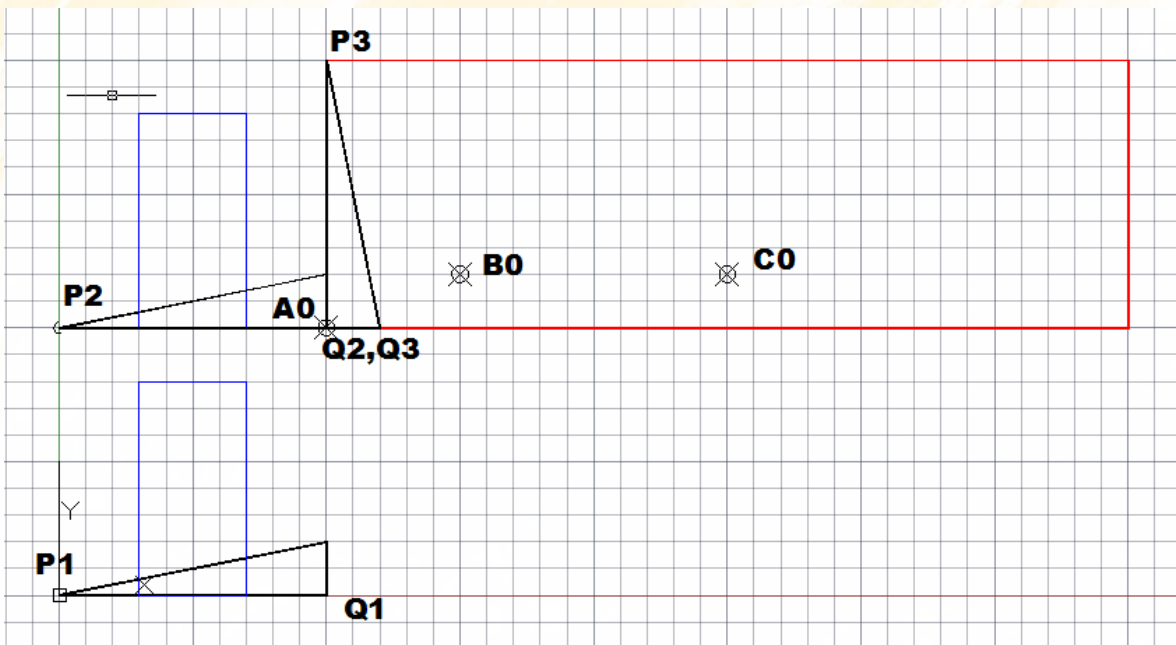


Figura 5.66. Descripción del problema

Debido a que el movimiento requerido es complejo se utilizara una configuración de seis barras de tipo Stephenson III, en donde el guiado del acoplador de interés P1 Q1 se lo efectúa guiando dos puntos del mismo, uno de los cuales P1 se lo hace mediante la diada estándar revisado en el acápite 5.6 y el otro es guiado igualmente por un punto de un acoplador auxiliar con igual procedimiento, ver Fig. 5.66.

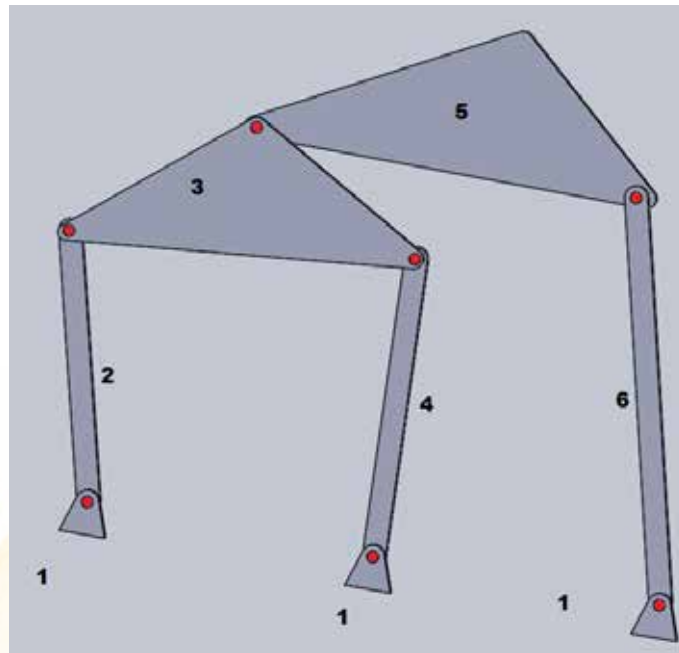


Figura 5.67. Mecanismo Stephenson III

Por lo tanto el eslabón 5, Fig. 5.67 corresponderá al montacargas P Q, la barra 6 se la obtendrá de la resolución de la síntesis de movimiento con pivotes prescritos, las posiciones del punto Q1, Q2 y Q3 se las obtendrá gráficamente, y de igual manera las barras 2 y 4 se las obtendrá con el mismo procedimiento. El programa que resuelve el problema se despliega a continuación, Los ángulos de orientación de 5 son obviamente 0° , 0° y 90° .

ClearAll; "Pivotes prescritos";

A0 = 500+500I; B0 = 750+600I; C0 = 1250+600I;

"Acoplador principal";

P1 = 0 + 0I; Q1 = 500+ 0I; R1 = 500+ 100I;

P2 = 0 +500 I; P3 = 500+1000I;

θ1 = 0; θ2 = 0; θ3 = 90 π/180;

α2 = θ2-θ1; α3 = θ3-θ1;

γ1 = 0 π/180; γ2 = 0 π/180; γ3 = 90 π/180;

ε2 = γ2-γ1; ε3 = γ3-γ1;

"Vectores de posición";

δi1=P2-P1; δi2 = P3-P1;

Z9 = Q1 - P1;

δj1 = δi1 + Z9 (E^{i α2}-1) ; δj2 = δi2 + Z9 (E^{i α3}-1) ;

Q2 = Q1+δj1; Q3 = 500+500I;

R1A = (Re[P1]-Re[A0])+(Im[P1]-Im[A0])I;

R2A = (Re[P2]-Re[A0])+(Im[P2]-Im[A0])I;

R3A = (Re[P3]-Re[A0])+(Im[P3]-Im[A0])I;

R1B = (Re[Q1]-Re[B0])+(Im[Q1]-Im[B0])I;

R2B = (Re[Q2]-Re[B0])+(Im[Q2]-Im[B0])I;

R3B = (Re[Q3]-Re[B0])+(Im[Q3]-Im[B0])I;

R1C = (Re[Q1]-Re[C0])+(Im[Q1]-Im[C0])I;

R2C = (Re[Q2]-Re[C0])+(Im[Q2]-Im[C0])I;

R3C = (Re[Q3]-Re[C0])+(Im[Q3]-Im[C0])I;

"Las diadas son";

D1A = N[R3A E^{i α2} -R2A E^{i α3}]; D2A = N[R1A E^{i α3} - R3A]; D3A = N[R2A - R1A E^{i α2}];

D1B = N[R3B E^{i ε2} -R2B E^{i ε3}]; D2B = N[R1B E^{i ε3} - R3B]; D3B = N[R2B - R1B E^{i ε2}];

D1C = N[R3C E^{i ε2} -R2C E^{i ε3}]; D2C = N[R1C E^{i ε3} - R3C]; D3C = N[R2C - R1C E^{i ε2}];

"Angulos Betha";

β2A = 2 Arg[-D1A]-Arg[D2A]-Arg[D2A E^{i α2}]; β3A = 2 Arg[-D1A]-Arg[D3A]-Arg[D3A E^{i α3}];

β2B = 2 Arg[-D1B]-Arg[D2B]-Arg[D2B E^{i ε2}]; β3B = 2 Arg[-D1B]-Arg[D3B]-Arg[D3B E^{i ε3}];

β2C = 2 Arg[-D1C]-Arg[D2C]-Arg[D2C E^{i ε2}]; β3C = 2 Arg[-D1C]-Arg[D3C]-Arg[D3C E^{i ε3}];

MA = {{{1, 1}, {E^{i β2A}, E^{i α2}}}}; MB = {{{1, 1}, {E^{i β2B}, E^{i ε2}}}}; MC = {{{1, 1}, {E^{i β2C}, E^{i ε2}}}};

RA = {{{R1A}, {R2A}}}; RB = {{{R1B}, {R2B}}}; RC = {{{R1C}, {R2C}}};

SA = LinearSolve[MA,RA] ; SB = LinearSolve[MB,RB] ; SC = LinearSolve[MC,RC];

r2 = N[SA[[1,1]]]

r3A = N[SA[[2,1]]] ;

r4 = N[SB[[1,1]]]

r3B = N[SB[[2,1]]] ;

r6 = N[SC[[1,1]]]

r3C = N[SC[[2,1]]] ;

barra2= {{Re[A0],Im[A0]},{Re[A0]+Re[r2],Im[A0]+ Im[r2] };

barra4= {{Re[B0],Im[B0]},{Re[B0]+Re[r4],Im[B0]+ Im[r4] };

barra6= {{Re[C0],Im[C0]},{Re[C0]+Re[r6],Im[C0]+ Im[r6] };

acoplador = {{Re[P1],Im[P1]},{Re[Q1],Im[Q1]},{Re[R1],Im[R1]}, {Re[P1],Im[P1] };

acoplador2 = {{Re[B0]+Re[r4],Im[B0]+ Im[r4]},{Re[Q1],Im[Q1]},{Re[C0]+Re[r6],Im[C0]+

Im[r6]},{Re[B0]+Re[r4],Im[B0]+ Im[r4] };

camion= {{500,500},{2000,500},{2000,1000}, {500,1000},{500,500} };

ListLinePlot[{barra2,barra4,barra6, acoplador, acoplador2, camion}]

Las soluciones que se despliegan son:

$$r2 = -500. -250.00000000000003i$$

$$r4 = -1066.6666666666665 - 250.00000000000014i$$

$$r6 = -1207.6923076923074 - 250.00000000000004i$$

El mecanismo generado en Wolfram Mathematica se aprecia en la Fig. 5.67

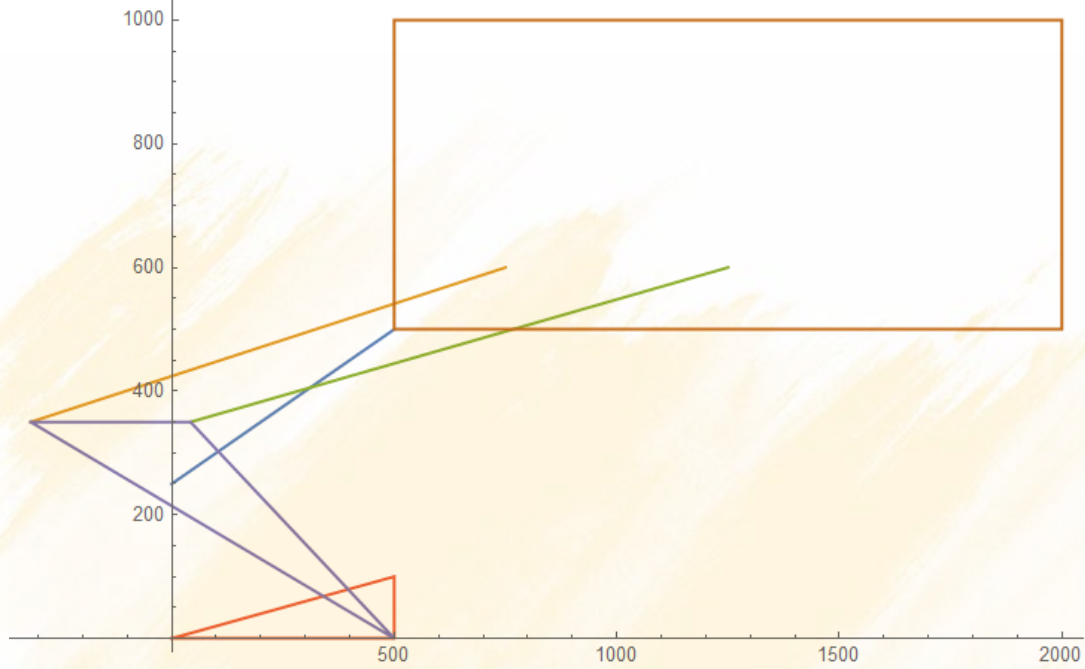


Figura 5.68. Mecanismo Generado en Mathematica

Con los datos obtenidos se puede realizar el gráfico correspondiente en AutoCAD, Fig. 5.69

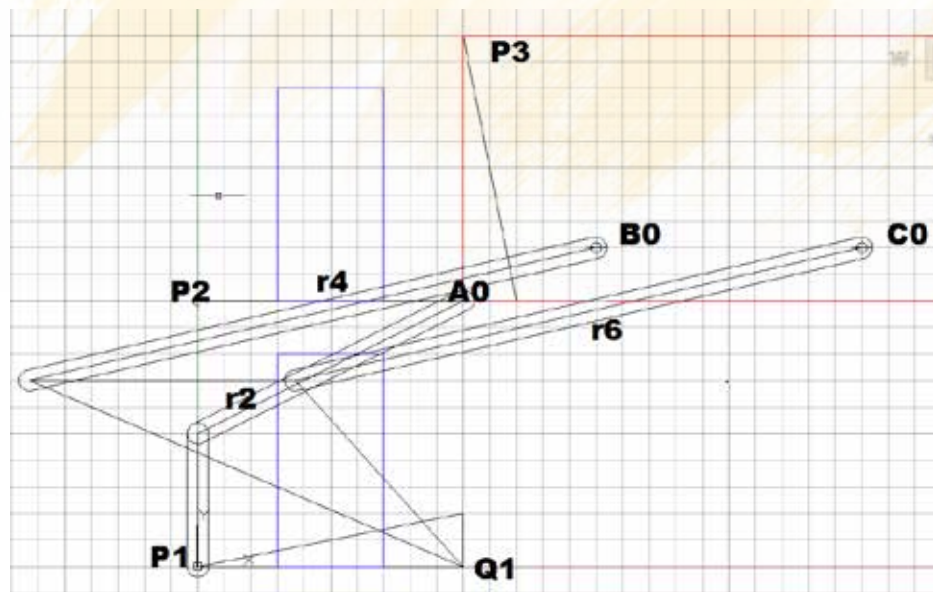


Figura 5.69. Mecanismo Generado en AutoCAD

Y la simulación correspondiente en Working Model 2D, Fig. 5.70

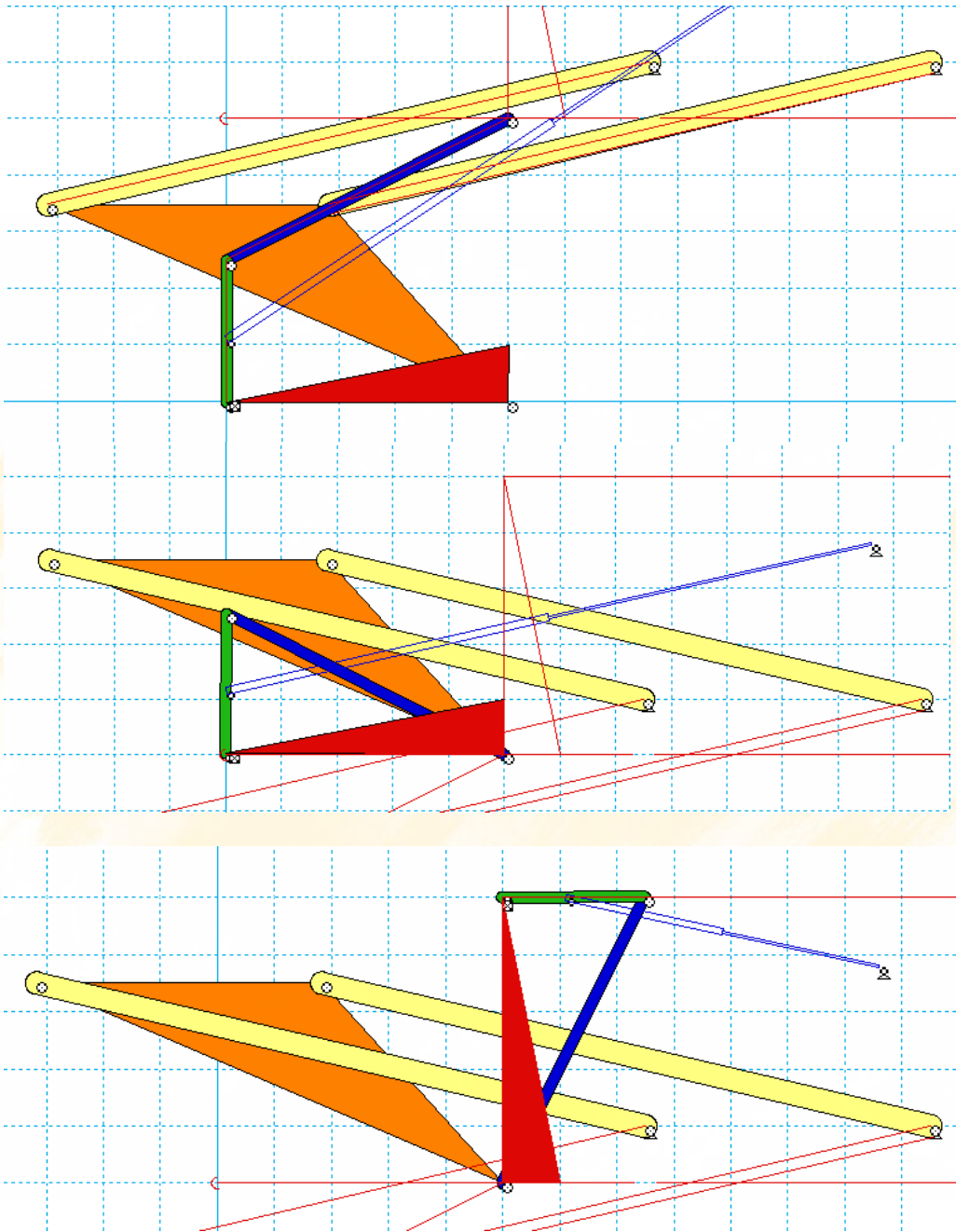
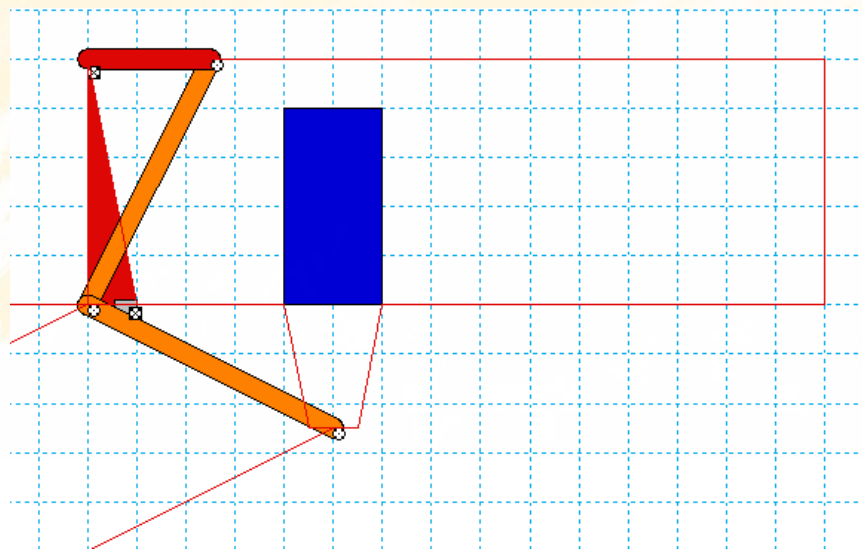
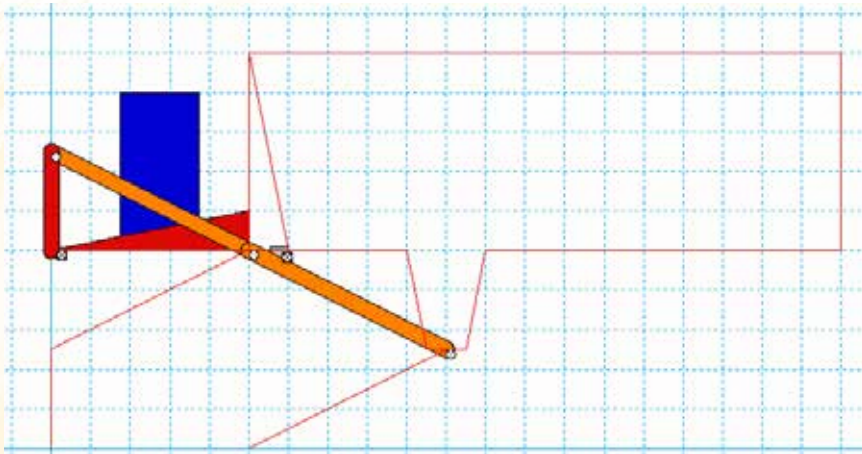
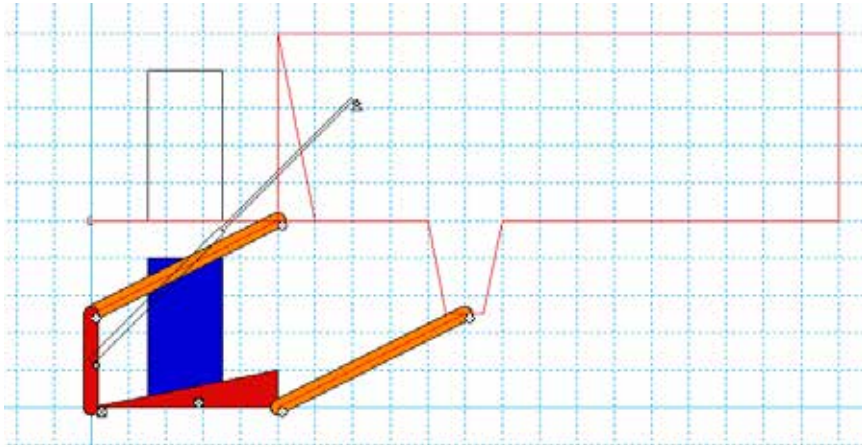


Figura 5.70. Simulación en Working Model 2D

Se cumple la simulación pero el problema está lejos de resolverse por cuanto sería poco práctico construir un mecanismo tan voluminoso, siguiendo un proceso de inspección y tomando en cuenta que el movimiento de la plataforma debe ser de naturaleza paralela, se plantea una alternativa mucho más práctica, ver Fig. 5.71



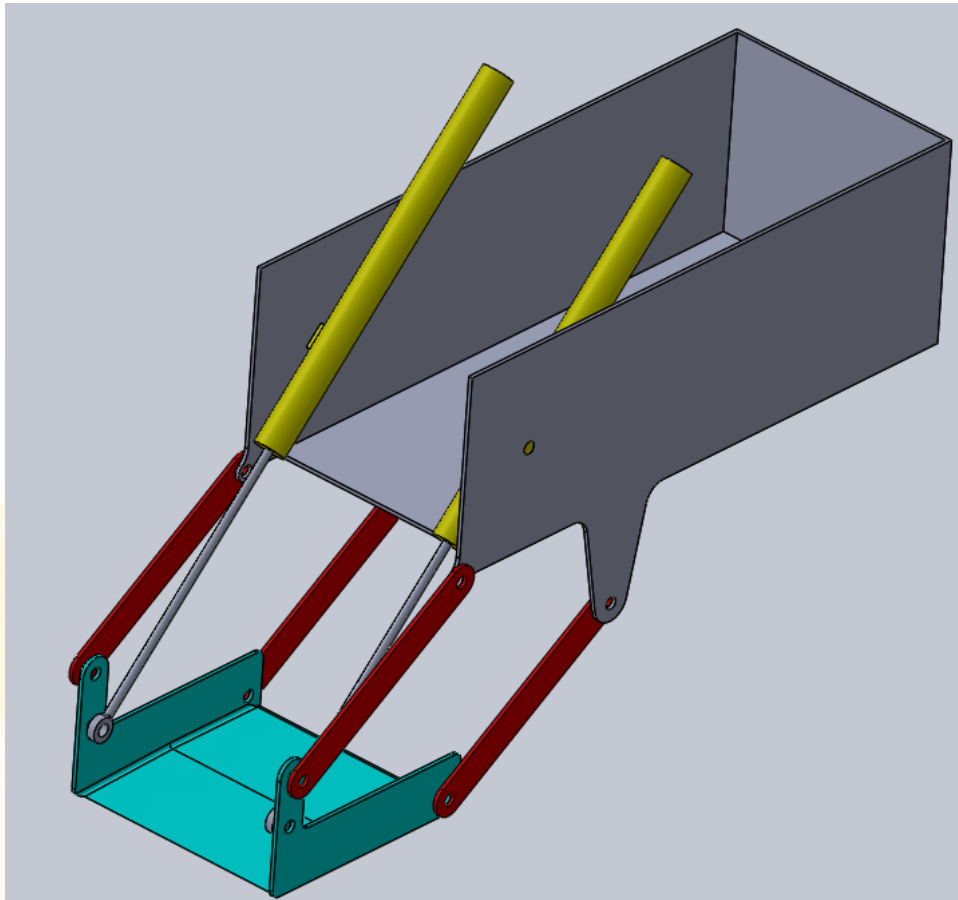


Figura 5.71. Simulación en Working Model 2D y Modelado 3D, alternativa 2

5.8 SINTESIS DE GENERACION DE TRAYECTORIAS CON TEMPORIZACION Y PIVOTES PRESCRITOS

La síntesis de generación de trayectorias puede ser resuelta de forma gráfica o analítica, se revisara el procedimiento gráfico por medio del siguiente ejercicio²⁶:

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere un mecanismo generador de trayectoria de cuatro barras, de manivela oscilador, para adelantar la película de una cámara, como se muestra en la figura, los ángulos de temporización son 131° y 277.5° , en sentido antihorario.

1.- Dibujar el siguiente gráfico donde se reflejan los pivotes prescritos A_0 y B_0 , los puntos de la trayectoria P_1 , P_2 , P_3 , y la temporización 131° y 277.5° ver Fig.5.72, usar la sentencia "DDPTYPE" para visualizar mejor los puntos

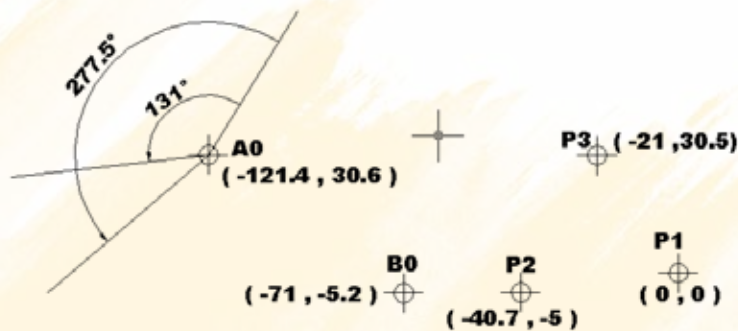


Figura 5.72. Ejercicio de aplicación método gráfico

5.8.1 DETERMINACIÓN DEL TAMAÑO DEL IMPULSOR

2.- Para determinar el tamaño del impulsor, se realizan las siguientes construcciones, se traza el segmento P_2A_0 y P_3A_0 , ver Fig. 5.73

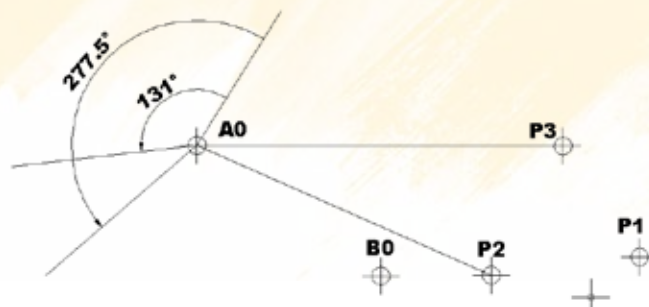


Figura 5.73. Determinación del tamaño del impulsor

3.- Se rota el segmento P_2A_0 131° , en dirección contraria a la especificada, obteniendo P_2' .
Se rota el segmento P_3A_0 277.5° , en dirección contraria a la especificada obteniendo P_3' .

²⁶ Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis, ERDAM y SANDOR, Ej. 8.25

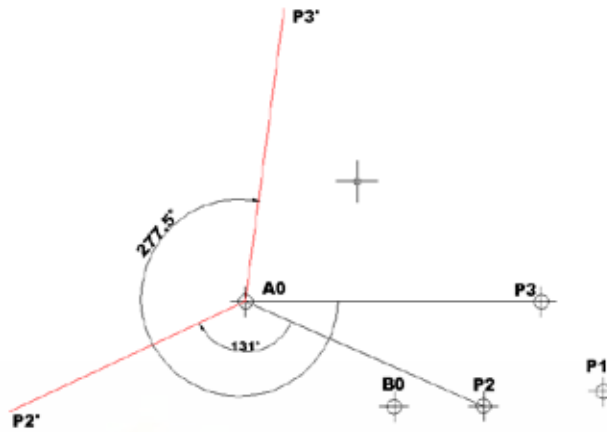


Figura 5.74. Rotación de los segmentos

4.- Se trazan los segmentos auxiliares $P_3'P_1$ y $P_2'P_1$ y las respectivas mediatrices a los segmentos indicados.

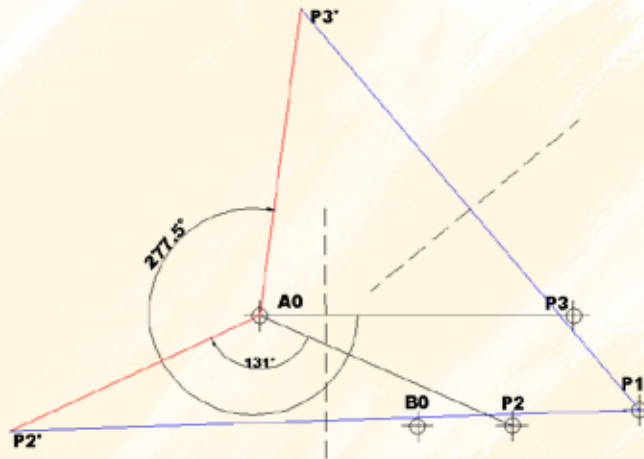


Figura 5.75. Trazo de los segmentos auxiliares

5.- Se determina la intersección de las dos mediatrices y se obtiene el punto A_1 , con lo cual se determina el impulsor o barra 2, representado por una circunferencia de radio A_0A_1 , ver Fig. 5.76

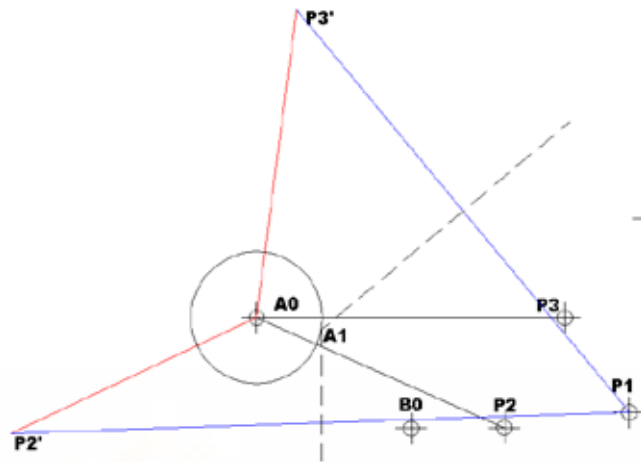


Figura 5.76. Determinación de la intersección A_1

6.- Luego de obtenido el punto A_1 , se ocultan las líneas auxiliares trazadas anteriormente



Figura 5.77. Tamaño del impulsor que garantiza la temporización prescrita

5.8.2 DETERMINACIÓN DE LA BARRA 3 Y 4

7.- Se determinan los puntos A_2 y A_3 , rotando el segmento A_0A_1 primero 131° y luego 277.5° , en las direcciones especificadas, luego se trazan los segmentos A_2P_2 y A_3P_3 respectivamente:

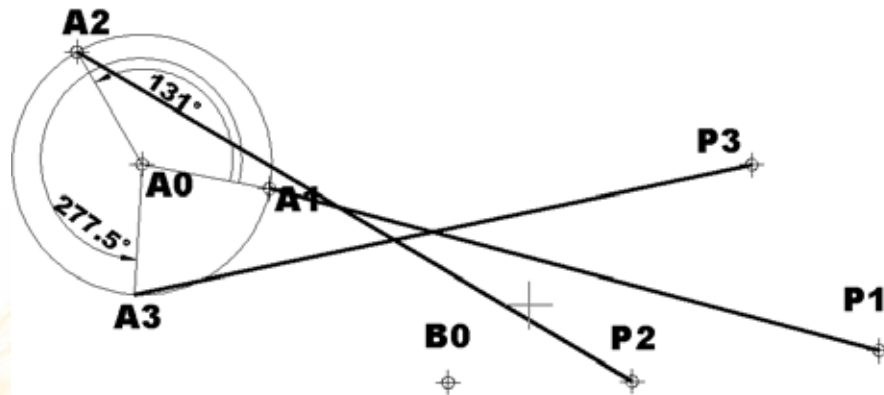


Figura 5.78. Determinación de la barra 3 y 4

8.- Para verificar el procedimiento se escribe la sentencia LIST en la línea de comandos y se seleccionan las tres líneas dibujadas previamente, las longitudes deben ser iguales.

Select objects:

```
LINE      Layer: "0"
          Space: Model space
          Handle = 218
          from point, X=  0.0000 Y=-123.0504 Z=  0.0000
          to point, X=-100.4064 Y= -96.4899 Z=  0.0000
          Length = 103.8600, Angle in XY Plane =  165
          Delta X =-100.4064, Delta Y =  26.5605, Delta Z =  0.0000

LINE      Layer: "0"
          Space: Model space
          Handle = 21A
          from point, X= -21.0000 Y= -92.5504 Z=  0.0000
          to point, X=-122.6647 Y=-113.7917 Z=  0.0000
          Length = 103.8600, Angle in XY Plane =  192
          Delta X =-101.6647, Delta Y = -21.2413, Delta Z =  0.0000
```

Figura 5.79. Cuadro de resultados de la sentencia LIST en AutoCAD

9.- Se dibuja con un color diferente (rojo en virtud de evitar confusiones) la circunferencia P_3B_0 con centro en P_3 y se traslada a P_1 , y la circunferencia A_3B_0 con centro en A_3 y se traslada a A_1 .

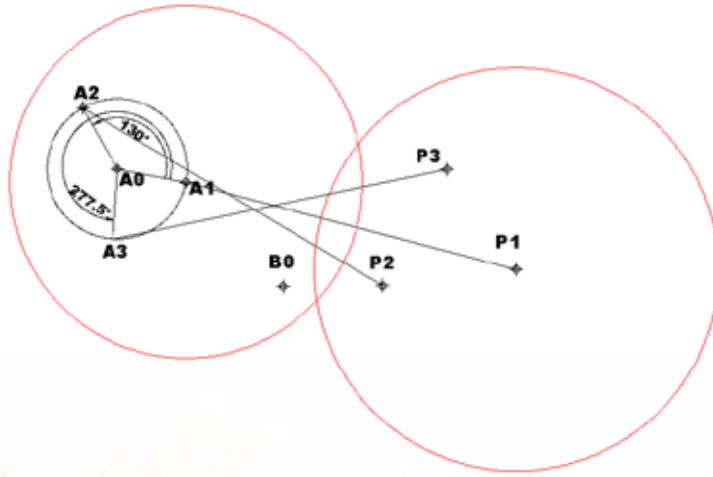


Figura 5.80, Detalle ítem 9

10.- Se dibuja con un color diferente (azul) la circunferencia P_2B_0 con centro en P_2 que se desplaza a P_1 , y la circunferencia A_2B_0 con centro en A_2 que se desplaza a A_1 .

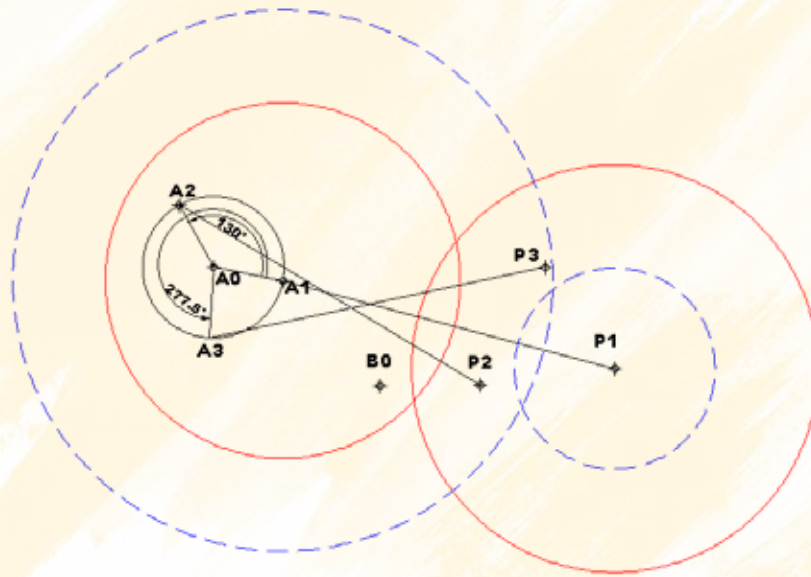


Figura 5.81, Detalle ítem 10

El resultado son dos pares de circunferencia concéntricas, que se intersecan entre sí.

11.- Se pueden escoger cualquier grupo de intersecciones, ya sean de la parte inferior o superior

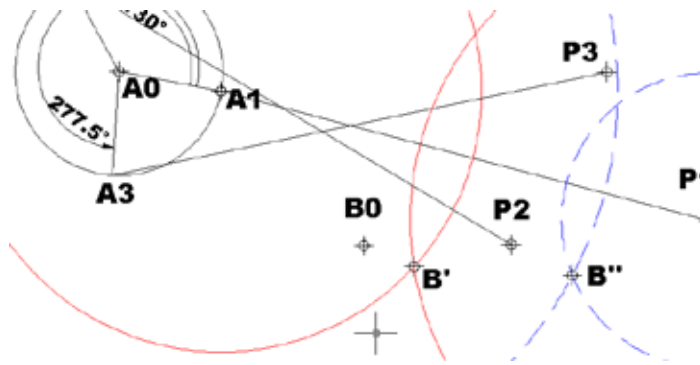


Figura 5.82, Selección intersecciones

12.- Por los tres puntos indicados B_0 , B' , B'' , se traza un arco de circunferencia y se determina su centro, el cual es el punto B_1 con lo que queda determinado es eslabón 4 (B_1B_0).

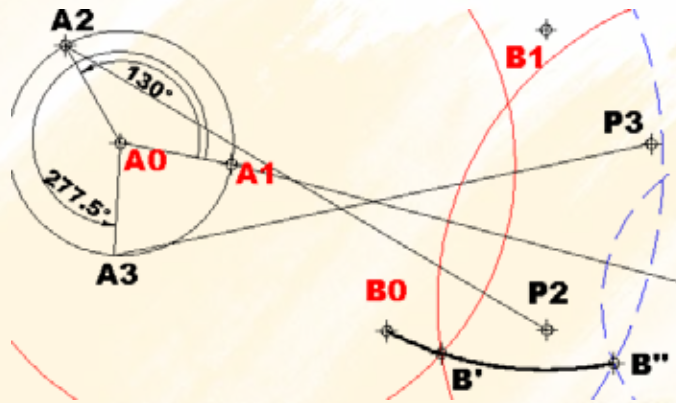


Figura 5.83, Arco B_0, B', B''

13.- Se ocultan las circunferencias y arcos auxiliares dejando solo lo indicado en Fig. 5.84

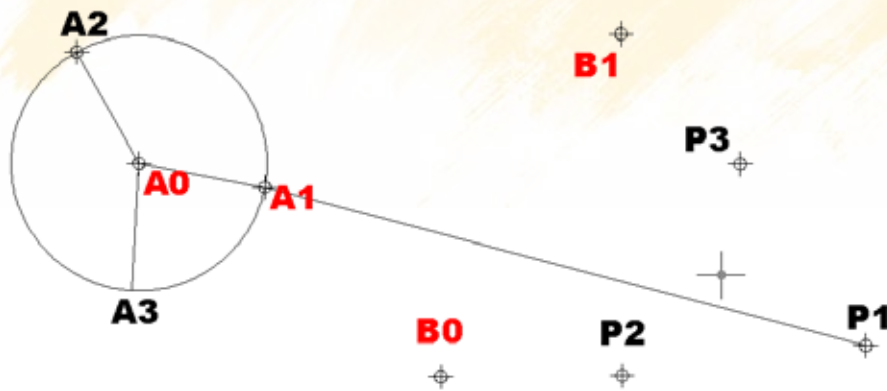


Figura 5.84, Determinación de B_1

14.- Se dibuja el mecanismo, por medio de polilíneas cerradas, el eslabón 3 (acoplador) se lo construye uniendo el punto A_1 con B_1 y el eslabón 4 (seguidor) uniendo B_0 con B_1 .

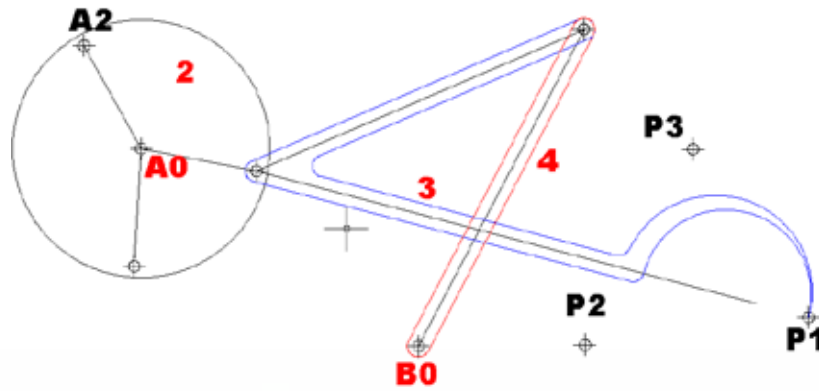


Figura 5.85, Diseño en AutoCAD del mecanismo final

15.- Simulación en Working Model

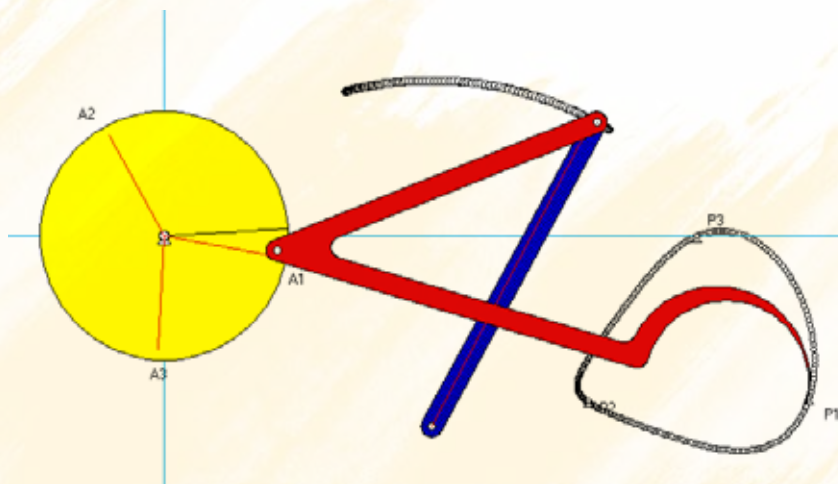


Figura 5.86, Simulación en Working Model

Simulando en Working Model queda comprendido el termino temporización, porque cuando el punto trazador se desplaza de P_1 a P_2 , el disco impulsor gira 130° antihorario y cuando el punto trazador va de P_1 a P_3 , el disco impulsor gira los 277.5° especificados.

5.9 SINTESIS DE MECANISMOS COGNADOS, MECANISMOS DE 6 BARRAS PARA GENERAR MOVIMIENTO PARALELO

La generación de mecanismos cognados se la utiliza para generar mecanismos de movimiento paralelo y puede ser aplicada a cualquier cuadrilátero articulado, aquí se aplicará a un mecanismo con dos cúspides o detenciones instantáneas en la curva de acoplador²⁷

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Diseñar un mecanismo que pueda trasladar paralelamente un paquete del punto 1 al punto 2 con dos detenciones instantáneas.



Figura 5.87, Ejercicio de aplicación

1.- Se necesita sintetizar un mecanismo cuya curva de acoplador tenga dos cúspides, para lo cual se utiliza un mecanismo que cumpla la ley de Grashof.

$r_2 = 70 \text{ mm}$
 $r_3 = 250 \text{ mm}$
 $r_4 = 230 \text{ mm}$
 $r_1 = 240 \text{ mm}$

2.- Se dibuja una circunferencia con $A_0B_0 = r_1$ como diámetro, Fig. 5.88

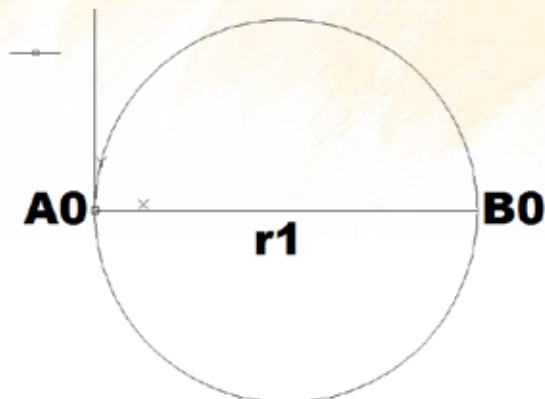


Figura 5.88, Paso 2

²⁷ NIETO, J., Síntesis de Mecanismos

3.- Se dibuja una circunferencia con A_0 como centro y r_2 como radio, obteniéndose los puntos A_1 y A_2 por intersección de ambas.

4.- Se obtienen las rectas r y s , ver Fig. 5.89

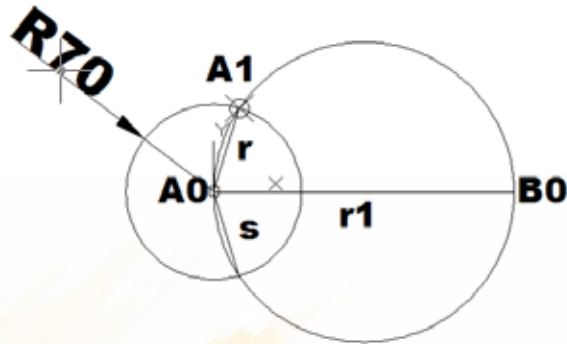


Figura 5.89, Paso 3 y 4

5.- Con centro en A_1 se traza un arco r_3 (250 mm) y con centro en B_0 se traza el arco r_4 (230 mm)

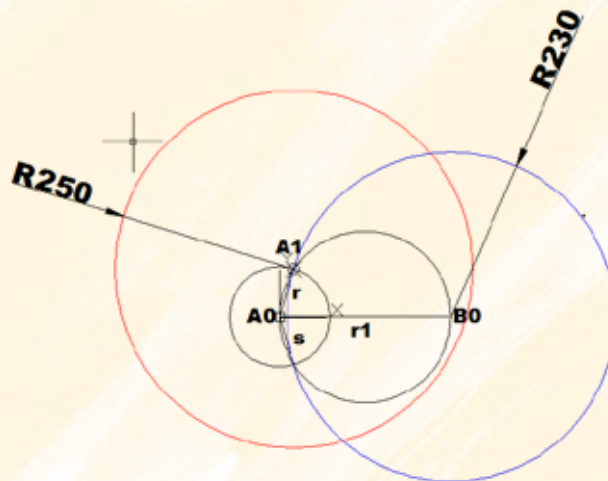


Figura 5.89, Paso 5

6.- Con estas intersecciones se dibuja el mecanismo y su primera cúspide extendiendo r_2 y r_4 , obteniéndose P_1

7.- Los puntos P_1 y P_2 son las dos cúspides de la trayectoria descrita por el punto P de tal forma que queda dibujado el mecanismo en una posición particular

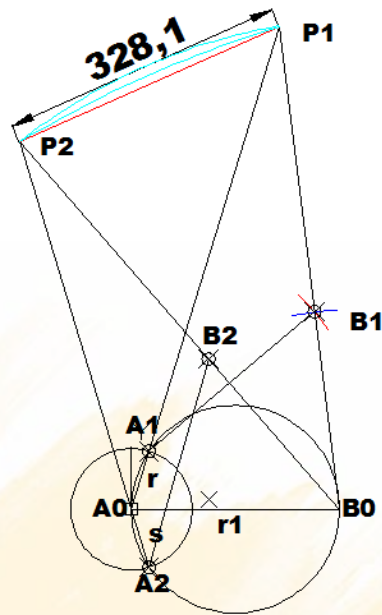


Figura 5.92, Pasó 7

8.- Por medio del AutoCAD se debe rotar porque la traslación es horizontal y escalar el mecanismo porque se pide un recorrido de 500 mm para que cumpla con las especificaciones dadas.

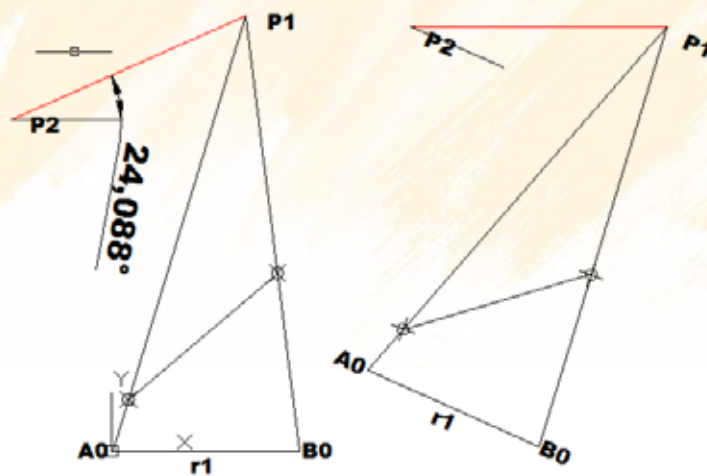


Figura 5.93, Mecanismo rotado

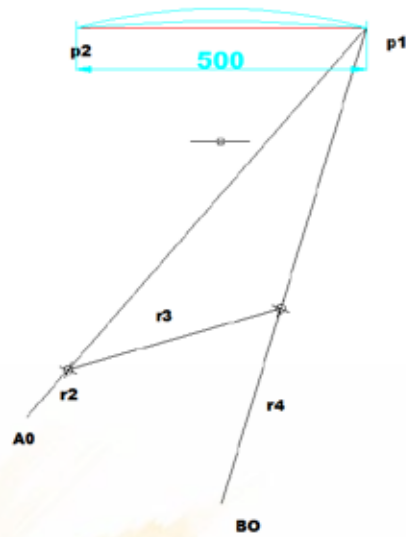


Figura 5.93, Mecanismo escalado

9.- En la disposición indicada es imposible generar los mecanismos cognados por lo que se precisa cambiar la posición gráficamente

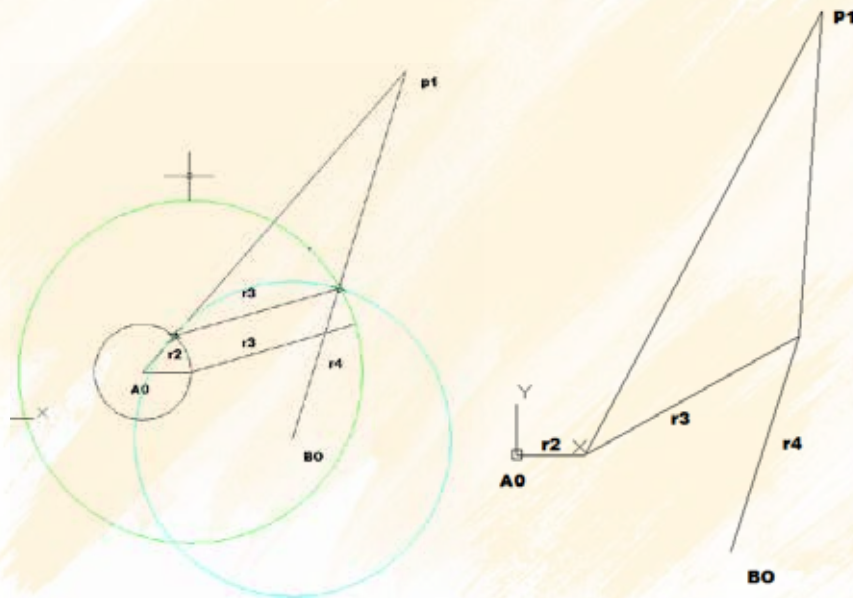


Figura 5.94, Este es el mecanismo al que se aplicará el procedimiento de cognados

Un punto no puede mover un objeto por lo tanto necesitamos de una barra donde podrá ir soldado una horquilla. Para conseguir que una barra tenga un movimiento paralelo y siga la trayectoria del acoplador, se necesita hallar los mecanismos cognados. Para determinar los mecanismos cognados se trazan rectas paralelas a las barras y a los lados del acoplador (misma numeración) y sobre la línea que finaliza en P se dibuja el triángulo acoplador semejante.

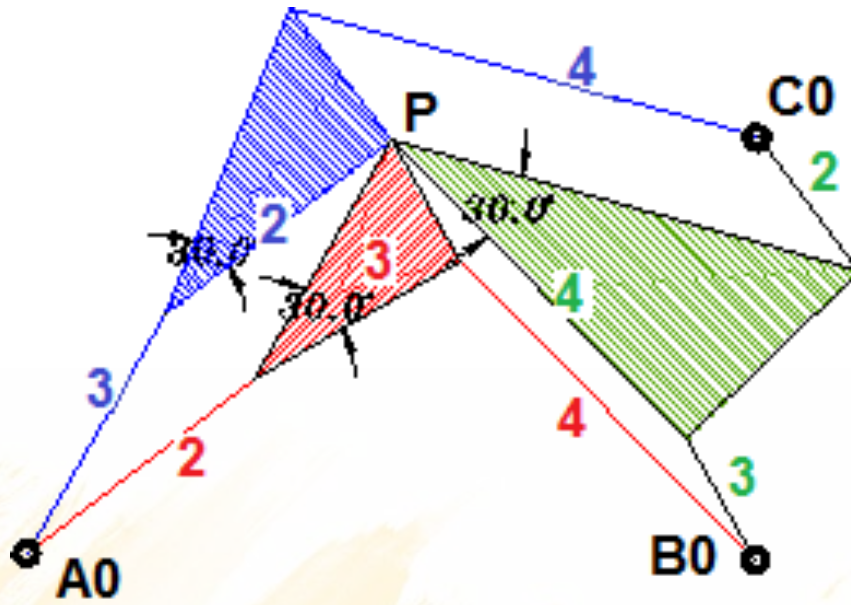
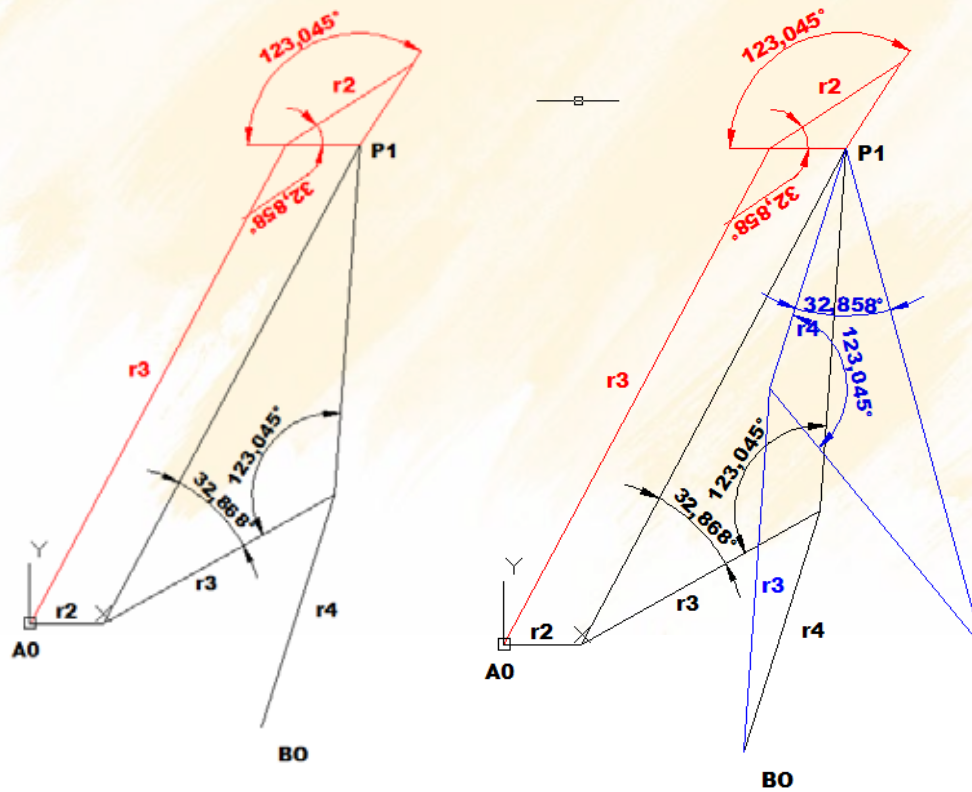


Figura 5.95, Procedimiento para obtener los mecanismos cognados

Para el caso específico del problema, ver Fig. 5.94 se procederá de la misma manera. Se debe notar que los triángulos semejantes siempre permanecen rotados.



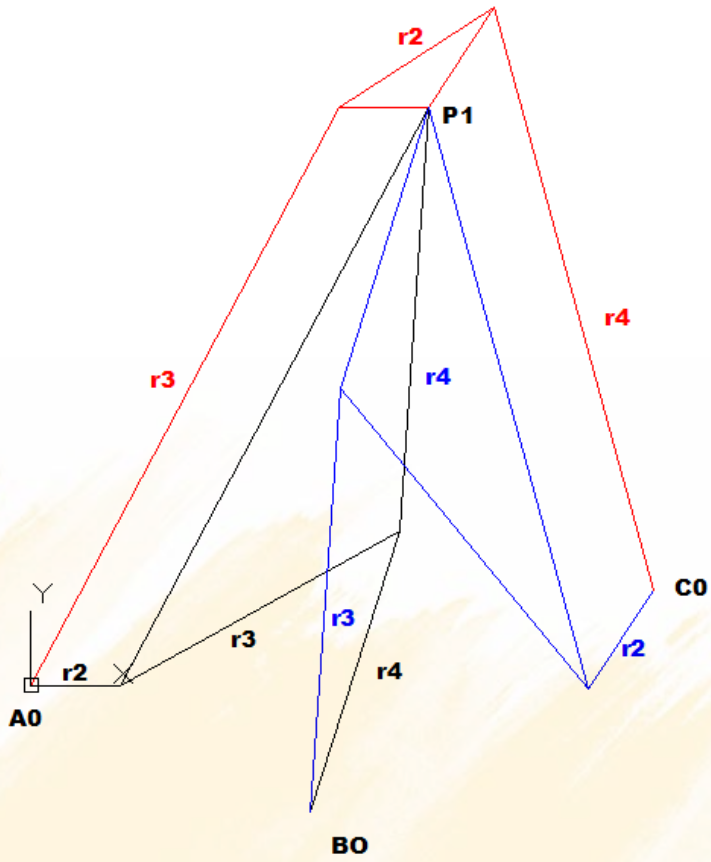


Figura 5.96, Mecanismos cognados generados de Fig. 5.93

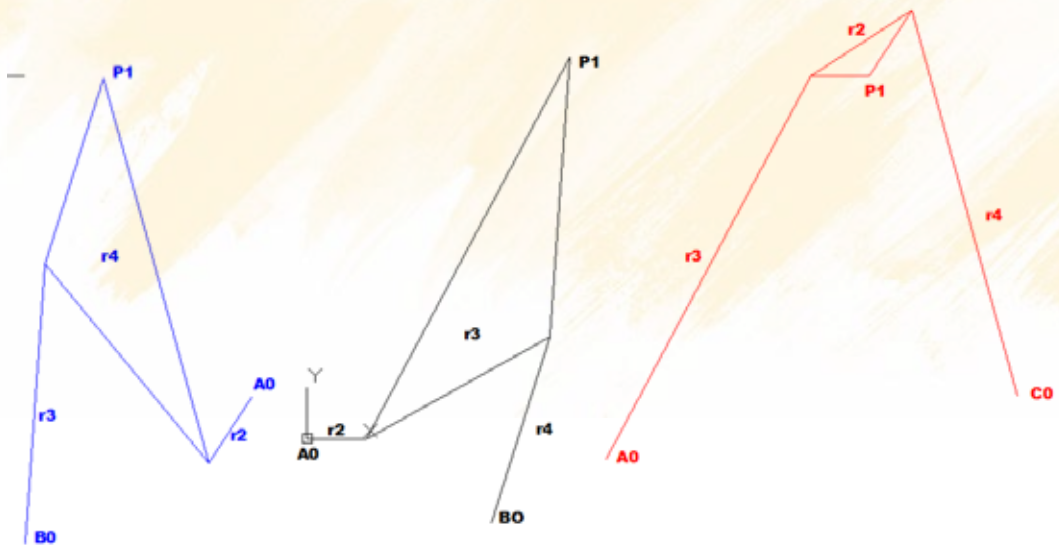


Figura 5.97, Mecanismos cognados desplegados

De tal forma que hallamos los dos mecanismos cognados que describen la misma trayectoria del acoplador.

10.- Se selecciona cualquier par de mecanismos y se traslada paralelamente para unirlos por intermedio de una barra con la misma numeración o misma velocidad angular, por ejemplo 2 con 2. Finalmente se une con una barra ambos puntos P.

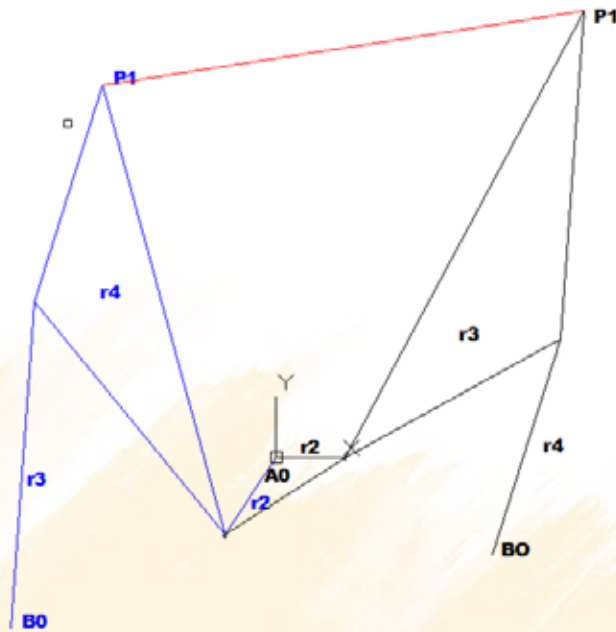


Figura 5.98, Paso 10

11.- Se eliminan las barras superfluas.

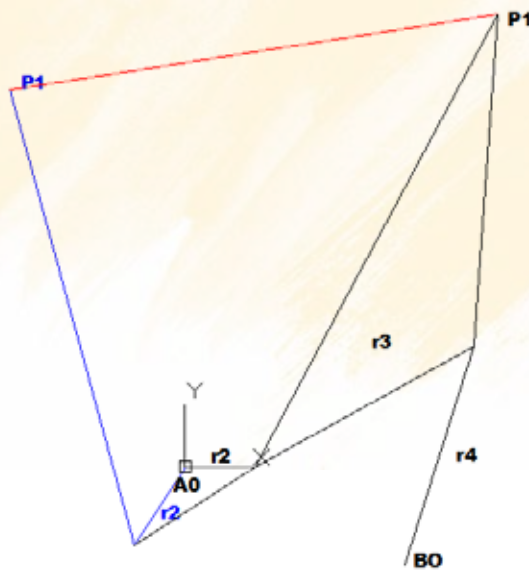


Figura 5.99, Paso 11

12.- Se construye el mecanismo

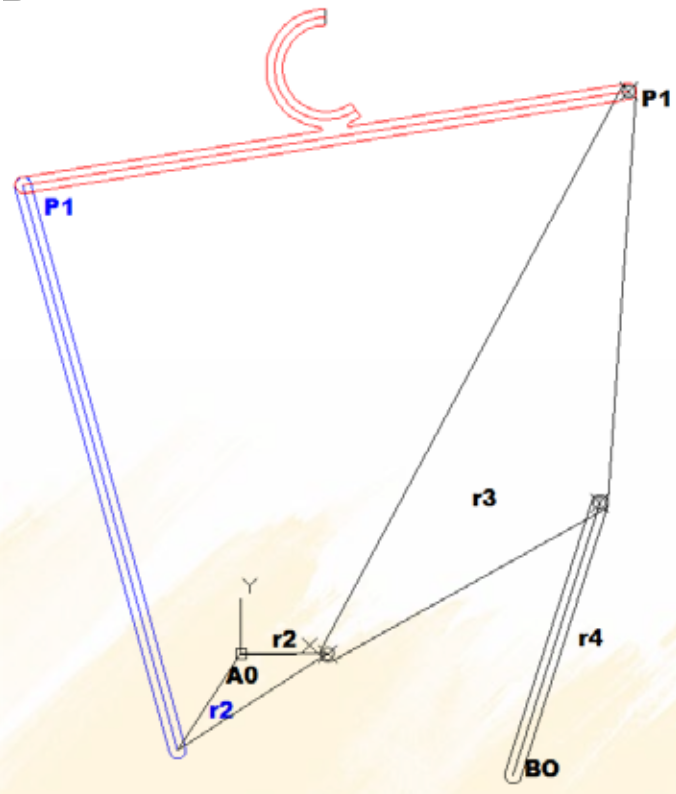


Figura 5.100, Paso 12

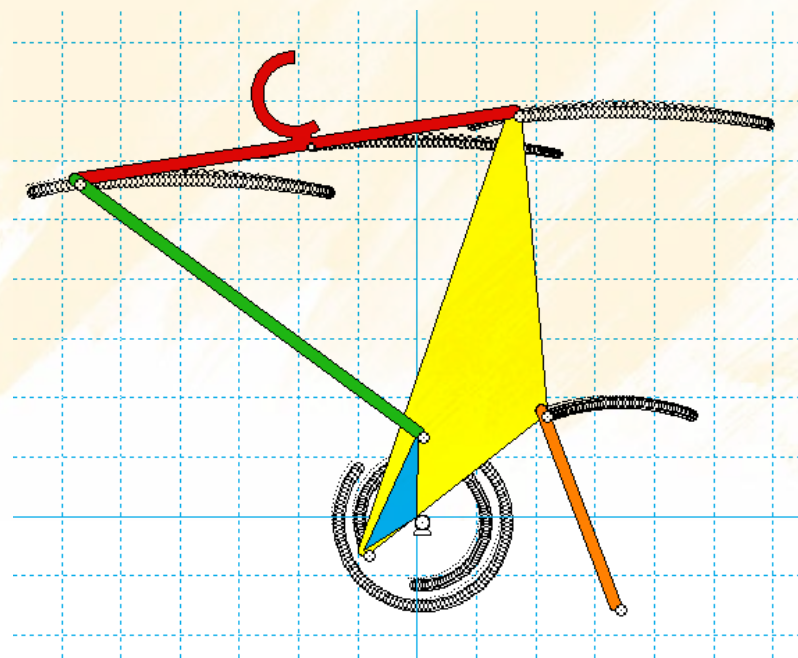


Figura 5.101, Simulación en Working Model 2D

5.9.1. TAREA PARA EL ESTUDIANTE

Diseñar un mecanismo que mediante una placa de succión tome botellas desde una banda transportadora y las deposite en la respectiva jaba a nivel del piso

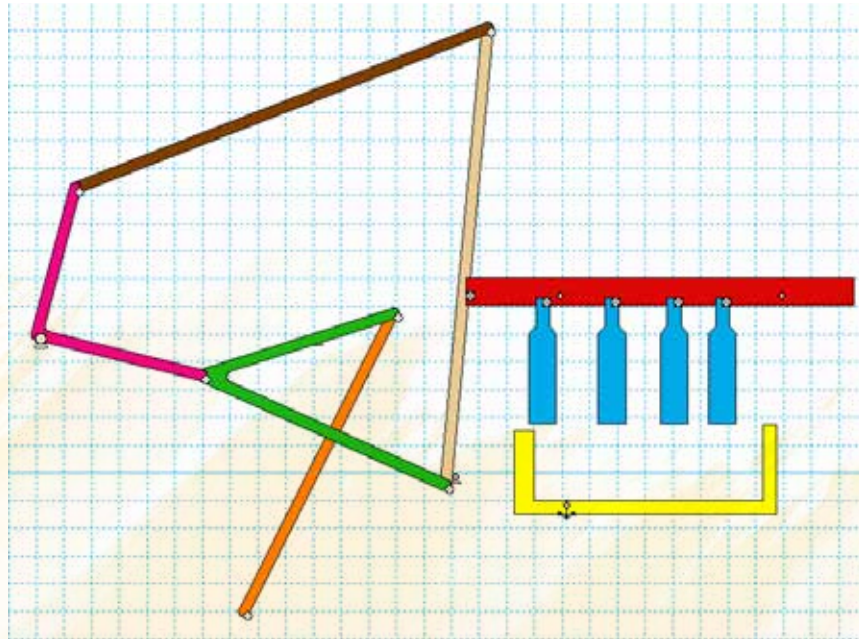


Figura 5.102, Alternativa de solución

5.10 CURVAS DE BURMESTER

Las curvas de Burmester se las utiliza para resolver el problema de generación de movimiento con cuatro posiciones de precisión y describen el lugar geométrico de las posibles posiciones de los pivotes fijos y móviles que eventualmente podrían cumplir la síntesis.

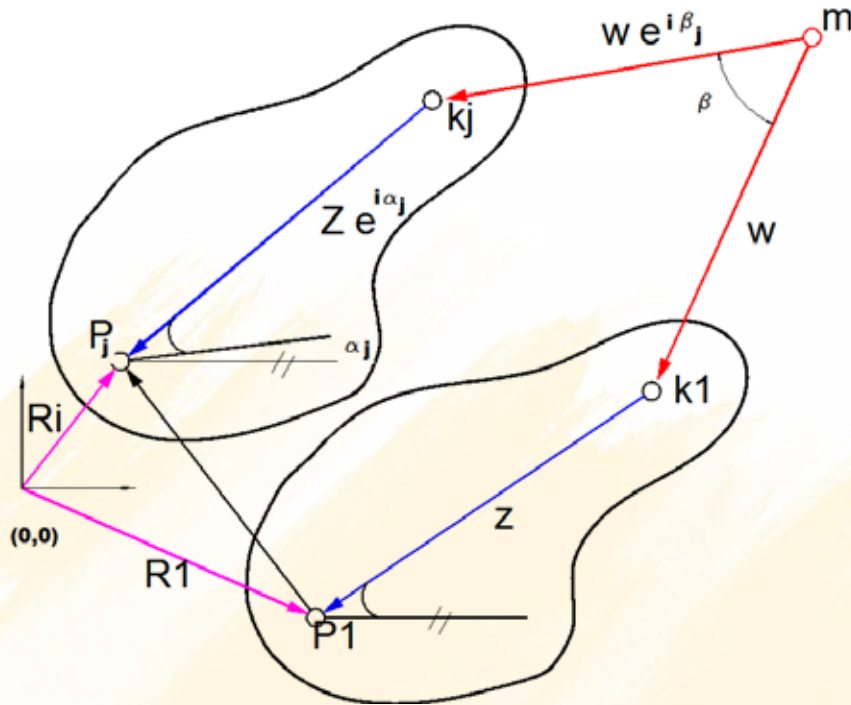


Figura 5.103, Diada genérica

De acuerdo a lo revisado previamente sobre el concepto de diada estándar, en el punto 5.5.2 se depende en forma genérica que:

$$\vec{d}_j = \vec{W} e^{i\beta_j} - \vec{W} + \vec{Z} e^{i\alpha_j} - \vec{Z} \quad (5.50)$$

Por tanto para las posiciones 2,3 y 4 se deberían plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{d}_2 &= \vec{W}(e^{i\beta_2} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_2} - 1) \\ \vec{d}_3 &= \vec{W}(e^{i\beta_3} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_3} - 1) \\ \vec{d}_4 &= \vec{W}(e^{i\beta_4} - 1) + \vec{Z}(e^{i\alpha_4} - 1) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Como se observa una ecuación adicional, en resumen se tiene tres ecuaciones y dos incógnitas, en este caso una de las soluciones es linealmente dependiente de las otras dos y por lo tanto existe solución cuando el determinante de la matriz aumentada es nulo:

$$\text{Det } M = \begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 & \vec{d}_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 & \vec{d}_3 \\ e^{i\beta_4} - 1 & e^{i\alpha_4} - 1 & \vec{d}_4 \end{vmatrix} \quad (5.52)$$

Desarrollando el determinante anterior en base de la primera columna se tiene

$$\Delta_1 + \Delta_2 e^{i\beta_2} + \Delta_3 e^{i\beta_3} + \Delta_4 e^{i\beta_4} = 0 \quad (5.53)$$

Con:

$$\Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 = 0 \quad (5.54)$$

Adicionalmente:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_3} - 1 & \vec{d}_3 \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \vec{d}_4 \end{vmatrix} \quad (5.55)$$

$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \vec{d}_2 \\ e^{i\alpha_4} - 1 & \vec{d}_4 \end{vmatrix} \quad (5.56)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2} - 1 & \vec{d}_2 \\ e^{i\alpha_3} - 1 & \vec{d}_3 \end{vmatrix} \quad (5.57)$$

La estrategia para obtener las curvas de Burmester es por tanto obtener todos los posibles puntos fijos (curvas m) y puntos móviles (curvas k), seleccionando β_2 como variable independiente o parámetro de entrada de la ecuación 5.43 y que varía de 0° a 360° . Por tanto el paso adicional es determinar los ángulos β_3 y β_4 de la ecuación 5.43, esto se podría hacerse en forma numérica pero el método comúnmente utilizado es el trigonométrico para cuya solución se utiliza la Fig. 5.104.

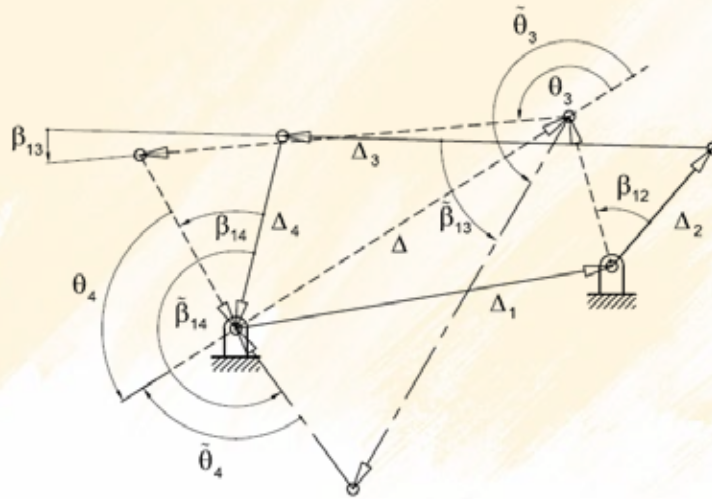


Figura 5.104, Solución trigonométrica de la ecuación de compatibilidad²⁸

Como se observa en la Fig. 5.104, Δ es la resultante de la suma vectorial:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 e^{i\beta_2} \quad (5.58)$$

Utilizando ley de cosenos:

²⁸ ECHEVERRÍA, J., Síntesis cinemática de orden superior y de generación de movimiento para tres y cuatro posiciones prescritas de mecanismos de cuatro barras - diseño y simulación de aplicaciones industriales

$$\cos \theta_3 = \frac{|\Delta_4|^2 - |\Delta_3|^2 - |\Delta|^2}{2 |\Delta_3| |\Delta|} \quad (5.59)$$

También:

$$\sin \theta_3 = \left| \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} \right| \geq 0 \quad (5.60)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(\cos \theta_3, \sin \theta_3) \quad (5.61)$$

Donde $0 \leq \theta_3 \leq \pi$

$$\beta_3 = \arg(\Delta) + \theta_3 - \arg(\Delta_3) \quad (5.62)$$

$$\widetilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3 \quad (5.63)$$

$$\widetilde{\beta}_3 = \arg(\Delta) + \widetilde{\theta}_3 - \arg(\Delta_3) \quad (5.64)$$

$$\cos \theta_4 = \frac{|\Delta_3|^2 - |\Delta_4|^2 - |\Delta|^2}{2 |\Delta_4| |\Delta|} \quad (5.65)$$

$$\sin \theta_4 = \left| \sqrt{1 - \cos^2 \theta_4} \right| \geq 0 \quad (5.66)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(\cos \theta_4, \sin \theta_4) \quad (5.67)$$

Donde $0 \leq \theta_4 \leq \pi$

$$\widetilde{\theta}_4 = -\theta_4 \quad (5.68)$$

$$\beta_4 = \arg(\Delta) - \theta_4 - \arg(\Delta_4) \quad (5.69)$$

$$\widetilde{\beta}_4 = \arg(\Delta) + \theta_4 - \arg(\Delta_4) + \pi \quad (5.70)$$

Una vez que se han determinado los valores de $\beta_3, \widetilde{\beta}_3, \beta_4, \widetilde{\beta}_4$ se puede determinar los vectores \vec{W} y \vec{Z} con los dos primeros términos de la Ec. 5.41 y mediante cualquier método, por ejemplo con determinantes, ver Ec. 5.71 y 5.72

$$\vec{Z} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{d}_2 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ \vec{d}_3 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad \vec{\widetilde{Z}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{d}_2 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ \vec{d}_3 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\widetilde{\beta}_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\widetilde{\beta}_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad (5.71)$$

$$\vec{W} = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & \vec{d}_2 \\ e^{i\beta_3} - 1 & \vec{d}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\beta_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad \vec{\widetilde{W}} = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\widetilde{\beta}_2} - 1 & \vec{d}_2 \\ e^{i\widetilde{\beta}_3} - 1 & \vec{d}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\widetilde{\beta}_2} - 1 & e^{i\alpha_2} - 1 \\ e^{i\widetilde{\beta}_3} - 1 & e^{i\alpha_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad (5.72)$$

Finalmente se determina las curvas de Burmester con las Ec. 5.73 y 5.74 que provienen de la Fig. 5.103

$$\vec{K} = \vec{R}_1 - \vec{Z}, \quad \vec{K} = \vec{R}_1 - \vec{Z} \quad (5.73)$$

$$\vec{M} = \vec{K} - \vec{W}, \quad \vec{M} = \vec{K} - \vec{W} \quad (5.74)$$

Se debe escoger los puntos que estén dentro de las áreas asignadas del bastidor y acoplador.

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Diseñar un mecanismo para manipular el recipiente indicado por las cuatro posiciones de precisión indicadas, Fig. 5.105:

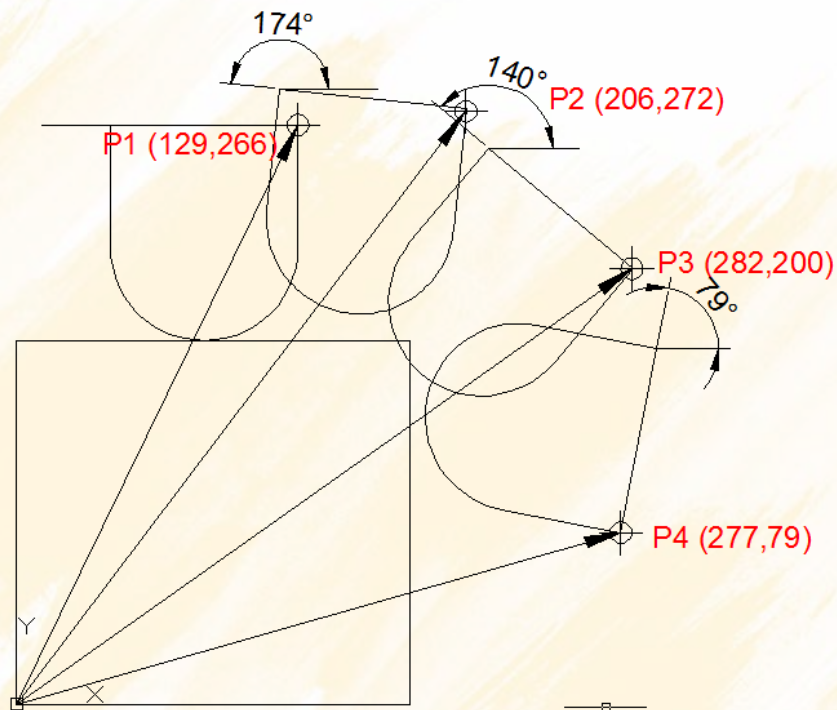


Figura 5.105, Condiciones del problema propuesto

El archivo de Wolfram Mathematica es el siguiente:

```

ClearAll;
P1 = 129 + 266 I; P2 = 206 + 272 I; P3 = 282 + 200 I; P4 = 277 + 79 I;
θ11 = 180 π/180; θ21 = 174 π/180; θ31 = 140 π/180; θ41 = 79 π/180;
α2 = θ21 - θ11;
α3 = θ31 - θ11;
α4 = θ41 - θ11;
δ2 = P2 - P1;
δ3 = P3 - P1;
δ4 = P4 - P1;
R1 = 129 + 266 I;
Δ2 = Det[{{(E^(I α3)) - 1, δ3}, {(E^(I α4)) - 1, δ4}}]; Δ3 = -Det[{{(E^(I α2)) - 1, δ2}, {(E^(I α4)) - 1, δ4}}];
Δ4 = Det[{{(E^(I α2)) - 1, δ2}, {(E^(I α3)) - 1, δ3}}];
Δ1 = -Δ2 - Δ3 - Δ4;
Δ[β2_] := Δ1 + Δ2 E^(I β2);
x3[β2_] := (Abs[Δ4]^2 - (Abs[Δ3])^2 - (Abs[Δ[β2]])^2) / (2 Abs[Δ3] Abs[Δ[β2]]);
y3[β2_] := Abs[Sqrt[1 - (x3[β2])^2]];

θ3[β2_] := ArcTan[x3[β2], y3[β2]];          θ3p[β2_] := 2 π - θ3[β2];
β3[β2_] := Arg[Δ[β2]] + θ3[β2] - Arg[Δ3];  β3p[β2_] := Arg[Δ[β2]] + θ3p[β2] - Arg[Δ3];
x4[β2_] := (Abs[Δ3]^2 - (Abs[Δ4])^2 - (Abs[Δ[β2]])^2) / (2 Abs[Δ4] Abs[Δ[β2]]);
y4[β2_] := Abs[Sqrt[1 - (x4[β2])^2]];      θ4[β2_] := ArcTan[x4[β2], y4[β2]];

θ4p[β2_] := -θ4[β2];
β4[β2_] := Arg[Δ[β2]] - θ4[β2] - Arg[Δ4];  β4p[β2_] := Arg[Δ[β2]] + θ4p[β2] - Arg[Δ4] + π;
Z1[β2_] := Det[{{δ2, (E^(I α2)) - 1}, {δ3, (E^(I α3)) - 1}}] / Det[{{(E^(I β2)) - 1, (E^(I α2)) - 1},
{(E^(I β3[β2])) - 1, (E^(I α3)) - 1}}];

Z1p[β2_] := Det[{{δ2, (E^(I α2)) - 1}, {δ3, (E^(I α3)) - 1}}] / Det[{{(E^(I β2)) - 1, (E^(I α2)) - 1},
{(E^(I β3p[β2])) - 1, (E^(I α3)) - 1}}];

W2[β2_] := Det[{{(E^(I β2)) - 1, δ2}, {(E^(I β3[β2])) - 1, δ3}}] / Det[{{(E^(I β2)) - 1, (E^(I α2)) - 1},
{(E^(I β3[β2])) - 1, (E^(I α3)) - 1}}];

W2p[β2_] := Det[{{(E^(I β2)) - 1, δ2}, {(E^(I β3p[β2])) - 1, δ3}}] / Det[{{(E^(I β2)) - 1, (E^(I α2)) - 1},
{(E^(I β3p[β2])) - 1, (E^(I α3)) - 1}}];

k1[β2_] := R1 - W2[β2]; kp[β2_] := R1 - W2p[β2]; M[β2_] := k1[β2] - Z1[β2]; Mp[β2_] := kp[β2] - Z1p[β2];

bastidor = {{0,0},{167,0},{167,180}, {0,180}, {0,0}};
Acoplador = {{43,180},{43,266},{129,266}, {129,180}, {43,180}};

PuntosMoviles = ParametricPlot[{{Re[k1[β2]], Im[k1[β2]]}, {Re[Kp[β2]], Im[Kp[β2]]}}, {β2, 309/180 π, 359.9/180 π}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> Red];
PuntosFijos = ParametricPlot[{{Re[M[β2]], Im[M[β2]]}, {Re[Mp[β2]], Im[Mp[β2]]}}, {β2, 309/180 π, 359.9/180 π}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> Blue];
Show[PuntosMoviles, PuntosFijos, ListLinePlot[Acoplador], ListLinePlot[bastidor]]

β21 = 312. π/180; O1 = M[β21]; O1p = Mp[β21]; A1 = k1[β21]; A1p = kp[β21];
β22 = 330. π/180; O2 = M[β22]; O2p = Mp[β22]; A2 = k1[β22]; A2p = kp[β22];

Mecanismo1 = {{Re[O1], Im[O1]}, {Re[A1], Im[A1]}, {Re[A2], Im[A2]}, {Re[O2], Im[O2]}};
Mecanismo2 = {{Re[O1p], Im[O1p]}, {Re[A1p], Im[A1p]}, {Re[A2p], Im[A2p]}, {Re[O2p], Im[O2p]}};
Show[ListLinePlot[Mecanismo1, PlotStyle -> Red], ListLinePlot[Mecanismo2, PlotStyle -> Blue], ListLinePlot[bastidor], ListLinePlot[Acoplador], AspectRatio -> Automatic]

```

Y los resultados generados se aprecian en la Fig. 5.106, el rango de β_2 es de 309° a 359°

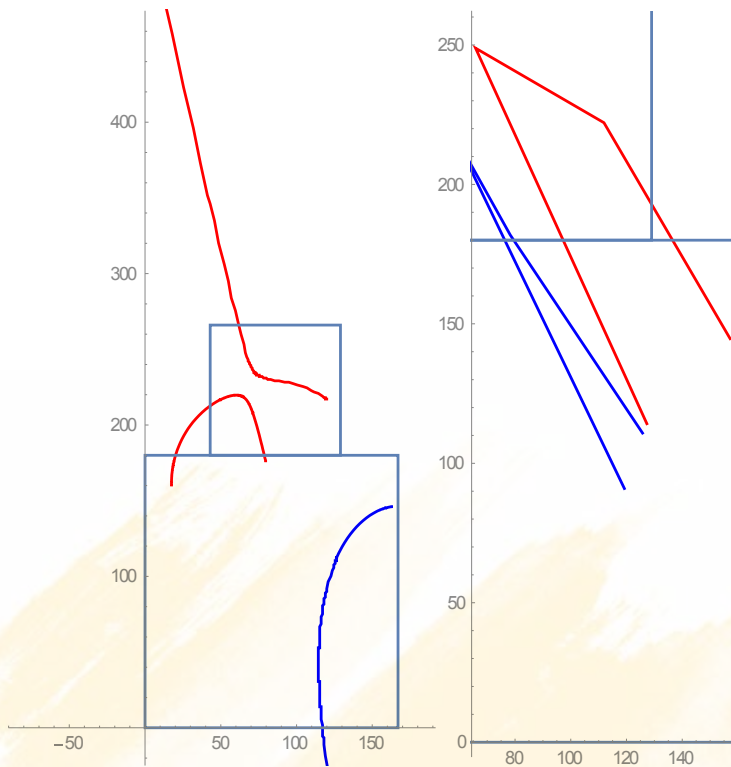


Figura 5.106. Curva de Burmester y las dos opciones posibles

El programa también genera los pivotes fijos y móviles:

$$\begin{aligned}
 O_1 &= 157.176 + 144.688i, & A_1 &= 111.909 + 222.098i \\
 O_2 &= 127.306 + 114.225i, & A_2 &= 65.837 + 248.865i
 \end{aligned}$$

El mecanismo desarrollado es:

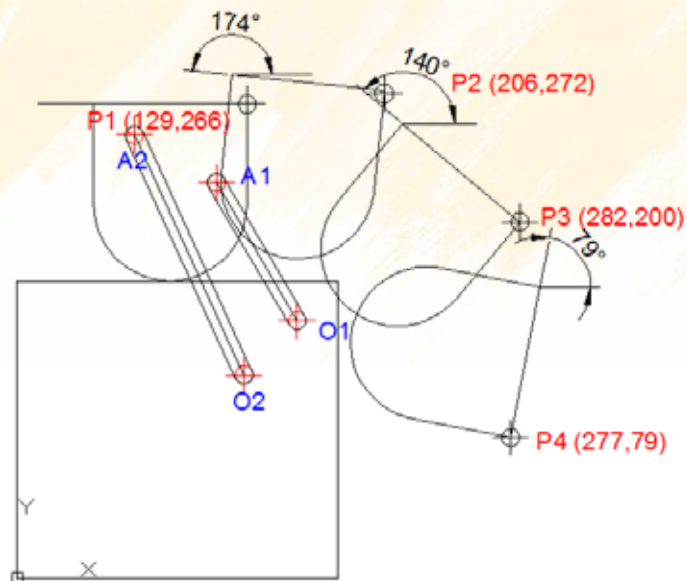


Figura 5.107. Mecanismo resultante

La simulación en Working Model 2D es la siguiente:

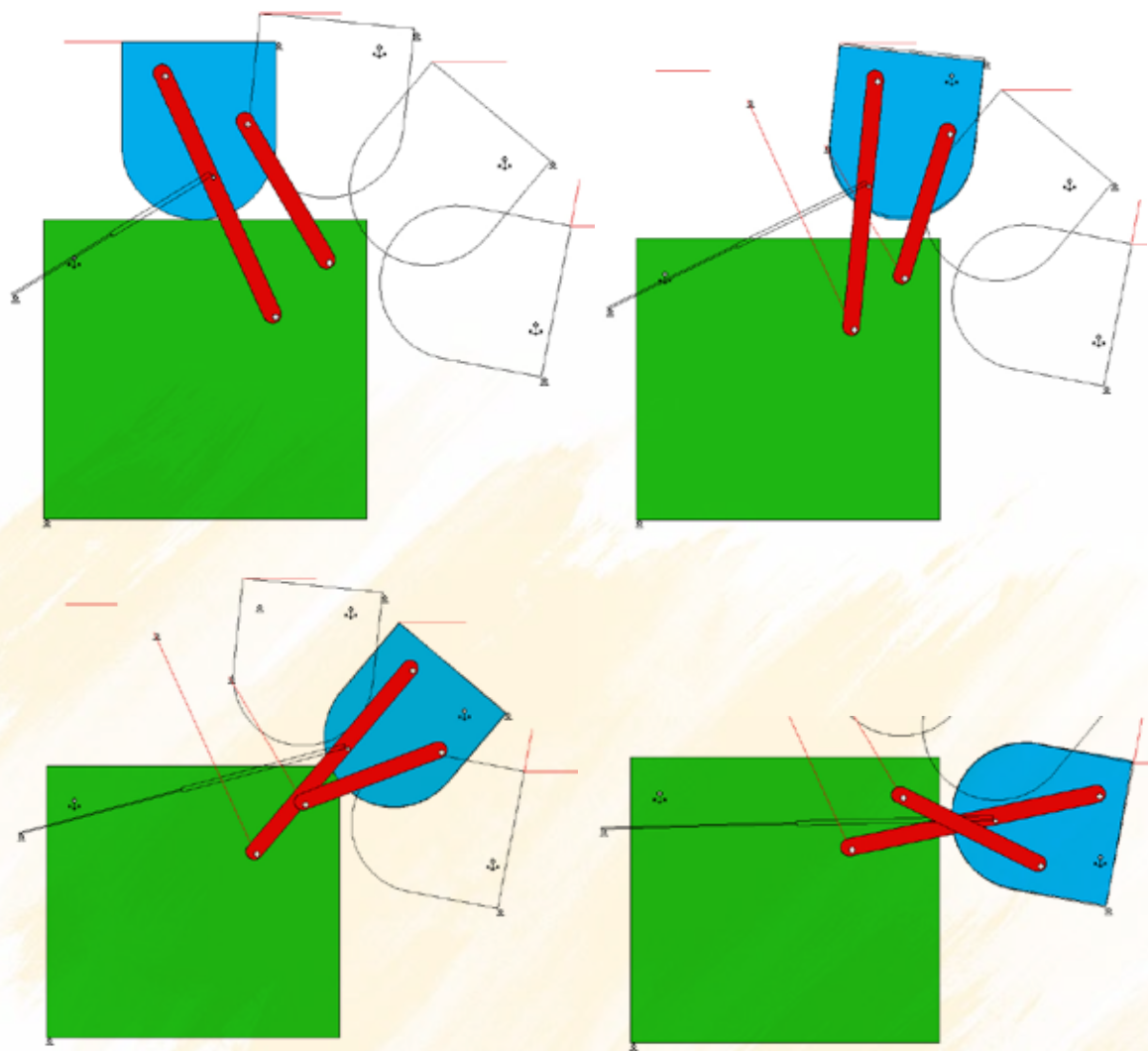


Figura 5.108. Simulación

5.10.1 TAREA PARA EL ESTUDIANTE

Usando las curvas de Burmester, generar el mecanismo de cuatro barras para guiar la pala por la trayectoria descrita, Fig. 5.109 en dónde. La zona en verde correspondería a los pivotes fijos y la zona azul correspondería al acoplador.

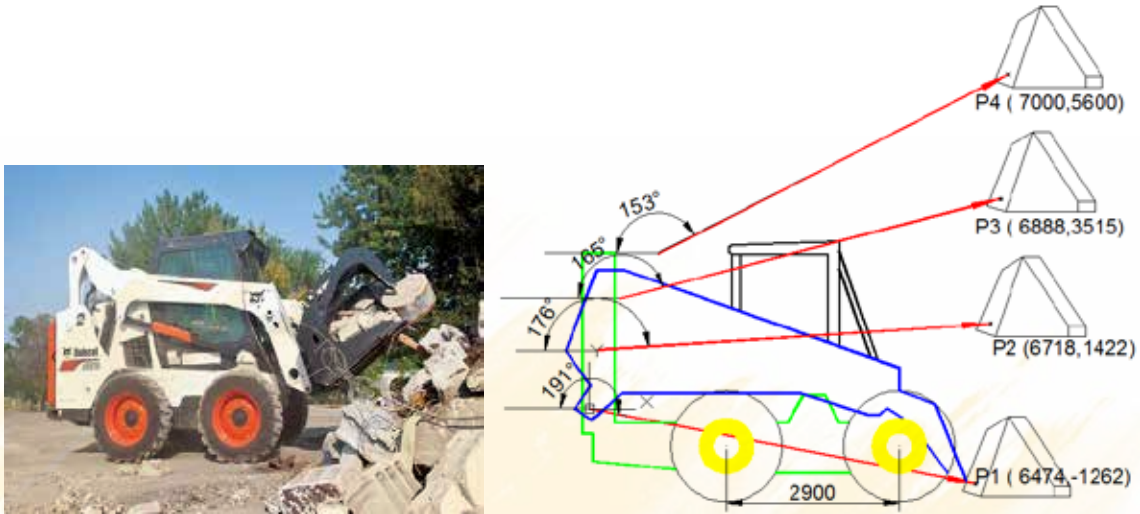
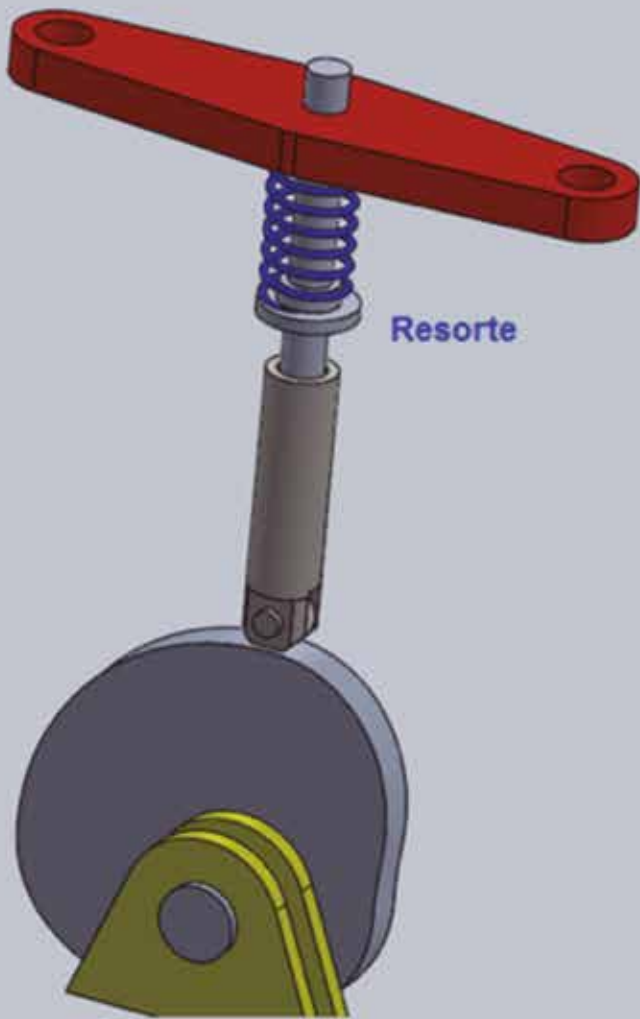


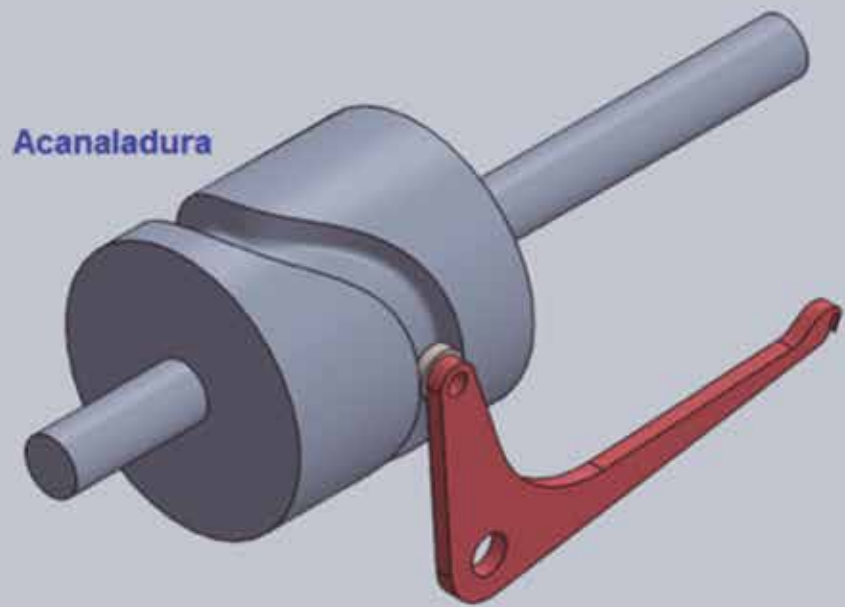
Figura 5.109. Mini cargadora frontal²⁹

²⁹ www.bobcat.com



Resorte

CIERRE DE FUERZA



Acanaladura

CIERRE DE FORMA

CAPÍTULO 6

LEVAS

6.1 DEFINICION

Son elementos de máquinas que pueden tener forma cilíndrica o plana y que tallados en forma apropiada pueden imprimir una función de salida especificada en un seguidor. Los movimientos de salida de los seguidores pueden ser los siguientes:

- Desplazamiento rectilíneo de un seguidor: $s(\varphi)$ Donde φ es la rotación de la leva, ver Fig. 6.1

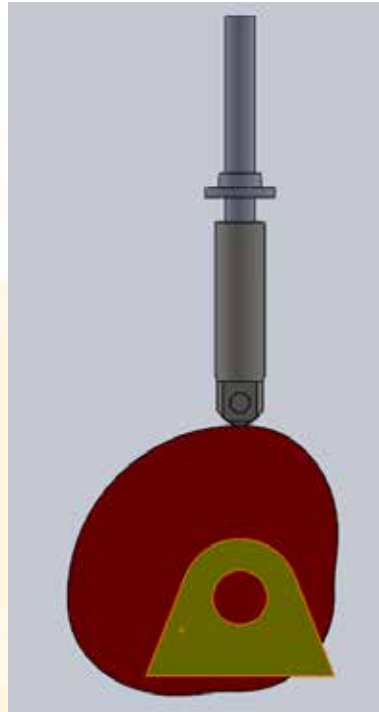


Figura 6.1. Desplazamiento rectilíneo del seguidor

- Oscilación angular de un seguidor, ver Fig. 6.2 : $\varphi(\varphi)$

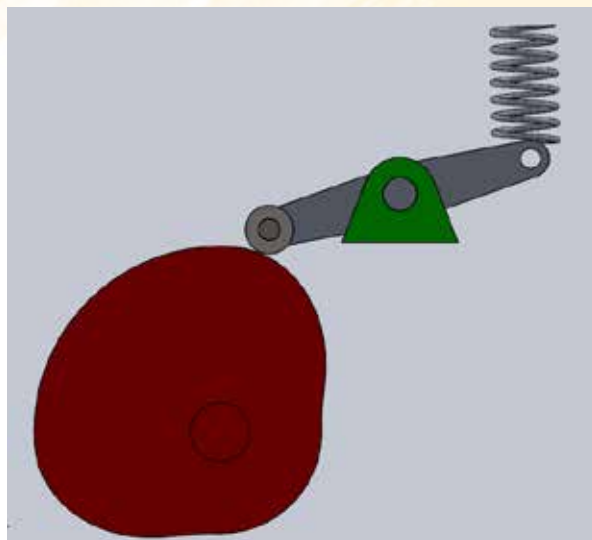


Figura 6.2. Oscilación angular del seguidor

- Con una leva también se puede obtener control sobre velocidades, aceleraciones, fuerzas y trayectorias: $v(\theta)$, $a(\theta)$, $F(\theta)$, $\{x(\theta), y(\theta)\}$

6.2 APLICACIONES

Las aplicaciones de las levas son muy variadas, esencialmente sirven para control de movimiento y se las encuentra en todo tipo de maquinaria industrial, así podemos encontrar mecanismos de levas principalmente en:

- El sistema de alimentación de los gases en los motores de combustión interna, según se aprecia en la Fig. 6.3.

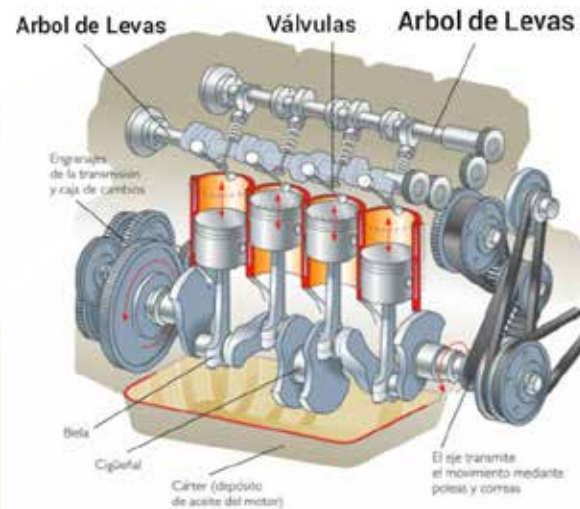


Figura 6.3. Sistema de alimentación de los gases en un motor de combustión interna³⁰

- Las levas también pueden controlar los movimientos intermitentes de las herramientas montadas en los portaherramientas de los tornos automáticos o en los carros transversales, horizontales y verticales. Según los valores necesarios para la producción de la pieza deseada, se procede al trazado de las levas. A lo largo del perímetro de la leva se proyecta la sucesión entera de operaciones necesarias para el acabado de la pieza, ver Fig. 6.4

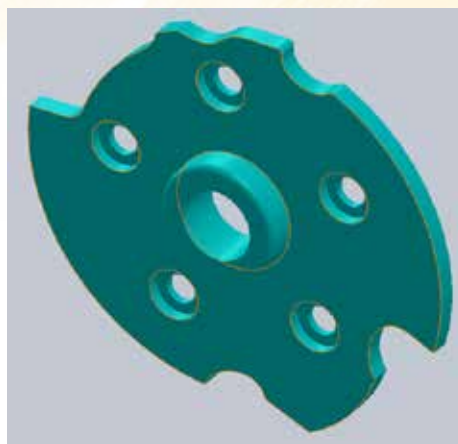


Figura 6.4. Leva de torno automático

³⁰ <http://www.fierrosclasicos.com/que-es-el-arbol-de-levas/>

- Las prensas y válvulas de la maquinaria para llenar y sellar líquidos son controladas mecánicamente mediante leva como se puede apreciar en un prototipo fabricado en el DECEM, ver Fig. 6.5



Figura 6.5. Máquina para llenar y sellar líquidos

- Leva para imprimir relieves en jabones, Fig. 6.6



Figura 6.6. Máquina para imprimir relieves en jabones, controlada por una leva

- Mecanismos para controlar movimiento intermitente conocidos como indexadores, como se aprecia en la Fig. 6.7 que corresponde a equipamiento fabricado en serie de la empresa alemana Taktomat



Figura 6.7. Leva para controlar movimiento intermitente, mecanismo indexador³¹

6.3 CLASIFICACION

El tamaño y forma de las levas es muy variado, como se puede observar en la Fig. 6.8

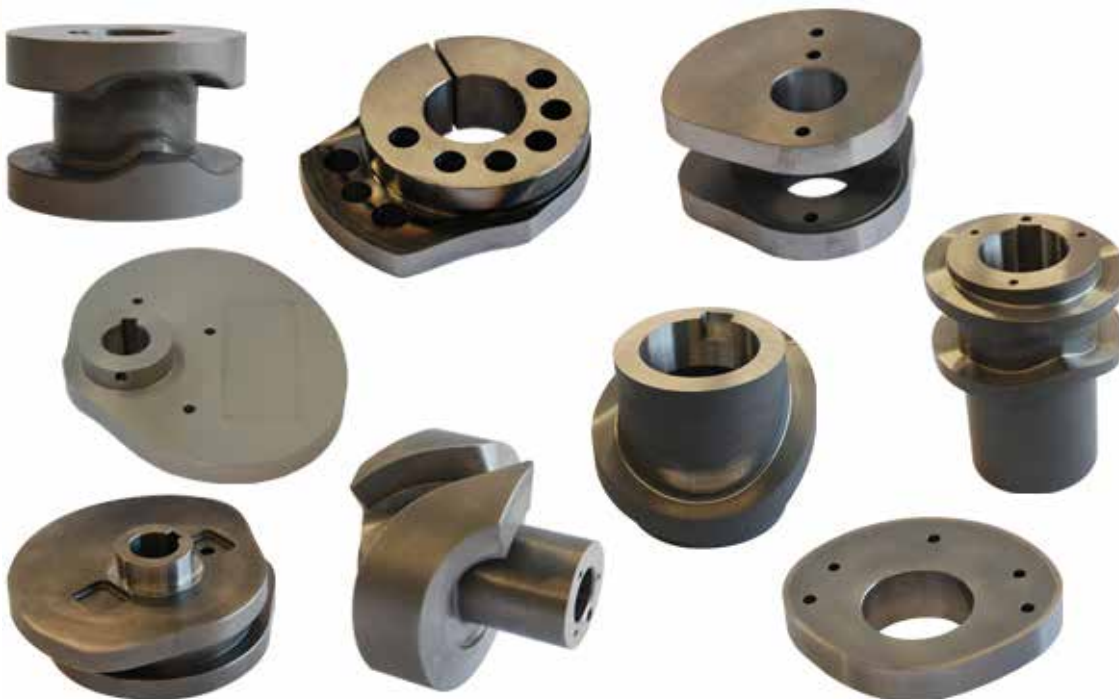


Figura 6.8. Tipos de levas³²

³¹ <http://www.taktomat.de/produkte/trommelkurvenruntische-mit-fester-teilung.html>

³² HEINZ AUTOMATIONS-SYSTEME GmbH

Y para su estudio se recurre a la siguiente clasificación:

6.3.1 POR EL TIPO DE LEVA

1.- Leva de placa o plana como la que se observa en la Fig. 6.9

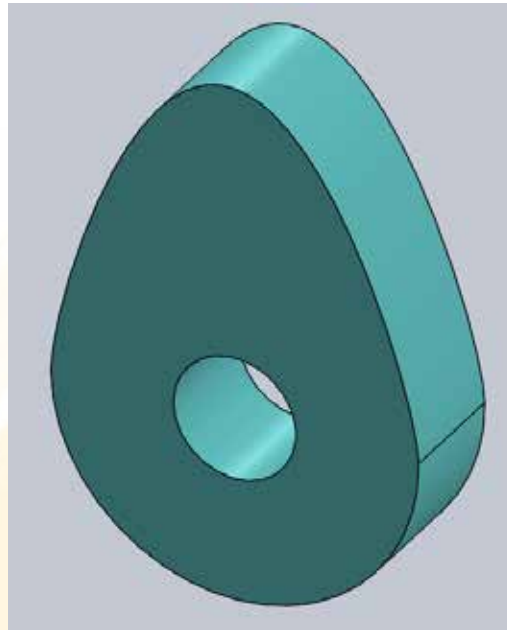


Figura 6.9. Leva de placa o plana

2.- Leva cilíndrica

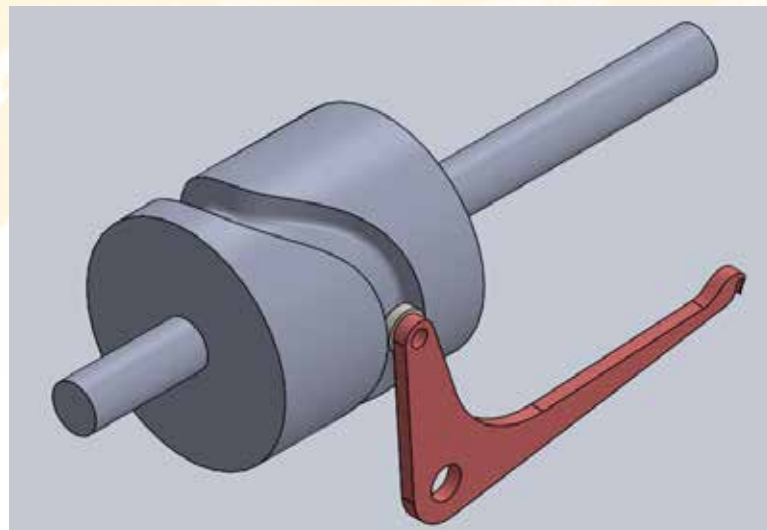


Figura 6.10. Leva cilíndrica

3.- Leva de cara o de vaso

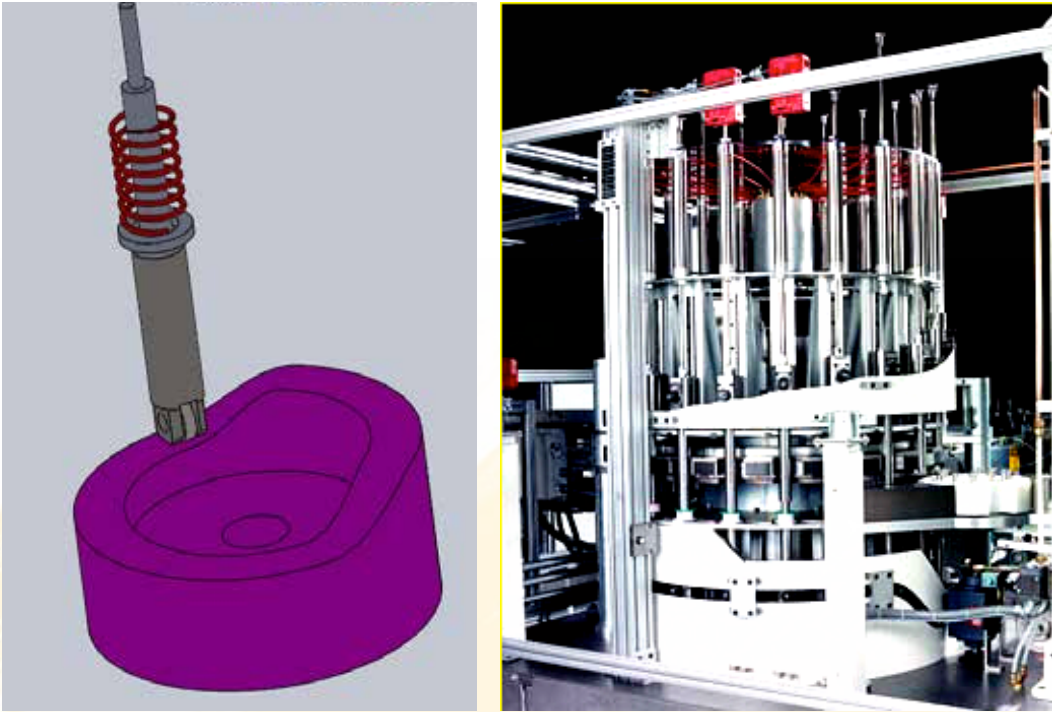


Figura 6.11. Leva de cara y una aplicación donde se observa una leva fija y los seguidores desplazándose por su superficie

4.- Leva de cuña

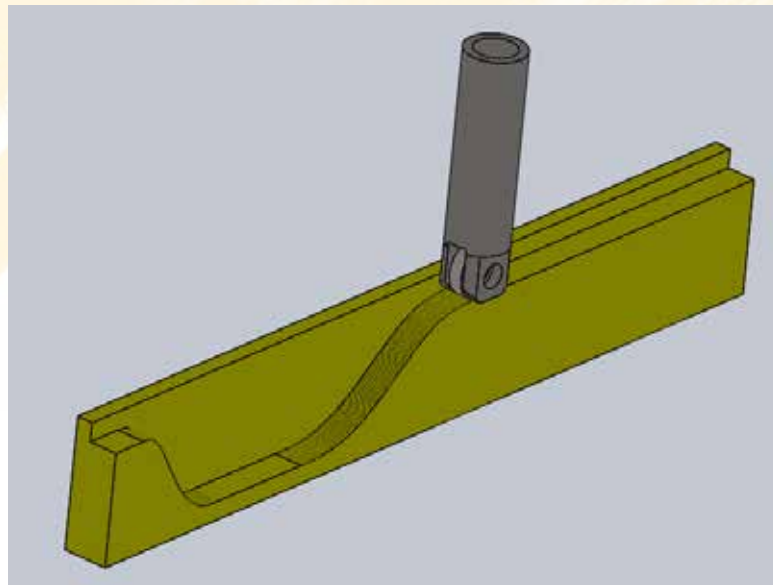


Figura 6.12. Leva de cuña

5.- Leva electrónica

Las levas electrónicas están progresivamente reemplazando a las levas mecánicas ya que al contrario de estas permiten movimientos reconfigurables. Estas levas conforman un sistema mecatrónico y se componen de servomotores, actuadores y microcontroladores, ver Fig. 6.13



Figura 6.13. Leva electrónica

6.3.2 POR EL TIPO DE MOVIMIENTO DEL SEGUIDOR

Se clasifican en dos tipos traslatorio y oscilatorio, ver Fig. 6.14

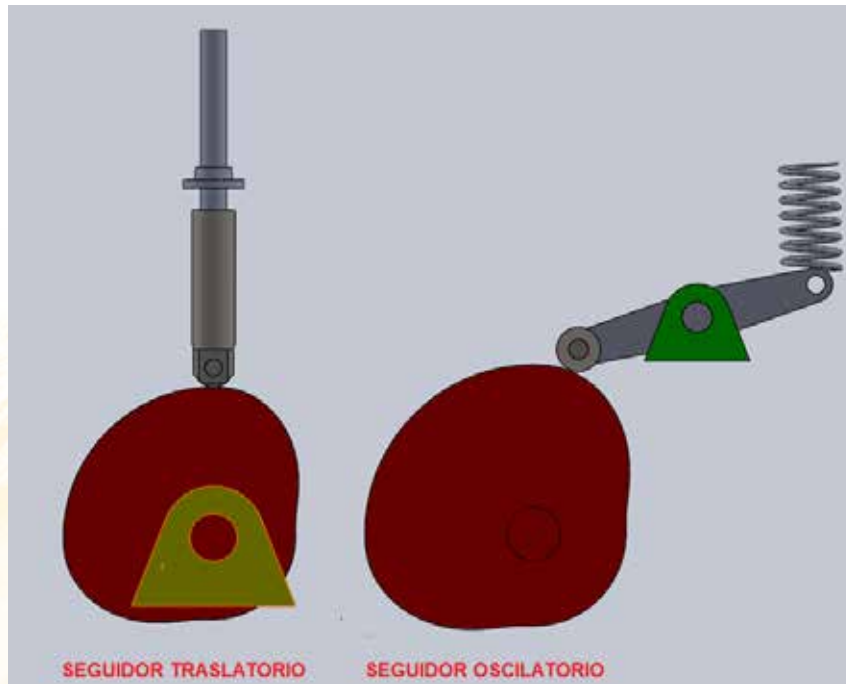


Figura 6.14. Tipos de levas por el movimiento del seguidor

6.3.3 POR EL TIPO DE SEGUIDOR

Por el tipo de seguidor se dividen en **seguidor de rodillo** y **seguidor de cara plana**, el seguidor de rodillo presenta fricción de rodadura lo que permite mayor duración de la leva, ver Fig. 6.1, 6.2, mientras que el mecanismo de levas con seguidor de cara plana es mucho más compacto y por esta razón es utilizado profusamente en los motores de combustión interna, ver Fig. 6.3 y 6.15

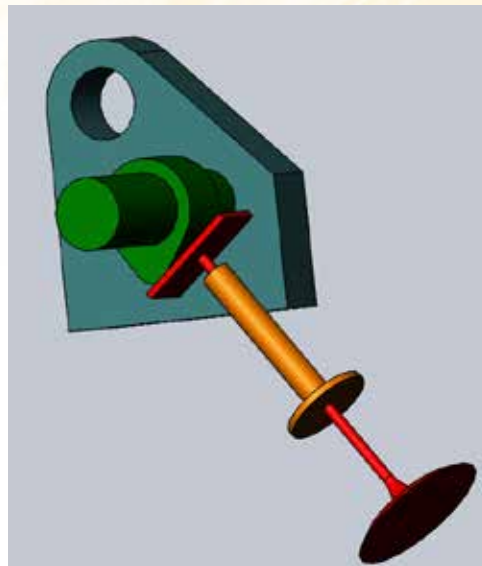


Figura 6.15. Seguidor de cara plana

6.3.4 POR EL TIPO DE CIERRE

El método con el cual, permanecen unidos el seguidor y la leva se denomina cierre. Si se utiliza una fuerza externa como pueden ser la fuerza de un resorte o el propio peso del seguidor se denomina cierre de fuerza, en tanto que si el rodillo del seguidor circula por una ranura en la leva se denomina cierre de forma. El cierre de forma evita el despegue del seguidor pero es más caro, ver Fig. 6.16

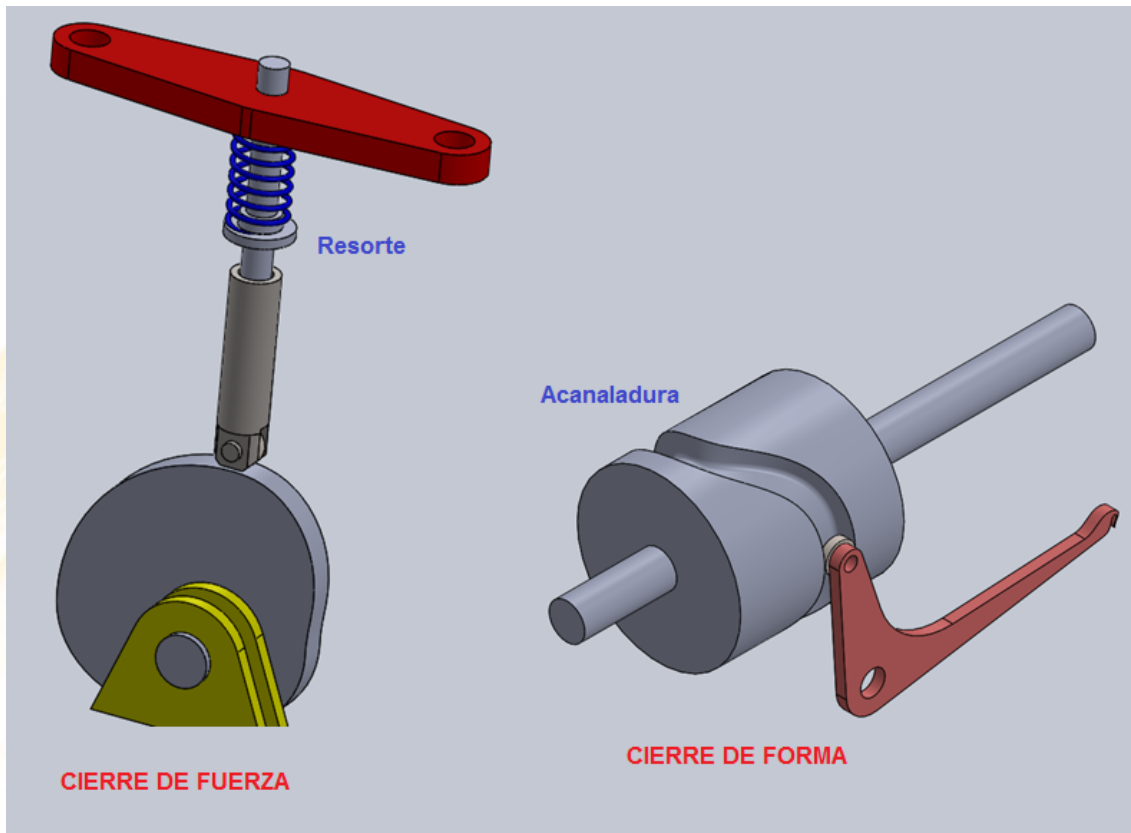


Figura 6.16. Tipos de cierre

6.4 TIPOS DE RESTRICCIÓN DE MOVIMIENTO (Norton, 2004)

6.4.1 DISEÑO SEGÚN POSICIONES EXTREMAS CRÍTICAS

El diseño de levas según **posiciones extremas críticas** se refiere al caso en que las especificaciones de diseño corresponden a las posiciones iniciales y finales del seguidor y se especifica la duración y los desplazamientos del mismo.

Por ejemplo: supongamos que se desea diseñar una leva para imprimir un movimiento traslatorio a un seguidor solidario a prensas de sellado en una máquina para llenar y sellar fundas de jugo de frutas. En primer lugar se parte de un ciclo de movimientos que depende de las condiciones físicas del proceso, por ejemplo tiempo necesario para que se llene cierto volumen de un fluido determinado, la duración del sellado por medio de resistencia eléctricas, etc., los tiempos del proceso son los siguientes:

- Detenimiento bajo durante 5 s.
- Desplazamiento del seguidor durante 2 s.
- Detenimiento alto, durante el cual se efectúa el sellado de la funda durante 9 s.
- Retorno del seguidor durante 2 s.

La duración del ciclo completo es la suma de tiempos e igual a 18 s. Es decir que un giro completo de la leva debe durar 18 s. Lo que implica que cada ciclo tendrá la siguiente equivalencia

- 5 s. \square (360 \square / 18 s.) = 100 \square
- 2 s. = 40 \square
- 9 s. = 180 \square
- 2 s. = 40 \square

Con estos valores podremos efectuar el diagrama de programación de eventos, Fig.6.17

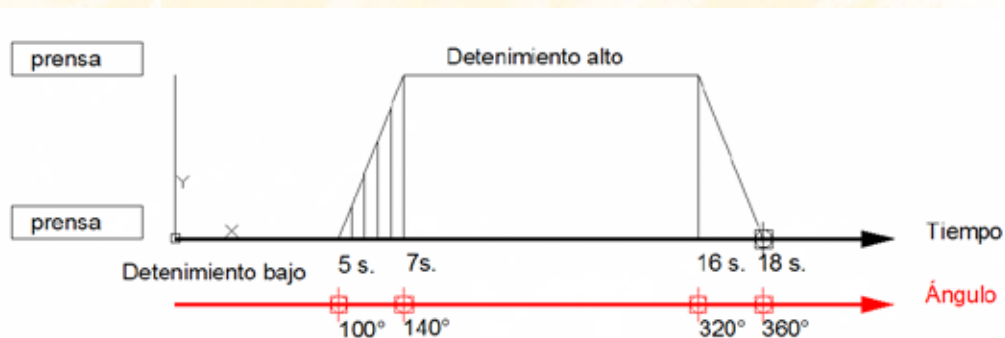


Figura 6.17. Diagrama de temporización

A partir de este diagrama se puede dibujar la leva, empezando por dividir en partes iguales los flancos de subida y traspasando las medidas a una circunferencia denominada Radio base, ver Fig. 6.18

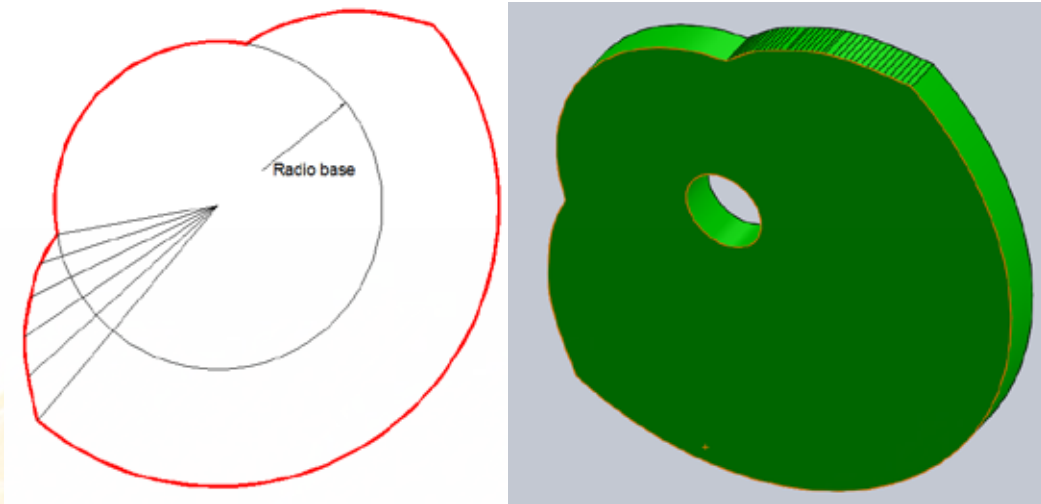


Figura 6.18. Leva generada

El gráfico obtenido permite obtener la simulación del movimiento y efectuar el análisis cinemático y dinámico del desplazamiento del seguidor, el análisis de velocidad del seguidor evidencia la primera crítica a los enlaces entre reposos utilizados en Fig. 6.16, que sería la discontinuidad en el diagrama de velocidades, Fig. 6.19

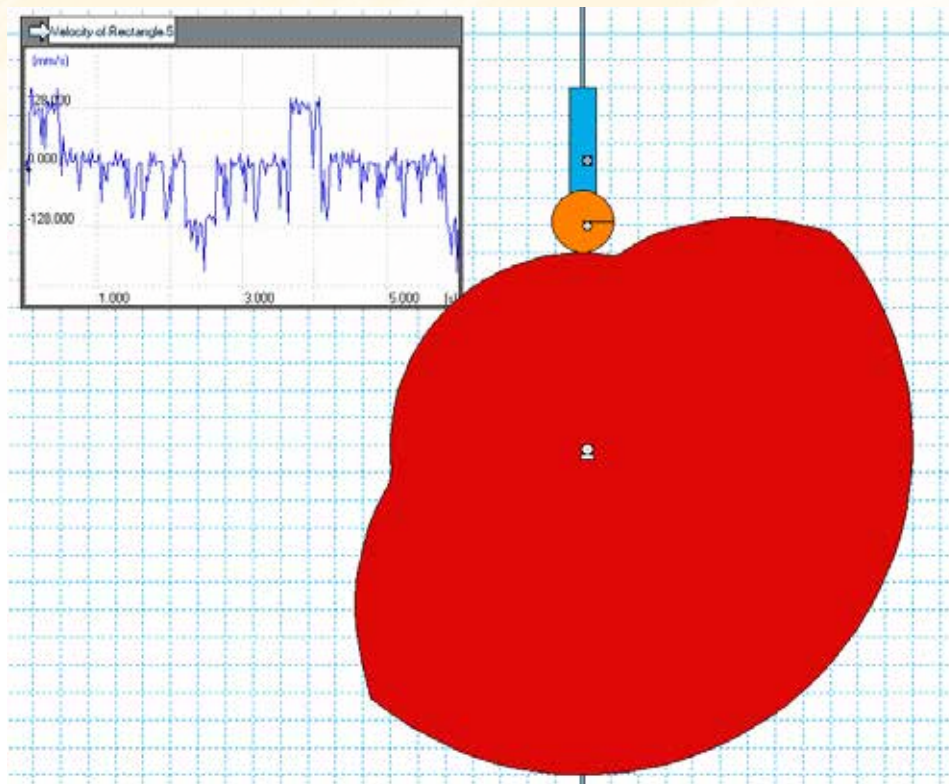


Figura 6.19. Velocidad del seguidor

Una regla importante para el diseño de levas es que los diagramas de desplazamiento, velocidad, aceleración y en algunos casos la sobreaceleración deben ser continuos.

Mientras mayor velocidad tenga la leva, debe mantenerse la continuidad en las cuatro funciones, en casos muy puntuales con velocidades de giro extremadamente lentos, bastará continuidad en el desplazamiento.

6.4.2 DISEÑO SEGÚN MOVIMIENTO DE TRAYECTORIA CRÍTICA (CRITICAL PATH MOTION) (Norton, 2004)

Las levas pueden ser diseñadas también según características específicas de una o más derivadas del movimiento, en todo o parte del intervalo de movimiento.

Por ejemplo: se puede requerir que el desplazamiento de una leva sea de **velocidad o aceleración constante**, Mientras que para la bajada se puede requerir únicamente continuidad en las cuatro curvas desplazamiento, velocidad, aceleración, salto, ver Fig. 6.20

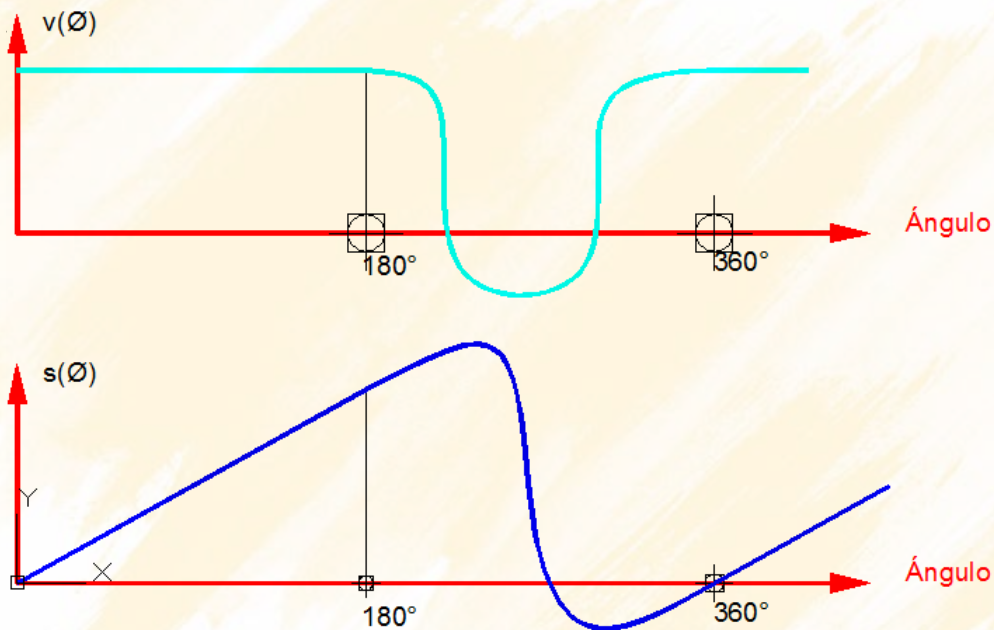


Figura 6.20. Especificaciones de una leva de diseño según movimiento trayectoria crítica

En la Fig. 6.18 se tiene un diagrama de desplazamiento en el cual el seguidor debe subir con velocidad constante durante 180° de la rotación de la leva, mientras que para el descenso se pide mantener la continuidad.

6.4.3 ANALISIS DE LEVA CONSTRUIDA CON PERFILES SIMPLES O LEVA TRIGONOMÉTRICA

En este caso se traza la leva en base de arcos de circunferencia y líneas simples, luego se efectúa el análisis en base de trigonometría y se obtienen los diagramas de desplazamiento, velocidad y aceleración, si no son satisfactorios, se cambia la geometría del perfil.

Estas levas se construían antiguamente cuando no se disponía de maquinaria sofisticada para construir la leva o cuando las levas son muy grandes y en el caso de las levas para motores de

combustión interna que eran diseñadas en base de datos estadísticos acumulados, ver Fig. 6.21

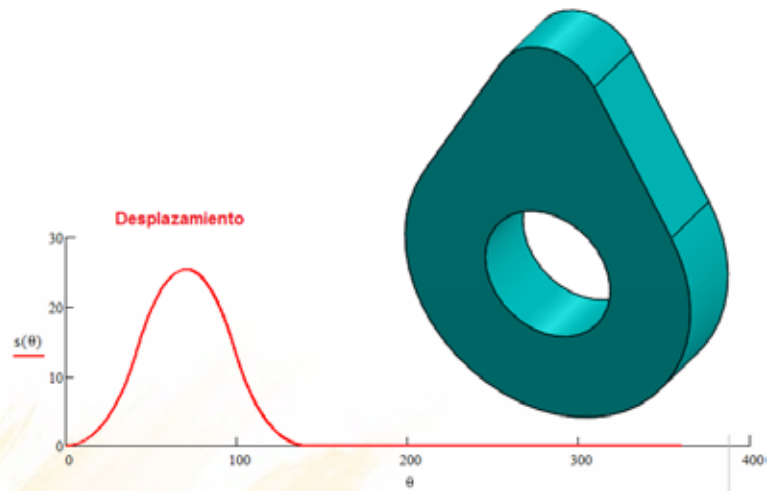


Figura 6.21. Leva trigonométrica

Durante la década de los años 50 con la ayuda de un computador electrónico fue ideado el perfil “Polidínico” que combina las ventajas de la ecuación polinomial con la dinámica del tren de válvulas a alta velocidad. En la operación a alta velocidad y debido a la elasticidad de los sistemas existe una diferencia en lo que la válvula se supone que debe hacer y lo que realmente hace.

El esquema de la Fig. 6.22 representa el mecanismo de una cizalla electromecánica, donde se aprecia la simplicidad de la leva trigonométrica utilizada.

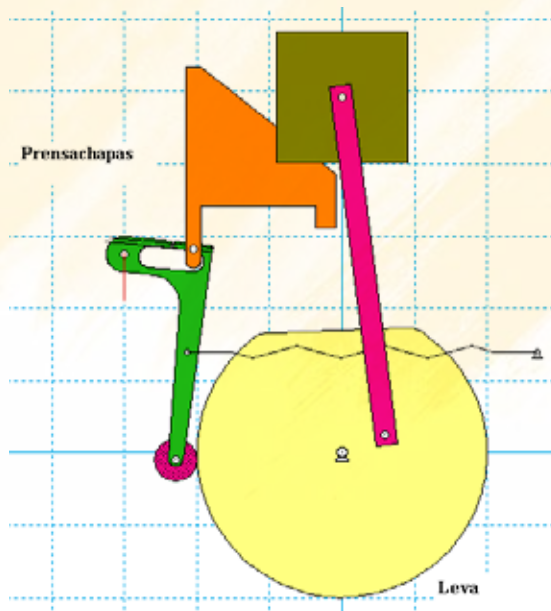


Figura 6.22. Simulación de una máquina cizalladora

6.5 NOMENCLATURA DE LAS LEVAS

Se observa los siguientes elementos en la Fig. 6.23

Curva de paso: Es el lugar geométrico de la trayectoria que correspondería al centro del seguidor equidistante al perfil de la leva.

Radio primario: Es la menor circunferencia tangente a la curva de paso

Perfil de la leva: Constituye la forma final de la leva, el perfil de la leva puede ser descrito por coordenadas cartesianas, paramétricas o polares

Radio base: Es la menor circunferencia tangente a la superficie de la leva

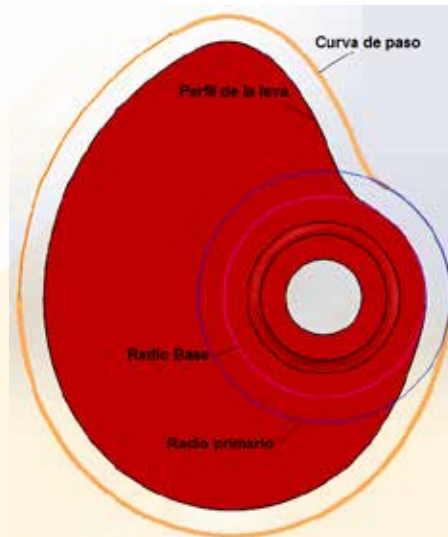


Figura 6.23. Nomenclatura de la leva

Para evaluar la idoneidad de una leva se suele verificar ciertos índices de mérito que son:

Angulo de presión ϕ : Es el ángulo subtendido entre la vertical y el vector que va desde el centro del seguidor al centro del radio de curvatura instantáneo de la leva, este vector se denomina **normal común** y representa la línea de acción de la **Fuerza de contacto** entre el seguidor y la leva, este ángulo **no debe superar los 30°** y las levas oscilantes no deben superar los **55°**, ver Fig. 6.24

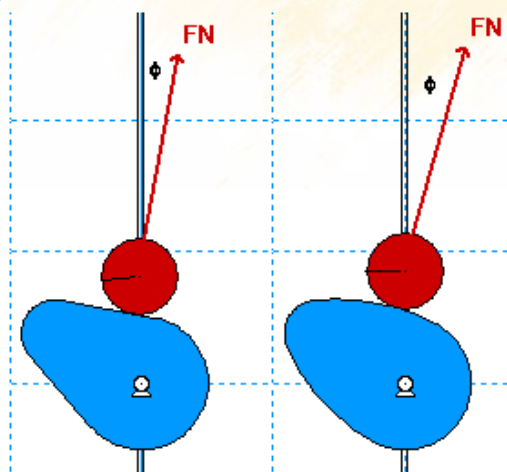


Figura 6.24. Angulo de presión

El ángulo de presión puede ser evaluado con la siguiente expresión, la deducción de la formulación utilizada puede ser revisada en la literatura de mecanismos correspondiente

$$\phi(\theta) = \text{Atan}\left(\frac{v(\theta) - \varepsilon}{s(\theta) + \sqrt{Rp^2 - \varepsilon^2}}\right) \quad (6.1)$$

Dónde: ε es la excentricidad

Rp es el radio primario

$s(\theta)$ es la función desplazamiento del seguidor

$v(\theta)$ es la función velocidad del seguidor

Radio de curvatura: Se necesita evaluar el radio de curvatura para verificar que el tamaño del rodillo del seguidor sea adecuado y que se verifique el movimiento programado en la leva.

$$\rho(\theta) = \frac{\left[(Rp + s(\theta))^2 + \left(v(\theta) \frac{180}{\pi} \right)^2 \right]^{3/2}}{(Rp + s(\theta))^2 + 2 \left(v(\theta) \frac{180}{\pi} \right)^2 - a(\theta) \left(\frac{180}{\pi} \right)^2 (Rp + s(\theta))} \quad (6.2)$$

En la Fig. 6.25 se aprecia la importancia que tiene la concordancia entre radio de curvatura y radio del seguidor

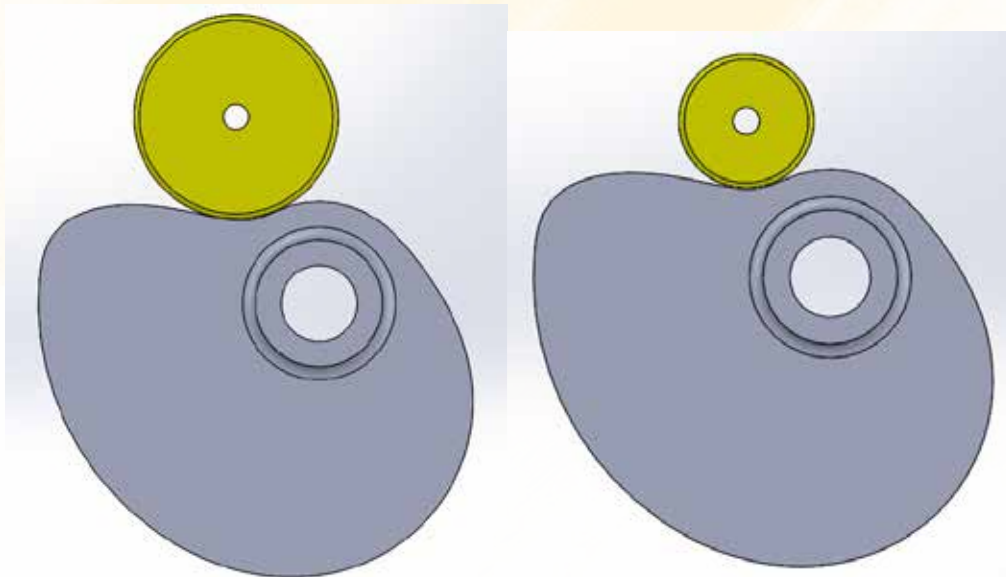


Figura 6.25. Un radio del seguidor muy grande impedirá un correcto acoplamiento del mecanismo leva seguidor

6.6 DISEÑO ANALITICO DE LEVAS

Una parte importante del diseño consiste en la obtención del perfil de la leva lo cual se puede lograr por métodos gráficos o analíticos, debido al uso extendido de la computadora el método gráfico está descartado y se recopilan las ecuaciones más utilizadas para distintas configuraciones leva seguidor.

6.6.1 LEVA CON SEGUIDOR RADIAL DE RODILLO

La leva con seguidor radial de rodillo mantiene el eje del seguidor alineado con el centro de la leva, es la configuración más usual que se utiliza, ver Fig. 6.26

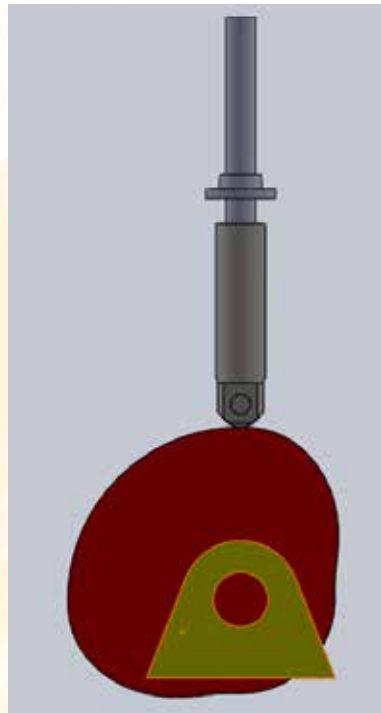


Figura 6.26. Leva con seguidor radial de rodillo

La ecuación que permite graficar la leva en coordenadas polares es La Ec.6.3

$$R(\theta) = Rb + s(\theta) \quad (6.3)$$

Dónde: Rb es el radio base

$s(\theta)$ es la función desplazamiento del seguidor

6.6.2 LEVA CON SEGUIDOR EXCENTRICO DE RODILLO

Se aplica excentricidad cuando se precisa disminuir el tamaño de la leva, ver Fig. 6.27

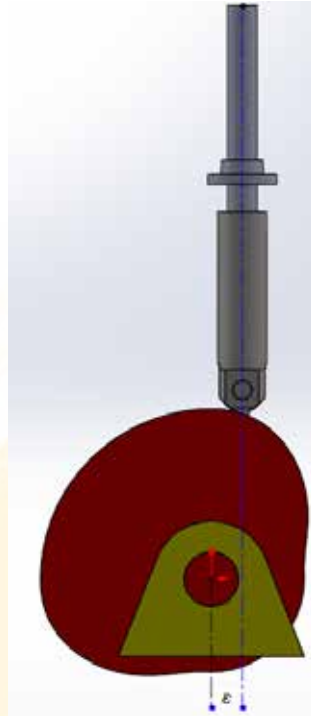


Figura 6.27. Leva con seguidor excéntrico de rodillo

Las ecuaciones a utilizar en coordenadas polares son:

$$R(\theta) = \sqrt{\left[\sqrt{(Rb^2 - \varepsilon^2)} + s(\theta) \right]^2 + \varepsilon^2} \quad (6.4)$$

$$\theta(\theta) = 2\pi - \theta \frac{\pi}{180} - \text{Atan} \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{(Rb^2 - \varepsilon^2)} + s(\theta)} \right] \quad (6.5)$$

6.6.3 LEVA CON SEGUIDOR DE CARA PLANA

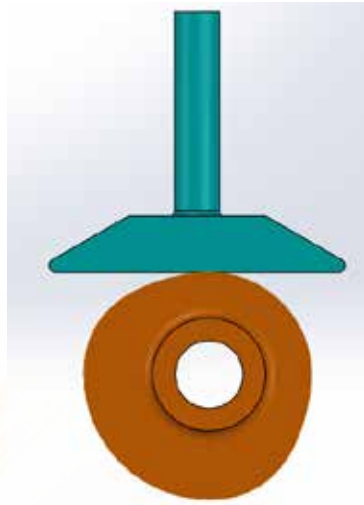


Figura 6.28. Leva con seguidor plano

Las ecuaciones en coordenadas polares son:

$$\theta(\theta) = \text{Atan} \left[\frac{1}{Rb + s(\theta)} \left\{ \frac{d(Rb + s(\theta))}{d\theta} \right\} \frac{180}{\pi} \right] \quad (6.6)$$

$$R(\theta) = \frac{Rb + s(\theta)}{\cos(\theta(\theta))} \quad (6.7)$$

6.6.4 LEVA DE SEGUIDOR OSCILANTE DE RODILLO

La leva con seguidor oscilante de rodillo puede ser la solución cuando se requiere aumentar el movimiento generado en el seguidor, ver Fig. 6.29

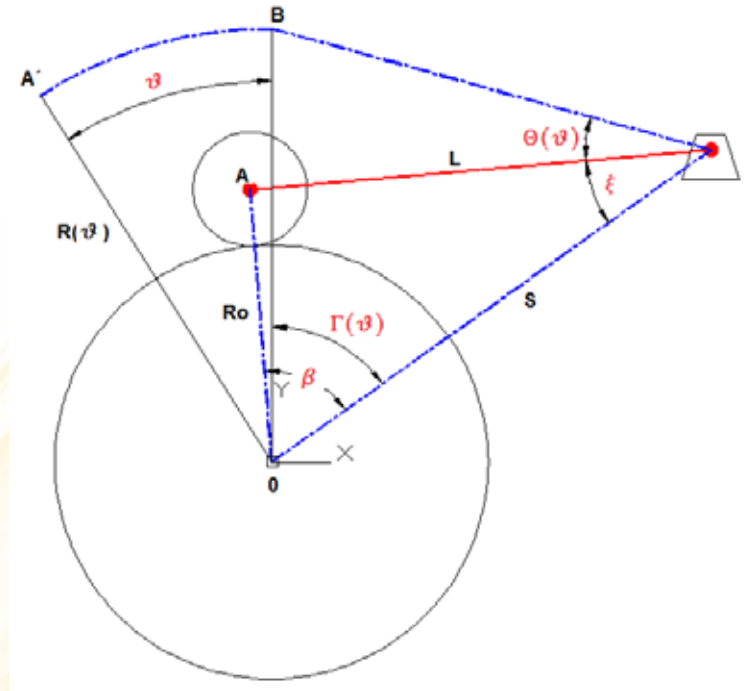


Figura 6.29. Leva de seguidor oscilante de rodillo

Dadas las medidas de longitud del seguidor L , distancia entre centro S , Radio base R_b , radio del rodillo r_0

$$\phi = \phi(\theta) \quad (6.8)$$

$$R_o = R_b + r_0 \quad (6.9)$$

$$\xi = \cos^{-1} \left(\frac{L^2 + S^2 - R_o^2}{2 L S} \right) \quad (6.10)$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{S^2 + R_o^2 - L^2}{2 S R_o} \right) \quad (6.11)$$

$$R = R(\theta) = \sqrt{L^2 + S^2 - 2 L S \cos \left(\phi \frac{\pi}{180} + \xi \right)} \quad (6.12)$$

$$\Gamma = \Gamma(\theta) = \cos^{-1} \left(\frac{S^2 + R^2 - L^2}{2 R S} \right) \quad (6.13)$$

Las coordenadas polares para efectuar el gráfico correspondiente son:

$$\Theta = \Theta(\theta) = \theta \frac{\pi}{180} - \beta + \Gamma \quad (6.14)$$

$$r = r(\theta) = R - r_0 \quad (6.15)$$

6.6.5 LEVA DE SEGUIDOR OSCILANTE DE CARA PLANA

La geometría corresponde al cálculo de la leva de seguidor oscilante plano, ver Fig.6.28:

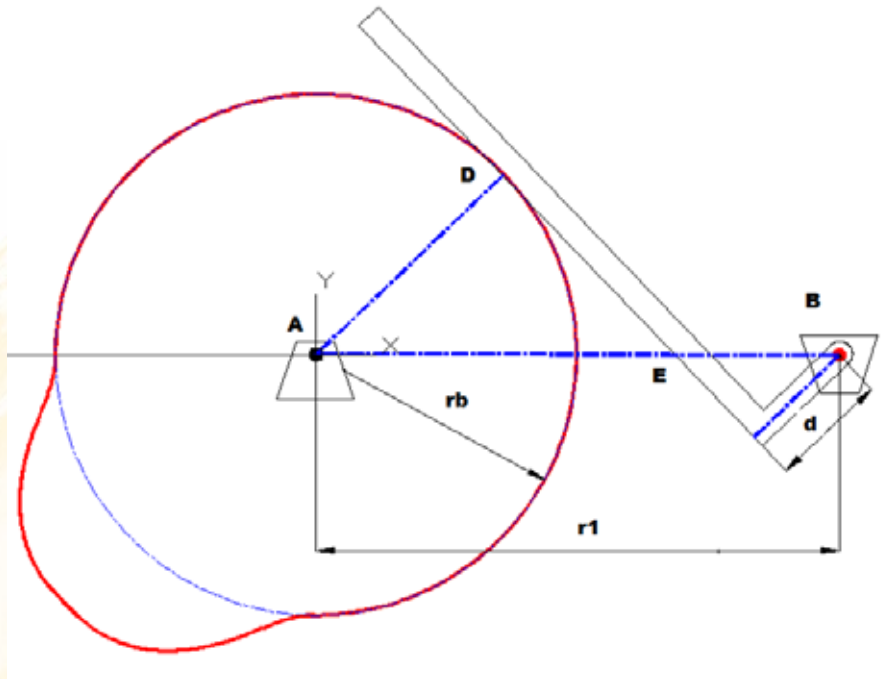


Figura 6.28. Leva de seguidor oscilante de cara plana³³

Dadas las medidas de r_b , r_1 y d

$$AE = \frac{r_1 r_b}{r_b + d} \quad (6.16)$$

$$DE = \sqrt{AE^2 - r_b^2} \quad (6.17)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \frac{r_b}{DE} \quad (6.18)$$

$$\phi = \phi(\theta) \quad (6.19)$$

$$\phi' = \phi'(\theta) = \text{sgn} \frac{d\phi}{d\theta} \quad (6.20)$$

Donde $\text{sgn} = 1$ si la leva oscila en la dirección de las manecillas del reloj,
 $\text{sgn} = -1$ contrario a las manecillas del reloj

$$b = b(\theta) = r_1 \frac{\phi'}{1 - \phi'} \quad (6.21)$$

³³ Kenneth J. Waldron KINEMATICS, DYNAMICS, AND DESIGN OF MACHINERY

$$CD = CD(\theta) = (r_1 + b) \cos(\phi + \phi_0) \quad (6.22)$$

$$AG = AG(\theta) = r_1 - d \sin(\phi + \phi_0) - CD \cos(\phi + \phi_0) \quad (6.23)$$

$$DG = DG(\theta) = CD \sin(\phi + \phi_0) - d \cos(\phi + \phi_0) \quad (6.24)$$

$$r = r(\theta) = \sqrt{AG^2 + DG^2} \quad (6.25)$$

$$r = r(\theta) = \sqrt{AG^2 + DG^2} \quad (6.26)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left[\frac{DG}{AG} \right] \quad (6.27)$$

$$x = x(\theta) = r \cos(\gamma + \theta) \quad (6.28)$$

$$y = y(\theta) = r \sin(\gamma + \theta) \quad (6.29)$$

6.7 LEYES PARA EL DESPLAZAMIENTO DEL SEGUIDOR

Una gran parte de la teoría de levas se centra en la identificación de los enlaces entre reposos o desplazamientos del seguidor más óptimos desde el punto de vista dinámico, los cuales se han desarrollado en el tiempo. En primer lugar y en virtud de un punto de vista pedagógico se identifican en primer lugar las leyes inaceptables las cuales podrían considerarse en aplicaciones de muy baja velocidad. Estas Leyes son las siguientes

Leyes inaceptables	<ul style="list-style-type: none"> • Ley Uniforme • Ley Armónica • Ley Parabólica • Ley Cúbica
--------------------	--

Las leyes aceptables no tienen restricción con respecto a la velocidad a usarse

Leyes aceptables	<ul style="list-style-type: none"> • Ley Cicloidal • Movimientos Combinados • Ley Polinomial "3 4 5" • Ley Polinomial "4 5 6 7" • Curvas de Bezier
------------------	---

6.8 LEY DE MOVIMIENTO UNIFORME

Esta ley, ver Fig. 6.29 utiliza sin mayor reflexión la ecuación de la línea recta como enlace entre reposos, Ec. 6.30.

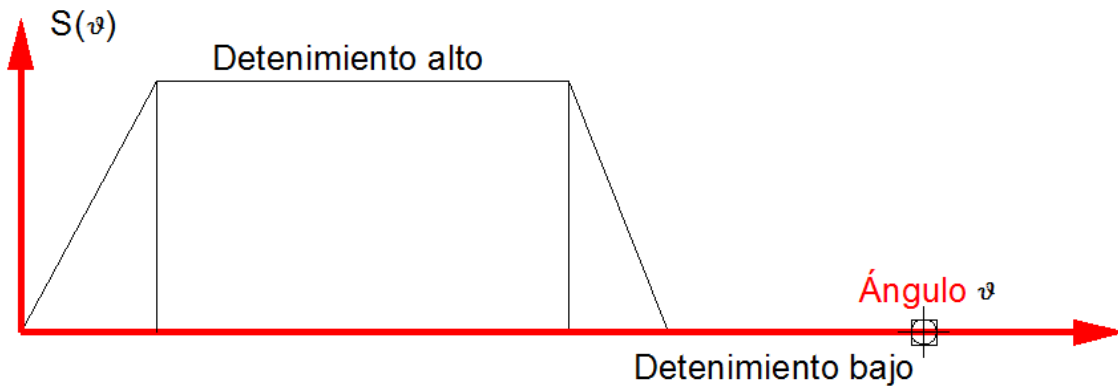


Figura 6.29. Ley uniforme

$$y = m x + b \quad (6.30)$$

El enlace de subida toma por tanto la forma de una línea recta que parte del origen

$$s_s(\theta) = h \frac{\theta}{\beta_1} \quad (6.31)$$

El enlace de bajada en cambio es una línea recta que cruza los dos ejes

$$s_b(\theta) = h \left(1 - \frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right) \quad (6.32)$$

El reposo alto será caracterizado por:

$$s_{ra}(\theta) = h \quad (6.33)$$

Y el reposo bajo mediante:

$$s_{rb}(\theta) = 0 \quad (6.34)$$

Estas cuatro expresiones deberán ser graficadas como una serie de ecuaciones discontinuas, siguiendo la siguiente lógica:

$$s(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} h \frac{\theta}{\beta_1} \text{ si } \theta \leq \beta_1 \\ h \text{ si } \beta_1 \leq \theta \leq \beta_1 + \beta_2 \\ h \left(1 - \frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right) \text{ si } \beta_1 + \beta_2 \leq \theta \leq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 0 \text{ si } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq \theta \leq 360 \end{array} \right\} \quad (6.35)$$

Donde β_1 , β_2 , β_3 son las duraciones de los eventos, h es la altura del seguidor y θ es el ángulo de giro de la leva, a partir de estas ecuaciones se realizarán diversos ficheros con el fin de obtener los perfiles de las levas correspondientes, por medio del siguiente ejercicio:

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva con ley uniforme que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

Con estos datos se procede a evaluar desplazamiento, velocidad, aceleración, perfiles, ángulo de presión, radio de curvatura, fuerzas dinámicas, etc.

6.8.1. DESPLAZAMIENTO

```

h= 50;
Rb=90;
β1=45 π/180;
β2=90 π/180;
β3=45 π/180;

s=Piecewise[ { {h (θ/ β1), θ<β1},
{h, θ<β1+β2},
{h(1- ((θ-(β1+β2))/β3)), θ<β1+β2+β3},
{0, θ<2 π} }];

Plot[s,{θ,0,2 π}, AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"}]

```

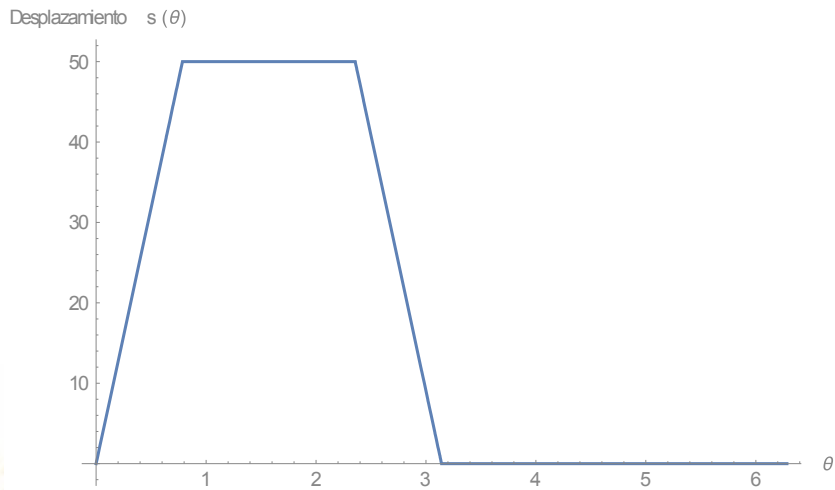


Figura 6.30. Desplazamiento ley uniforme

6.8.2. VELOCIDAD

```
v=Piecewise [ {
                {h/β1, θ<β1},
                {0, θ<β1+β2},
                {-h/β3, θ<β1+β2+β3},
                {0, θ< 2π} }];
Plot[v,{θ,0,2 π}, AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"}]
```

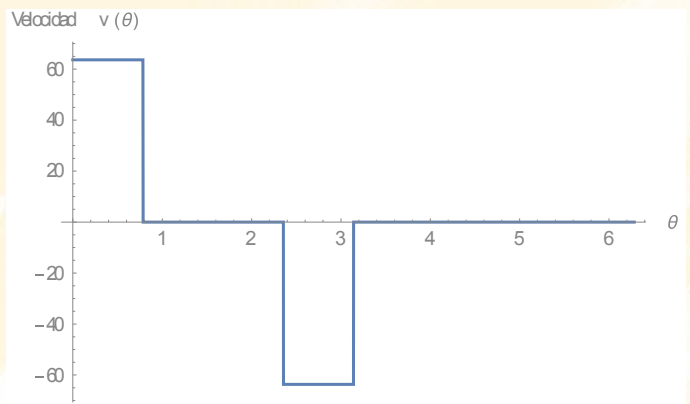


Figura 6.31. Velocidad ley uniforme

La característica plasmada en La Fig. 6.31 es totalmente inadmisibles para cualquier sistema físico, ya que representa un impacto, siendo esta la más importante crítica a la ley uniforme

6.8.3. ACELERACION

```
a=Piecewise[
                {{0, θ<β1},
                {0, θ<β1+β2},
                {0, θ<β1+β2+β3},
                {0, θ<2 π} }];
Plot[a,{θ,0,2 π}, AxesLabel->{" θ "," Aceleración a(θ)"}]
```

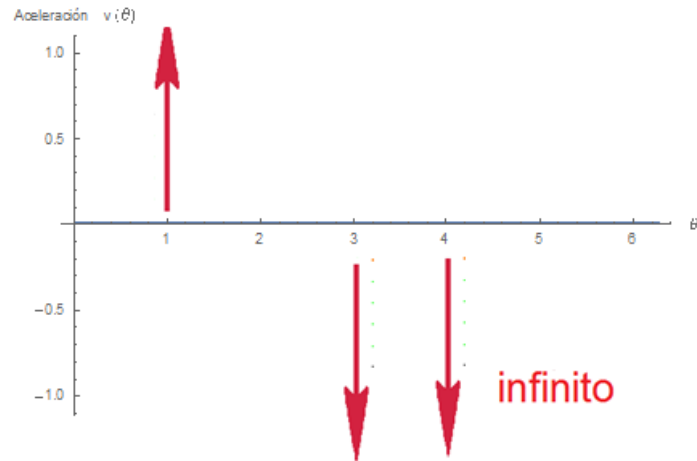


Figura 6.32. Aceleración ley uniforme

Si la magnitud de la velocidad del seguidor varía en forma instantánea, por lo tanto la aceleración en los instantes indicados será infinita, ver Fig. 6.2. De la segunda ley de Newton se tiene que $Fuerza = m a$ de donde se concluye que si no se considera la elasticidad del sistema las fuerzas también serán infinitas, las cuales tenderán a deformar la leva y originaran grandes golpes y vibraciones. Por lo tanto esta ley de movimiento aplicada como enlaces de reposos solo se podría utilizar en levas de velocidad sumamente baja y que mueva masas pequeñas, o en su defecto se puede utilizar combinado con otras curvas. Estas levas pueden fabricarse en una fresadora convencional con ayuda del cabezal divisor universal, sincronizando giro y avance del tornillo patrón de la fresadora.



Figura 6.33. Cabezal divisor universal³⁴

³⁴ <http://www.directindustry.es/prod/vertex-machinery-works-co-ltd/platos-divisores-40770-1343667.html>

6.8.4 PERFIL DE LA LEVA CON SEGUIDOR DE RODILLO RADIAL

R_b es el radio base y es igual para este caso a 90 mm, se añade la sintaxis siguiente:

```
PolarPlot [s+Rb,{θ,0,2π}, AxesLabel->{" θ ","  
Rb + s(θ)"}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}
```

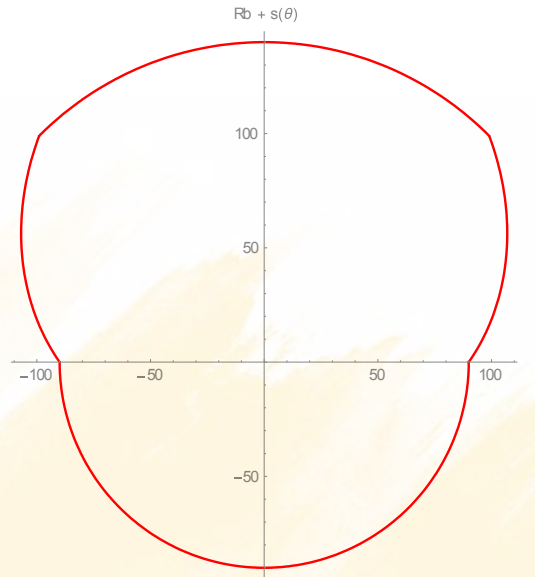


Figura 6.34. Perfil de leva de seguidor de rodillo radial

6.8.5 PERFIL DE LA LEVA CON SEGUIDOR DE RODILLO EXCENTRICO

La leva con seguidor de rodillo excéntrico tiene por finalidad limitar el ángulo de presión sin aumentar el radio base de la leva, utilizando un valor de e variable y las ecuaciones indicadas se traza la leva de seguidor de rodillo excéntrico.

```
Manipulate[ h = 50; Rb = 90;  
β1=45 π/180;  
β2=90 π/180;  
β3=45 π/180;  
  
s=Piecewise[ {{h (θ/ β1), θ<β1},  
{h, θ<β1+β2},  
{h(1- ((θ-(β1+β2))/β3)), θ<β1+β2+β3},  
{0, θ<2 π} }];  
  
fun = Sqrt[(Sqrt[Rb^2 - e^2] + s)^2 + e^2];  
  
ángulo = 2 \[Pi] - θ - ArcTan[e/(Sqrt[Rb^2 - e^2] + s)];  
  
x = fun Cos[ángulo];  
y = fun Sin[ángulo];  
  
ParametricPlot[{x, y}, {θ, 0, 2 π }, {e, 0, 70}]
```

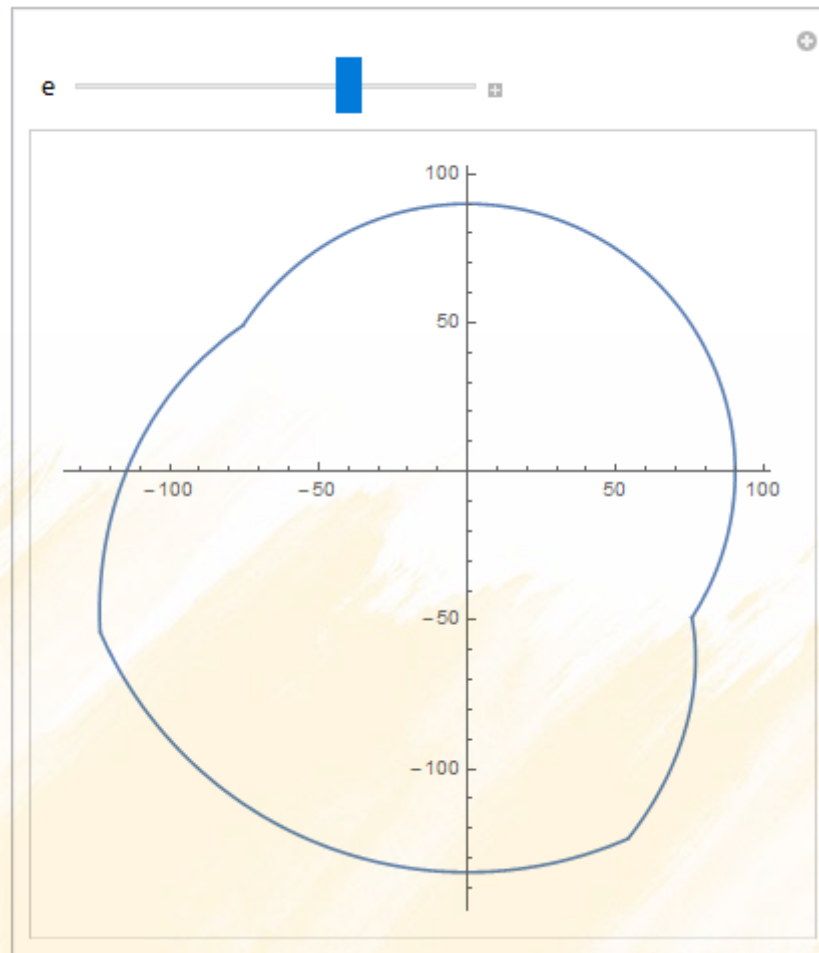


Figura 6.35. Perfil de leva de seguidor excéntrico

6.8.6 PERFIL DE LA LEVA CON SEGUIDOR DE CARA PLANA

Con las siguientes ecuaciones de coordenadas cartesianas, podemos obtener la leva con seguidor de cara plana.

$$x(\theta) = (Rb + s(\theta)) \cos\left(\theta \frac{\pi}{180}\right) - v(\theta) \frac{180}{\pi} \sin\left(\theta \frac{\pi}{180}\right) \quad (6.36)$$

$$y(\theta) = (Rb + s(\theta)) \sin\left(\theta \frac{\pi}{180}\right) + v(\theta) \frac{180}{\pi} \cos\left(\theta \frac{\pi}{180}\right)$$

Manipulate [h = 20;

$\beta_1=45 \pi/180$;

$\beta_2=90 \pi/180$;

$\beta_3=45 \pi/180$;

s=Piecewise[
 {{h (θ/ β1), θ<β1},
 {h, θ<β1+β2},
 {h(1- ((θ-(β1+β2))/β3)), θ<β1+β2+β3},
 {0, θ<2 π} }];

v=Piecewise[
 {{h/β1, θ<β1},
 {0, θ<β1+β2},
 {-h/β3, θ<β1+β2+β3},
 {0, θ<2π} }];

$x_1 = (R_b + s) \text{Cos}[\theta] - v \text{Sin} [\theta]$;

$y_1 = (R_b + s) \text{Sin}[\theta] + v \text{Cos} [\theta]$;

ParametricPlot[{x1, y1}, {θ, 0, 2 π}], {Rb, 0, 190}]

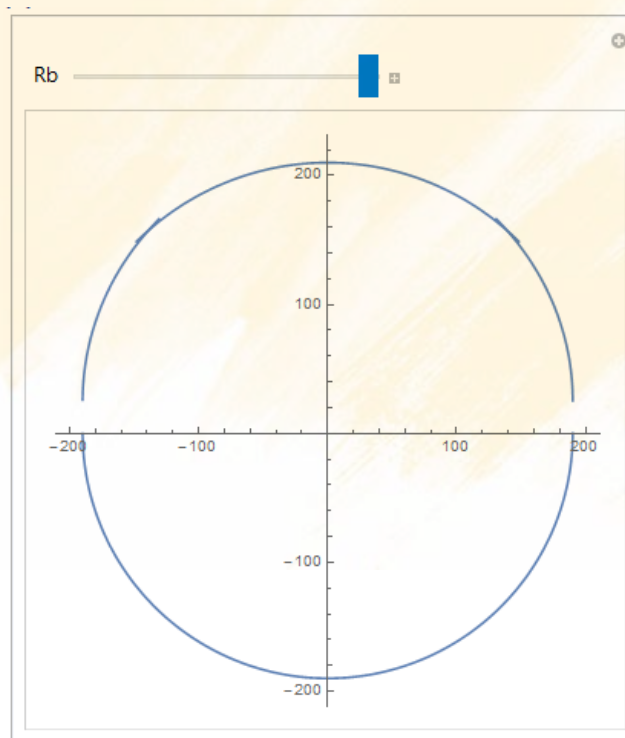


Figura 6.29. Perfil de leva con seguidor de cara plana

6.8.7 ANGULO DE PRESION

El ángulo de presión es un índice de mérito de la leva que se utiliza para seleccionar el radio base o tamaño de la leva, si en la subida del seguidor el ángulo de presión supera los 30° se deberá incrementar el radio base o introducir la excentricidad, ver Fig. 6.30

```

Manipulate[h = 50;

β1=45 π/180;
β2=90 π/180;
β3=45 π/180;

rodillo = 20;
Rp = Rb + rodillo;

s=Piecewise[ {{h (θ/ β1), θ<β1},
{h, θ<β1+β2},
{h(1- ((θ-(β1+β2))/β3)), θ<β1+β2+β3},
{0, θ<2 π} }];

v=Piecewise[ {{h/β1, θ<β1},
{0, θ<β1+β2},
{-h/β3, θ<β1+β2+β3},
{0, θ< 2π} }];

ϕ[Phi]1= ArcTan[(v - ec1)/(s + Sqrt[Rp^2 - ec1^2])];
Plot[{{ϕ[Phi]1 180/π}, {θ, 0, 2 π}], PlotRange -> Full ], {ec1, 0,
50}, {Rb, 10, 90}]

```

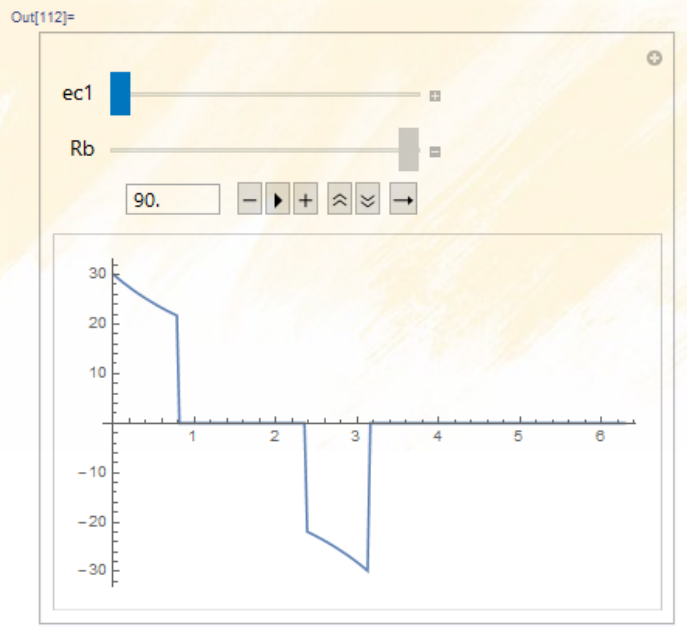


Figura 6.30. Angulo de presión

Como se aprecia la excentricidad disminuye el ángulo de presión durante la subida del seguidor y lo aumenta durante la bajada, pero esto no importa porque el ángulo es negativo.

6.8.8 APLICACIONES

Una aplicación interesante para la leva uniforme es este sistema para enrollar hilo en bobinas

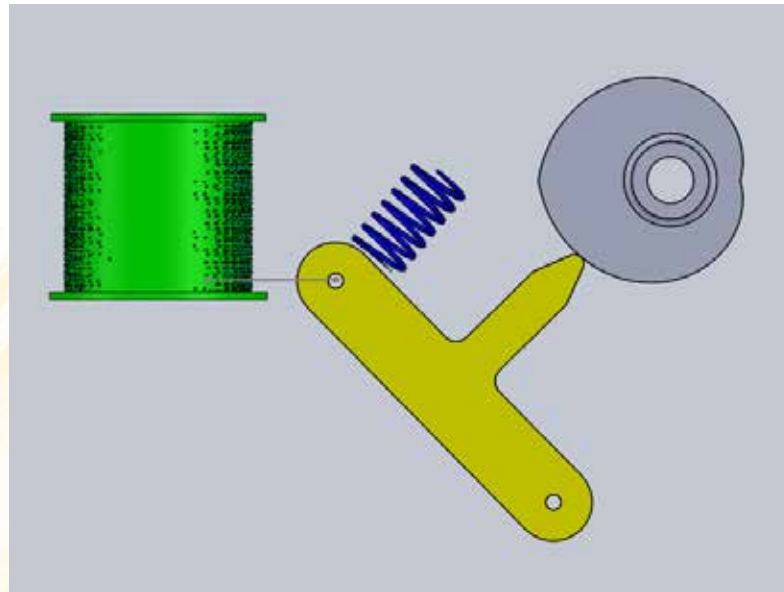


Figura 6.31. Sistema para enrollar hilo

6.9 MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Del ejemplo anterior se deduce que la subida y bajada debe tener buenas características cinemáticas y dinámicas, el primer intento para encontrar la ley adecuada será utilizar la ley armónica, que consiste en utilizar una función armónica como enlace, la idea de la leva armónica consiste simplemente en colocar entre los reposos una función armónica que puede ser un seno o un coseno,

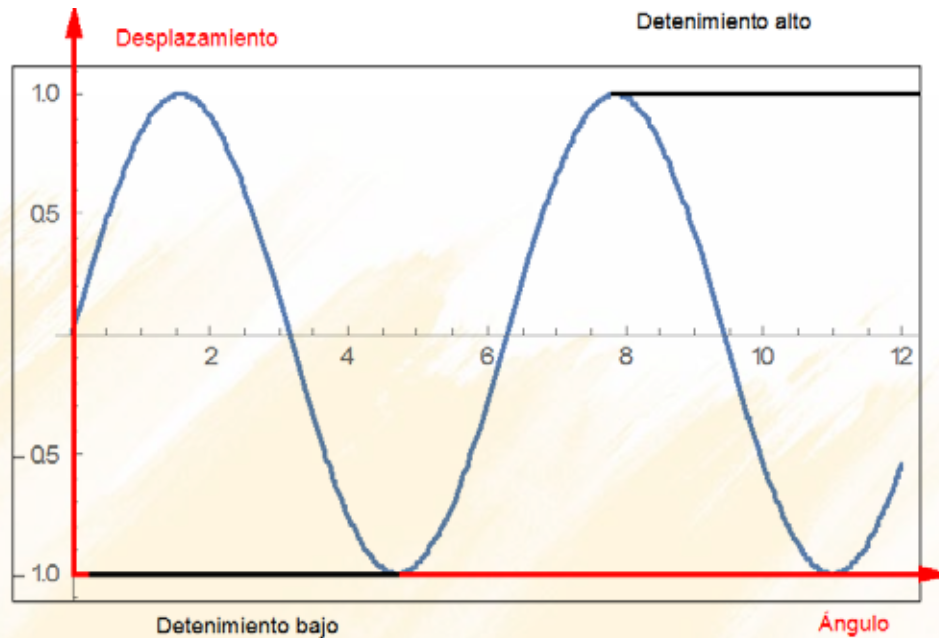


Figura 6.32. Leva armónica

Las ecuaciones básicas son por tanto la Ec. 6.37 para la subida

$$s_s(\theta) = \frac{h}{2} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{\theta}{\beta_1}\right) \right) \quad \textit{subida} \quad (6.37)$$

Y la Ec. 6.38 para la bajada

$$s_b(\theta) = \frac{h}{2} \left(1 + \cos\left(\pi \frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3}\right) \right) \quad \textit{bajada} \quad (6.38)$$

El primer paso será la evaluación simbólica de las derivadas de las funciones propuestas para obtener, velocidades, aceleraciones y sobreaceleraciones, con Mathematica se utiliza la función **D[f[x],x]** para la derivada primera de f con respecto a x; **D[f[x], {x,n}]** para la derivada n-ésima de f con respecto a x. El fichero de Mathematica es por tanto:

Clear ["Global`*"]

subida = h/2 (1 - Cos [π * θ/β1])
bajada = h/2 (1 + Cos [π * (θ-β1-β2)/β3])

D[subida ,θ]
D[subida,{θ,2}]
D[subida,{θ,3}]

D[bajada ,θ]
D[bajada,{θ,2}]
D[bajada,{θ,3}]

Exhibiendo los siguientes resultados para la subida, que representan, velocidad, aceleración y sobreaceleración respectivamente:

$$v_s(\theta) = \frac{h\pi \sin\left[\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right]}{2\beta_1} \quad \text{velocidad subida} \quad (6.39)$$

$$a_s(\theta) = \frac{h\pi^2 \cos\left[\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right]}{2\beta_1^2} \quad \text{aceleración subida} \quad (6.40)$$

$$j_s(\theta) = -\frac{h\pi^3 \sin\left[\frac{\pi\theta}{\beta_1}\right]}{2\beta_1^3} \quad \text{sobreaceleración subida} \quad (6.41)$$

Y los siguientes para la bajada

$$v_b(\theta) = -\frac{h\pi \sin\left[\frac{\pi(-\beta_1 - \beta_2 + \theta)}{\beta_3}\right]}{2\beta_3} \quad \text{velocidad bajada} \quad (6.42)$$

$$a_b(\theta) = -\frac{h\pi^2 \cos\left[\frac{\pi(-\beta_1 - \beta_2 + \theta)}{\beta_3}\right]}{2\beta_3^2} \quad \text{aceleración bajada} \quad (6.43)$$

$$j_b(\theta) = \frac{h\pi^3 \sin\left[\frac{\pi(-\beta_1 - \beta_2 + \theta)}{\beta_3}\right]}{2\beta_3^3} \quad \text{sobreaceleración bajada} \quad (6.44)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva con ley armónica que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

Con estos datos se procede a evaluar desplazamiento, velocidad, aceleración, perfiles, ángulo de presión, radio de curvatura, fuerzas dinámicas, etc.

6.9.1. DESPLAZAMIENTO

Utilizando los mismos datos de la leva anterior se tiene:

```
Clear ["Global`*"]
(*Datos*)
h=50; Rb=90; β1=45; β2=90; β3=45;

Subida=h/2 (1-Cos[π*θ/β1])
Bajada=h/2 (1+Cos [π*(θ-β1-β2)/β3])

s=Piecewise[{{Subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{Bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];

Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"}]
```

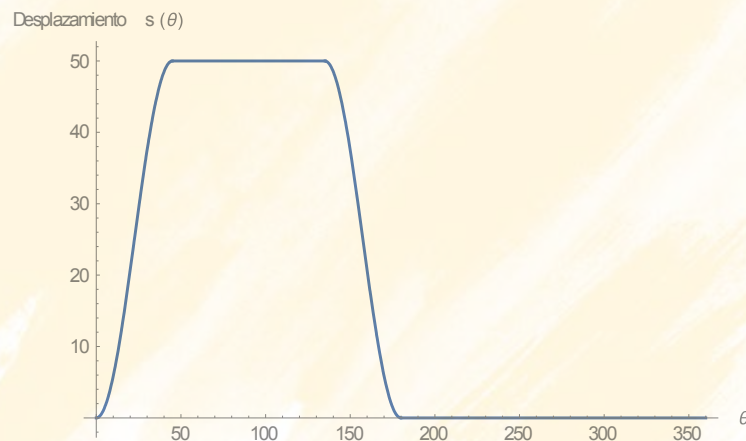


Figura 6.33. Desplazamiento leva armónica

Al fichero previo se debe añadir las siguientes expresiones para obtener las velocidades

6.9.2. VELOCIDAD

```
vsubida = (h π Sin[(π θ)/β1])/(2 β1)
vbajada = -((h π Sin[(π (-β1-β2+θ))/β3])/(2 β3))
v=Piecewise[{{vsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360 }}];
Plot[v,{θ,0, 360 },AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"} , PlotStyle -> {Orange} ]
```

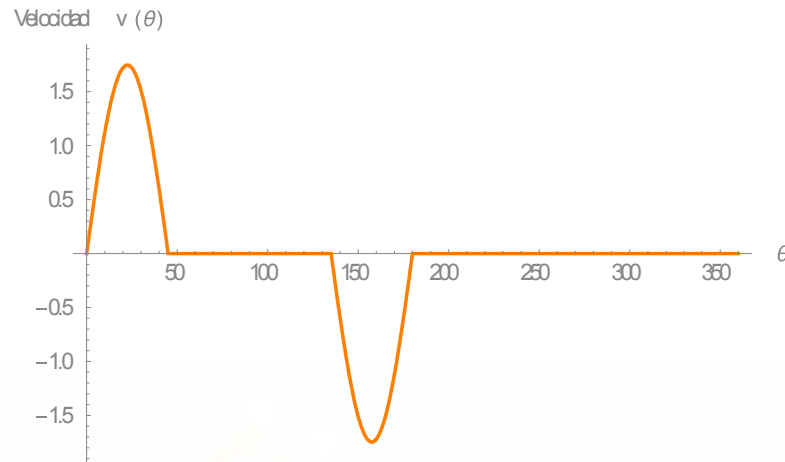


Figura 6.34. Velocidad leva armónica

6.9.3. ACELERACION

$$\text{asubida} = (h \pi^2 \text{Cos}[(\pi \theta)/\beta_1]) / (2 \beta_1^2)$$

$$\text{abajada} = -((h \pi^2 \text{Cos}[(\pi (-\beta_1 - \beta_2 + \theta))/\beta_3]) / (2 \beta_3^2))$$

$$a = \text{Piecewise}[\{\{\text{asubida}, \theta < \beta_1\}, \{0, \theta < \beta_1 + \beta_2\}, \{\text{abajada}, \theta < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}, \{0, \theta < 360\}\};$$

$$\text{Plot}[a, \{\theta, 0, 360\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\theta, \text{Aceleración } a(\theta)\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Red}\}]$$

En la Fig. 6.34 se constata la razón de que esta ley también es inadmisibles puesto que como se observa es patente la discontinuidad de la aceleración lo que generaría, vibraciones, rebote en el seguidor y desgaste prematuro.

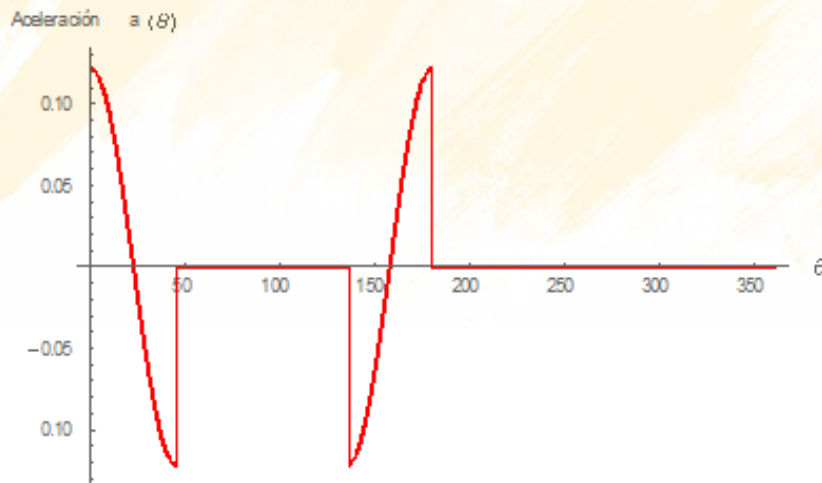


Figura 6.34. Aceleración leva armónica

6.9.4. SOBREACELERACION O TIRON

```

jsubida=-((h π^3 Sin[(π θ)/β1])/(2 β1^3))
jbajada=(h π^3 Sin[(π (-β1-β2+θ))/β3])/(2 β3^3)
j=Piecewise[{{jsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{jbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
Plot[ j ,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobreaceleración j (θ)"}, PlotStyle ->
{Green} ]

```

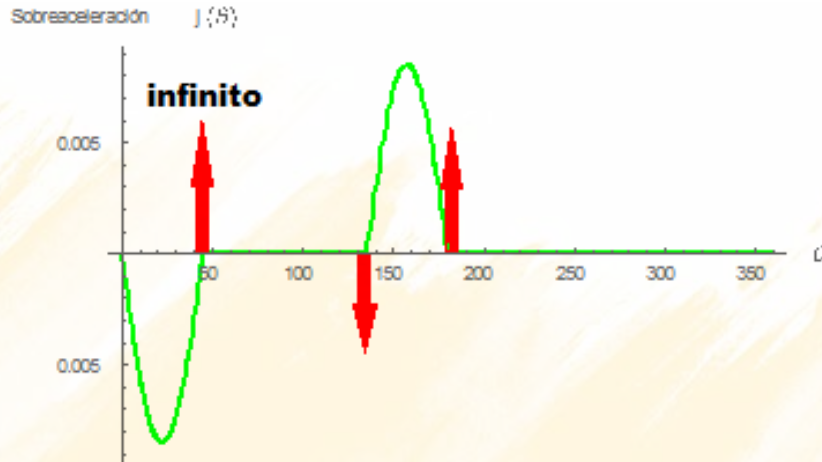


Figura 6.35. Sobreaceleración leva armónica

La leva con ley armónica produce sobreaceleración infinita y por lo tanto se deberá usar a una velocidad muy baja o utilizar leyes más adecuadas como las cicloidales o polinomiales.

6.9.5 PERFIL DE LA LEVA DE SEGUIDOR RADIAL CON LEY ARMÓNICA

```

Clear ["Global`*"]
(* Datos *)

h= 50; Rb = 100; β1 = 45π/180; β2 = 90 π/180 ;β3 = 45 π/180;
rodillo = 20;
Rp = Rb + rodillo;

(* Ecuaciones*)

subida = h/2 ( 1 - Cos[π * θ/β1 ])
bajada = h/2 (1 + Cos [π * (θ-β1-β2)/β3])

(* leva radial *)

s = Piecewise[{{subida, θ<β1},
{h,θ<β1+β2},{bajada, θ<β1+β2+β3},{0,θ< 2π }}];

PolarPlot[s +Rb,{θ,0,2 π},AxesLabel->{" θ "," Rb + s(θ)"}, PlotStyle -> {Blue, Thick}]

```

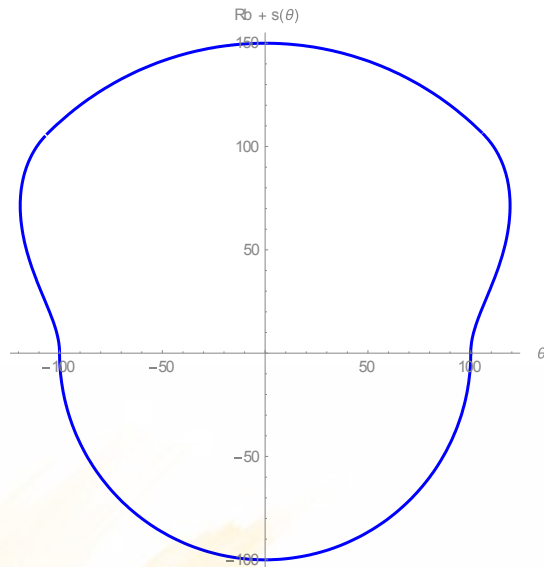


Figura 6.36. Perfil de la leva con seguidor radial

6.9.6 PERFIL DE LA LEVA CON SEGUIDOR EXCENTRICO

```
(* Leva excentrica *)
e = 30
fun =Sqrt[(Sqrt[Rb^2-e^2]+s)^2+e^2];
angulo=2 π-θ-ArcTan[e/(Sqrt[Rb^2-e^2]+s)];

x=fun Cos[angulo]; y=fun Sin[angulo];

ParametricPlot[{x,y},{θ,0,2 π}, PlotStyle -> {Brown, Thick}]
```

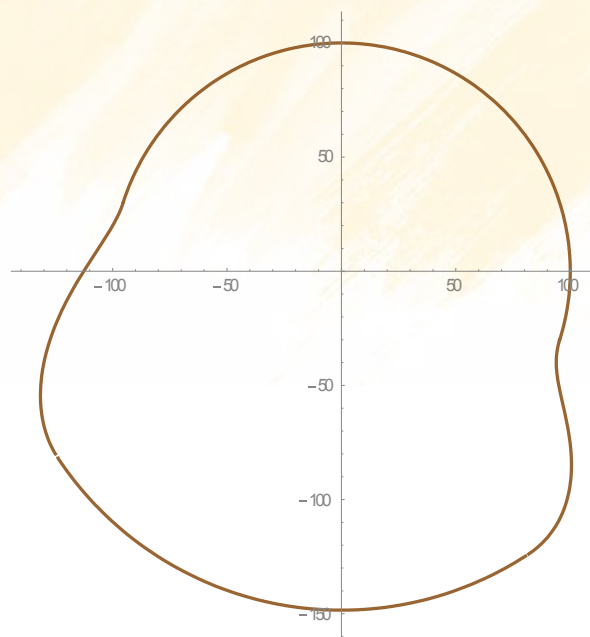


Figura 6.37. Perfil de la leva con seguidor excéntrico

6.9.7 PERFIL DE LA LEVA DE SEGUIDOR PLANA

```

vsubida = (h π Sin[(π θ)/β1])/(2 β1)
vbajada = -((h π Sin[(π (-β1-β2+θ))/β3])/(2 β3))
v = Piecewise[{{vsubida, θ<β1}, {0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
(* leva plana *)
Rb = 300 ;
x1 =(Rb+s) Cos[θ]-v Sin[θ];
y1 =(Rb+s) Sin[θ]+v Cos[θ];
ParametricPlot[{x1,y1},{θ,0,2 π}, PlotStyle -> {Pink, Thick}]

```

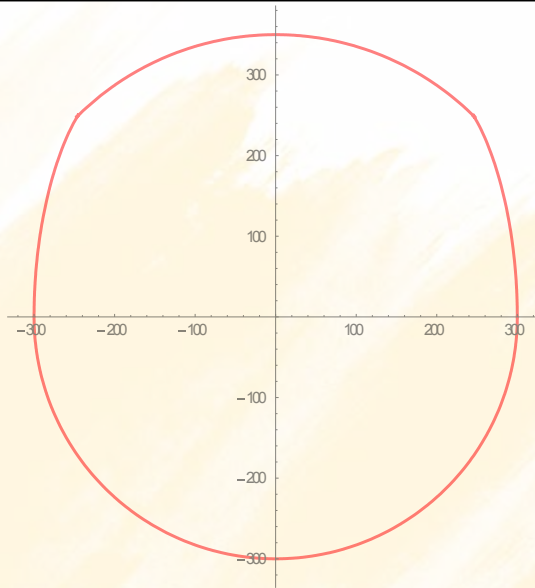


Figura 6.38. Perfil de la leva con seguidor plano

En la Fig. 6.38 se aprecia que se debe aumentar el radio base o disminuir la altura h para que desaparezcan las cúspides.

6.9.8 ÁNGULO DE PRESIÓN:

El ángulo de presión se lo determina en base de la Ec. 6.1 que nuevamente se indica

$$\phi(\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{v(\theta) - \varepsilon}{s(\theta) + \sqrt{Rp^2 - \varepsilon^2}}\right) \quad (6.45)$$


```
Clear["Global`*"]
```

```
Manipulate[(*Datos*)
```

```
h=50;β1=45;β2=90;β3=45;rodillo=20;  
Rp=Rb+rodillo;
```

```
(*Ecuaciones*)
```

```
subida =h/2 (1-Cos[π*θ/β1]); bajada =h/2 (1+Cos[π*(θ-β1-β2)/β3]);
```

```
s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
```

```
vsubida=(h π Sin[(π θ)/β1])/(2 β1);  
vbajada=-((h π Sin[(π (-β1-β2+θ))/β3])/(2 β3));
```

```
v=Piecewise[{{vsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
```

```
Num=v(180/π)-ε;
```

```
Den=s+Sqrt[Rp^2-ε^2];
```

```
φ=ArcTan[Num/Den];
```

```
Plot[{φ 180/π},{θ,0,360},PlotRange->Full,{Rb,10,150},{ε,0,150} ]
```

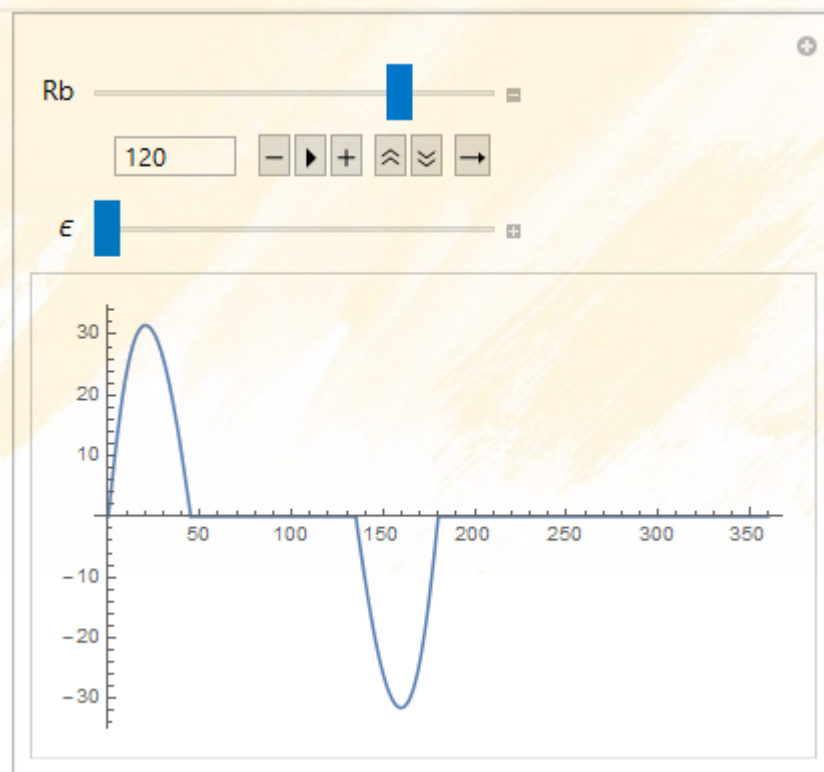


Figura 6.39. Angulo de presión

El ángulo de presión no debe superar los 30°, un radio base de 120 mm sin excentricidad sería adecuado

6.9.9 RADIO DE CURVATURA:

El radio de curvatura de una leva tiene interés, para seleccionar el radio del rodillo, el radio del rodillo no debe superar el valor absoluto del radio de curvatura mínimo y se calcula mediante la Ec. 6.2, 6.46

$$\rho(\theta) = \frac{\left[(Rp + s(\theta))^2 + \left(v(\theta) \frac{180}{\pi} \right)^2 \right]^{3/2}}{(Rp + s(\theta))^2 + 2 \left(v(\theta) \frac{180}{\pi} \right)^2 - a(\theta) \left(\frac{180}{\pi} \right)^2 (Rp + s(\theta))} \quad (6.46)$$

```

Clear["Global`*"]
(* Datos *)
Manipulate[h= 50; β1 = 45; β2 = 90 ;β3 = 45 ; rodillo = 20; Rp = Rb + rodillo;

subida = h/2 ( 1 - Cos[π * θ/β1 ]);
bajada= h/2 ( 1 + Cos[π * (θ-β1-β2)/β3 ]);

s =Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ< 360}}];

vsubida=(h π Sin[(π θ)/β1])/(2 β1);
vbajada =-((h π Sin[(π (-β1-β2+θ))/β3])/(2 β3));

v =Piecewise[{{vsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];

asubida =(h π^2 Cos[(π θ)/β1])/(2 β1^2);
abajada =-((h π^2 Cos[(π (-β1-β2+θ))/β3])/(2 β3^2));

a =Piecewise[{{asubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{abajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];

Num = ((Rp+ s )^2+( v 180/π)^2)^(3/2) ;
Den = (Rp+ s)^2 +( v 180/π)^2 - a ((180/π)^2 )(Rp+s);
ρ= Abs[Num /Den ];
Plot[{ρ },{θ,0,360}],{Rb,10,150}

```

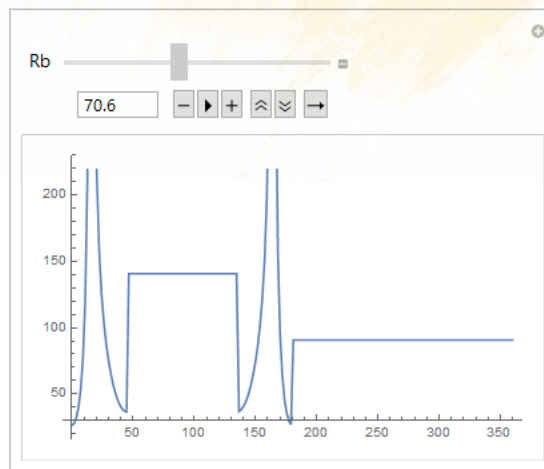


Figura 6.40. Radio de curvatura

Como se observa en la Fig. 6.40 para un radio base de 70.6 mm, el radio de curvatura mínimo es de 27 mm que es mayor al radio del rodillo que es de 20 mm lo que es deseable, si se incrementa el radio base aumentara también el radio de curvatura.

6.9.10 FUERZA DE CONTACTO:

La fuerza dinámica sirve para determinar el nivel de tensiones sobre la leva y predecir si aparece o no el despegue del seguidor, para ejemplificar el cálculo se utilizara los parámetros del equipo de laboratorio de mecanismos **TM21**, Fig. 6.41. Para este equipo se obtuvo una constante de rigidez del seguidor k_2 de 33000 N/mm, una masa del seguidor de 1.18 kg. Y mediante la Ec.6.47 se obtuvo una constante de resorte k_1 de 4.03 N/mm

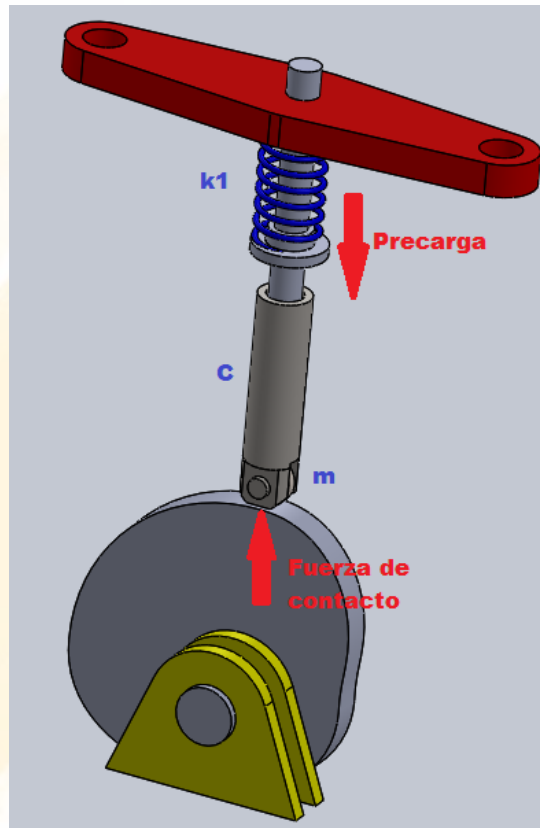


Figura 6.41. Modelo dinámico del equipo TM21

$$k_1 = \frac{d^4 G}{8 D^3 N_a} = 4.03 \text{ N/mm} \quad (6.46)$$

Donde d = diámetro de la espira = 3.31 mm
 G = Módulo de elasticidad al corte = 79300 MPa
 D = diámetro medio del resorte = 36.6 mm
 N_a = Número de espiras activas = 6

La fuerza de contacto proviene de la ecuación diferencial de un sistema dinámico masa, resorte, amortiguación y predice a qué velocidad el seguidor experimentara despegue. La fuerza de contacto se la calcula mediante la Ec. 6.47

$$F_c = m a(\theta) + c v(\theta) + k_1 x(\theta) + \text{Precarga} \quad (6.47)$$

Donde F_c = Fuerza de contacto

m = masa del seguidor

c = fricción viscosa en el cojinete del seguidor

k_1 = rigidez del resorte

Precarga = Fuerza adicional del sistema de cierre de fuerza si se precarga el resorte

```

Clear ["Global`*"]

Manipulate [(* Datos *) h= 50;  $\beta_1 = 45$ ;  $\beta_2 = 90$ ;  $\beta_3 = 45$ ; Rb=100;
rodillo = 20; Rp = Rb + rodillo;

(*Cinemática del mecanismos leva seguidor*)

subida= h/2 (1 - Cos[ $\pi * \theta/\beta_1$ ]);
bajada= h/2 (1 + Cos[ $\pi * (\theta-\beta_1-\beta_2)/\beta_3$ ]);

s=Piecewise[{{subida,  $\theta < \beta_1$ },
{h,  $\theta < \beta_1 + \beta_2$ }, {bajada,  $\theta < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ }, {0,  $\theta < 360$ }}];

vsubida=(h  $\pi$  Sin[ $(\pi \theta)/\beta_1$ ])/(2  $\beta_1$ );
vbajada=-((h  $\pi$  Sin[ $(\pi (-\beta_1-\beta_2+\theta))/\beta_3$ ])/(2  $\beta_3$ ));

v=Piecewise[{{vsubida,  $\theta < \beta_1$ }, {0,  $\theta < \beta_1 + \beta_2$ }, {vbajada,  $\theta < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ }, {0,  $\theta < 360$ }}];

asubida=(h  $\pi^2$  Cos[ $(\pi \theta)/\beta_1$ ])/(2  $\beta_1^2$ );
abajada=-((h  $\pi^2$  Cos[ $(\pi (-\beta_1-\beta_2+\theta))/\beta_3$ ])/(2  $\beta_3^2$ ));

a=Piecewise[{{asubida,  $\theta < \beta_1$ }, {0,  $\theta < \beta_1 + \beta_2$ }, {abajada,  $\theta < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ }, {0,  $\theta < 360$ }}];

(* Parámetros dinámicos *)

(*Masa del seguidor*) Masa = 1.2;
(*Precarga en el resorte*) Precarga = 0;
(*Frecuencia de giro*)  $\omega = f 2\pi/60$ ;
(*Rigidez del resorte*) k=4030;
(*Frecuencia natural*)  $\omega_n = \text{Sqrt}[k/\text{Masa}]$ ;
(*Relación de amortiguación*)  $\zeta = 0.06$ ;
(*Constante de amortiguación crítica*) Ccritico = 2Masa  $\omega_n$ ;
(*Constante de amortiguación real*) c = Ccritico  $\zeta$  ;

(*Fuerza de contacto*)

Fuerza = (Masa a (((180/ $\pi$ ) ^2)/1000)  $\omega^2$ ) + (c (v 180/ $\pi$ )  $\omega/1000$ ) + (k/1000) s+ Precarga;

Plot [{Fuerza}, { $\theta$ , 0, 360}], {f, 0, 500}]

```

El cambio en la dirección de la fuerza de contacto es la evidencia del apareamiento del despegue del seguidor como se observa en la Fig. 6.42.

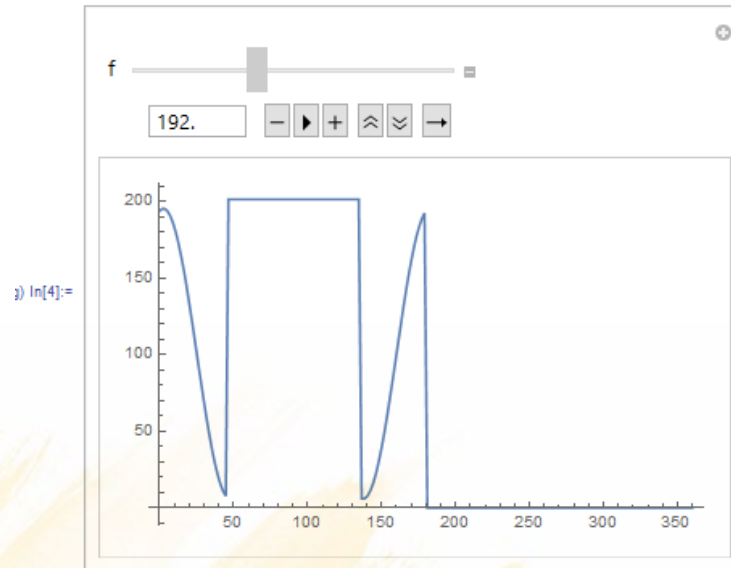


Figura 6.42. Fuerza de contacto del mecanismo leva seguidor

Explorando el parámetro velocidad angular f se puede determinar que si se excede 195 rpm ocurrirá el despegue del seguidor, también se evidencia lo súbito de la aplicación de la fuerza en esta leva que se traduce en una pronta falla del sistema.

6.9.11 PAR DE TORSIÓN:

El mecanismo leva seguidor como cualquier otro mecanismo produce fluctuación en la velocidad de la leva por lo que es necesario diseñar un volante de inercia, dependiendo de las masas, velocidades y precisión involucradas. De la expresión conocida para la potencia, Ec.6.48, se obtiene el torque o par de torsión que se utilizará para determinar el volante de inercia

$$Potencia = T(\theta)\omega = F_c(\theta) v(\theta) \frac{180}{\pi} \quad (6.48)$$

Por lo que :

$$T(\theta) = \frac{F_c(\theta) v(\theta) \frac{180}{\pi}}{\omega} \quad (6.49)$$

Para tener el gráfico del torque, Fig. 6.43 se añade al fichero anterior las siguientes filas

```
Torque=Fuerza v 180/(π ω)
Plot [{Torque}, {θ, 0,360}]
```

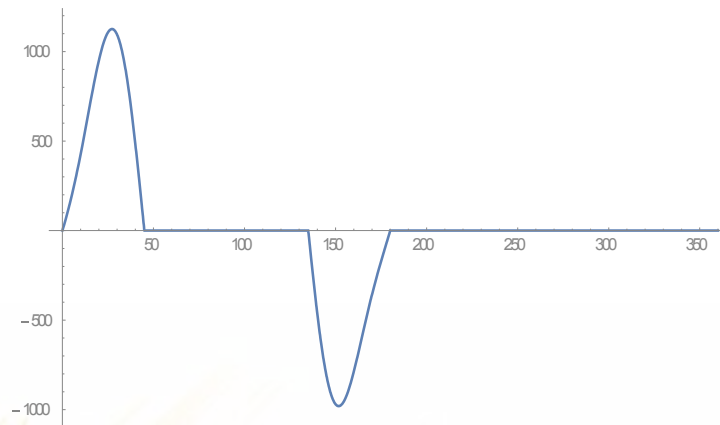



Figura 6.43. Fluctuación del torque en una leva

6.9.12 SIMULACIÓN EN Working Model 2D

Es de mucha utilidad visualizar el comportamiento del mecanismo leva seguidor en cualquier software de dinámica multicuerpo, uno de los más populares es el Working Model 2D, así mismo los datos pueden ser exportados a Solid Works. El fichero que permite la exportación en primer lugar a Excel y luego a Working Model es el siguiente:

```
Clear ["Global'***"]
```

```
(*Datos*)
```

```
h=50; Rb=100;  $\beta_1=45\pi/180$ ;  $\beta_2=90\pi/180$ ;  $\beta_3=45\pi/180$ ; rodillo=20;  
Rp=Rb+rodillo;
```

```
(*Ecuaciones*)
```

```
subida = h/2 (1-Cos[ $\pi*\theta/\beta_1$ ]);
```

```
bajada =h/2 (1+Cos [ $\pi*(\theta-\beta_1-\beta_2)/\beta_3$ ]);
```

```
(*Leva radial*)
```

```
s =Piecewise [{{subida,  $\theta<\beta_1$ }, {h,  $\theta<\beta_1+\beta_2$ }, {bajada,  $\theta<\beta_1+\beta_2+\beta_3$ }, {0,  $\theta<2\pi$  }}];
```

```
PolarPlot[s+Rb,{ $\theta$ ,0,2  $\pi$ },AxesLabel->{"  $\theta$  ", " Rb + s( $\theta$ )"}]
```

```
(*Tabla de datos*)
```

```
levaarmonica = Table[Rb + s,{ $\theta$ , 0, 2 $\pi$ , 0.01}]
```

```
(*Exportación*)
```

```
Export["levaarmonica.xls",levaarmonica]
```


	A	B	C
1	100	0	
2	100.02	0.01	
3	100.08	0.02	
4	100.1798	0.03	
5	100.3193		
6	100.4983		
7	100.7166		
8	100.9736		
9	101.2691		
10	101.6026		
11	101.9735		
12	102.3812		
13	102.8251		

Figura 6.45. Completado de columna de ángulos.

Se despliega el programa Working Model y se traza una leva cualquiera en el origen, seleccionar unidades en mm, ver Fig. 6.46

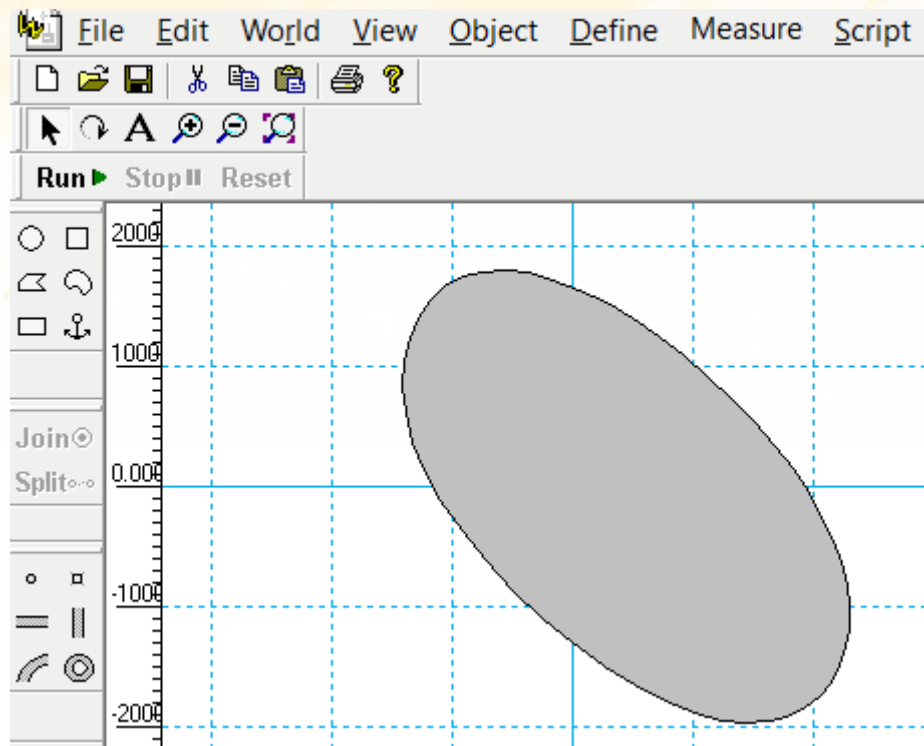


Figura 6.46. Leva en Working Model, paso 1.

En **Window > Geometry** se carga el cuadro de diálogo que permite editar la geometría de la curva poligonal, verificar que este activo **Shape coordinates**, activar si es necesario el botón de **Paste** mediante **Copy**, ver Fig. 6.47

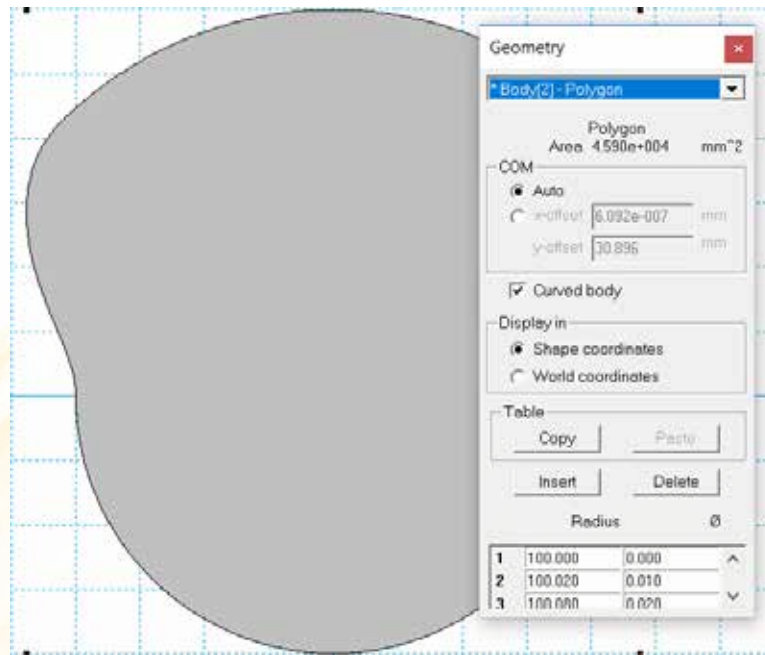


Figura 6.47. Leva en Working Model, paso 2.

Finalmente se dibuja el seguidor, se conecta el motor y se analiza las variables cinemáticas, ver Fig. 6.48

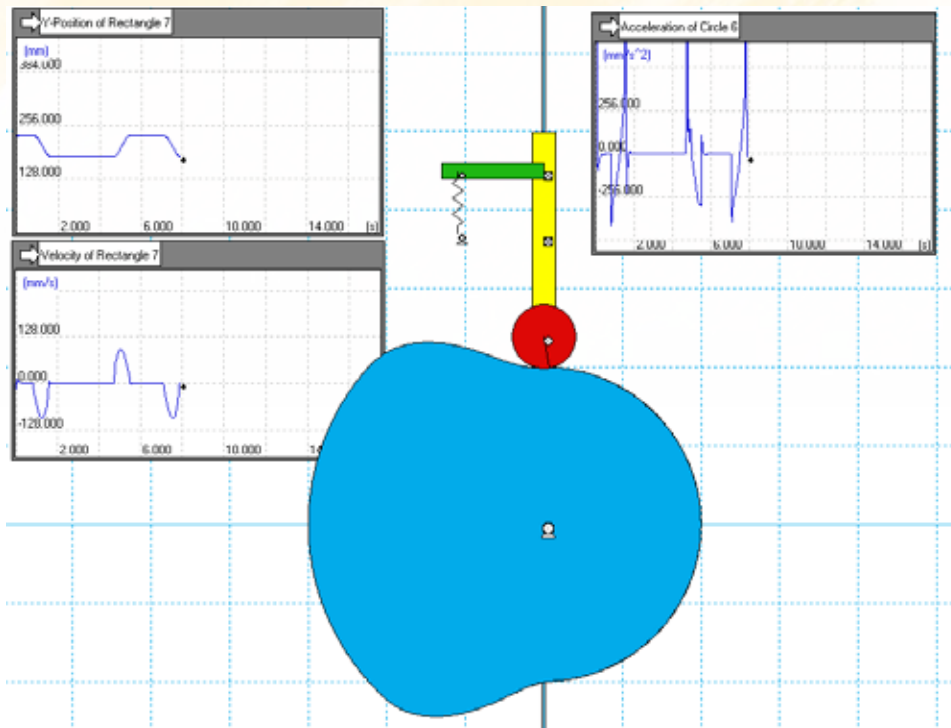


Figura 6.48. Leva en Working Model, paso 3.

6.9.13 MANUFACTURA DE LA LEVA ARMONICA

La leva armónica puede ser manufacturada de las siguientes maneras: control numérico, CAD-CAM, duplicación análoga, dispositivos especiales como el indicado en la Fig. 6.49.

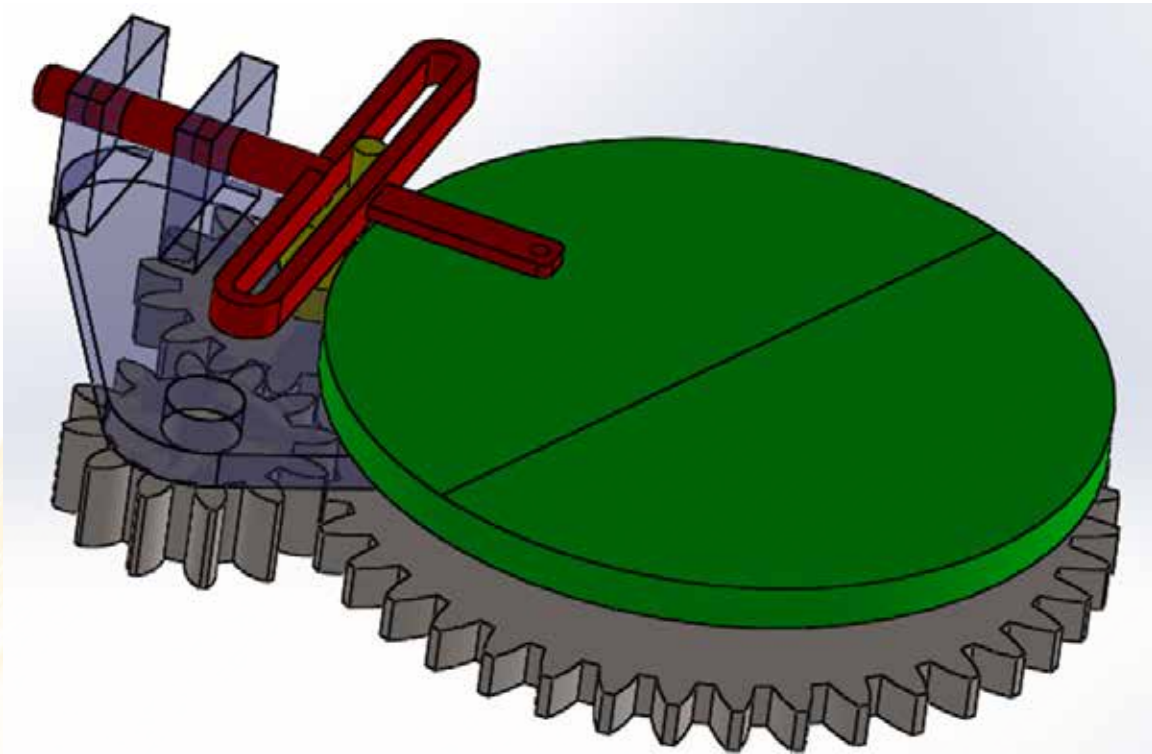


Figura 6.49. Dispositivo especial para tallar una leva se observa que el movimiento armónico es generado por el yugo escoces

6.10 LEVA CON SEGUIDOR DE LEY PARABÓLICA

La leva que usa la ley parabólica es otro intento de efectuar el enlace entre reposos, De forma similar a la leva armónica estaría compuesta por la unión de dos parábolas que se encajan entre los reposos, ver Fig. 6.50

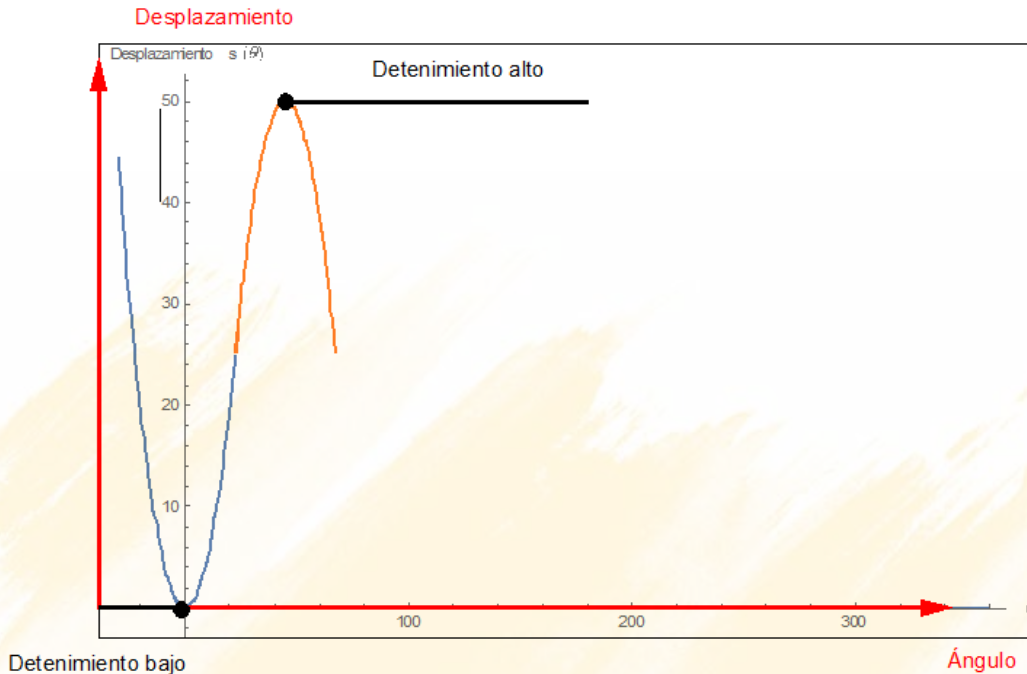


Figura 6.50. Concepto de la leva parabólica

Las ecuaciones para la subida son por tanto la Ec. 6.50 y 6.51

$$s_{s1}(\theta) = 2h \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^2 \quad \text{subida 1} \quad (6.50)$$

$$s_{s2}(\theta) = \frac{h}{2} + h \left(\frac{\theta - \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right) - 2h \left(\frac{\theta - \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right)^2 \quad \text{subida 2} \quad (6.51)$$

Y la Ec. 6.52 y 6.53 para la bajada

$$s_{b1}(\theta) = h - 2h \left(\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right)^2 \quad \text{bajada 1} \quad (6.52)$$

$$s_{s2}(\theta) = \frac{h}{2} - 2h \left(\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\beta_3}{2}}{\beta_3} \right) + 2h \left(\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\beta_3}{2}}{\beta_3} \right)^2 \quad \text{bajada 2} \quad (6.53)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva con ley parabólica que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

Con estos datos se procede a evaluar desplazamiento, velocidad, aceleración. El archivo de Wolfram Mathematica es el siguiente:

```

Clear ["Global`*"]
(*Datos*)
h = 50;
Rb = 90;
β1= 45;
β2= 90;
β3= 45;

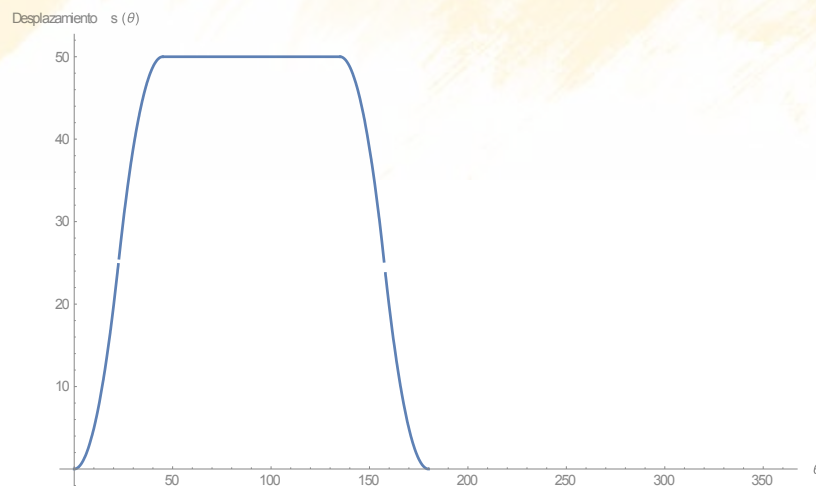
subida1 = 2 h (\[Theta]/\[Beta]1)^2;
subida2 = h/2 + h ((\[Theta] - \[Beta]1/2)/(\[Beta]1/2)) - h/2 ((\[Theta] - \[Beta]1/2)/(\[Beta]1/2))^2

bajada1 = h - 2 h ((\[Theta] - β1 - \[Beta]2)/\[Beta]3)^2
bajada2 = 2 h ((\[Theta] - β1 - β2 - \[Beta]3/2)/\[Beta]3)^2 - 2 h ((\[Theta] - β1 - β2 - \[Beta]3/2)/\[Beta]3) + h/2

s = Piecewise[{{subida1, \[Theta] <
  0.5 \[Beta]1}, {subida2, \[Theta] < \[Beta]1}, {h, \[Theta] < \
β1+ \[Beta]2}, {bajada1, \[Theta] < β1+ β2+ \
  0.5 \[Beta]3}, {bajada2, \[Theta] < β1+ β2+ \
\[Beta]3}}, {0, \[Theta] < 360} ]
v = D[s, \[Theta]]
a = D[v, \[Theta]]
Plot[s, {\[Theta], 0, 360},
  AxesLabel -> {" \[Theta] ", " Desplazamiento s (\[Theta])"},
  PlotStyle -> Thick]
Plot[v, {\[Theta], 0, 360},
  AxesLabel -> {" \[Theta] ", " Velocidad v (\[Theta])"}]
Plot[a, {\[Theta], 0, 360},
  AxesLabel -> {" \[Theta] ", " Aceleración a(\[Theta])"}]

```

Que genera los siguientes gráficos de desplazamiento, velocidad y aceleración en la Fig. 6.51



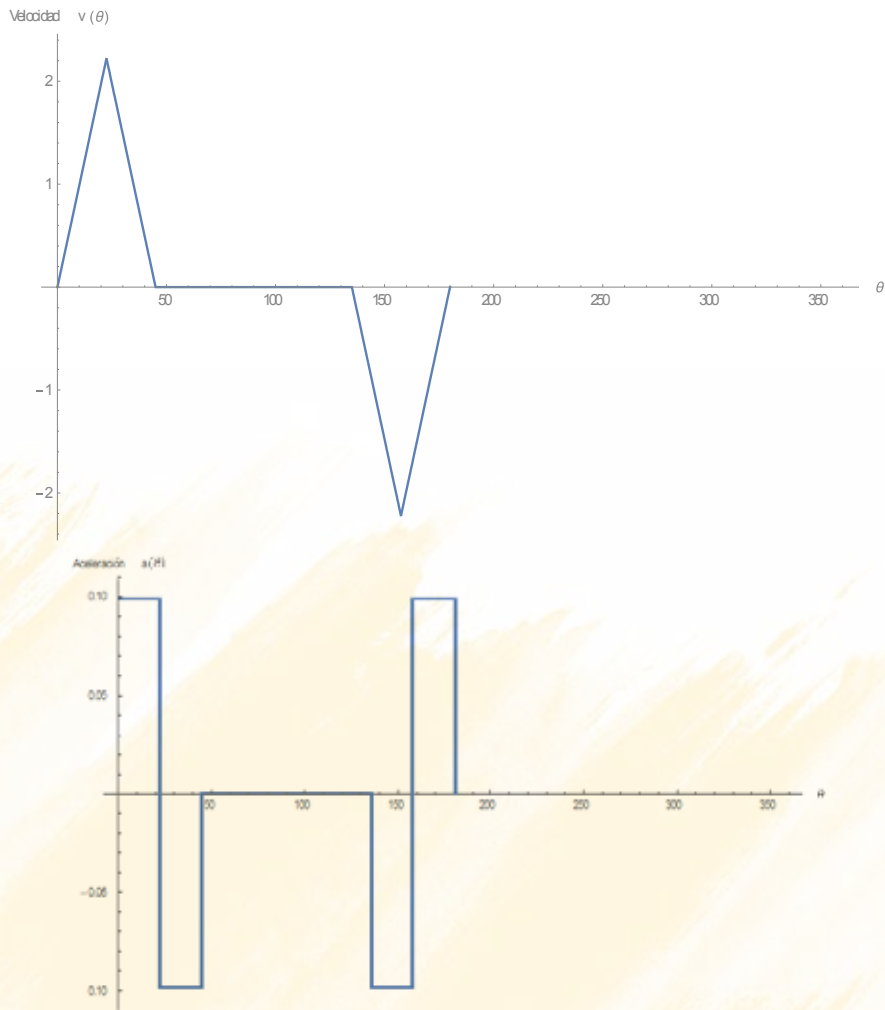


Figura 6.51. Desplazamiento, velocidad y aceleración leva parabólica

Se observa de la aceleración que esta ley igualmente exhibe discontinuidad de la aceleración y que su única ventaja es un menor valor de la aceleración máxima disminuyendo de 0.12 a 0.1 para los mismos datos. Esto le hace adecuada para manejar grandes masas pero a baja velocidad.

6.11 LEVA CON SEGUIDOR DE LEY CÚBICA

De forma similar a la leva con ley parabólica estaría compuesta por la unión de dos polinomios cúbicos que se encajan entre los reposos, ver Fig. 6.50

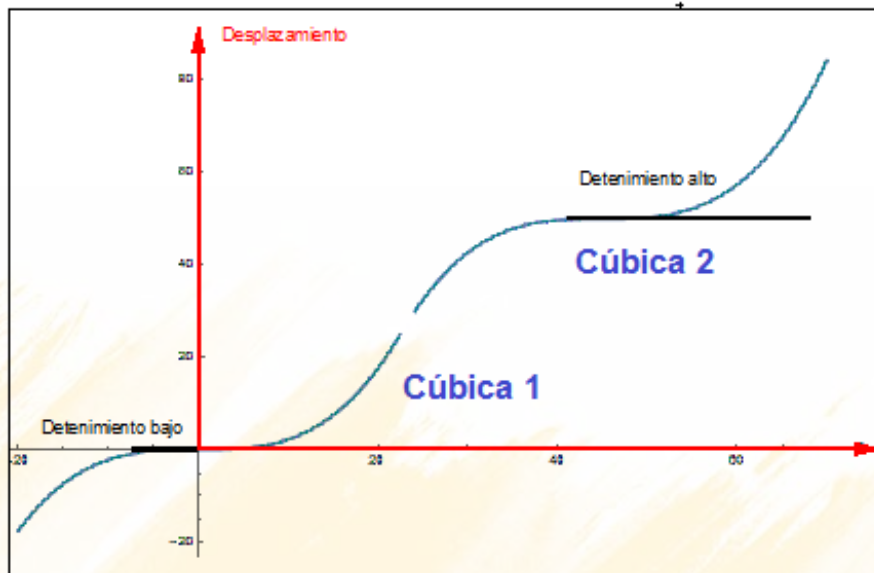


Figura 6.52. Concepto de la leva cúbica

Las ecuaciones para la subida son por tanto la Ec. 6.55 y 6.55

$$s_{s1}(\theta) = 4h \left[\frac{\theta}{\beta_1} \right]^3 \quad \text{subida 1} \quad (6.54)$$

$$s_{s2}(\theta) = 12h \left[\frac{1}{3} \left[\frac{\theta - \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right]^3 - \frac{1}{4} \left[\frac{\theta - \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right] \right] - 6h \left[\left[\frac{\theta - \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right]^2 - \left[\frac{\theta - \frac{\beta_1}{2}}{\beta_1} \right] \right] + \frac{h}{2} \quad \text{subida 2} \quad (6.55)$$

Y la Ec. 6.52 y 6.53 para la bajada

$$s_{b1}(\theta) = h - 4h \left[\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right]^3 \quad \text{bajada 1} \quad (6.56)$$

$$s_{s2}(\theta) = -24 \frac{h}{\beta_3^3} \left[\frac{\left[\theta - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\beta_3}{2} \right]^3}{6} - \beta_3 \frac{\left[\theta - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\beta_3}{2} \right]^2}{4} + \frac{\beta_3^2}{8} \left[\theta - \beta_1 - \beta_2 - \frac{\beta_3}{2} \right] - \frac{\beta_3^3}{48} \right] \quad \text{bajada 2} \quad (6.57)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva con ley cúbica que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

Con estos datos se procede a evaluar desplazamiento, velocidad, aceleración. El archivo de Wolfram Mathematica es el siguiente:

```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h = 50;
Rb = 90;
β1= 45;
β2= 90;
β3= 45;

subida1 = 4 h (\[Theta]/\[Beta]1)^3;
subida2 =
12 h (1/3 ((\[Theta] - \[Beta]1/2)/\[Beta]1)^3 -
1/4 ((\[Theta] - \[Beta]1/2)/\[Beta]1)) -
6 h (((\[Theta] - \[Beta]1/2)/\[Beta]1)^2 - ((\[Theta] - \[Beta]1/
2)/\[Beta]1)) + h/2;

bajada1 = h - 4 h ((\[Theta] - β1 - \[Beta]2)/\[Beta]3)^3
bajada2 = -24 h/\[Beta]3^3 (((\[Theta] - β1 - β2 - \
\[Beta]3/2)/\[Beta]3)^3/
6) - β3((\[Theta] - β1 - β2 - \[Beta]3/2)^2/
4) + \[Beta]3^2/
8 ((\[Theta] - β1 - β2 - \[Beta]3/2) - \[Beta]3^3/48)

s = Piecewise [{{subida1, \[Theta] <
0.5 \[Beta]1}, {subida2, \[Theta] < \[Beta]1}, {h, \[Theta] < \
β1+ \[Beta]2}, {bajada1, \[Theta] < β1+ β2+
0.5 \[Beta]3}, {bajada2, \[Theta] < β1+ β2+ \
\[Beta]3}}, {0, \[Theta] < 360} ]
v = D[s, \[Theta]];
a = D[v, \[Theta]];
Plot[s, {\[Theta], 0, 360},
AxesLabel -> {"\[Theta] ", " Desplazamiento s (\[Theta])"},
PlotStyle -> Thick]
Plot[v, {\[Theta], 0, 360}, PlotRange -> All,
AxesLabel -> {"\[Theta] ", " Velocidad v (\[Theta])"}]
Plot[a, {\[Theta], 0, 360},
AxesLabel -> {"\[Theta] ", " Aceleración a(\[Theta])"}]

```

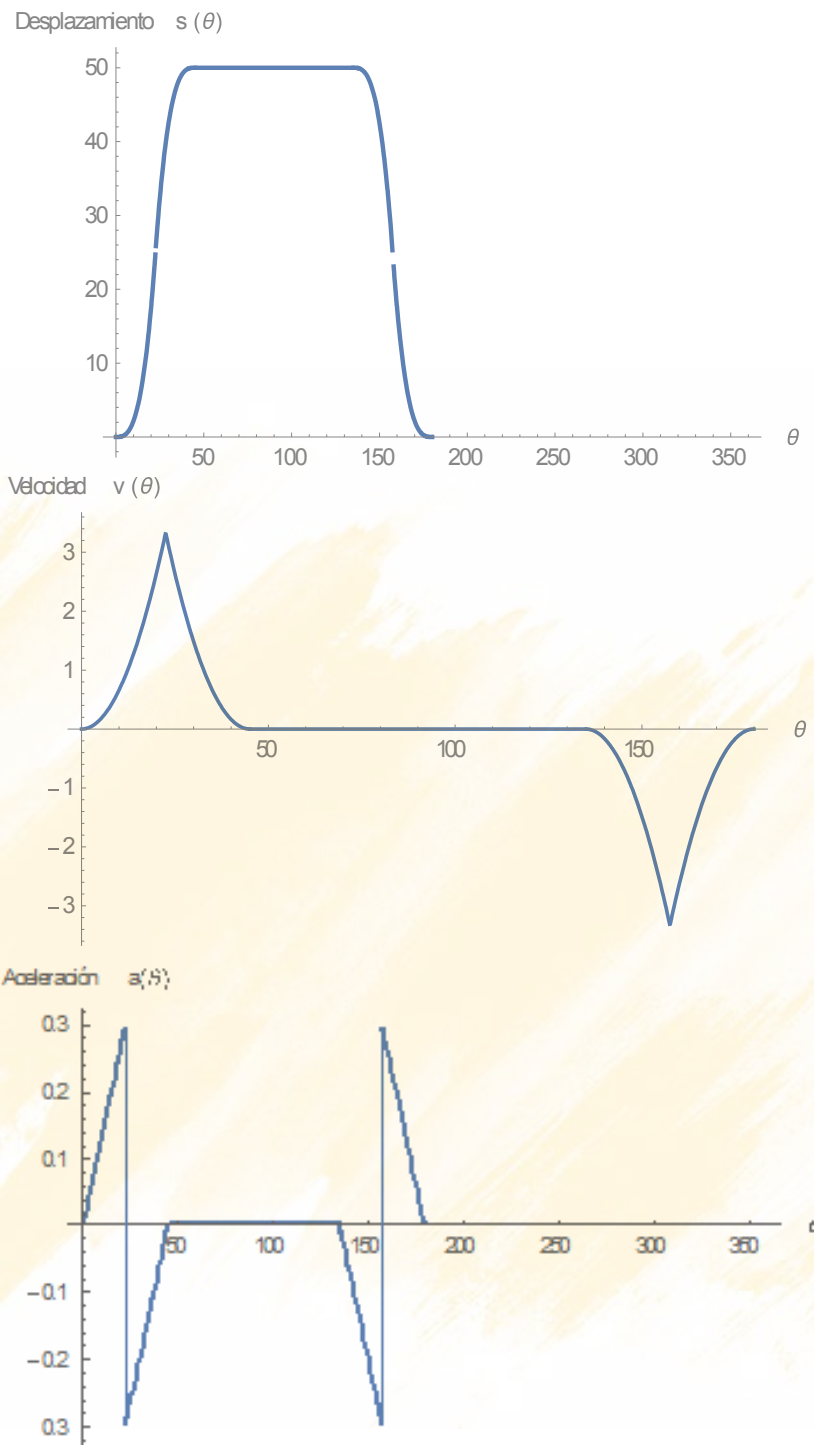



Figura 6.53. Desplazamiento, velocidad y aceleración leva cúbica

Se observa en la Fig. 6.53 que esta ley tiene problemas en el punto de enlaces entre las dos curvas donde se percibiría el golpeteo y que adicionalmente la aceleración es muy alta 3 veces el valor de la parabólica, por lo tanto para baja velocidad la única leva que podría ser considerada sería la parabólica.

6.12 LEYES ADECUADAS, MOVIMIENTO CICLOIDAL

Como podemos observar de los ejemplos anteriores es claro que la ley de movimiento ideal para altas velocidades será aquella que no presente discontinuidades en la aceleración y velocidad, de esta idea se deriva la ley de movimiento cicloidal y otras leyes. Por lo tanto para definir el perfil más adecuado el diseñador debe enfocarse en la aceleración la cual no debe presentar discontinuidades, ver Fig. 6.54

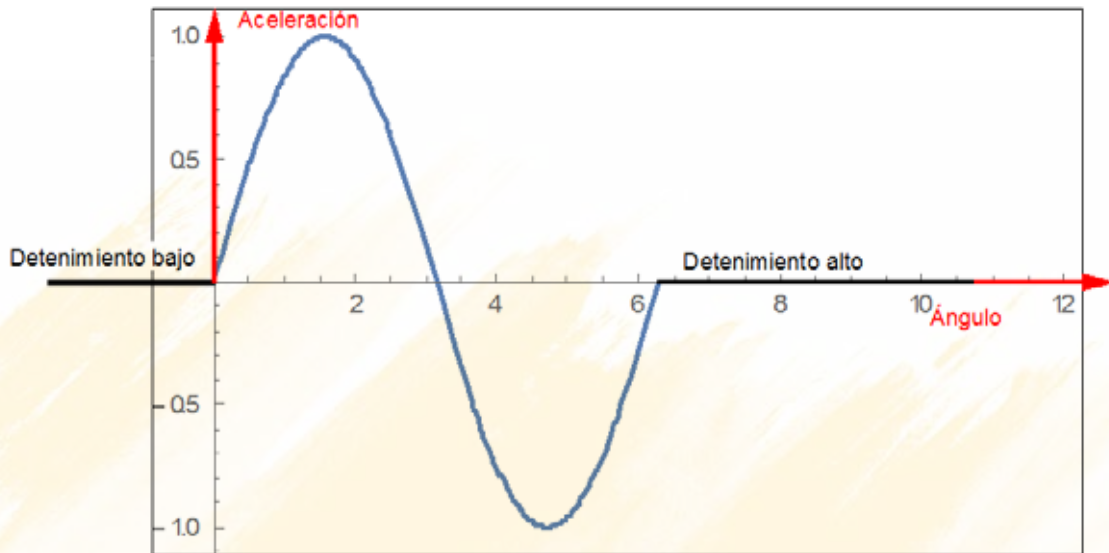


Figura 6.54. La aceleración presenta una función armónica de ciclo completo

Para determinar por tanto el desplazamiento se debe integrar dos veces la aceleración

$$a = C \sin \left[2 \pi \frac{\theta}{\beta} \right] \quad (6.58)$$

$$\int dv = \int C \sin \left[2 \pi \frac{\theta}{\beta} \right] d\theta \quad (6.59)$$

$$v = -C \frac{\beta}{2 \pi} \cos \left[2 \pi \frac{\theta}{\beta} \right] + k_1 \quad (6.60)$$

La constante de integración se valora para la siguiente condición de frontera:

$$v = 0 \quad \theta = 0$$

De tal forma que la velocidad tampoco presente discontinuidades.

$$k_1 = C \beta / 2 \pi \quad (6.61)$$

Por lo tanto la velocidad queda de la forma

$$v = C \frac{\beta}{2 \pi} \left[1 - \cos \left[2 \pi \frac{\theta}{\beta} \right] \right] \quad (6.62)$$

Integrando nuevamente:

$$\int ds = \int C \frac{\beta}{2\pi} \left[1 - \cos \left[2\pi \frac{\theta}{\beta} \right] \right] d\theta \quad (6.63)$$

$$s = C \frac{\beta}{2\pi} \left[\theta - \frac{\beta}{2\pi} \sin \left[2\pi \frac{\theta}{\beta} \right] \right] + k_2 \quad (6.64)$$

La constante de integración k_2 se valora para las condiciones de frontera siguiente:

$$\begin{aligned} s = 0 \text{ en } \theta = 0 \\ s = h \text{ en } \theta = \beta \end{aligned}$$

Por lo tanto $k_2 = 0$ y $C = \left[\frac{2\pi h}{\beta^2} \right]$

La expresión final para la ecuación de la ley cicloidal en la subida es la Ec. 6.65:

$$s_s(\theta) = \frac{h}{\beta^1} \left[\theta - \frac{\beta^1}{2\pi} \sin \left[2\pi \frac{\theta}{\beta^1} \right] \right] \quad \text{subida} \quad (6.65)$$

Para la bajada se cambian las condiciones de frontera de la Ec. 6.64:

$$\begin{aligned} s = h \text{ en } \theta = 0 \\ s = 0 \text{ en } \theta = \beta \end{aligned}$$

De donde $k_2 = h$ y $C = - \left[\frac{2\pi h}{\beta^2} \right]$

Por tanto la expresión final para la ecuación de la ley cicloidal en la bajada es la Ec. 6.66:

$$s_b(\theta) = h - \frac{h}{\beta^3} \left((\theta - \beta^1 - \beta^2) - \frac{\beta^3}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{\theta - \beta^1 - \beta^2}{\beta^3} \right) \right) \quad \text{bajada} \quad (6.66)$$

El resto de magnitudes cinemáticas se las determina derivando mediante

```

Clear["Global`*"]
subida=h/β1 (θ-β1/(2π) Sin[2π*θ/β1])
bajada=h-h/β3 ((θ-β2-β3)-β3/(2π) Sin[2π*(θ-β2-β3)/β3])
vs = D[subida,θ]
as = D[subida,{θ,2}]
js = D[subida,{θ,3}]
vb = D[bajada,θ]
ab = D[bajada,{θ,2}]
jb = D[bajada,{θ,3}]

```

Exhibiendo los siguientes resultados para la subida y bajada, que representan, velocidad, aceleración y sobreaceleración respectivamente:

$$v_s(\theta) = \frac{h(1 - \cos[\frac{2\pi\theta}{\beta^1}])}{\beta^1} ; a_s(\theta) = \frac{2h\pi \sin[\frac{2\pi\theta}{\beta^1}]}{\beta^1{}^2} ; j_s(\theta) = \frac{4h\pi^2 \cos[\frac{2\pi\theta}{\beta^1}]}{\beta^1{}^3} \quad (6.67)$$

$$v_b(\theta) = -\frac{h \left(1 - \cos \left[\frac{2\pi(-\beta_1 - \beta_2 + \theta)}{\beta_3} \right] \right)}{\beta_3} \quad (6.68)$$

$$a_b(\theta) = -\frac{2h\pi \sin \left[\frac{2\pi(-\beta_2 - \beta_1 + \theta)}{\beta_3} \right]}{\beta_3^2} \quad (6.69)$$

$$j_b(\theta) = -\frac{4h\pi^2 \cos \left[\frac{2\pi(-\beta_2 - \beta_1 + \theta)}{\beta_3} \right]}{\beta_3^3} \quad (6.70)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva con ley cicloidal que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo, se supone espacio limitado.

6.12.1. DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y SALTO

```

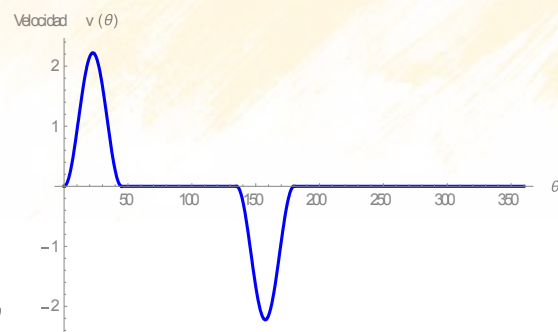
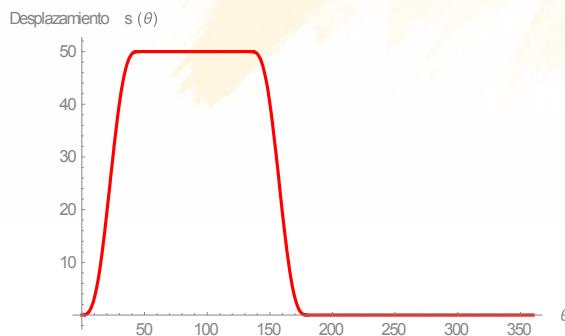
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50; Rb=100; β1=45; β2=90; β3=45; rodillo=20; Rp=Rb+rodillo;

(*Ecuaciones*)

subida=h/β1 (θ-β1/(2π) Sin[2π*θ/β1])
bajada=h-h/β3 ((θ-β2-β3)-β3/(2π) Sin[2π*(θ-β2-β3)/β3])

s=Piecewise [{subida, θ<β1},{h, θ<β1+β2},{bajada, θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}];
v = D[s, θ]
a = D[v, θ]
j = D[a, θ]
Plot [s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ ", " Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle -> {Red, Thick}]
Plot [v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ ", " Velocidad v (θ)"},PlotStyle -> {Blue, Thick}]
Plot [a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ ", " Aceleración a (θ)"},PlotStyle -> {Magenta, Thick}]
Plot [j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ ", " Sobraceleración j(θ)"},PlotStyle -> {Yellow, Thick}]

```



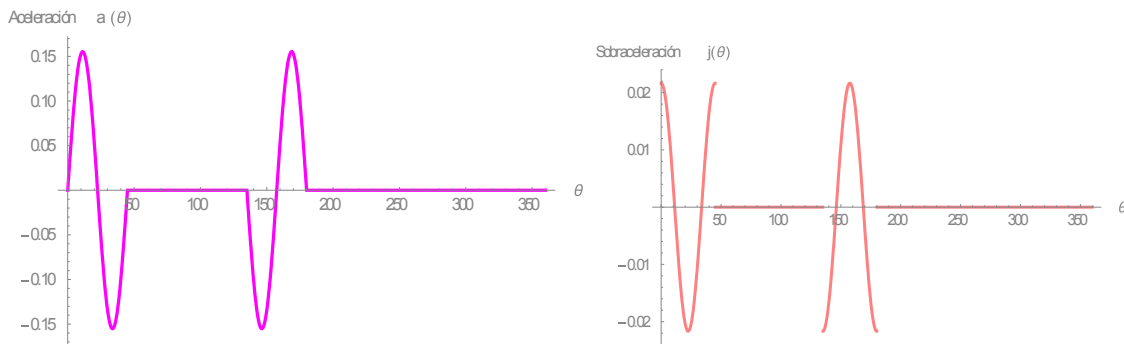


Figura 6.55. Desplazamiento, Velocidad, Aceleración y Sobreaceleración

Como se aprecia la aceleración máxima de la leva cicloidal es un 56% (0.156) mayor que la correspondiente a la leva parabólica (0.1), pero su sobreaceleración es finita.

6.12.2 ÁNGULO DE PRESIÓN

El ángulo de presión se calcula por medio de la Ec. 6.1 modificando el respectivo fichero y obteniendo la Fig. 6.56, se determina que el radio base adecuado es de 180mm. Diámetro muy grande para una alzada de 50 mm.

```
Manipulate[h = 50; β1= 45 π/180; β2= 90 π/180; β3= 45 π/180; rodillo = 20; Rp = Rb + rodillo;
subida = h/β1( θ- β1/(2 π) Sin[ 2 π θ/ β1]);
bajada = h - h/β3((θ- β2- β3) - β3/(2 π) Sin[2 π*(θ- β2- β3)/ β3]);
s = Piecewise[{{subida, θ< β1}, {h, θ< β1+ β2}, {bajada, θ< β1+ β2+ β3}, {0, θ< 2π}}];
v = Piecewise[{{h/β1(1-Cos[2 π θ / β1]) , θ< β1}, {0, θ< β1+ β2}, {-( h/ β3) (1 -
Cos[2 π (θ- β1- β2)/ β3]), θ< β1+ β2+ β3}, {0, θ< 2 π}}];
φ = ArcTan[(v - ec1)/(s + Sqrt[Rp^2 - ec1^2]);
Plot[{φ 180/π}, { θ, 0, 2 π},
PlotRange -> Full], {ec1, 0, 50}, {Rb, 10, 180}]
```

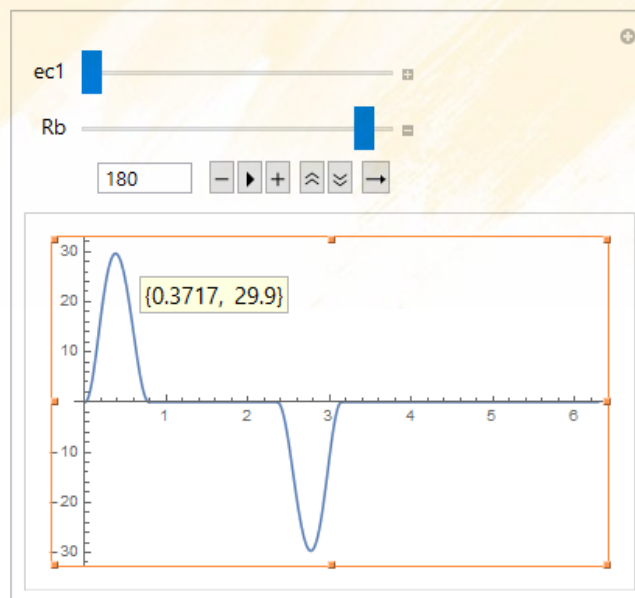


Figura 6.56. Angulo de presión

6.12.3 PERFIL DE LA LEVA CON SEGUIDOR DE RODILLO RADIAL

Con la Ec. 6.3 se esquematiza una leva con R_b de 180 mm, ver Fig. 6.57

```
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50; Rb=180;β1=45π/180;β2=90 π/180;β3=45 π/180;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
subida=h/β1 (θ-β1/(2π) Sin[2π*θ/β1]);
bajada=h-h/β3 ((θ-β2-β3)-β3/(2π) Sin[2π*(θ-β2-β3)/β3]);
(*leva radial*)
s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<2π}}];
PolarPlot[s+Rb,{θ,0,2 π},AxesLabel->{" θ ", " Rb + s(θ)"},PlotStyle->{Blue, Thick}]
```

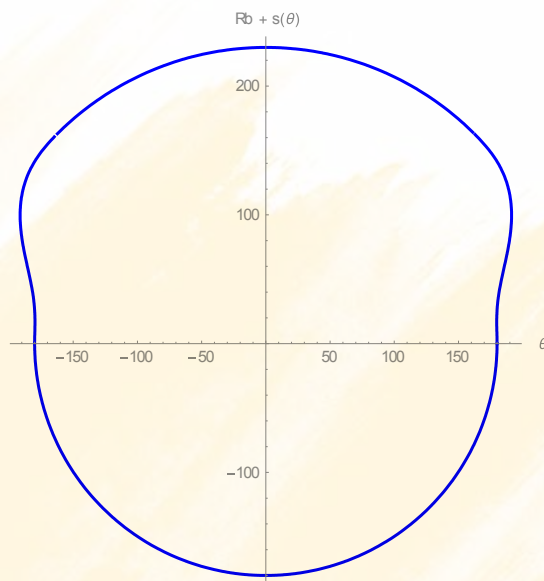


Figura 6.57. Leva con ley cicloidal

Suponiendo que la aplicación carece de espacio se puede incluir la excentricidad del seguidor para disminuir el ángulo de presión

6.12.4 PERFIL DE LA LEVA CON SEGUIDOR DE RODILLO EXCENTRICO

La excentricidad de 35 mm a utilizarse se determina con la Ec. 6.1 ver Fig. 6.58

```
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;Rb=120;β1=45π/180;β2=90 π/180;β3=45 π/180; rodillo=20; e = 35
Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
subida=h/β1 (θ-β1/(2π) Sin[2π*θ/β1]);
bajada=h-h/β3 ((θ-β2-β3)-β3/(2π) Sin[2π*(θ-β2-β3)/β3]);
(*leva radial*)
s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<2π}}];
fun=Sqrt[(Sqrt[Rb^2-e^2]+s)^2+e^2];
angulo=2 π-θ-ArcTan[e/(Sqrt[Rb^2-e^2]+s)];
x=fun Cos[angulo];
y=fun Sin[angulo];
ParametricPlot [{x,y},{θ,0,2 π},PlotStyle->{Brown,Thick}]
```

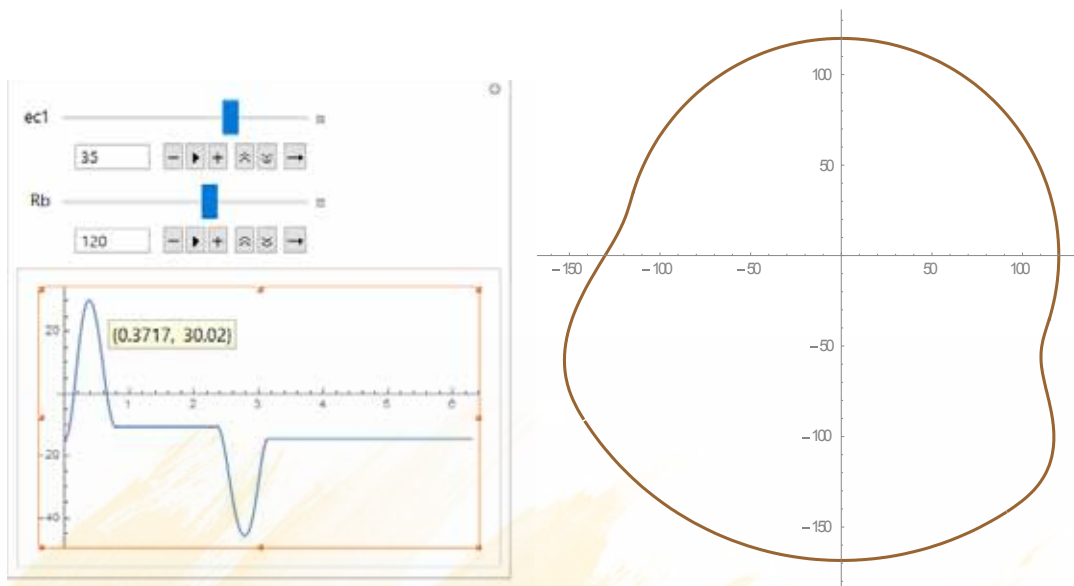


Figura 6.58. Leva con ley cicloidal excéntrica

6.12.5 FUERZA DE CONTACTO

La fuerza dinámica se la determina con la Ec. 6.47 para los mismos parámetros:

```

Clear["Global`*"]
Manipulate[(*Datos*)h=50;β1=45;β2=90;β3=45;Rb=100;
rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Cinemática del mecanismos leva seguidor*)
subida=h/β1 (θ-β1/(2π) Sin[2π*θ/β1]);
bajada=h-h/β3 ((θ-β2-β3)-β3/(2π) Sin[2π*(θ-β2-β3)/β3]);
s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
vsubida=h/β1(1-Cos[2 π θ/β1]);
vbajada=-(h/β3) (1-Cos[2 π (θ-β1-β2)/β3]);
v=Piecewise[{{vsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
asubida=(2h π Sin[(2π θ)/β1])/( β1^2);
abajada=-((2h π Sin[(2π (-β2-β1+θ))/β3])/( β3^2));
a=Piecewise[{{asubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{abajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
(*Parámetros dinámicos*)(Masa del seguidor*)Masa=1.2;
(*Precarga en el resorte*)Precarga=0;
(*Frecuencia de giro*)ω=f 2π/60;
(*Rigidez del resorte*)k=4030;
(*Frecuencia natural*)ωn=Sqrt[k/Masa];
(*Relación de amortiguación*)ζ=0.06;
(*Constante de amortiguación crítica*)Ccritico=2Masa ωn;
(*Constante de amortiguación real*)c=Ccritico ζ;
(*Fuerza de contacto*)Fuerza=(Masa a (((180/π)^2)/1000) ω^2)+(c (v 180/π)
ω/1000)+(k/1000) s+Precarga;
Plot[{Fuerza},{θ,0,360}],{f,0,500}

```

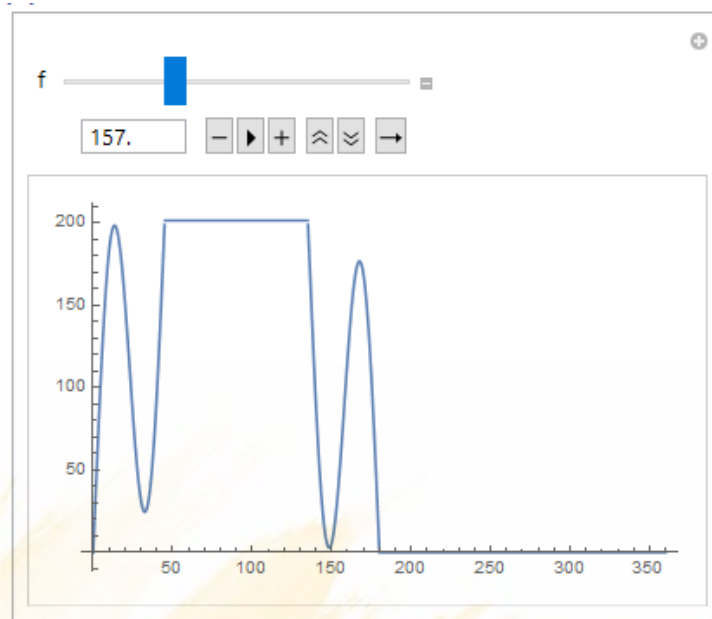


Figura 6.59. Fuerza dinámica ley cicloidal

La leva cicloidal es más susceptible al despegue del seguidor, en este caso ocurre a 157 rpm, ver Fig. 6.59 armónica pero no existe el golpeteo que se tendría en las otras levas analizadas.

6.12.6 PAR DE TORSION

Al fichero anterior se añaden las filas siguientes:

```
Torque=Fuerza v 180/(π ω);
Plot[{Torque},{θ,0,360}],{f,10,500}]
```

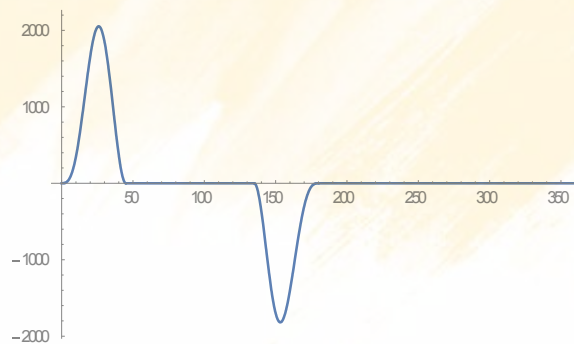


Figura 6.60. Par de torsión ley cicloidal

6.12.7 SIMULACIÓN EN Working Model 2D

Se utiliza el siguiente fichero con el que se arma el archivo de Excel de la Fig. 6.61:

```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;Rb=100;β1=45π/180;β2=90 π/180;β3=45 π/180;
rodillo=20;e=35;
Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
subida[θ_]=h/β1 (θ-β1/(2π) Sin[2π*θ/β1]);
bajada[θ_]=h-h/β3 ((θ-β2-β3)-β3/(2π) Sin[2π*(θ-β2-β3)/β3]);
(*leva radial*)
s[θ_]=Piecewise[{{subida[θ],θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada[θ],θ<β1+β2+β3},{0,θ<36
0}}];
fun[θ_]=Sqrt[(Sqrt[Rb^2-e^2]+s[θ])^2+e^2];
angulo[θ_]=2 π-θ-ArcTan[e/(Sqrt[Rb^2-e^2]+s[θ])];
x[θ_]=fun[θ] Cos[angulo[θ]];
y[θ_]=fun[θ] Sin[angulo[θ]];
ParametricPlot[{x[θ],y[θ]},{θ,0,2 π},PlotStyle->{Brown,Thick}]
(*Tabla de datos*)
levaCICLOX= Table[x[θ],{θ,0,2π, 0.01}]
levaCICLOY= Table[y[θ],{θ,0,2π, 0.01}]
(*Exportación*)
Export["levacicloX.xls",levaCICLOX]
Export["levacicloY.xls",levaCICLOY]

```

	A	B
1	93.67497	-35
2	93.32097	-35.935
3	92.96171	-36.8665
4	92.60125	-37.7946
5	92.24362	-38.7197
6	91.89273	-39.6423
7	91.5524	-40.5628
8	91.22629	-41.4822
9	90.91789	-42.4013
10	90.6305	-43.3211
11	90.36719	-44.2427

Figura 6.61. Archivo de Excel leva cicloidal excéntrica

Con este archivo se genera la leva en Working Model 2D

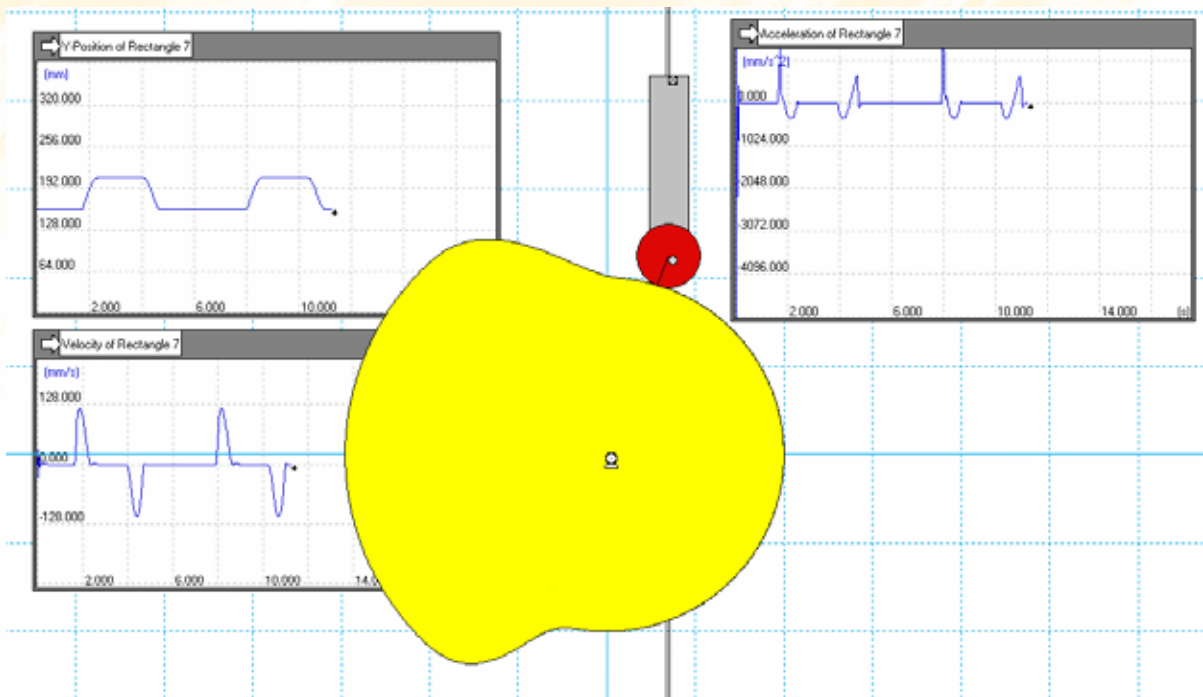
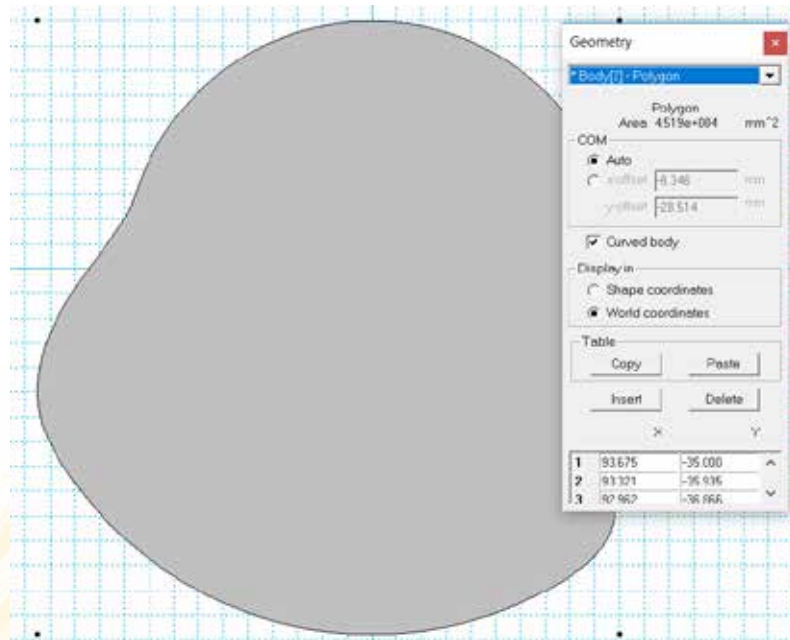


Figura 6.62. Simulación leva cicloidal excéntrica

Se debe tomar en cuenta que la excentricidad es hacia la derecha del eje y que el giro de la leva es antihorario

6.13.- MOVIMIENTO POLINOMIAL 3 4 5

Una de las desventajas de la ley cicloidal es la aceleración pico que presenta, el desarrollo de las matemáticas llevo a la aplicación de otra más versátil y que puede adaptarse a cualquier requerimiento de posición, velocidad, aceleración y sobreaceleración, sin importar la velocidad de operación a la que funcione la leva. Esta se denomina la ley de movimiento polinomial cuya forma general de un polinomio infinito es:

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta} \right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 + \dots \quad (6.71)$$

El número de constantes depende de la cantidad de condiciones de frontera iniciales y finales que existan en el tramo de subida o de bajada de una leva y de esta cantidad depende el grado del polinomio. Si queremos desarrollar una ecuación polinomial para la subida partimos de las condiciones de frontera indicadas:

Para la subida del seguidor las condiciones son, Fig. 6.63:

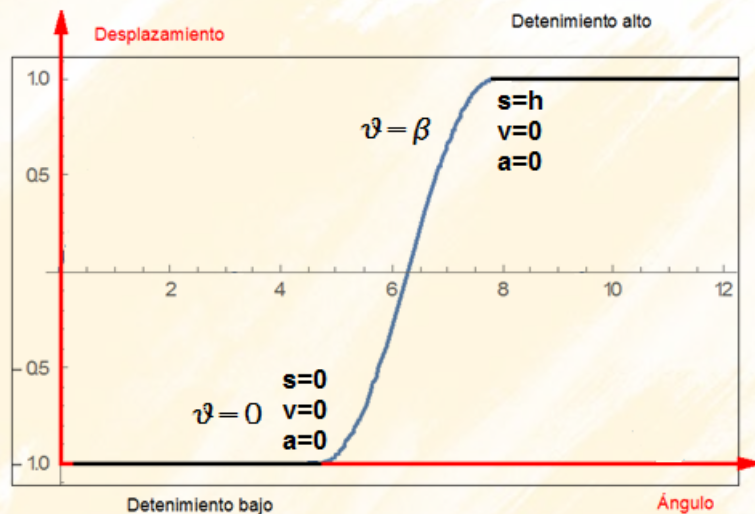


Figura 6.63. Condiciones iniciales en la subida del seguidor

En primer lugar en la Fig. 6.63 se observan 6 condiciones de frontera por lo tanto se precisan 6 constantes y un polinomio de grado 5, ver Ec. 6.72

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta} \right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 \quad (6.72)$$

Se determina la velocidad y aceleración 6.73 y 6.74

$$v(\theta) = \frac{1}{\beta} \left[C_1 + 2 C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^1 + 3 C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + 4 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + 5 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 \right] \quad (6.73)$$

$$a(\theta) = \frac{1}{\beta^2} \left[2 C_2 + 6 C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^1 + 12 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + 20 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 \right] \quad (6.74)$$

A continuación se reemplaza las condiciones de frontera en 6.72, 6.73 y 6.74, para $\theta = 0$ se tiene:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad (6.75)$$

Y para $\theta = \beta$

$$h = C_3 + C_4 + C_5 \quad (6.76)$$

$$0 = \frac{1}{\beta} [3 C_3 + 4 C_4 + 5 C_5] \quad (6.77)$$

$$0 = \frac{1}{\beta^2} [6 C_3 + 12 C_4 + 20 C_5] \quad (6.78)$$

De aquí se deriva un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas

```
m={{1, 1, 1}, {3, 4, 5}, {6, 12, 20}};
b={{h}, {0}, {0}};
LinearSolve[m,b]
```

Que despliega la solución:

$$\{C_3 = 10h, C_4 = -15h, C_5 = 6h\}$$

El polinomio resultante, Ec. 6.79 se conoce como **polinomio 3 4 5**:

$$s(\theta) = h \left[10 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 \right] \quad (6.79)$$

Para la bajada las condiciones corresponden a la Fig. 6.64:

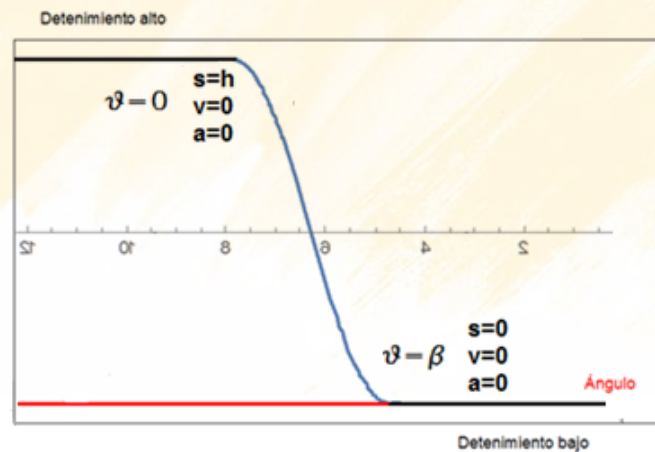


Figura 6.64. Condiciones iniciales en la bajada del seguidor

El estudiante puede demostrar que el polinomio de bajada es por tanto:

$$s(\theta) = h - h \left[10 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 \right] \quad (6.80)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva polinomial que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

6.13.1. DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y SALTO

El archivo es el siguiente:

```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;Rb=100;β1=45;β2=90;β3=45;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
subida=h ( 10 *(θ/β1) ^3- 15 *(θ/β1) ^4+6 *(θ/β1) ^5)
bajada=h-h ( 10 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 15 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+6 *((θ-β1-β2)/β3) ^5)
s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
v=D[s,θ]
a=D[v,θ]
j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"},PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"},PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"},PlotStyle->{Yellow,Thick}]

```

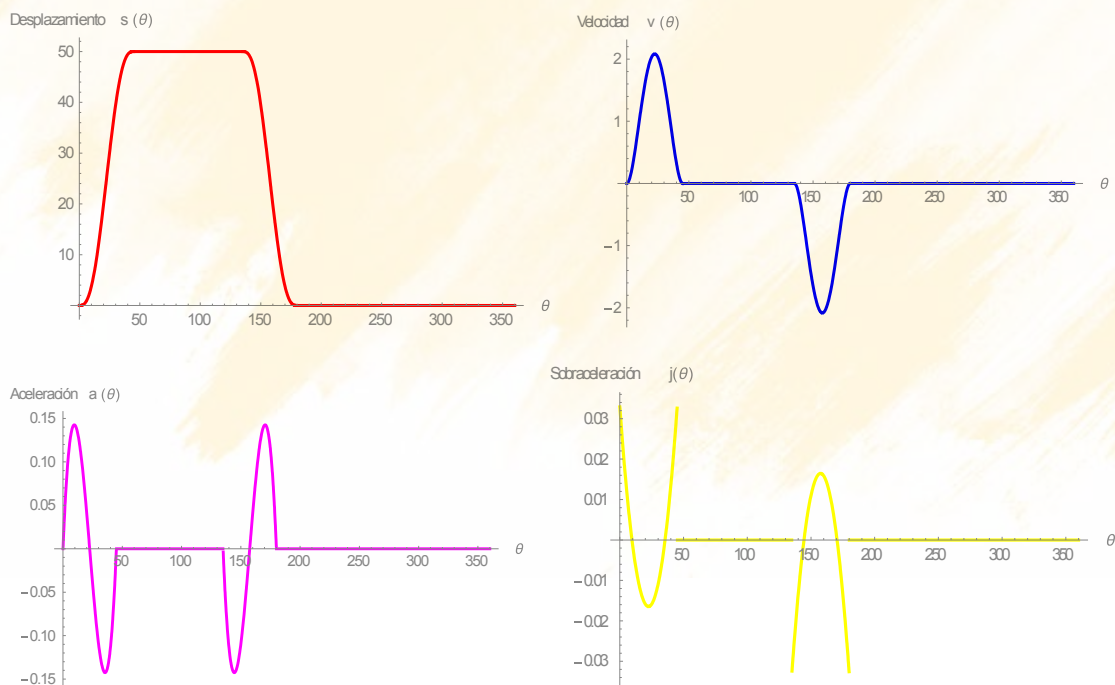


Figura 6.65. Desplazamiento, Velocidad, Aceleración y Sobraceleración

Esta leva sería más ventajosa que la cicloidal por cuanto su aceleración es 40% mayor que la correspondiente a la leva parabólica 0.1, ver Fig. 6.65

6.13.2 ÁNGULO DE PRESIÓN

El ángulo de presión se calcula por medio de la Ec. 6.1 modificando el respectivo fichero, obteniendo la Fig. 6.66, se determina que el radio base adecuado es de 160mm, 20 mm más pequeño que el correspondiente a la leva cicloidal

```

Manipulate[h = 50;
β1= 45 π/180;
β2= 90 π/180;
β3= 45 π/180;
rodillo = 20;
Rp = Rb + rodillo;

subida=h ( 10 *(θ/β1) ^3- 15 *(θ/β1) ^4+6 *(θ/β1) ^5);
bajada=h-h ( 10 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 15 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+6 *((θ-β1-β2)/β3) ^5);

s = Piecewise[{{subida, θ< β1}, {h, θ< β1+ β2}, {bajada, θ< β1+ β2+ β3}, {0, θ< 2π}}];

vsubida = (h/β1) (30 *(θ/β1) ^2- 60 *(θ/β1) ^3+30 *(θ/β1) ^4);
vbajada = -(h/β3) (30 *((θ-β1-β2)/β3) ^2- 60 *((θ-β1-β2)/β3) ^3+30 *((θ-β1-β2)/β3) ^4);

v=Piecewise [{{vsubida, θ<β1}, {0, θ<β1+β2}, {vbajada, θ<β1+β2+β3}, {0, θ<2 π }}];

φ = ArcTan[(v - ec1)/(s + Sqrt[Rp^2 - ec1^2])];
Plot[{φ 180/π}, { θ, 0, 2 π},
PlotRange -> Full], {ec1, 0, 50}, {Rb, 10, 180}

```

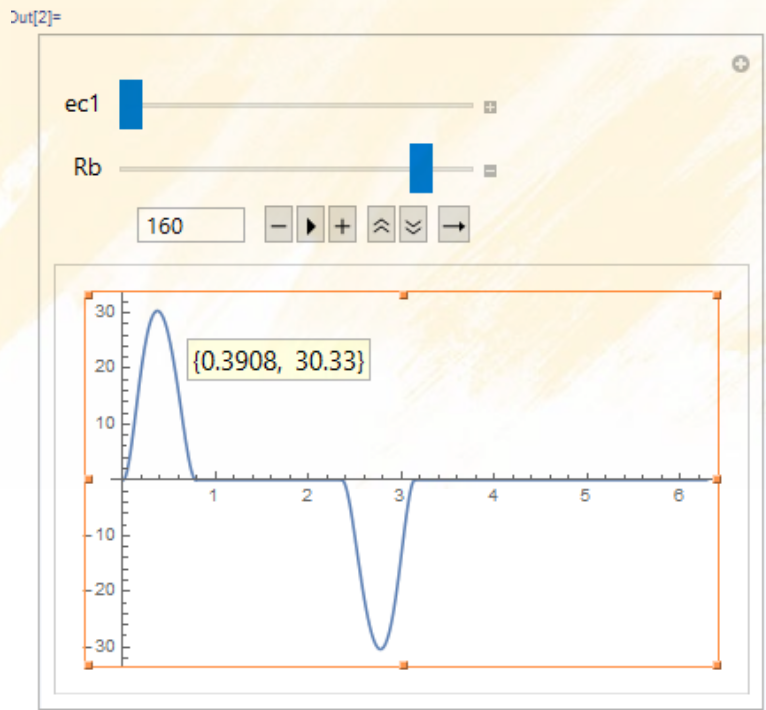


Figura 6.66. Angulo de presión

6.13.3 PERFIL DE LA LEVA DE SEGUIDOR DE RODILLO RADIAL

Con la Ec. 6.3 se esquematiza una leva con Rb de 160 mm, ver Fig. 6.67

```
Clear ["Global'"]
(*Datos*)
h=50; Rb=160;  $\beta_1=45\pi/180$ ;  $\beta_2=90\pi/180$ ;  $\beta_3=45\pi/180$ ;
rodillo=20;
Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
subida=h (10*( $\theta/\beta_1$ )^3-15*( $\theta/\beta_1$ )^4+6*( $\theta/\beta_1$ )^5);
bajada=h-h (10*(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ )^3-15*(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ )^4+6*(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ )^5);
(*leva radial*)
s=Piecewise [{{subida,  $\theta<\beta_1$ }, {h,  $\theta<\beta_1+\beta_2$ }, {bajada,  $\theta<\beta_1+\beta_2+\beta_3$ }, {0,  $\theta<2\pi$ }}];
PolarPlot [s+Rb, { $\theta$ , 0, 2  $\pi$ }, AxesLabel-> {"  $\theta$  ", " Rb + s ( $\theta$ )"}, PlotStyle-> {Blue, Thick}]
```

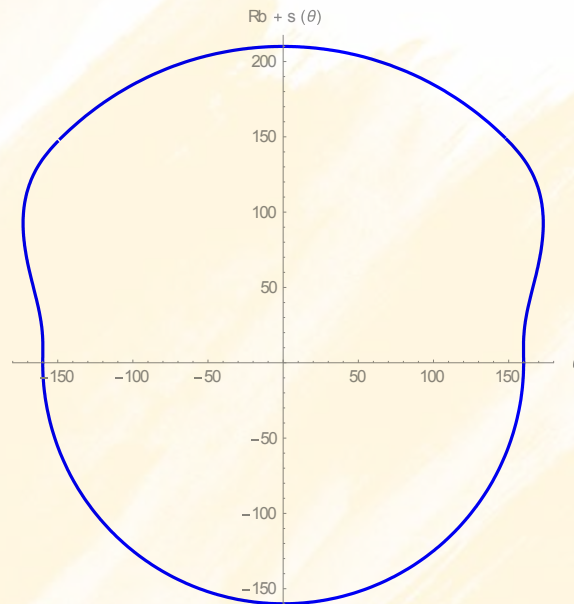


Figura 6.66. Perfil de leva con seguidor de rodillo radial

6.13.4 FUERZA DE CONTACTO

La fuerza dinámica se la determina con la Ec. 6.47 para los mismos parámetros:

```

Clear ["Global*"]
Manipulate [( *Datos* ) h=50; β1=45; β2=90; β3=45; Rb=100;
rodillo=20; Rp=Rb+rodillo;
( *Cinemática del mecanismos leva seguidor* )

subida = h (10 *(θ/β1) ^3- 15 *(θ/β1) ^4+6 *(θ/β1) ^5);
bajada = h-h (10 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 15 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+6 *((θ-β1-β2)/β3) ^5);
s=Piecewise [{ {subida, θ<β1}, {h, θ<β1+β2}, {bajada, θ<β1+β2+β3}, {0, θ<360}}];

vsubida = (h/β1) (30 *(θ/β1) ^2- 60 *(θ/β1) ^3+30 *(θ/β1) ^4);
vbajada = -(h/β3) (30 *((θ-β1-β2)/β3) ^2- 60 *((θ-β1-β2)/β3) ^3+30 *((θ-β1-β2)/β3) ^4);
v=Piecewise [{ {vsubida, θ<β1}, {0, θ<β1+β2}, {vbajada, θ<β1+β2+β3}, {0, θ<360}}];

asubida = (h/ β1^2) (60 *(θ/β1) ^1- 180 *(θ/β1) ^2+120 *(θ/β1) ^3);
abajada -(h/β3^2) (60 *((θ-β1-β2)/β3) ^1- 180 *((θ-β1-β2)/β3) ^2+120 *((θ-β1-β2)/β3) ^3);
a=Piecewise [{ {asubida, θ<β1}, {0, θ<β1+β2}, {abajada, θ<β1+β2+β3}, {0, θ<360}}];

( *Parámetros dinámicos* )( *Masa del seguidor* )Masa=1.2;
( *Precarga en el resorte* )Precarga=0;
( *Frecuencia de giro* ) ω=f 2π/60;
( *Rigidez del resorte* ) k=4030;
( *Frecuencia natural* ) ωn=Sqrt [k/Masa];
( *Relación de amortiguación* ) ζ=0.06;
( *Constante de amortiguación crítica* ) Ccritico=2Masa ωn;
( *Constante de amortiguación real* ) c=Ccritico ζ;
( *Fuerza de contacto* )Fuerza= (Masa a (((180/π) ^2)/1000) ω^2)+(c (v 180/π)
ω/1000)+ (k/1000) s + Precarga;
Plot [{Fuerza}, {θ, 0,360}], {f, 0,500}

```

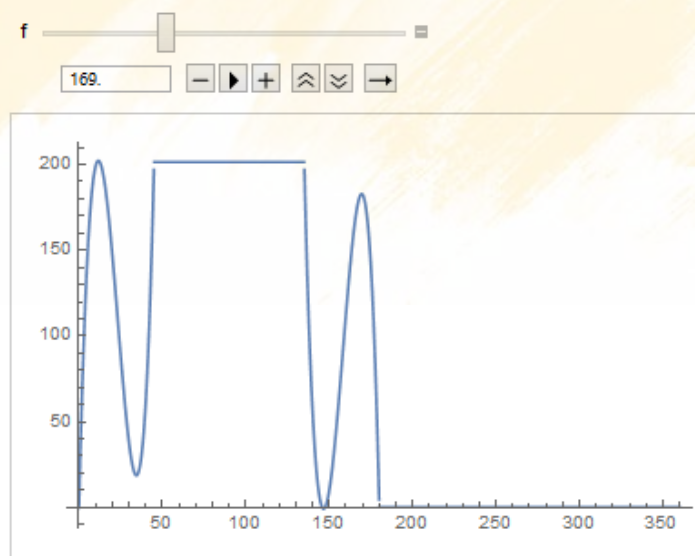


Figura 6.67. Fuerza de contacto

Como se aprecia en la Fig. 6.67, mientras que con la leva cicloidal el despegue se experimenta a 157 rpm, con la polinomial el mismo ocurre a 169 rpm, es decir la leva polinomial resiste el despegue del seguidor

6.13.5 RADIO DE CURVATURA

```

Clear ["Global`*"]

(* Datos *)

Manipulate [h= 50;  $\beta_1 = 45$ ;  $\beta_2 = 90$ ;  $\beta_3 = 45$ ; rodillo = 20; Rp = Rb + rodillo;

subida = h (10 *( $\theta/\beta_1$ ) ^3- 15 *( $\theta/\beta_1$ ) ^4+6 *( $\theta/\beta_1$ ) ^5);
bajada =h-h (10 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^3- 15 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^4+6 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^5);
s=Piecewise [{{subida,  $\theta<\beta_1$ }, {h,  $\theta<\beta_1+\beta_2$ }, {bajada,  $\theta<\beta_1+\beta_2+\beta_3$ }, {0,  $\theta<360$ }}];

vsubida = (h/ $\beta_1$ ) (30 *( $\theta/\beta_1$ ) ^2- 60 *( $\theta/\beta_1$ ) ^3+30 *( $\theta/\beta_1$ ) ^4);
vbajada = -(h/ $\beta_3$ ) (30 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^2- 60 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^3+30 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^4);
v=Piecewise [{{vsubida,  $\theta<\beta_1$ }, {0,  $\theta<\beta_1+\beta_2$ }, {vbajada,  $\theta<\beta_1+\beta_2+\beta_3$ }, {0,  $\theta<360$ }}];

asubida = (h/  $\beta_1^2$ ) (60 *( $\theta/\beta_1$ ) ^1- 180 *( $\theta/\beta_1$ ) ^2+120 *( $\theta/\beta_1$ ) ^3);
abajada -(h/ $\beta_3^2$ ) (60 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^1- 180 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^2+120 *(( $\theta-\beta_1-\beta_2$ )/ $\beta_3$ ) ^3);
a=Piecewise [{{asubida,  $\theta<\beta_1$ }, {0,  $\theta<\beta_1+\beta_2$ }, {abajada,  $\theta<\beta_1+\beta_2+\beta_3$ }, {0,  $\theta<360$ }}];

Num = ((Rp+ s) ^2+ (v 180/ $\pi$ ) ^2) ^ (3/2);
Den = (Rp+ s) ^2 + (v 180/ $\pi$ ) ^2 - a ((180/ $\pi$ ) ^2) (Rp+s);

 $\rho$ = Abs [Num /Den];

Plot [{ $\rho$ }, { $\theta$ , 0,360}], {Rb, 10,150}]

```

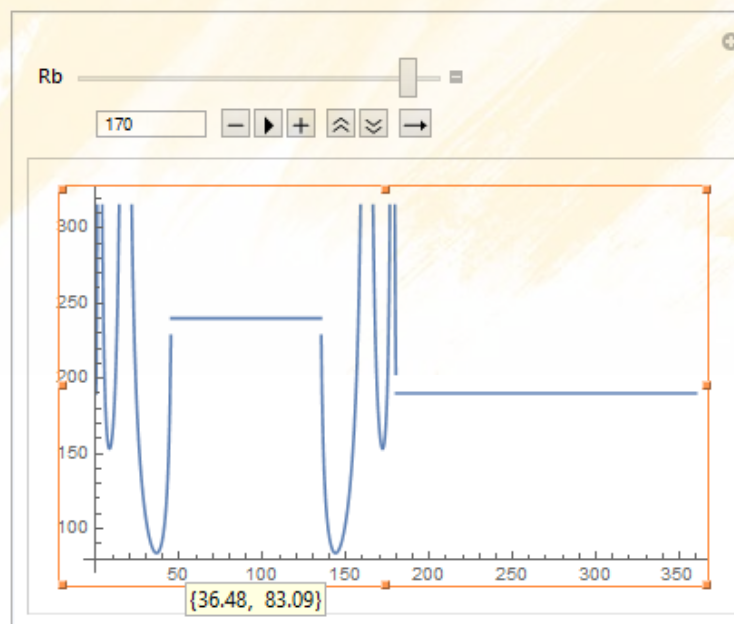


Figura 6.68. Radio de curvatura

Según la Fig. 6.68, el radio de curvatura indica que el radio máximo del rodillo podría ser de 83 mm para un radio base de 170 mm, puesto que el radio de rodillo es de 20 mm, es tamaño del mismo es correcto

6.14.- MOVIMIENTO POLINOMIAL 4 5 6 7

De igual manera que en el caso anterior se utiliza el polinomio

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta} \right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 + \dots \quad (6.81)$$

El número de constantes a utilizarse sería ocho

Para la subida del seguidor las condiciones son las planteadas a la Fig. 6.69, donde se incluye la sobreaceleración:

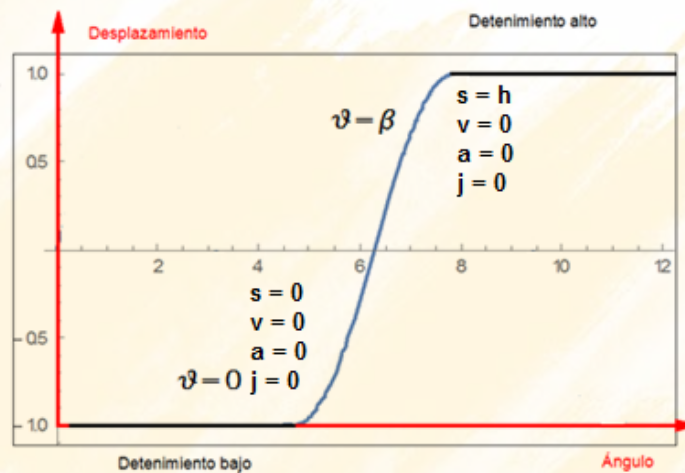


Figura 6.69. Condiciones iniciales en la subida del seguidor

En primer lugar en la Fig. 6.69 se observan 8 condiciones de frontera por lo tanto se precisan 8 constantes y un polinomio de grado 7, ver Ec. 6.72

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta} \right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 + C_7 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^7 \quad (6.82)$$

Se determina la velocidad, aceleración y sobreaceleración 6.83 y 6.84

$$v(\theta) = \frac{1}{\beta} \left[C_1 + 2 C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^1 + 3 C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + 4 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + 5 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + 6 C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + 7 C_7 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 \right] \quad (6.83)$$

$$a(\theta) = \frac{1}{\beta^2} \left[2 C_2 + 6 C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^1 + 12 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + 20 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + 30 C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + 42 C_7 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 \right] \quad (6.84)$$

$$j(\theta) = \frac{1}{\beta^3} \left[6 C_3 + 24 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^1 + 60 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + 120 C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + 210 C_7 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 \right] \quad (6.85)$$

A continuación se reemplaza las condiciones de frontera en 6.82, 6.83, 6.84 y 6.85 para $\theta = 0$ se tiene:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0 \quad (6.86)$$

Y para $\theta = \beta$

$$h = C_4 + C_5 + C_6 + C_7 \quad (6.87)$$

$$0 = \frac{1}{\beta} [4 C_4 + 5 C_5 + 6 C_6 + 7 C_7] \quad (6.88)$$

$$0 = \frac{1}{\beta^2} [12 C_4 + 20 C_5 + 30 C_6 + 42 C_7] \quad (6.89)$$

$$0 = \frac{1}{\beta^3} [24 C_4 + 60 C_5 + 120 C_6 + 210 C_7] \quad (6.90)$$

De aquí se deriva un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas

```
m={{1, 1, 1, 1}, {4, 5, 6, 7}, {12, 20, 30, 42}, {24, 60, 120, 210}};
b={{h},{0},{0},{0}};
LinearSolve[m,b]
```

Que despliega la solución:

$$\{ \{C_4 = 35h\}, \{C_5 = -84h\}, \{C_6 = 70h\}, \{C_7 = -20h\} \}$$

El polinomio resultante, Ec. 6.91 se conoce como **polinomio 4 5 6 7**:

$$s(\theta) = h \left[35 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 - 84 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + 70 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 - 20 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^7 \right] \quad (6.91)$$

Para la bajada las condiciones corresponden a la Fig. 6.70:

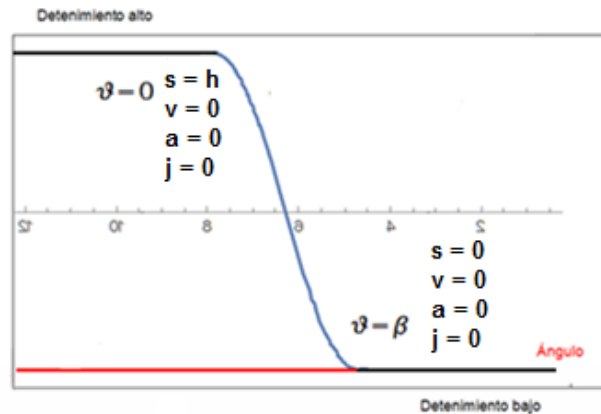


Figura 6.70. Condiciones iniciales en la bajada del seguidor

Es fácil demostrar que el polinomio de bajada es por tanto:

$$s(\theta) = h - h \left[35 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 - 84 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + 70 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 - 20 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^7 \right] \quad (6.92)$$

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva polinomial 4 5 6 7 que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

6.14.1. DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y SALTO

El archivo es el siguiente:

```
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;Rb=100;β1=45;β2=90;β3=45;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
subida=h ( 35 *(θ/β1) ^4- 84 *(θ/β1) ^5+70 *(θ/β1) ^6- 20 *(θ/β1) ^7)
bajada=h-h ( 35 *((θ-β1-β2)/β3) ^4- 84 *((θ-β1-β2)/β3) ^5+70 *((θ-β1-β2)/β3) ^6-20
*((θ-β1-β2)/β3) ^7)

s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
v=D[s,θ]
a=D[v,θ]
j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"},PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"},PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"},PlotStyle->{Yellow,Thick}]
```

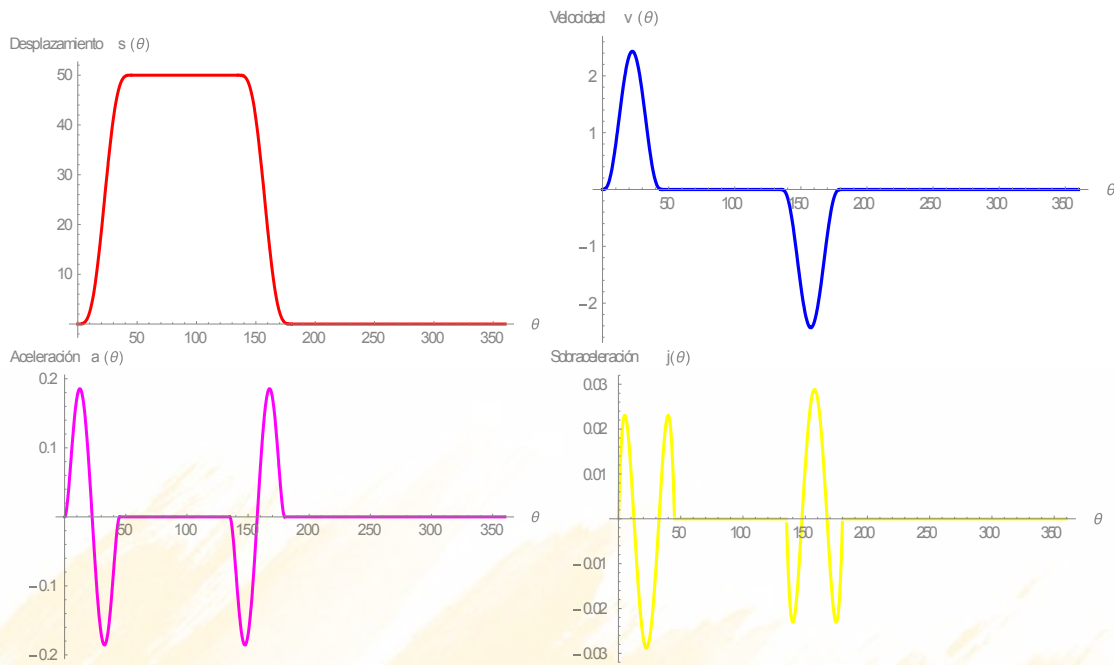



Figura 6.71. Desplazamiento, Velocidad, Aceleración y Sobreaceleración

Esta leva tiene una aceleración superior a la leva cicloidal 0.1863, ver Fig. 6.71

6.14.2 ÁNGULO DE PRESIÓN

El ángulo de presión se calcula por medio de la Ec. 6.1 en este caso es de 190mm, 10 mm más grande que el correspondiente a la leva cicloidal, ver Fig. 6.72

```

Manipulate[h = 50;
β1= 45 π/180;
β2= 90 π/180;
β3= 45 π/180;
rodillo = 20;
Rp = Rb + rodillo;

subida=h ( 35 *(θ/β1) ^4- 84 *(θ/β1) ^5+70 *(θ/β1) ^6- 20 *(θ/β1) ^7);
bajada=h-h ( 35 *((θ-β1-β2)/β3) ^4- 84 *((θ-β1-β2)/β3) ^5+70 *((θ-β1-β2)/β3) ^6-20 *((θ-β1-β2)/β3) ^7);

s = Piecewise[{{subida, θ< β1}, {h, θ< β1+ β2}, {bajada, θ< β1+ β2+ β3}, {0, θ< 2π}}];

vsubida=h/β1( 140 *(θ/β1) ^3- 420 *(θ/β1) ^4+420 *(θ/β1) ^5- 140 *(θ/β1) ^6);
vbajada=-(h/β3) (140 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 420 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+420 *((θ-β1-β2)/β3) ^5-140 *((θ-β1-β2)/β3) ^6);

v=Piecewise[{{vsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<2 π }}];

φ = ArcTan[(v - ec1)/(s + Sqrt[Rp^2 - ec1^2])];
Plot[{φ 180/π}, { θ, 0, 2 π},
PlotRange -> Full], {ec1, 0, 50}, {Rb, 10, 180}

```

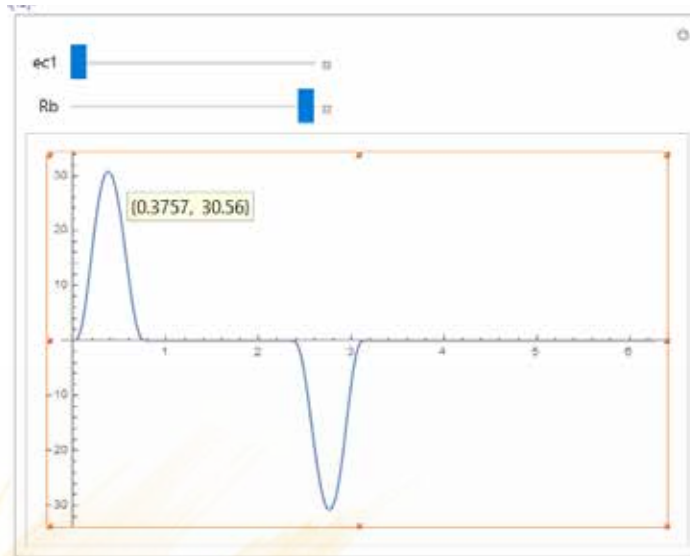


Figura 6.72. Angulo de presión

6.14.3 FUERZA DE CONTACTO

La fuerza dinámica se la determina con la Ec. 6.47 para los mismos parámetros:

```
Clear["Global`*"]
Manipulate[(*Datos*)h=50;β1=45;β2=90;β3=45;Rb=100;
rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Cinemática del mecanismos leva seguidor*)

subida=h ( 35 *(θ/β1) ^4- 84 *(θ/β1) ^5+70 *(θ/β1) ^6- 20 *(θ/β1) ^7);
bajada=h-h ( 35 *((θ-β1-β2)/β3) ^4- 84 *((θ-β1-β2)/β3) ^5+70 *((θ-β1-β2)/β3) ^6-20
*((θ-β1-β2)/β3) ^7);
s=Piecewise[{{subida,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];

vsubida=h/β1( 140 *(θ/β1) ^3- 420 *(θ/β1) ^4+420 *(θ/β1) ^5- 140 *(θ/β1) ^6);
vbajada=-(h/β3) (140 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 420 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+420 *((θ-β1-β2)/β3)
^5-140 *((θ-β1-β2)/β3) ^6);
v=Piecewise[{{vsubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{vbajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];

asubida=h (420 *(θ/β1) ^2- 1680 *(θ/β1) ^3+2100 *(θ/β1) ^4- 840 *(θ/β1) ^5)/( β1^2);
abajada=- h (420 *(( θ-β1-β2)/β3) ^2- 1680 *( (θ-β1-β2)/β3) ^3+2100 *( (θ-β1-β2)/β3)
^4- 840 *( (θ-β1-β2)/β3) ^5)/( β3^2);
a=Piecewise[{{asubida,θ<β1},{0,θ<β1+β2},{abajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];

(*Parámetros dinámicos*)(*Masa del seguidor*)Masa=1.2;
(*Precarga en el resorte*)Precarga=0;
(*Frecuencia de giro*)ω=f 2π/60;
(*Rigidez del resorte*)k=4030;
(*Frecuencia natural*)ωn=Sqrt[k/Masa];
(*Relación de amortiguación*)ζ=0.06;
(*Constante de amortiguación crítica*)Ccritico=2Masa ωn;
(*Constante de amortiguación real*)c=Ccritico ζ;
(*Fuerza de contacto*)Fuerza=(Masa a (((180/π)^2)/1000) ω^2)+(c (v 180/π)
ω/1000)+(k/1000) s+Precarga;
Plot[{Fuerza},{θ,0,360}},{f,0,500}]
```

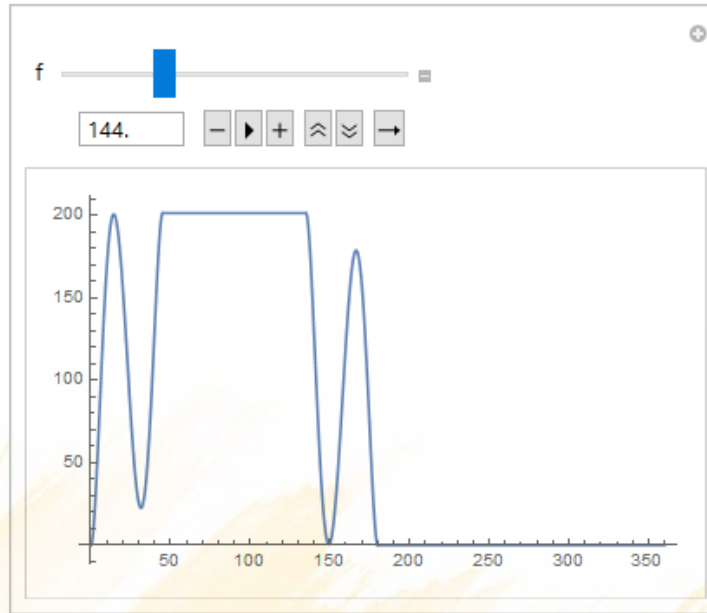


Figura 6.73. Fuerza de contacto

6.15.- CURVA DE BÉZIER

Del estudio desarrollado es claro que si se logra determinar una función única que contemple subida, reposo alto, bajada, se lograra un diseño conforme a las leyes de las levas ya que no solo mantendrá continuidad en la aceleración sino en el resto de derivadas. La curva de Bézier puede generar curvas reconfigurables que se adapta a cualquier especificación. Una curva de Bézier paramétrica de grado n es una combinación lineal de polinomios de la base de Bernstein $B_i^n(u)$ sobre un dominio unitario, Ec. (6.92)

$$B_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (6.92)$$

Dónde:

n = grado del polinomio que depende de la complejidad de la curva

i = contador de 0 a n

u = variable independiente en el caso de una leva sería la relación $\frac{\theta}{\beta}$

Por ejemplo para un polinomio de grado 15 como el seleccionado se utiliza el siguiente fichero:

```
n = 15
Table[Binomial[n,i] u^i(1-u)^(n-i),{i,0,n}]
```

Que genera el subsiguiente vector:

$$\{(1-u)^{15}, 15(1-u)^{14}u, 105(1-u)^{13}u^2, 455(1-u)^{12}u^3, 1365(1-u)^{11}u^4, 3003(1-u)^{10}u^5, 5005(1-u)^9u^6, 6435(1-u)^8u^7, 6435(1-u)^7u^8, 5005(1-u)^6u^9, 3003(1-u)^5u^{10}, 1365(1-u)^4u^{11}, 455(1-u)^3u^{12}, 105(1-u)^2u^{13}, 15(1-u)u^{14}, u^{15}\}$$

Este vector a su vez es multiplicado por un polígono de control P . Para generar la curva de Bézier completa se utilizó la herramienta iterativa Manipulate[] del software Wolfram

Mathematica, con la cual se sintonizo el vector puntos de control al requerimiento subida-reposo-bajada. El fichero que nos genera la curva requerida, ver Fig. 6.74 es el siguiente:

```
Manipulate[ Plot[pa*(-(u - 1)^15) + pb*(15 u (u - 1)^14) - pc*(105 u^2 (u - 1)^13) + pd*(455 u^3 (u - 1)^12) -
pe*(1365 u^4 (u - 1)^11) + pf*(3003 u^5 (u - 1)^10) - pg*(5005 u^6 (u - 1)^9) + ph*(6435 u^7 (u - 1)^8) -
pi*(6435 u^8 (u - 1)^7) + pj*(5005 u^9 (u - 1)^6) - pk*(3003 u^10 (u - 1)^5) + pl*(1365 u^11 (u - 1)^4) -
pm*(455 u^12 (u - 1)^3) + pn*(105 u^13 (u - 1)^2) - po*(15 u^14 (u - 1)) + pp*(u^15), {u,
0, 1}],
{pa, 0, 1}, {pb, 0, 1}, {pc, 0, 1}, {pd, 0, 1}, {{pe, 1, "pe"}, 0, 2, 0.1,
Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{pf, 1, "pf"}, 0, 2, 0.1,
Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{pg, 1, "pg"}, 0.8, 0.870,
0.001, Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{ph, 1, "ph"}, 0.8,
0.870, 0.001, Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{pi, 1, "pi"},
0.8, 0.870, 0.001, Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{pj, 1, "pj"}, 0.8, 0.870,
0.001, Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{pk, 1, "pk"}, 0, 2,
0.1, Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {{pl, 1, "pl"}, 0, 2, 0.1,
Appearance -> {"Labeled", "Open"}}, {pm, 0, 1}, {pn, 0, 1}, {po, 0, 1}, {pp, 0, 1}]
```

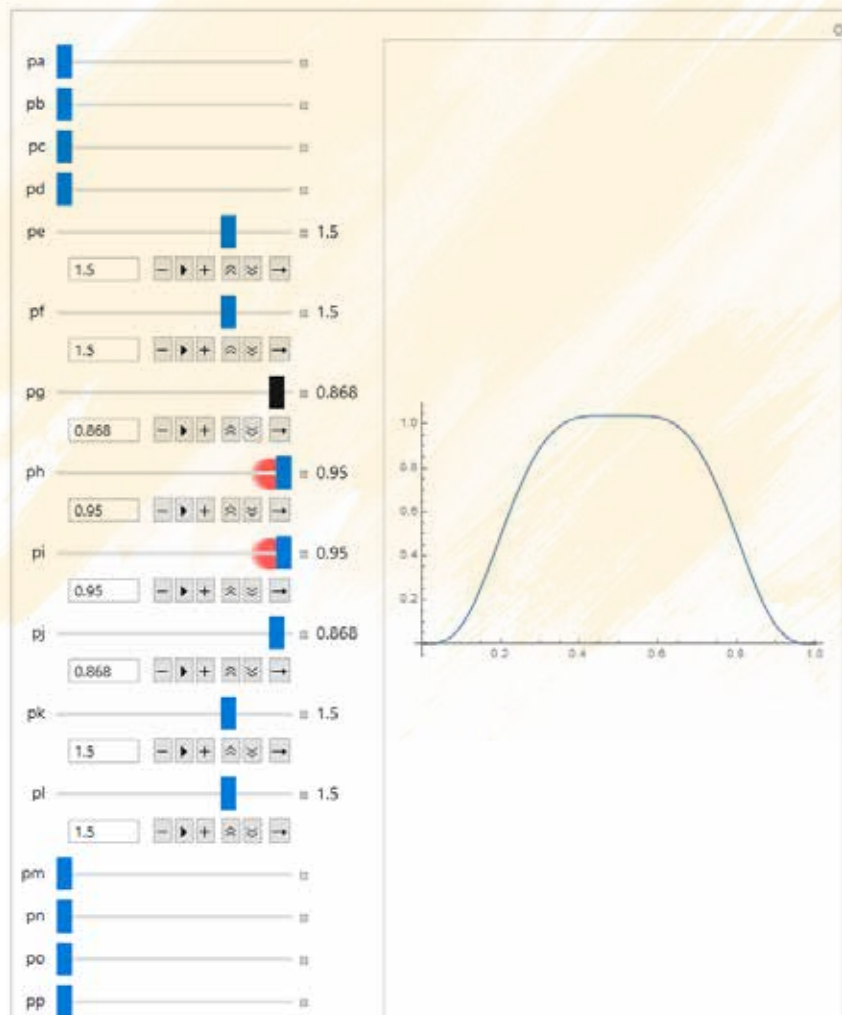


Figura 6.74. Curva de Bezier

Por tanto el polígono de control que se utilizará es:

PT = [0,0,0,0,1.5,15,0.868,0.95,0.95,0.868,1.5,1.5,0,0,0], y la operación para generar la función de la leva es:

```
n = 15
A = Table[Binomial[n, i] u^i (1 - u)^(n - i), {i, 0, n}];
B = ( { {0}, {0}, {0}, {0}, {1.5}, {1.5}, {0.868}, {0.95}, {0.95}, {0.868}, {1.5}, {1.5},
{0}, {0}, {0}, {0} } );
A*B
```

Con el resultado igual a:

$$s(u) = 2047.5(1 - u)^{11}u^4 + 4504.5(1 - u)^{10}u^5 + 4344.34(1 - u)^9u^6 + 6113.25(1 - u)^8u^7 + 6113.25(1 - u)^7u^8 + 4344.34(1 - u)^6u^9 + 4504.5(1 - u)^5u^{10} + 2047.5(1 - u)^4u^{11} \quad (6.93)$$

Donde $u = \frac{\theta}{\beta}$

6.15.1 PERFIL DE LA LEVA DE BÉZIER

En base de la ecuación 6.93 y 6.94

$$S(\theta) = \begin{cases} s(\theta), & 0 \leq \theta \leq \beta \\ 0, & \beta \leq \theta \leq 360^\circ \end{cases} \quad (6.94)$$

```
h= 50;Rb=90;β=180 π/180;
s[θ_]=Piecewise[{{h*(-2047.5*(θ/β)^4*(θ/β-1)^11+2047.5*(θ/β)^11*(θ/β-1)^4-
4344.34*(θ/β)^6*(θ/β-1)^9+4344.34*(θ/β)^9*(θ/β-1)^6+4504.5*(θ/β)^5*(θ/β-1)^10-
4504.5*(θ/β)^10*(θ/β-1)^5+6113.25*(θ/β)^7*(θ/β-1)^8-6113.25*(θ/β)^8*(θ/β-1)^7), 0<θ<β},
{0, β<θ<2 π}}];
PolarPlot[s[θ]+Rb,{θ,0,2π}]
```

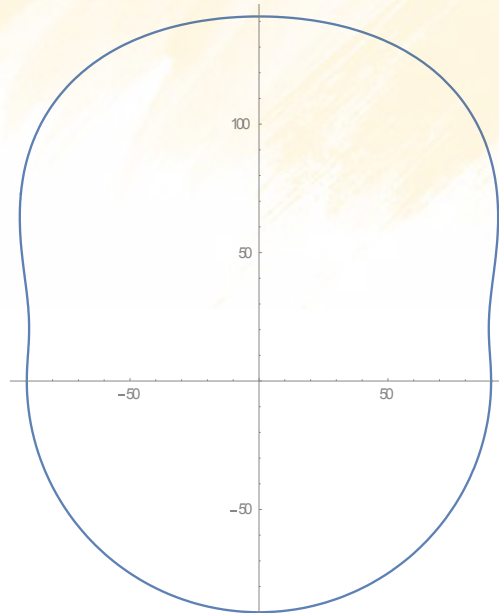


Figura 6.75. Perfil Leva de Bézier

6.15.2. DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y SALTO

El archivo es el siguiente:

```
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;Rb=90;β=180;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
s=Piecewise[{{h*(-2047.5*(θ/β)^4*(θ/β-1)^11+2047.5*(θ/β)^11*(θ/β-1)^4-
4344.34*(θ/β)^6*(θ/β-1)^9+4344.34*(θ/β)^9*(θ/β-1)^6+4504.5*(θ/β)^5*(θ/β-1)^10-
4504.5*(θ/β)^10*(θ/β-1)^5+6113.25*(θ/β)^7*(θ/β-1)^8-6113.25*(θ/β)^8*(θ/β-1)^7), 0<θ<β},
{0, β<θ<2 π}}];
v=D[s,θ]
a=D[v,θ]
j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"},PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"},PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"},PlotStyle->{Yellow,Thick}]
```

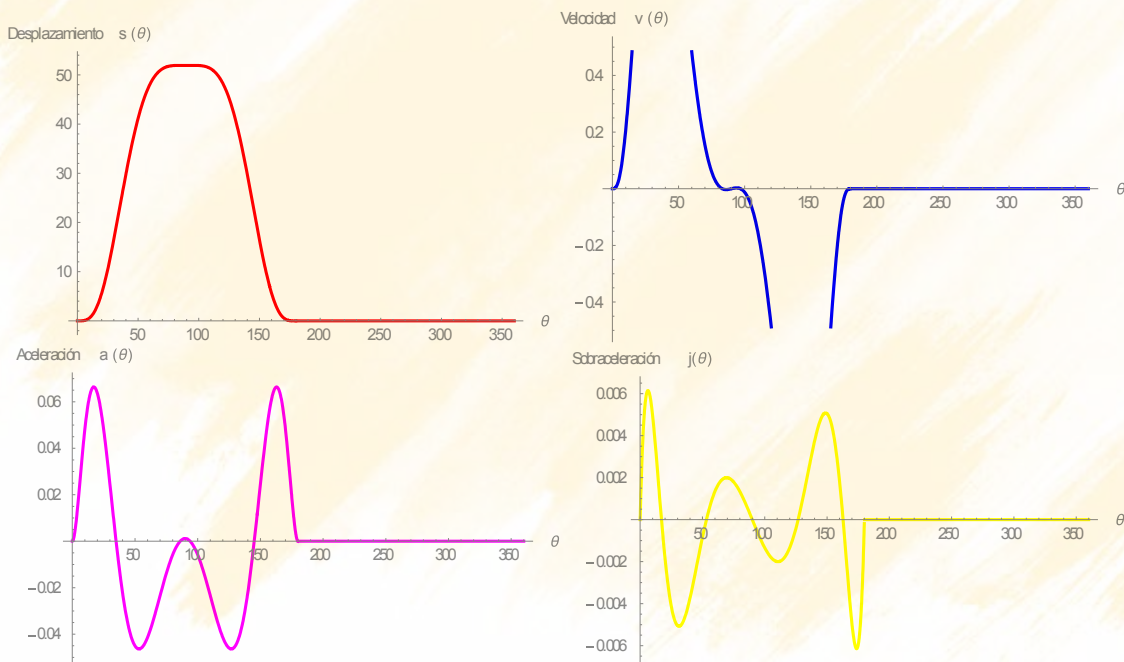


Figura 6.76. Desplazamiento, Velocidad, Aceleración y Sobraceleración

6.15.3 ÁNGULO DE PRESIÓN

El ángulo de presión se calcula por medio de la Ec. 6.1 modificando el respectivo fichero, obteniendo la Fig. 6.77, se determina que el radio base adecuado es de 90mm, la más pequeña de todas las levas

```

Manipulate[ h = 50; rodillo = 20; Rp = Rb+rodillo;ec1 = 0;
β=π;
s=Piecewise[{{h*(-2047.5*(θ/β)^4*(θ/β-1)^11+2047.5*(θ/β)^11*(θ/β-1)^4-4344.34*(θ/β)^6*(θ/β-1)^9+4344.34*(θ/β)^9*(θ/β-1)^6+4504.5*(θ/β)^5*(θ/β-1)^10-4504.5*(θ/β)^10*(θ/β-1)^5+6113.25*(θ/β)^7*(θ/β-1)^8-6113.25*(θ/β)^8*(θ/β-1)^7}, 0<θ<β},
{0, β<θ<2 π}]];
v=D[s,θ];
φ=ArcTan[(v-ec1)/(s+Sqrt[Rp^2-ec1^2])];
Plot[{φ 180/π},{θ,0,2 π}, PlotRange -> All],{Rb,0,100}]

```

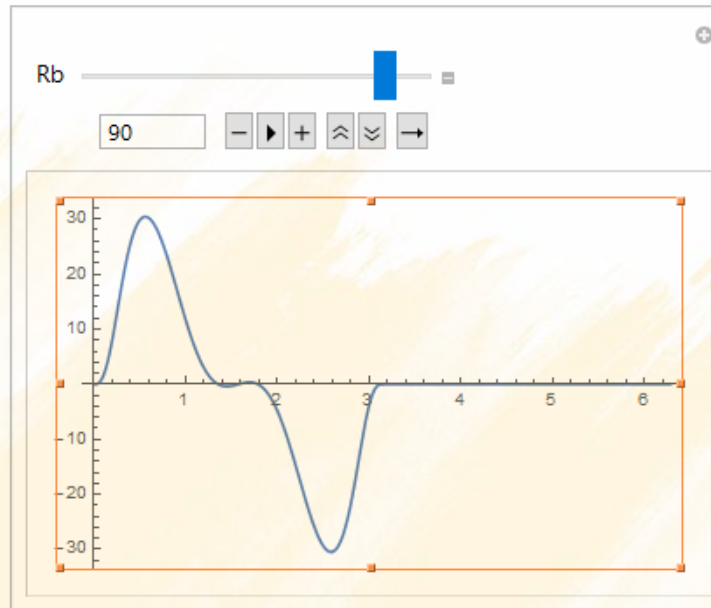


Figura 6.77. Angulo de presión

6.15.3 FUERZA DE CONTACTO

La fuerza dinámica se la determina con la Ec. 6.47 para los mismos parámetros:

```

Clear["Global`*"]
Manipulate[(*Datos*);h=50; β=180;Rb=100;
rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Cinemática del mecanismos leva seguidor*);

s=Piecewise[{{h*(-2047.5*(θ/β)^4*(θ/β-1)^11+2047.5*(θ/β)^11*(θ/β-1)^4-
4344.34*(θ/β)^6*(θ/β-1)^9+4344.34*(θ/β)^9*(θ/β-1)^6+4504.5*(θ/β)^5*(θ/β-1)^10-
4504.5*(θ/β)^10*(θ/β-1)^5+6113.25*(θ/β)^7*(θ/β-1)^8-6113.25*(θ/β)^8*(θ/β-
1)^7},{0,β<θ<360}}];
v = D[s,θ];
a = D[v,θ];

(*Parámetros dinámicos*)(*Masa del seguidor*)Masa=1.2;
(*Precarga en el resorte*)Precarga=0;
(*Frecuencia de giro*)ω=f 2π/60;
(*Rigidez del resorte*)k=4030;
(*Frecuencia natural*)ωn=Sqrt[k/Masa];
(*Relación de amortiguación*)ζ=0.06;
(*Constante de amortiguación crítica*)Ccritico=2Masa ωn;
(*Constante de amortiguación real*)c=Ccritico ζ;
(*Fuerza de contacto*);
Fuerza=(Masa a (((180/π)^2)/1000) ω^2)+(c (v 180/π) ω/1000)+(k/1000) s+Precarga;
Plot[{Fuerza},{θ,0,360}],{f,0,500}]

```

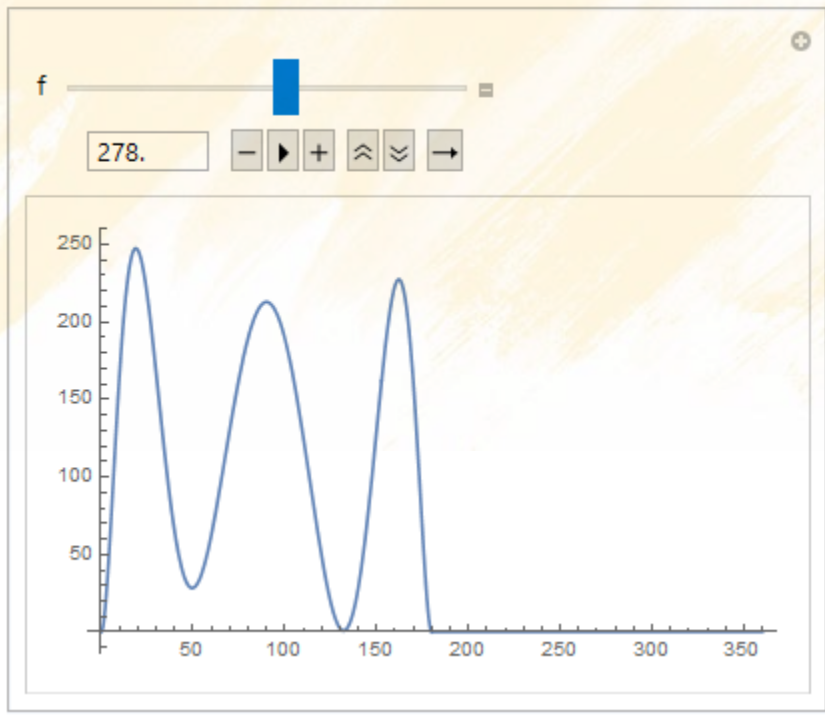


Figura 6.78. Fuerza de contacto

6.16 FUNCIONES COMBINADAS

Se pueden plantear infinidad de leyes en las cuales se sigan las mismas pautas que la ley cicloidal, es decir partir de una función continua para la aceleración y que por medio de integraciones se determine la ley de desplazamiento. Estas funciones discontinuas deberán tener un tramo de aceleración y otro de desaceleración. Las funciones combinadas están catalogadas en la literatura sobre mecanismos y son las siguientes:

- Aceleración trapezoidal
- Aceleración trapezoidal modificada
- Aceleración sinusoidal modificada

En este apartado se va a efectuar el análisis de la leva con ley de aceleración trapezoidal modificada cuya conceptualización se observa en la Fig. 6.79 y que consiste en curvas sinusoidales que se acoplan a aceleraciones constantes.

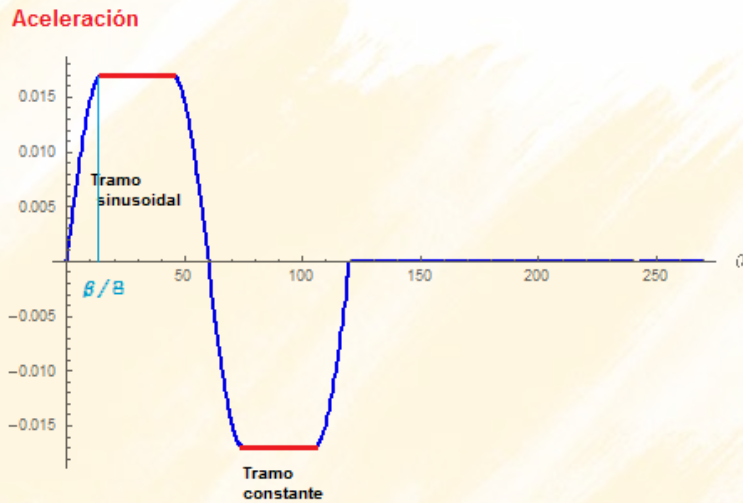


Figura 6.79. Conceptualización aceleración trapezoidal modificada

Las ecuaciones que gobiernan la subida de esta ley se compilan en Ec.6.95

$$s1(\theta) = h \left[0.38898448 \frac{\theta}{\beta} - 0.0309544 \sin \left[4\pi \frac{\theta}{\beta} \right] \right], 0 \leq \theta < \frac{\beta}{8} \quad (6.95)$$

$$s2(\theta) = h \left[2.44406184 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 - 0.22203097 \frac{\theta}{\beta} + 0.00723407 \right], \frac{\beta}{8} \leq \theta < \frac{3\beta}{8}$$

$$s3(\theta) = h \left[1.6110154 \frac{\theta}{\beta} - 0.0309544 \sin \left[4\pi \frac{\theta}{\beta} - \pi \right] - 0.3055077 \right], \frac{3\beta}{8} \leq \theta < \frac{5\beta}{8}$$

$$s4(\theta) = h \left[-2.44406184 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + 4.6660917 \frac{\theta}{\beta} - 1.2292648 \right], \frac{5\beta}{8} \leq \theta < \frac{7\beta}{8}$$

$$s_5(\theta) = h \left[0.38898448 \frac{\theta}{\beta} + 0.0309544 \sin \left[4\pi \frac{\theta}{\beta} - 3\pi \right] + 0.6110154 \right], \frac{7\beta}{8} \leq \theta < \beta$$

Para la bajada se utilizan las mismas ecuaciones restadas del desplazamiento h y trasladadas a la derecha tal como se observa en el siguiente fichero.

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se requiere una leva con ley de aceleración trapezoidal modificada que cumpla con los siguientes requisitos: Subida del seguidor 50 mm con movimiento uniforme durante 45°, Reposo alto durante 90°, Bajada durante 45°, reposo bajo el resto del ciclo:

6.16.1. DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y SALTO

```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;
Rb=90;
β1=45;
β2=90;
β3=45;

subida1= h (0.38898448(θ/β1)- 0.0309544 Sin[4π θ/β1]);
subida2= h (2.44406184 (θ/β1)^2-0.22203097 (θ/β1)+ 0.00723407);
subida3= h (1.6110154(θ/β1)- 0.0309544 Sin[4π θ/β1-π]-0.3055077);
subida4= h (-2.44406184 (θ/β1)^2+4.6660917 (θ/β1)- 1.2292648);
subida5= h (0.38898448(θ/β1)+ 0.0309544 Sin[4π θ/β1-3π]+0.6110154);

bajada1=h-h (0.38898448((θ-β1-β2)/β3)- 0.0309544 Sin[4π (θ-β1-β2)/β3]);
bajada2=h-h (2.44406184 ((θ-β1-β2)/β3)^2-0.22203097 ((θ-β1-β2)/β3)+ 0.00723407);
bajada3 = h-h (1.6110154((θ-β1-β2)/β3)- 0.0309544 Sin[4π (θ-β1-β2)/β3-π]-0.3055077);
bajada4 = h-h (-2.44406184 ((θ-β1-β2)/β3)^2+4.6660917 ((θ-β1-β2)/β3)- 1.2292648);
bajada5 = h -h (0.38898448((θ-β1-β2)/β3)+ 0.0309544 Sin[4π (θ-β1-β2)/β3-3π]+0.6110154);

s=Piecewise[{{subida1,θ<
β1/8},{subida2,θ<3β1/8},{subida3,θ<5β1/8},{subida4,θ<7β1/8},{subida5,θ<β1},{h,θ<β1+β2}
,{bajada1,θ<β1+β2+
(β3/8)},{bajada2,θ<β1+β2+(3β3/8)},{bajada3,θ<β1+β2+(5β3/8)},{bajada4,θ<β1+β2+(7β3/8)},
{bajada5,θ<β1+β2+β3},{0,θ<360}}];
v=D[s,θ];
a=D[v,θ];
j =D[a,θ];
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle->Thick]
Plot[v,{θ,0,360},PlotRange->All,AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"}, PlotStyle->Red]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a(θ)"}, PlotStyle->Blue]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a(θ)"}]

```

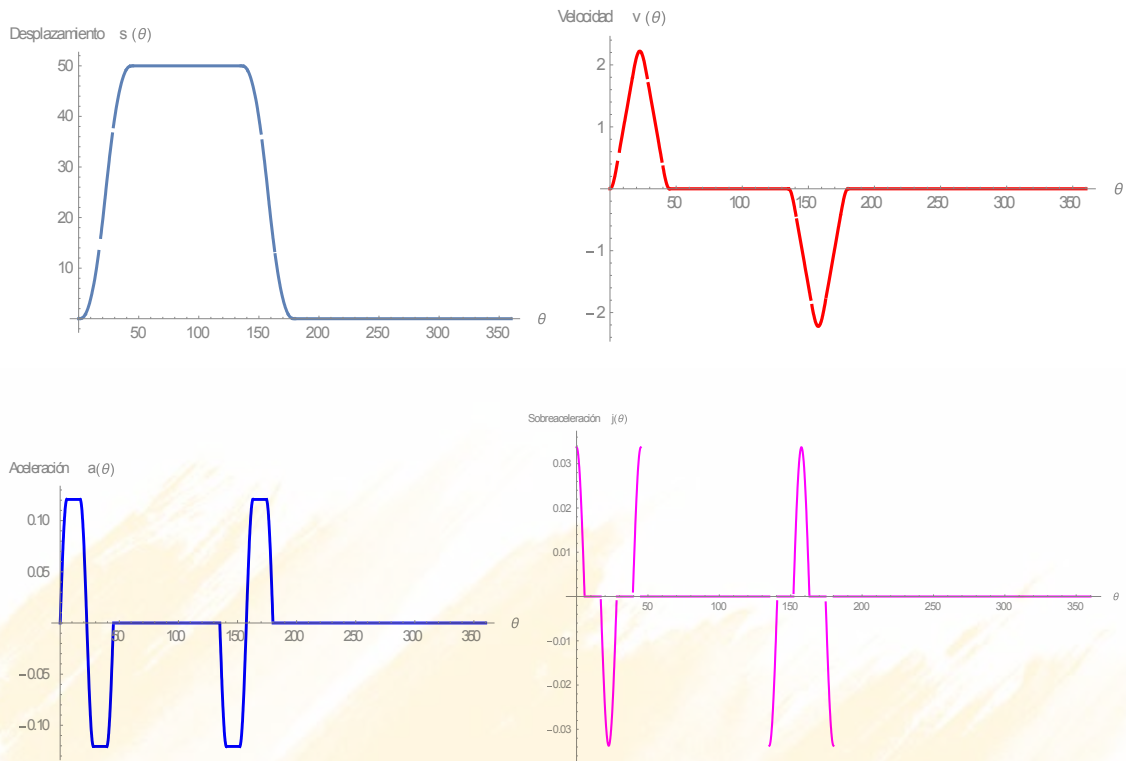



Figura 6.80. Desplazamiento, Velocidad, Aceleración y Sobreactuación

Se verifica el radio base graficando el ángulo de presión, ver Fig. 6.81, que entrega un valor de 168 mm

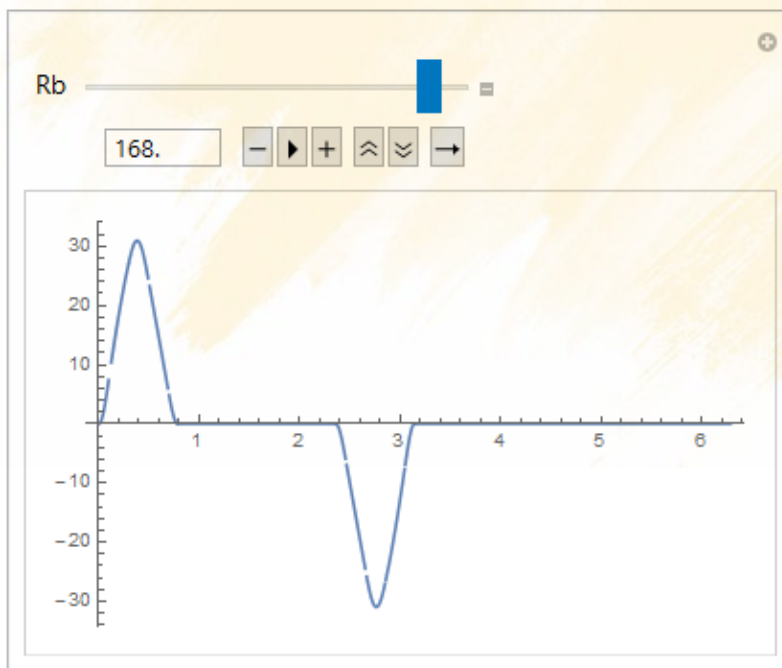


Figura 6.81. Ángulo de presión

Finalmente observamos la velocidad de despegue en la Fig. 6.82, siendo esta de a65 rpm

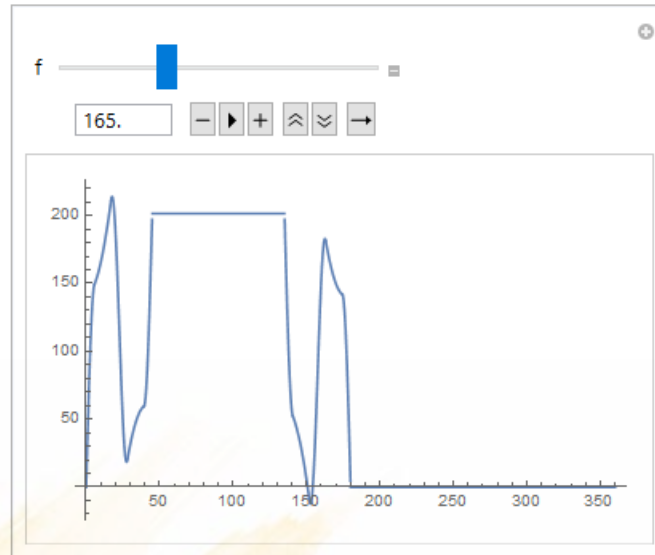


Figura 6.82. Fuerza de contacto

6.17 RESUMEN

En este apartado conviene resumir las características y aplicaciones de las levas analizadas, recalcando como ya se comentó que las leyes uniforme, armónica, parabólica y cúbica no son aplicables. En cuanto a las leyes que sí podrían utilizarse, se recomienda usar la polinomial “3,4,5”, para aplicaciones generales, si se requiere mucha velocidad se podría utilizar la “4,5,6,7” tomando medidas para el despegue como incrementar la duración de los flacos de subida y bajada, considerar la precarga y alivianar el tren cinemático, si la masa a desplazar es grande sería conveniente las leyes combinadas. La leva de Bézier tiene excelentes cualidades dinámicas pero es difícil de aplicar por cuanto no se puede garantizar la temporización exacta. La Tabla 6.1 es un resumen de lo expuesto.

Leva	Aceleración relativa	Sobreaceleración	Radio base mínimo	Velocidad de despegue	Aplicación
uniforme	∞	∞	90 mm		No es aplicable
armónica	0.12	∞	120 mm	195 rpm	Para baja velocidad, genera ruido y vibración
parabólica	0.1	∞			Para baja velocidad, genera ruido y vibración
cúbica	0.3	∞			Para baja velocidad, genera ruido, vibración y despegue
cicloidal	0.156	0.022	180 mm	157 rpm	Alta velocidad, cuidar el despegue
trapezoidal modificada	0.12	0.033	168 mm	165 rpm	Por la baja aceleración sería recomendable para manejar grandes masas
345	0.14	0.031	160 mm	169 rpm	Alta velocidad, resiste el despegue
4567	0.186	0.022	190 mm	144 rpm	Alta velocidad, cuidar el despegue
Bezier	0.067	0.006	90 mm	280 rpm	Muy buenas características dinámicas. Bajo control en la temporización

Tabla 6.1. Cuadro comparativo de levas

6.18 EJERCICIOS DE APLICACIÓN DE LEVAS:

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Determinar las ecuaciones de una leva para la cual se debe cumplir el siguiente ciclo de temporización: Subida 50mm de 0 a 90°, No existe detenimiento alto, bajada de 90 a 180°, detenimiento bajo durante el resto del ciclo. Utilizar ecuaciones polinomiales

Del ciclo de temporización obtenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}\theta = 0 &\Rightarrow s = 0; v = 0; a = 0 \\ \theta = \beta &\Rightarrow s = 0; v = 0; a = 0 \\ \theta = \frac{\beta}{2} &\Rightarrow s = h\end{aligned}$$

Como podemos observar existen 7 condiciones de borde, lo cual implica 7 constantes y el polinomio será de grado 6. El polinomio y sus derivadas serán:

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta}\right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta}\right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta}\right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta}\right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta}\right]^5 + C_6 \left[\frac{\theta}{\beta}\right]^6 \quad (6.96)$$

Reemplazando las condiciones de frontera se obtienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned}C_0 &= 0; C_1 = 0; C_2 = 0 \\ C_3 + C_4 + C_5 + C_6 &= 0 \\ 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 &= 0 \\ 6C_3 + 12C_4 + 20C_5 + 30C_6 &= 0 \\ \frac{C_3}{8} + \frac{C_4}{16} + \frac{C_5}{32} + \frac{C_6}{64} &= h\end{aligned}$$

El sistema se resuelve de la forma conocida:

```
m={{{1, 1, 1, 1}, {4, 5, 6, 7}, {12, 20, 30, 42}, {24, 60, 120, 210}}};
b={{h},{0},{0},{0}};
LinearSolve[m,b]
```

Resolviendo se obtiene

$$\{64h, -192h, 192h, -64h\}$$

```
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=50;Rb=90;β=180;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
s=Piecewise[{{h*(64(θ/β)^3-192(θ/β)^4+192(θ/β)^5-64(θ/β)^6),0<θ<β},{0,β<θ<2 π}}];
v=D[s,θ]; a=D[v,θ]; j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"}],PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"}],PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"}],PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"}],PlotStyle->{Yellow,Thick}]
```

Obteniéndose la Fig. 6.83

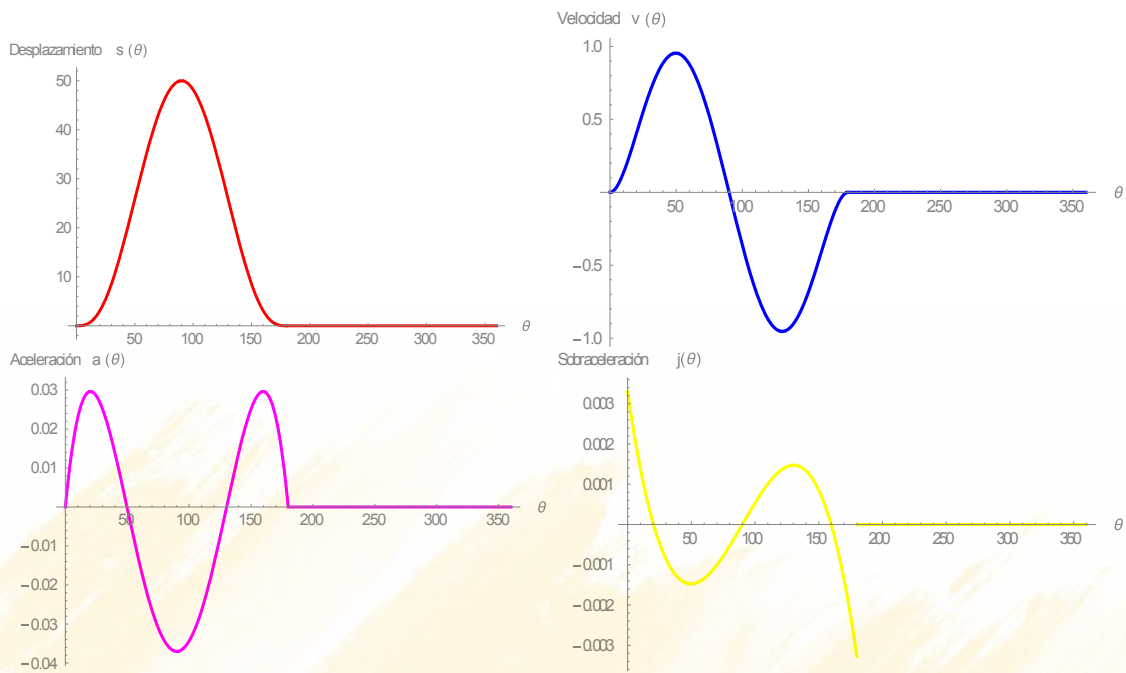


Figura 6.83. Curva, s, v, a, j

El perfil de la leva se observa en la Fig. 6.84

$h=50; R_b=90; \beta=180 \pi/180;$
 $s=\text{Piecewise}[\{\{h*(64(\theta/\beta)^3-192(\theta/\beta)^4+192(\theta/\beta)^5-64(\theta/\beta)^6), 0<\theta<\beta\},\{0,\beta<\theta<2 \pi\}\};$
 $\text{PolarPlot}[s+R_b,\{\theta,0,2\pi\}]$

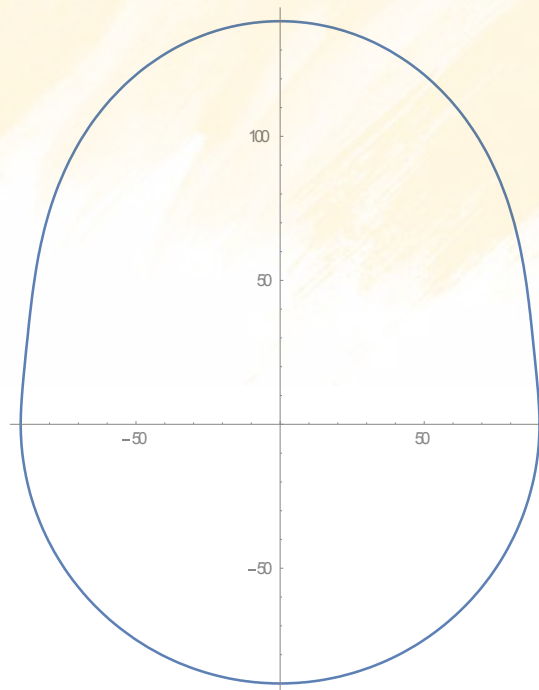


Figura 6.84. Perfil de la leva buscada

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Simular una leva con seguidor oscilante de rodillo en Working Model 2D que efectúe dos oscilaciones de 20° de acuerdo a la siguiente temporización:

Evento	Tiempo (sec.)	Ángulos
Oscilación 20°	5	$(5/60)360^\circ = 30^\circ$
Reposo alto	10	60°
Retorno	5	30°
Reposo bajo	10	60°
Oscilación 20°	5	30°
Reposo alto	10	60°
Retorno	5	30°
Reposo bajo	10	60°
Total	60	360°

Se utilizará la ley polinomial 3,4,5

$$s1(\theta) = h \left[10 \left[\frac{\theta}{\beta1} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta}{\beta1} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta}{\beta1} \right]^5 \right]$$

$$s2(\theta) = h - h \left[10 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2}{\beta3} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2}{\beta3} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2}{\beta3} \right]^5 \right]$$

$$s3(\theta) = h \left[10 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2 - \beta3 - \beta4}{\beta5} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2 - \beta3 - \beta4}{\beta5} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2 - \beta3 - \beta4}{\beta5} \right]^5 \right]$$

$$s4(\theta) = h - h \left[10 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2 - \beta3 - \beta4 - \beta5 - \beta6}{\beta7} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2 - \beta3 - \beta4 - \beta5 - \beta6}{\beta7} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta - \beta1 - \beta2 - \beta3 - \beta4 - \beta5 - \beta6}{\beta7} \right]^5 \right]$$

$$s(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} s1(\theta) \text{ si } \theta \leq \beta1 \\ h \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 \\ s2(\theta) \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 + \beta3 \\ 0 \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 + \beta3 + \beta4 \\ s3(\theta) \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 + \beta3 + \beta4 + \beta5 \\ h \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 + \beta3 + \beta4 + \beta5 + \beta6 \\ s4(\theta) \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 + \beta3 + \beta4 + \beta5 + \beta6 + \beta7 \\ 0 \text{ si } \theta \leq \beta1 + \beta2 + \beta3 + \beta4 + \beta5 + \beta6 + \beta7 + \beta8 \end{array} \right.$$

El archivo es el siguiente:


```

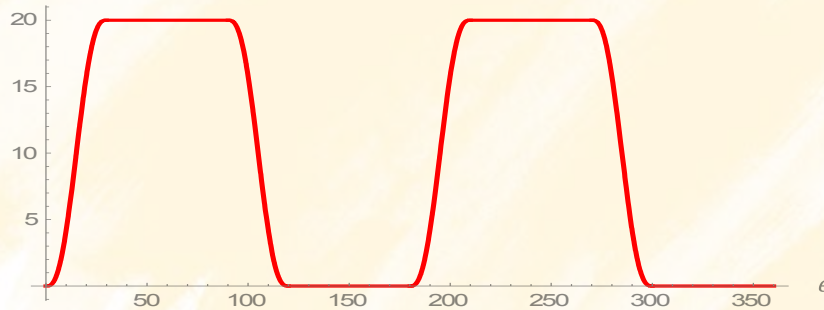
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=20; Rb=100; β1=30 ;β2=60; β3=30; β4=60; β5=30; β6=60; β7=30; β8=60; rodillo=20;
Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)

s1=h (10 *(θ/β1) ^3- 15 *(θ/β1) ^4+6 *(θ/β1) ^5);
s2=h-h (10 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 15 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+6 *((θ-β1-β2)/β3) ^5);
d1 = (θ-β1-β2- β3- β4)/β5;
d2 = (θ-β1-β2- β3- β4- β5- β6)/β7;
s3=h (10 (d1) ^3- 15 (d1) ^4+6 d1 ^5);
s4=h-h (10 (d2) ^3- 15 (d2) ^4+6 d2 ^5);

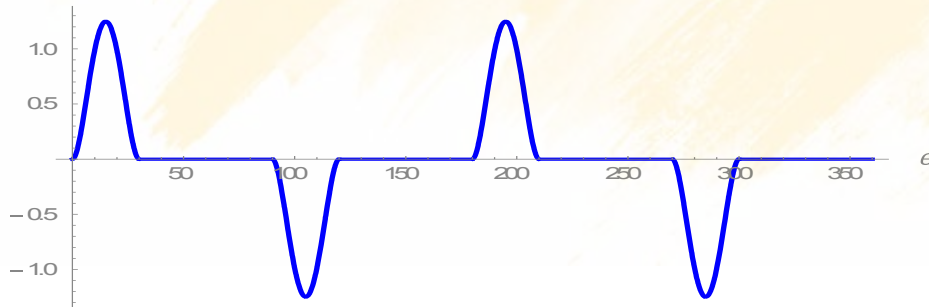
s=Piecewise[{{s1,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{s2,θ<β1+β2+β3},{0,θ< β1+β2+β3+ β4},{s3,θ<
β1+β2+β3+ β4+ β5}, {h,θ< β1+β2+β3+ β4+ β5+ β6}, {s4,θ< β1+β2+β3+ β4+ β5+ β6+
β7},{0,θ< β1+β2+β3+ β4+ β5+ β6+ β7+ β8} }}];
v=D[s,θ]
a=D[v,θ]
j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"}],PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"}],PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"}],PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"}],PlotStyle->{Yellow,Thick}]

```

Desplazamiento $s(\theta)$



Velocidad $v(\theta)$



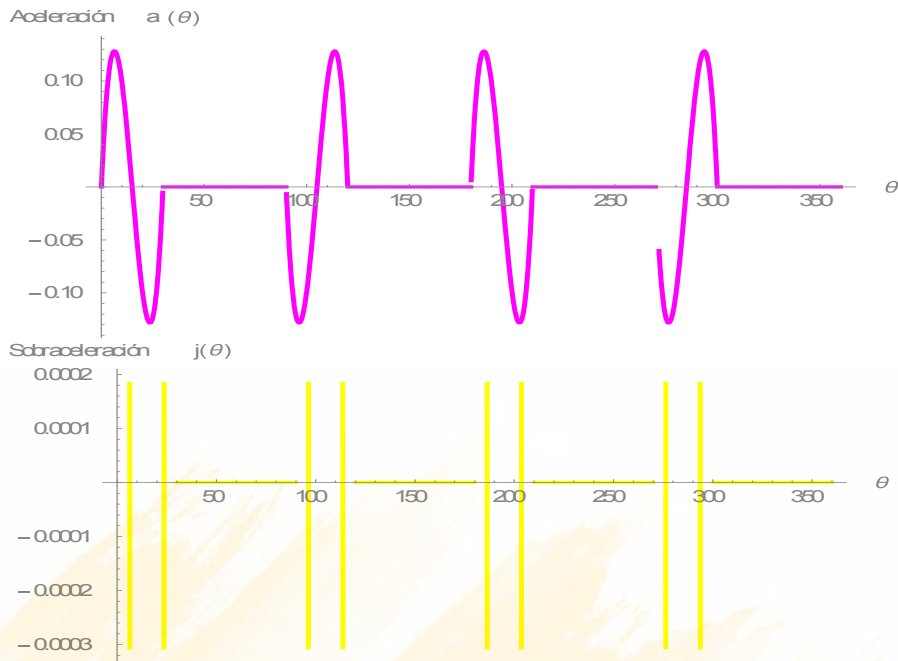


Figura 6.85. Curva s,v,a,j

El perfil de la leva se observa en la Fig. 6.86

```

h=20; Rb=100;
β1= β3= β5= β7=30 π/180;
β2= β4= β6= β8=60 π/180;
rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)

s1=h (10 *(θ/β1) ^3- 15 *(θ/β1) ^4+6 *(θ/β1) ^5);
s2=h-h (10 *((θ-β1-β2)/β3) ^3- 15 *((θ-β1-β2)/β3) ^4+6 *((θ-β1-β2)/β3) ^5);
d1 = (θ-β1-β2- β3- β4)/β5;
d2 = (θ-β1-β2- β3- β4- β5- β6)/β7;
s3=h (10 (d1) ^3- 15 (d1) ^4+6 d1 ^5);
s4=h-h (10 (d2) ^3- 15 (d2) ^4+6 d2 ^5);

s=Piecewise[{{s1,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{s2,θ<β1+β2+β3},{0,θ< β1+β2+β3+
β4},{s3,θ< β1+β2+β3+ β4+ β5}, {h,θ< β1+β2+β3+ β4+ β5+ β6}, {s4,θ< β1+β2+β3+
β4+ β5+ β6+ β7},{0,θ< β1+β2+β3+ β4+ β5+ β6+ β7+ β8} }];

PolarPlot[s+Rb,{θ,0,2π}]

```

El perfil de la leva de seguidor de rodillo radial es:

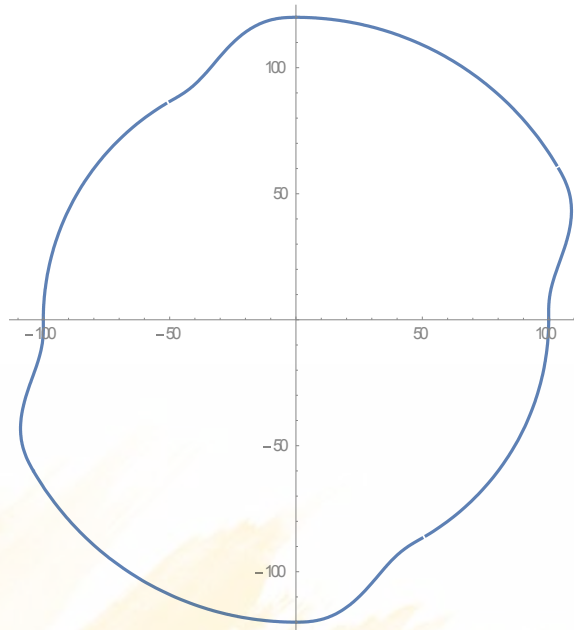


Figura 6.86. Perfil leva con seguidor de rodillo radial

El perfil de la leva oscilante de rodillo y sus ecuaciones corresponden a las ecuaciones 6.8 a 6.15, donde dadas las medidas de longitud del seguidor L , distancia entre centro S , Radio base R_b , radio del rodillo r_0 . Los datos son $L = 250\text{mm}$, $S = 320\text{mm}$, $r_0 = 20\text{ mm}$, $R_b = 150\text{mm}$

$$\phi = \phi(\theta)$$

$$R_0 = R_b + r_0$$

$$\xi = \cos^{-1} \left(\frac{L^2 + S^2 - R_0^2}{2 L S} \right)$$

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{S^2 + R_0^2 - L^2}{2 S R_0} \right)$$

$$R = R(\theta) = \sqrt{L^2 + S^2 - 2 L S \cos \left(\phi \frac{\pi}{180} + \xi \right)}$$

$$\Gamma = \Gamma(\theta) = \cos^{-1} \left(\frac{S^2 + R^2 - L^2}{2 R S} \right)$$

$$\Theta = \Theta(\theta) = \theta \frac{\pi}{180} - \beta + \Gamma$$

$$r = r(\theta) = R - r_0$$

La plantilla en Mathematica es la siguiente:

```

h=20;Rb=150; rodillo = 20;
Ro = Rb+rodillo;
L = 250;
S = 320;
ξ= ArcCos[(L^2+S^2-Ro^2)/(2 L S)];
β= ArcCos[(S^2+Ro^2-L^2)/(2 S Ro)];
β1=β3=β5=β7=30 π/180;
β2=β4=β6=β8=60 π/180;
rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
s1=h (10*(θ/β1)^3-15*(θ/β1)^4+6*(θ/β1)^5);
s2=h-h (10*((θ-β1-β2)/β3)^3-15*((θ-β1-β2)/β3)^4+6*((θ-β1-β2)/β3)^5);
d1=(θ-β1-β2-β3-β4)/β5;
d2=(θ-β1-β2-β3-β4-β5-β6)/β7;
s3=h (10 (d1)^3-15 (d1)^4+6 d1^5);
s4=h-h (10 (d2)^3-15 (d2)^4+6 d2^5);
s=Piecewise[{{s1,θ<β1},{h,θ<β1+β2},{s2,θ<β1+β2+β3},{0,θ<β1+β2+β3+β4},{s3,θ<β1+β2+β3+β4+β5},{h,θ<β1+β2+β3+β4+β5+β6},{s4,θ<β1+β2+β3+β4+β5+β6+β7},{0,θ<β1+β2+β3+β4+β5+β6+β7+β8}}];
R = Sqrt[ L^2 + S^2 - 2 L S Cos[(s \[Pi]/180) + \[Xi]] ];
Γ= ArcCos[(S^2+ R^2-L^2)/(2 R S)];
x=(R-rodillo) Cos[θ-β+Γ];
y=(R-rodillo) Sin[θ-β+Γ];
ParametricPlot[{x,y},{θ,0,2 π}]

```

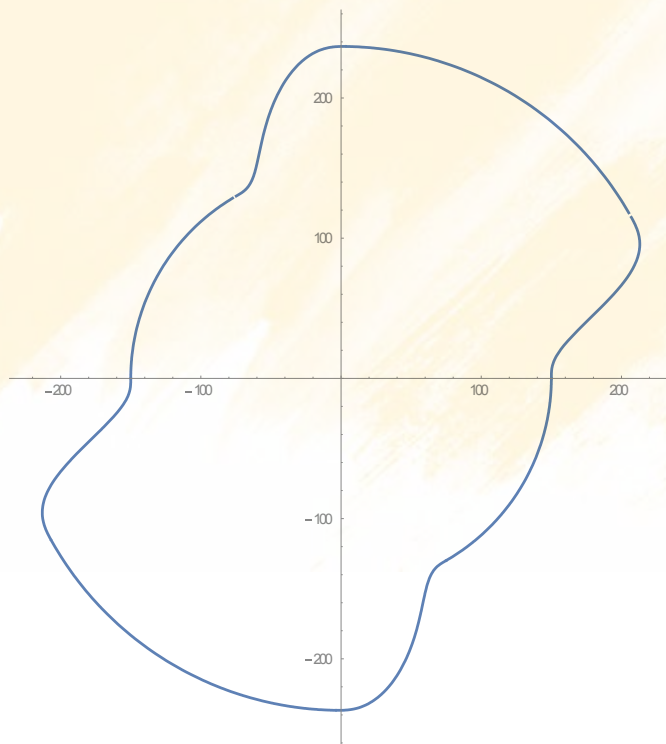


Figura 6.87. Perfil de leva oscilante de rodillo

Para obtener la tabla de datos correspondiente en Excel, se añade al fichero anterior las siguientes líneas:

```
levaoscilX=Table[x,{0,0,2π,0.01}]
levaoscilY=Table[y,{0,0,2π,0.01}]
(*Exportación*)
Export["levaoscilX.xls",levaoscilX]
Export["levaoscilY.xls",levaoscilY]
```

Siguiendo los pasos descritos anteriormente se crean dos columnas en Excel

	A	B
1	150	-1.7E-14
2	149.9983	1.500708
3	150.0154	3.005946
4	150.081	4.520921
5	150.2211	6.051377
6	150.4578	7.603364
7	150.8096	9.183016
8	151.2913	10.79634
9	151.9148	12.44904
10	152.6888	14.14633
11	153.619	15.89282
12	154.7086	17.69239
13	155.9581	19.54815
14	157.3658	21.46231
15	158.928	23.43626
16	160.6387	25.47048
17	162.4901	27.56462

Figura 6.87. Columnas x & y de datos

En base a este archivo de texto creamos la leva en WorkingModel2D, ver Fig. 6.88

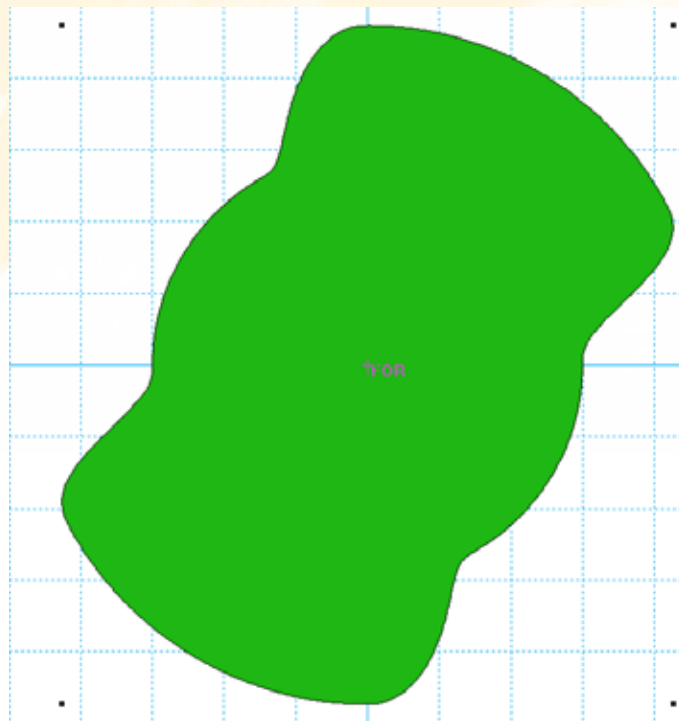


Figura 6.88. Leva en Working Model 2D

Para dibujar el seguidor se exporta este dibujo al AutoCAD con extensión "dxf". En el AutoCAD se dibuja el radio primario R_o , circunferencia en la cual se dibuja el rodillo, desde el centro de la leva se traza un arco con radio S y desde el centro del rodillo un arco con radio L .

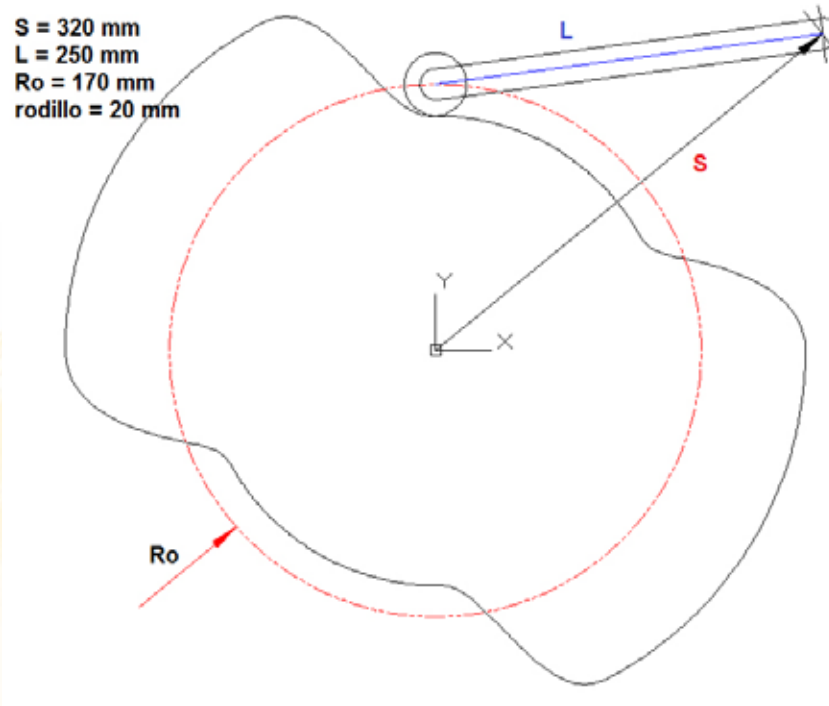


Figura 6.89. Leva en AutoCAD

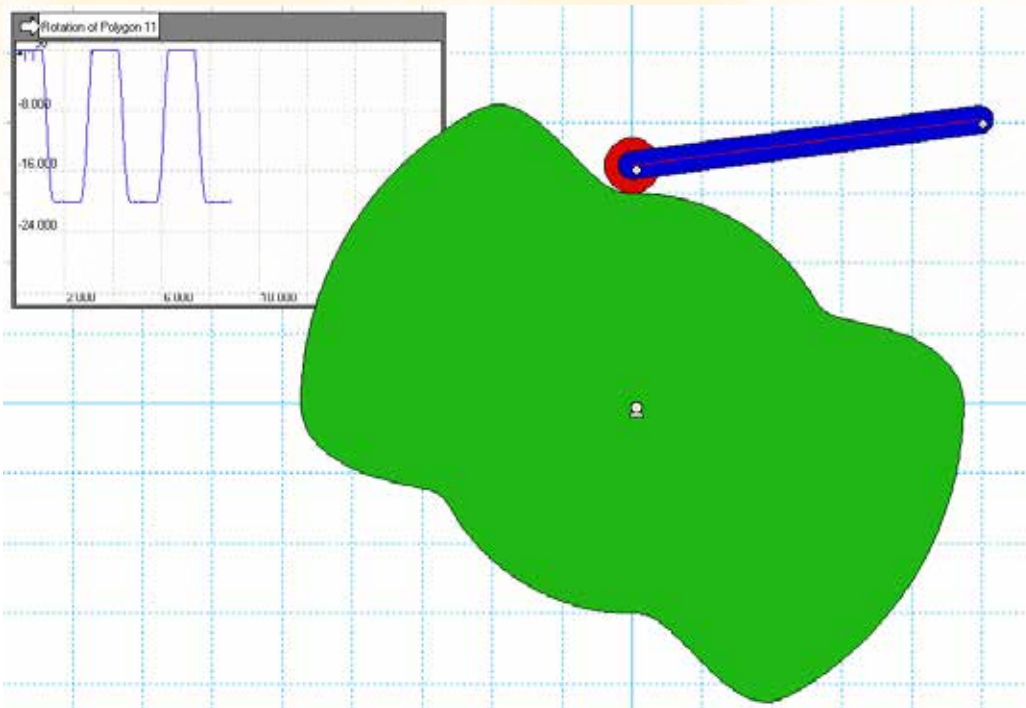


Figura 6.90. Simulación en Working Model 2D

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Un fabricante de calzado para atletismo desea efectuar el control de calidad de su producción, mediante un dispositivo que pruebe tacones de goma, en su capacidad de resistir millones de ciclos de fuerza semejantes a los que un pie humano al andar aplica al suelo. En la figura se indica una función típica fuerza - tiempo de un andador, y una gráfica de presión - volumen para un acumulador de pistón. Diseñe un sistema leva - seguidor que accione al pistón de manera que genere una función fuerza - tiempo entre el talón semejante a la mostrada. Deben elegirse diámetros de pistón adecuados para cada extremo.³⁵

FUERZA DE ANDAR HUMANA

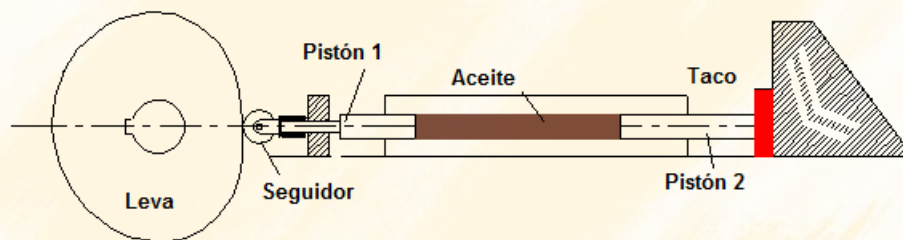
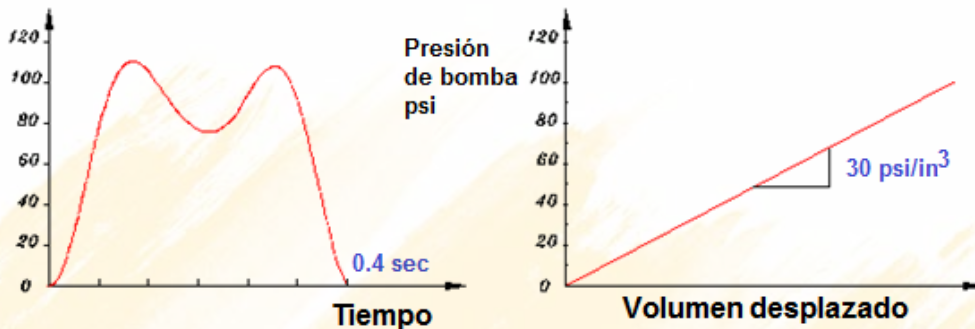


Figura 6.91. Requisitos del mecanismo para ensayo de tacones de zapatos

De acuerdo a la curva presión vs. volumen se debe escoger el factor de escala para obtener una curva de desplazamiento del seguidor vs. tiempo.

$$\text{Fuerza en el talón} / \text{Área del pistón} = 30 \text{ Volumen desplazado}$$

$$F / A_2 = 30 A_1 x$$

$$x = F / (30 A_1 A_2)$$

Suponiendo un diámetro del pistón₂ de 50 mm se tiene un área $A_2 = 1963 \text{ mm}^2$ y si se cuenta con un diámetro del pistón₁ de 25 mm se tiene un $A_1 = 490.74 \text{ mm}^2$, de donde se obtiene como factor de conversión que la fuerza puede ser traducida a mm:

$$x = F / 74$$

Y por lo tanto el diagrama de desplazamiento del seguidor corresponde al siguiente gráfico, ver Fig. 6.92:

³⁵ Ejercicio propuesto del Libro Diseño de Maquinaria de Robert L. Norton , pág. 435

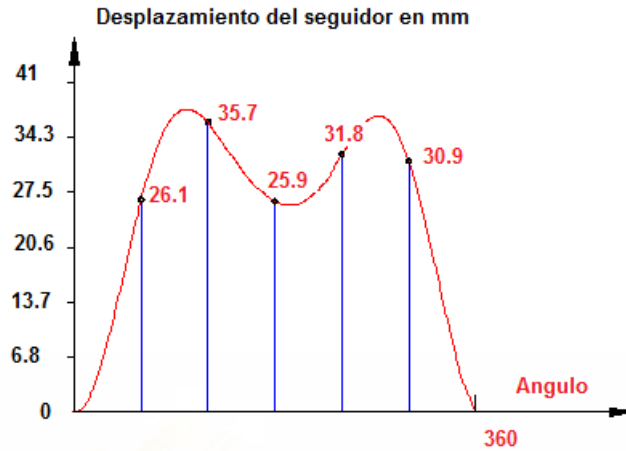


Figura 6.92. Desplazamiento del seguidor

Con este gráfico se obtiene la ecuación $s(\theta)$, utilizando el método polinomial, para lo cual se reemplazan las siguientes condiciones de frontera:

Desplazamiento	0	26.1	35.7	25.9	31.8	30.9	0
ángulo	0	60	120	180	240	300	360

Puesto que tenemos siete condiciones de frontera el polinomio debe tener siete constantes:

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta} \right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^5 + C_6 \left[\frac{\theta}{\beta} \right]^6 \quad (6.97)$$

Reemplazando las condiciones de frontera en el polinomio, se obtiene siete ecuaciones con siete incógnitas:

$$\begin{aligned} 0 &= C_0 + C_1[0] + C_2[0]^2 + C_3[0]^3 + C_4[0]^4 + C_5[0]^5 + C_6[0]^6 \\ 26.1 &= C_1 \left[\frac{1}{6} \right] + C_2 \left[\frac{1}{6} \right]^2 + C_3 \left[\frac{1}{6} \right]^3 + C_4 \left[\frac{1}{6} \right]^4 + C_5 \left[\frac{1}{6} \right]^5 + C_6 \left[\frac{1}{6} \right]^6 \\ 35.7 &= C_1 \left[\frac{2}{6} \right] + C_2 \left[\frac{2}{6} \right]^2 + C_3 \left[\frac{2}{6} \right]^3 + C_4 \left[\frac{2}{6} \right]^4 + C_5 \left[\frac{2}{6} \right]^5 + C_6 \left[\frac{2}{6} \right]^6 \\ 25.9 &= C_1 \left[\frac{3}{6} \right] + C_2 \left[\frac{3}{6} \right]^2 + C_3 \left[\frac{3}{6} \right]^3 + C_4 \left[\frac{3}{6} \right]^4 + C_5 \left[\frac{3}{6} \right]^5 + C_6 \left[\frac{3}{6} \right]^6 \\ 31.8 &= C_1 \left[\frac{4}{6} \right] + C_2 \left[\frac{4}{6} \right]^2 + C_3 \left[\frac{4}{6} \right]^3 + C_4 \left[\frac{4}{6} \right]^4 + C_5 \left[\frac{4}{6} \right]^5 + C_6 \left[\frac{4}{6} \right]^6 \\ 30.9 &= C_1 \left[\frac{5}{6} \right] + C_2 \left[\frac{5}{6} \right]^2 + C_3 \left[\frac{5}{6} \right]^3 + C_4 \left[\frac{5}{6} \right]^4 + C_5 \left[\frac{5}{6} \right]^5 + C_6 \left[\frac{5}{6} \right]^6 \\ 0 &= C_1 \left[\frac{6}{6} \right] + C_2 \left[\frac{6}{6} \right]^2 + C_3 \left[\frac{6}{6} \right]^3 + C_4 \left[\frac{6}{6} \right]^4 + C_5 \left[\frac{6}{6} \right]^5 + C_6 \left[\frac{6}{6} \right]^6 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones mediante

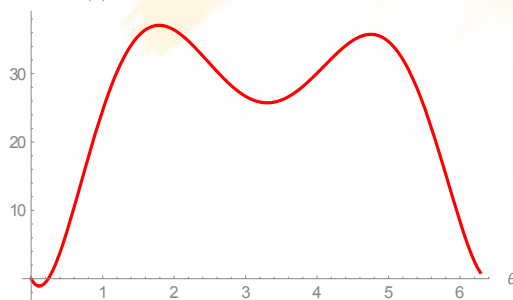
```
m={
  {1/6, (1/6)^2, (1/6)^3, (1/6)^4, (1/6)^5, (1/6)^6},
  {1/3, (1/3)^2, (1/3)^3, (1/3)^4, (1/3)^5, (1/3)^6},
  {1/2, (1/2)^2, (1/2)^3, (1/2)^4, (1/2)^5, (1/2)^6},
  {2/3, (2/3)^2, (2/3)^3, (2/3)^4, (2/3)^5, (2/3)^6},
  {5/6, (5/6)^2, (5/6)^3, (5/6)^4, (5/6)^5, (5/6)^6},
  {1, 1, 1, 1, 1, 1}
};
b={ {26.1},{35.7},{25.9},{31.8},{30.9},{0}};
LinearSolve[m,b]
```

Y la solución es:

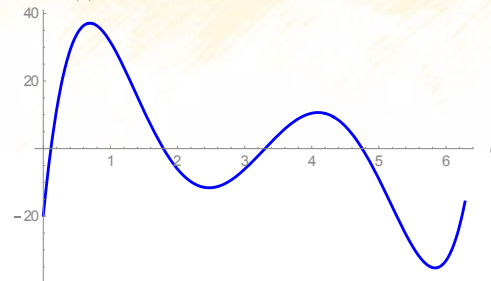
```
{{-123.92},
 {3905.45},
 {-18472.95},
 {35709.3},
 {-30899.88},
 {9882}}
```

```
Clear["Global`*"]
(*Datos*)
β=2π; Rb = 50
(*Ecuaciones*)
s=-123.92(θ/β)^1+3905.45(θ/β)^2-18472(θ/β)^3+35709.3(θ/β)^4-30899.9(θ/β)^5+9882(θ/β)^6
v=D[s,θ]
a=D[v,θ]
j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,2π},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,2π},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"},PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,2π},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"},PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,2π},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"},PlotStyle->{Yellow,Thick}]
PolarPlot[s+Rb,{θ,0,2π}]
```

Desplazamiento $s(\theta)$



Velocidad $v(\theta)$



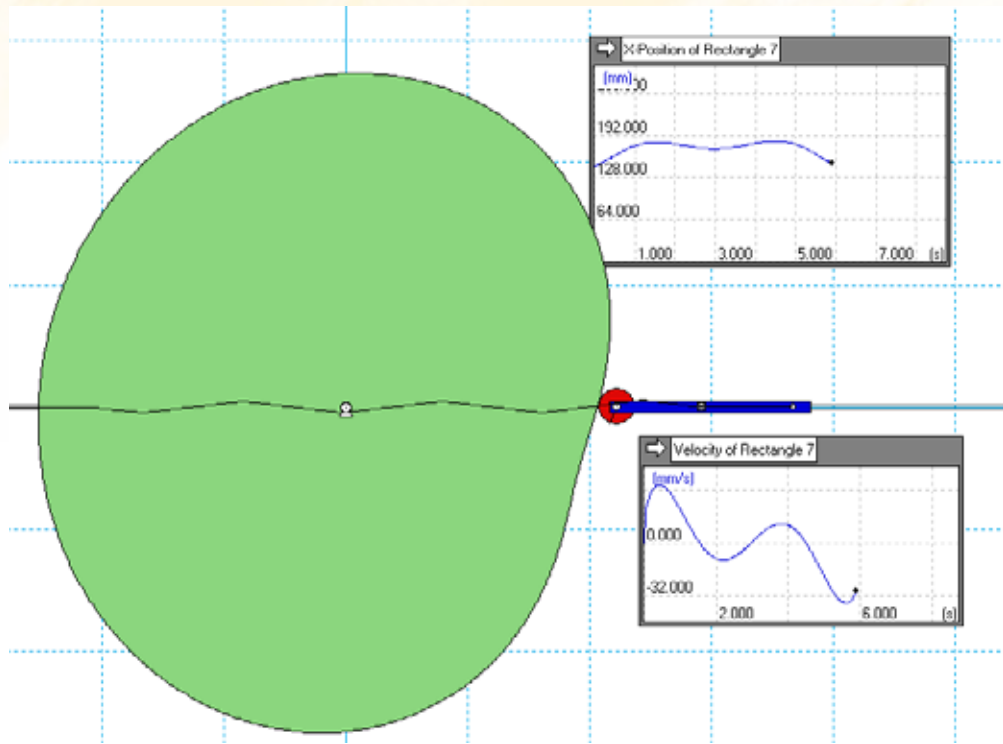
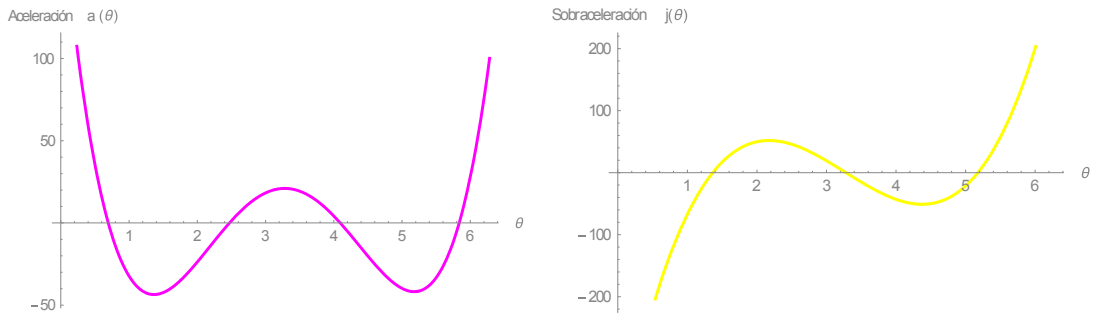


Figura 6.93. Diagramas s,v,a,j, perfil de la leva y simulación

EJERCICIO DE APLICACIÓN: Se desea diseñar una máquina accionada por leva para envasar jugo de frutas en botellas que se desplazan por una banda transportadora que está en movimiento constante, la velocidad de la banda es de 10 mm/seg, el tiempo de llenado es de 10 seg, durante el cual el seguidor deberá estar alineado con la botella permanentemente. Y el tiempo total del ciclo llenar y alinearse es de 15 seg.³⁶

Se identifican dos eventos, uno en el cual el seguidor “persigue” a la botella sobre la banda ejecutando el proceso de llenado que será un desplazamiento a velocidad constante que debe conjugarse con un polinomio que controla el retorno del seguidor

Datos:

$$velocidad_{banda} = 10 \text{ mm/seg}; t_{llenado} = 10; t_{ciclo} = 15$$

Con estos tiempos se obtienen la duración de los eventos

$$\beta_1 = 360 \frac{t_{llenado}}{t_{ciclo}} = 360 \frac{10}{15} = 240^\circ$$

$$\beta_2 = 360 - \beta_1 = 120^\circ$$

Frecuencia angular de la leva:

La frecuencia de la leva se la calcula con el t_{ciclo}

$$\omega = \frac{1 \text{ rev}}{15 \text{ sec}} \frac{60 \text{ sec}}{1 \text{ min}} = 4 \text{ rpm}$$

Tramo de velocidad constante:

En este tramo se determinan las expresiones respectivas del desplazamiento del seguidor en el tramo de llenado de la botella.

$$h = velocidad_{banda} t_{llenado} = 10 \frac{\text{mm}}{\text{sec}} 10 \text{ sec} = 100 \text{ mm}$$

En este caso se utilizará la ley uniforme:

$$s1(\theta) = h \frac{\theta}{\beta_1}$$

³⁶ Ejercicio propuesto del Libro Diseño de Maquinaria de Robert L. Norton , pág. 436

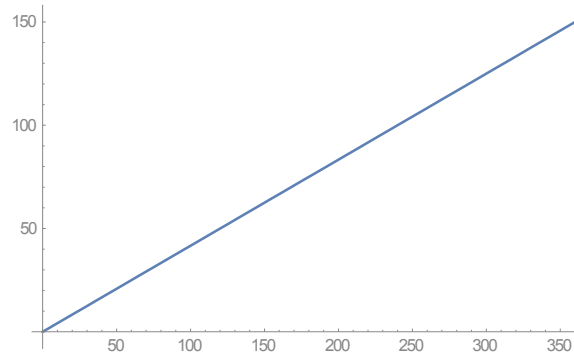


Figura 6.94. Diagramas s1

$$v1(\theta) = \frac{h}{\beta_1}$$

$$a1(\theta) = 0$$

Tramo polinomial de retorno

El retorno del seguidor para alinearse nuevamente con la botella debe ser polinomial para mantener las condiciones de continuidad en el desplazamiento, velocidad y aceleración en base del análisis del tramo de velocidad constante se escogen las condiciones de frontera para el seguidor.

$$\begin{array}{ll} \theta = 0, s = h & \theta = \beta_2, s = 0 \\ \theta = 0, v = \frac{h}{\beta_1} & \theta = \beta_2, v = \frac{h}{\beta_1} \\ \theta = 0, a = 0 & \theta = \beta_2, a = 0 \end{array}$$

Puesto que se tienen 6 condiciones de frontera, el polinomio será de 6 constantes:

$$s(\theta) = C_0 + C_1 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right] + C_2 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^2 + C_3 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^3 + C_4 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^4 + C_5 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^5$$

$$v(\theta) = \frac{1}{\beta_2} \left[C_1 + 2 C_2 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^1 + 3 C_3 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^2 + 4 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^3 + 5 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^4 \right]$$

$$a(\theta) = \frac{1}{\beta_2^2} \left[2 C_2 + 6 C_3 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^1 + 12 C_4 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^2 + 20 C_5 \left[\frac{\theta}{\beta_2} \right]^3 \right]$$

Reemplazando las condiciones de frontera en las ecuaciones polinomiales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$h = C_0 + C_1[0] + C_2[0]^2 + C_3[0]^3 + C_4[0]^4 + C_5[0]^5$$

$$\frac{h}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2} [C_1 + 2 C_2[0]^1 + 3 C_3[0]^2 + 4 C_4[0]^3 + 5 C_5[0]^4]$$

$$0 = \frac{1}{\beta_2^2} [2 C_2 + 6 C_3[0]^1 + 12 C_4[0]^2 + 20 C_5[0]^3]$$

De estas tres ecuaciones se desprende que:

$$C_0 = h, \quad C_1 = h \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad C_2 = 0$$

De igual manera en β_2 :

$$0 = h + h \frac{\beta_2}{\beta_1} + C_3 + C_4 + C_5$$

$$\frac{h}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_2} \left[h \frac{\beta_2}{\beta_1} + 3 C_3 + 4 C_4 + 5 C_5 \right]$$

$$0 = \frac{1}{\beta_2^2} [0 + 6 C_3 + 12 C_4 + 20 C_5]$$

El sistema de ecuaciones se resuelve en forma matricial

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -h - h \times \frac{\beta_2}{\beta_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

`LinearSolve[m, b]`

$$C_3 = -\frac{10h(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1}, \quad C_4 = \frac{15h(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1}, \quad C_5 = -\frac{6h(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1}$$

Con lo cual se puede determinar las funciones cinemáticas de la leva

Expresiones y gráficos s, v, a, j del seguidor

$$s1(\theta) = h \frac{\theta}{\beta_1}$$

$$s2(\theta) = h + h \frac{\beta_2}{\beta_1} \left[\frac{\theta - \beta_1}{\beta_2} \right] - \frac{10h(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1} \left[\frac{\theta - \beta_1}{\beta_2} \right]^3 + \frac{15h(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1} \left[\frac{\theta - \beta_1}{\beta_2} \right]^4 - \frac{6h(\beta_1 + \beta_2)}{\beta_1} \left[\frac{\theta - \beta_1}{\beta_2} \right]^5$$

```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=100;Rb=20;β1=240;β2=120;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
s=Piecewise[{{h*(θ/β1),θ<β1},
{h+(h (β2/β1))((θ-β1)/β2)-(10h(β1+β2))/β1 ((θ-β1)/β2)^3+(15h(β1+β2))/β1 ((θ-β1)/β2)^4-
(6h(β1+β2))/β1 ((θ-β1)/β2)^5,β1<θ<360}}];
v=D[s,θ]
a=D[v,θ]
j=D[a,θ]
Plot[s,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Desplazamiento s (θ)"},PlotStyle->{Red,Thick}]
Plot[v,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Velocidad v (θ)"},PlotStyle->{Blue,Thick}]
Plot[a,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Aceleración a (θ)"},PlotStyle->{Magenta,Thick}]
Plot[j,{θ,0,360},AxesLabel->{" θ "," Sobraceleración j(θ)"},PlotStyle->{Yellow,Thick}, PlotRange->All]

```

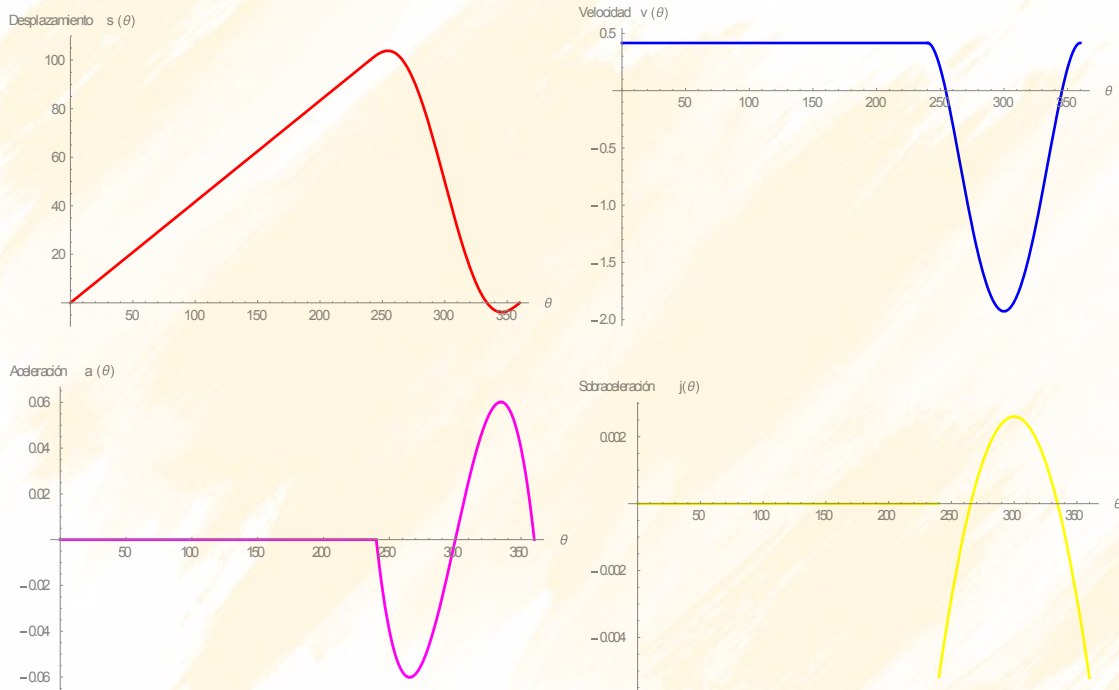


Figura 6.95. Diagramas s, v, a, j

Angulo de Presión.

Para determinar el menor tamaño posible de la leva nos valemos del ángulo de presión el cual no debe superar los 30°

```

ε = 0;
Num=v(180/π)-ε;
Den=s+Sqrt[Rp^2-ε^2];
φ=ArcTan[Num/Den];
Plot[{φ 180/π},{θ,0,360},PlotRange->Full]

```

El radio base es 20 mm

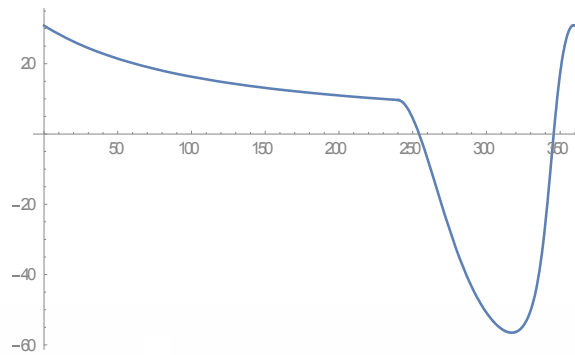


Figura 6.96. Ángulo de presión

Radio de curvatura.

Para determinar si la medida del radio del rodillo es correcta, analizamos la ecuación del radio de curvatura

```

Num1=((Rp+s)^2+(v 180/π)^2)^(3/2);
Den1=(Rp+s)^2+(v 180/π)^2-a ((180/π)^2)(Rp+s);
ρ=Abs[Num1/Den1];
Plot[{ρ},{θ,0,360}]

```

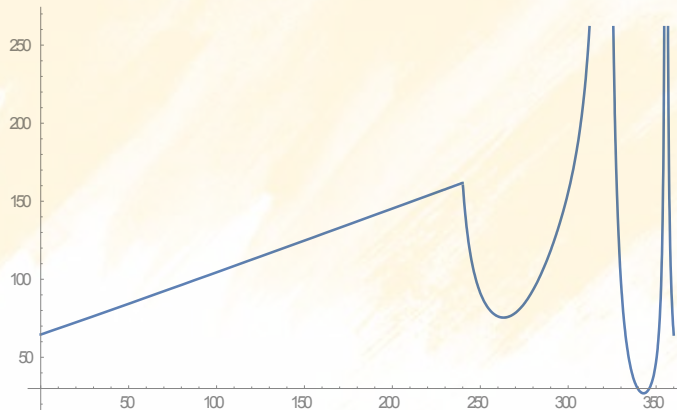


Figura 6.97. Radio de curvatura

El radio mínimo de curvatura es mayor que el radio del rodillo de 20 mm, utilizando un radio base de 40 mm

Perfil de la leva.


```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
h=100;Rb=40;β1=240 π/180 ;β2=120 π/180 ;rodillo=20;Rp=Rb+rodillo;
(*Ecuaciones*)
s=Piecewise[{{h*(θ/β1),θ<β1},{h+(h (β2/β1))((θ-β1)/β2)-(10h(β1+β2))/β1 ((θ-β1)/β2)^3+(15h(β1+β2))/β1 ((θ-β1)/β2)^4-(6h(β1+β2))/β1 ((θ-β1)/β2)^5,β1<θ<2π}}];
PolarPlot[s+Rb,{θ,0,2 π},AxesLabel->{" θ ", " Rb + s(θ)"},PlotStyle->{Blue,Thick}]

```

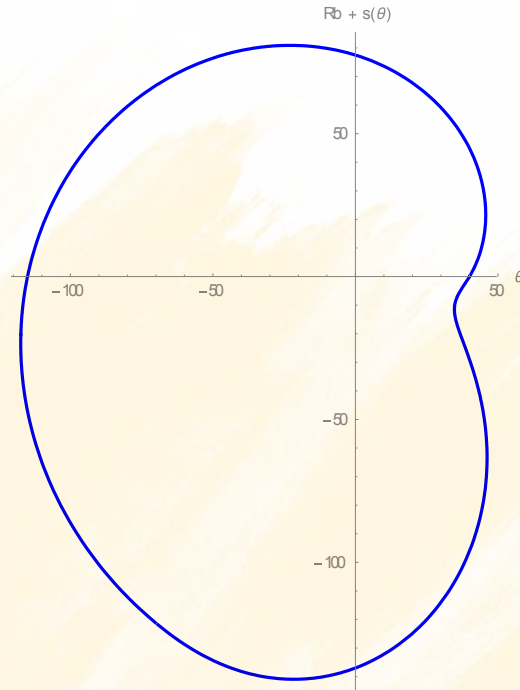


Figura 6.98. Perfil de la leva

La forma de la leva es la indicada en la figura y de la forma anteriormente descrita podemos hacer la simulación en WorkingModel 2D.

```

levabanda=Table[Rb+s,{θ,0,2π,0.01}]
(*Exportación*)
Export["levabanda.xls",levabanda]

```

Que genera la tabla siguiente

40	0
40.23873	0.01
40.47746	0.02
40.7162	0.03
40.95493	0.04
41.19366	0.05
41.43239	0.06

41.67113 0.07
41.90986 0.08
42.14859 0.09

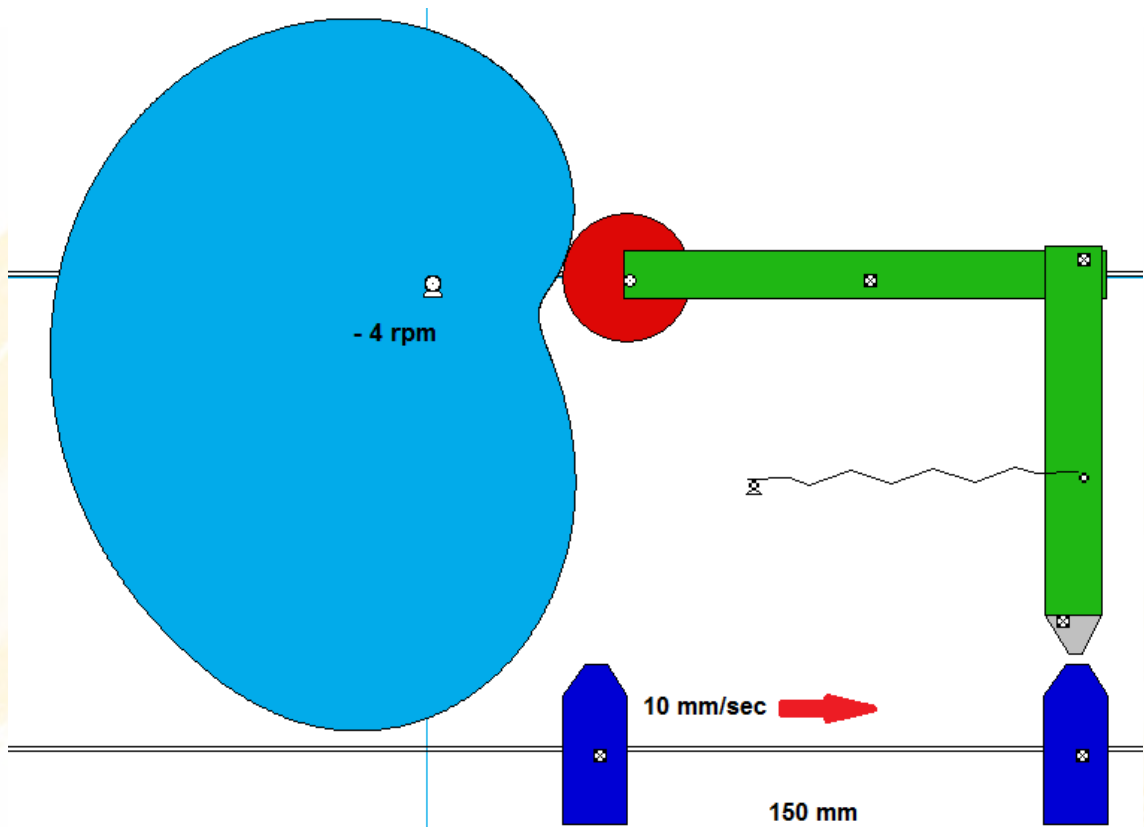


Figura 6.99. Simulación Working Model 2D

6.19 DISEÑO DE UN MECANISMO INVERSO LEVA SEGUIDOR

La leva inversa es una aplicación en la cual se invierten las funciones de los elementos, es decir el motor se encuentra ahora en el seguidor que impulsa a la leva. En este apartado se va a determinar el procedimiento para diseñar una leva inversa. Para determinar las ecuaciones que gobiernan el perfil de la leva se deben utilizar las técnicas de inversión cinemática. El arreglo físico del sistema está indicado en la Fig. 6.100. Donde ϑ es la entrada del movimiento y φ es la función arbitraria que involucra subidas, bajadas y reposos.

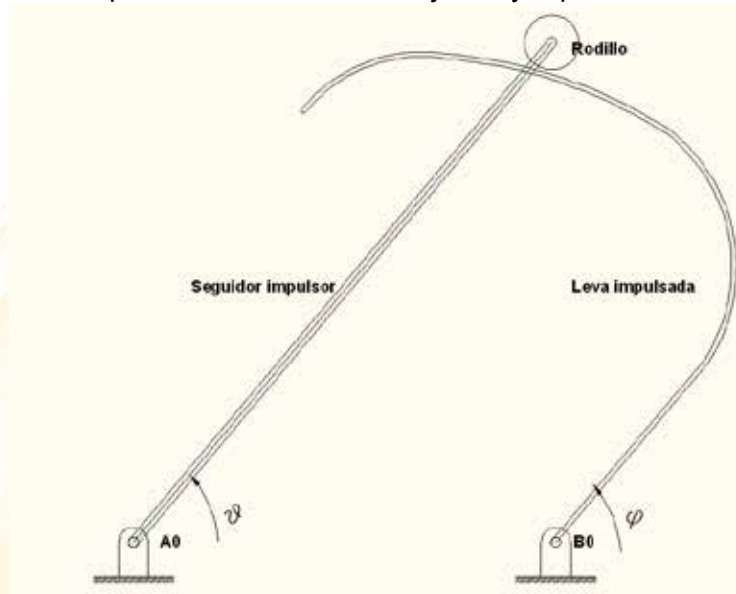


Figura 6.100. Modelado del mecanismo leva seguidor invertido

La inversión cinemática consiste en seleccionar otro eslabón fijo o de referencia como se indica en la Fig. 6.101. Se observa inicialmente una cadena de cuatro eslabones el seguidor impulsor 2, la leva impulsada 4, el rodillo 3 y la tierra 1. Para determinar el perfil, la tierra se constituye en un eslabón 4 cuya entrada es la función arbitraria φ , el seguidor tiene entrada angular constante ϑ y la leva impulsada pasa a ser el eslabón fijo.

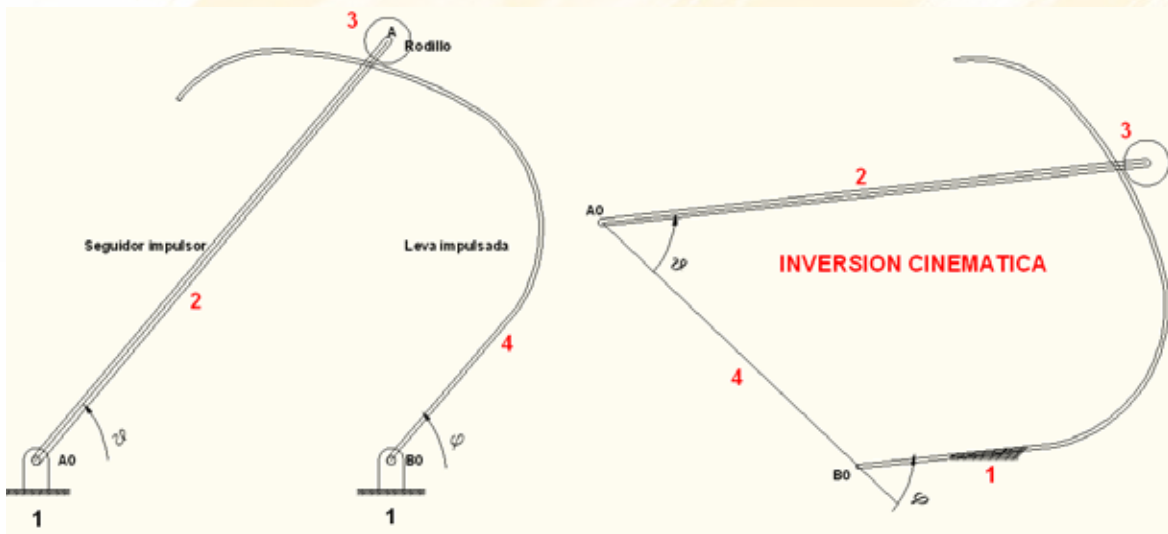


Figura 6.101. Inversión del mecanismo

Utilizando la técnica de circuitos vectoriales, Ec.6.97 sobre los eslabones de un mecanismo, se plantea el siguiente lazo definido en la Fig. 6.102

$$\vec{r}_A = \vec{r}_4 + \vec{r}_2 \quad (6.97)$$

La notación compleja genera:

$$\vec{r}_A = r_4 e^{i(180-\varphi)} + r_2 e^{i\alpha} \quad (6.98)$$

Según la Fig. 6.102 $\alpha = \vartheta - \varphi$:

$$\vec{r}_A = r_4 e^{i(180-\varphi)} + r_2 e^{i[\vartheta - \varphi]} \quad (6.99)$$

Donde $r_4 = A_0B_0$ y $r_2 = A_0A$

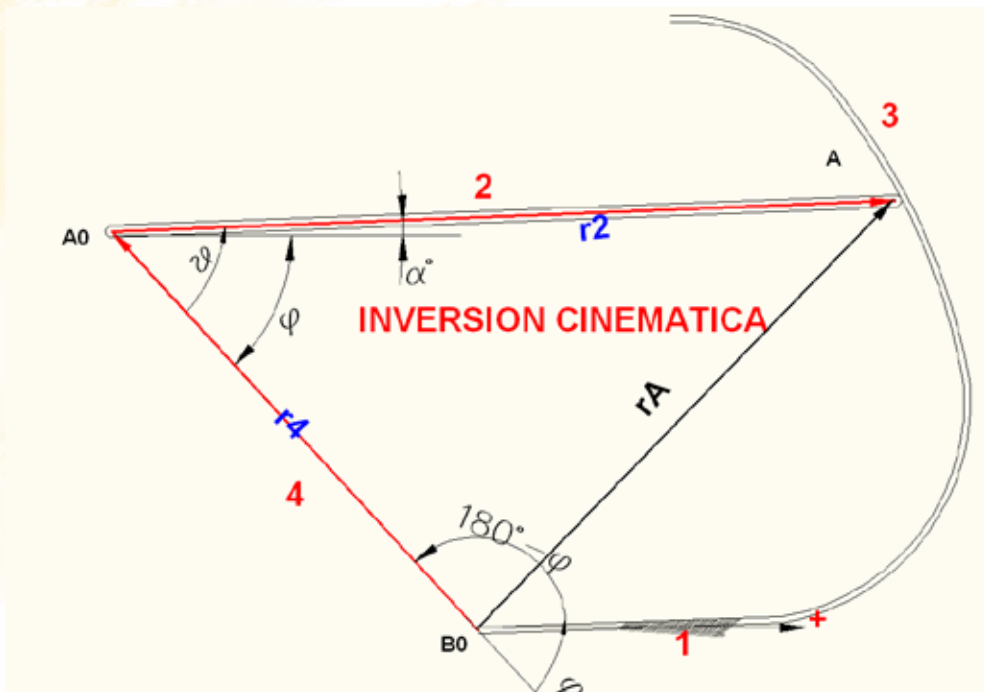


Figura 6.102. Circuito vectorial para el cálculo del perfil

Se diseñara una leva inversa que genere la siguiente función arbitraria φ : Subida, reposo, bajada, reposo efectuando una oscilación de 15° . Donde $\varphi_0 = 15^\circ$ es el ángulo de oscilación y $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 30^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$ son la duración de los eventos de subida, reposo y bajada respectivamente. El parámetro de entrada ϑ corresponderá a media vuelta del seguidor impulsor.

Se utiliza para los enlaces las funciones polinomiales “3,4,5”, compuesto de la subida s_1 , el reposo alto s_2 y la bajada s_3

$$s_1(\theta) = \varphi_0 \left[10 \left[\frac{\theta}{\beta_1} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta}{\beta_1} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta}{\beta_1} \right]^5 \right] \quad (6.100)$$

$$s_2(\theta) = \varphi_0 \quad (6.101)$$

$$s_3(\theta) = \varphi_0 - \varphi_0 \left[10 \left[\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right]^3 - 15 \left[\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right]^4 + 6 \left[\frac{\theta - \beta_1 - \beta_2}{\beta_3} \right]^5 \right] \quad (6.102)$$

Graficando las ecuaciones discontinuas 6.100 a 6.102 se obtiene, Fig. 6.103

```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
φ0=15;β1=60;β2=30;β3=30;
(*Ecuaciones*)
subida=φ0 (10*(θ/β1)^3-15*(θ/β1)^4+6*(θ/β1)^5);
bajada=φ0-φ0 (10*((θ-β1-β2)/β3)^3-15*((θ-β1-β2)/β3)^4+6*((θ-β1-β2)/β3)^5);
φ=Piecewise[{{subida,θ<β1},{φ0,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<180}}];
Plot[φ,{θ,0,180},AxesLabel->{" θ "," Oscilación angular φ (θ)"},PlotStyle->{Red,Thick}]

```

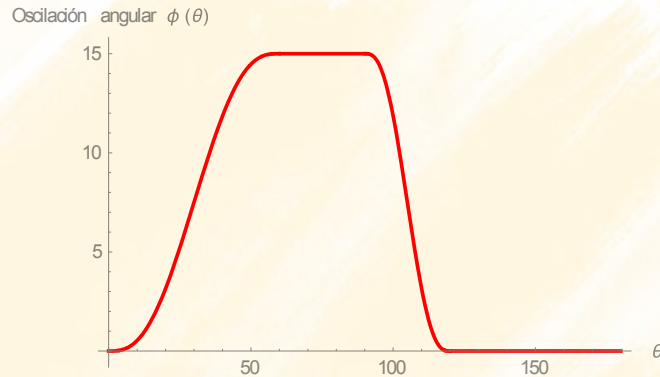


Figura 6.103. Oscilación propuesta φ

Las ecuaciones que determinan el perfil de la leva, Figura 6.104, son las componentes real e imaginaria de la ecuación 6.99, se va a asumir los siguientes valores para $r_4 = 180$ mm y $r_2 = 300$ mm

$$px_A = r_4 \cos[180 - \varphi(\vartheta)] + r_2 \cos[\vartheta - \varphi(\vartheta)] \quad (6.103)$$

$$py_A = r_4 \sin[180 - \varphi(\vartheta)] + r_2 \sin[\vartheta - \varphi(\vartheta)] \quad (6.104)$$

Graficando las ecuaciones paramétricas se obtiene el perfil de la leva Fig. 6.104


```

Clear["Global`*"]
(*Datos*)
φ0=15 π/180;β1=60 π/180;β2=30 π/180;β3=30 π/180;
(*Ecuaciones*)
subida=φ0 (35*(θ/β1)^4-84*(θ/β1)^5+70*(θ/β1)^6-20*(θ/β1)^7);
bajada=φ0-φ0 (35*((θ-β1-β2)/β3)^4-84*((θ-β1-β2)/β3)^5+70*((θ-β1-β2)/β3)^6-20*((θ-β1-β2)/β3)^7);

φ=Piecewise[{{subida,θ<β1},{φ0,θ<β1+β2},{bajada,θ<β1+β2+β3},{0,θ<π}}];

r4 = 180
r2 = 300

pxA = r4 Cos[π- φ] + r2 Cos[θ -φ];
pyA = r4 Sin[π- φ] + r2 Sin[θ -φ];

ParametricPlot[{pxA,pyA},{θ,0,π}, PlotStyle->{Blue,Thick}]

```

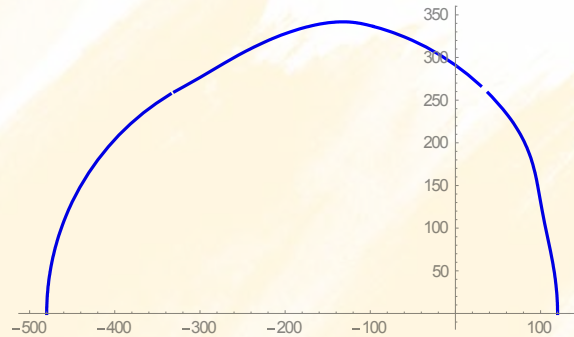


Figura 6.104. Perfil de la leva resultante

```

inversaX = Table[pxA, {[Theta], 0, \[Pi], 0.01}]
inversaY = Table[pyA, {[Theta], 0, \[Pi], 0.01}]
(*Exportación*)
Export["inversaX.xls", inversaX]
Export["inversaY.xls", inversaY]

```

Evaluando las funciones en Wolfram Mathematica se obtienen dos columnas de Excel, Fig. 6.105. Con la operación = A1&" "&B1 se crea un tercera columna con los pares ordenados x e y del perfil de la leva.

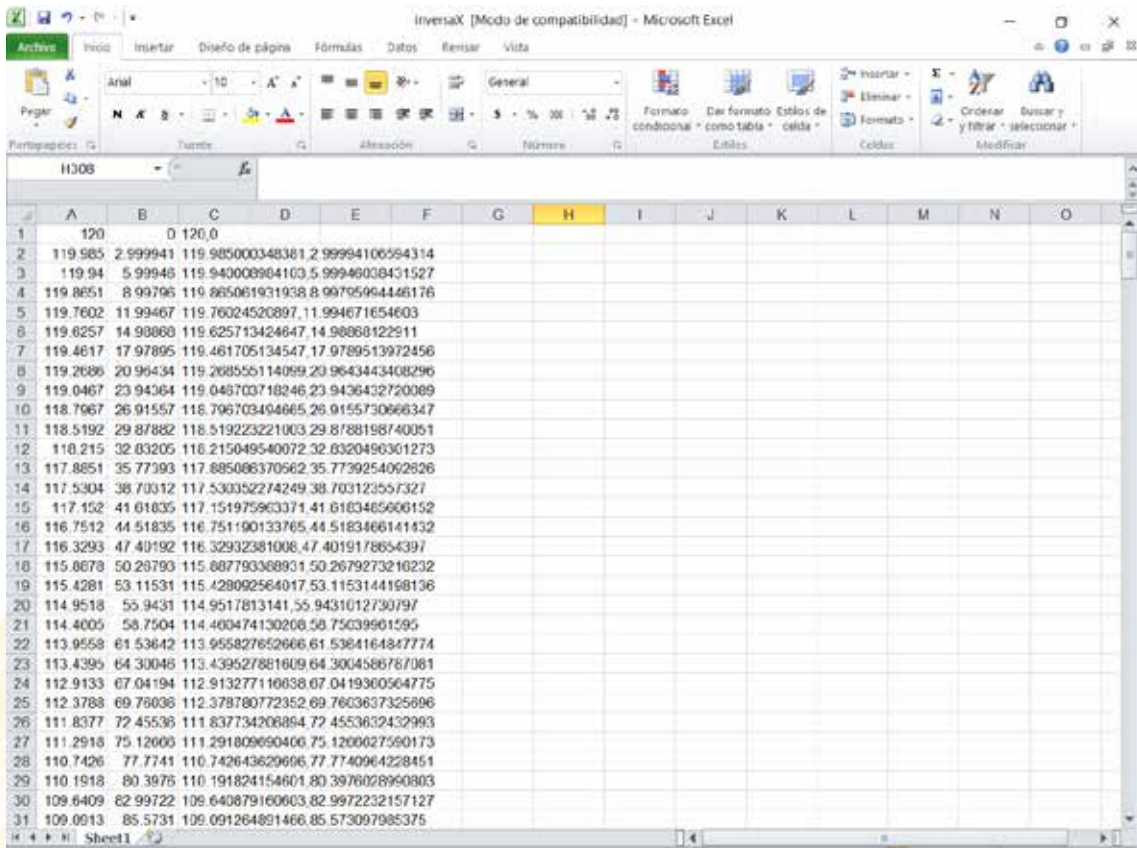


Figura 6.104. Pares ordenados

La tercera columna será copiada en AutoCAD como polilínea obteniendo el perfil deseado, Figura 6.105. En base de este perfil se dibuja el resto del mecanismo, tomando en cuenta que el origen (0,0) es el centro de giro de la leva y que el centro del seguidor B0 está a 180 mm de A0

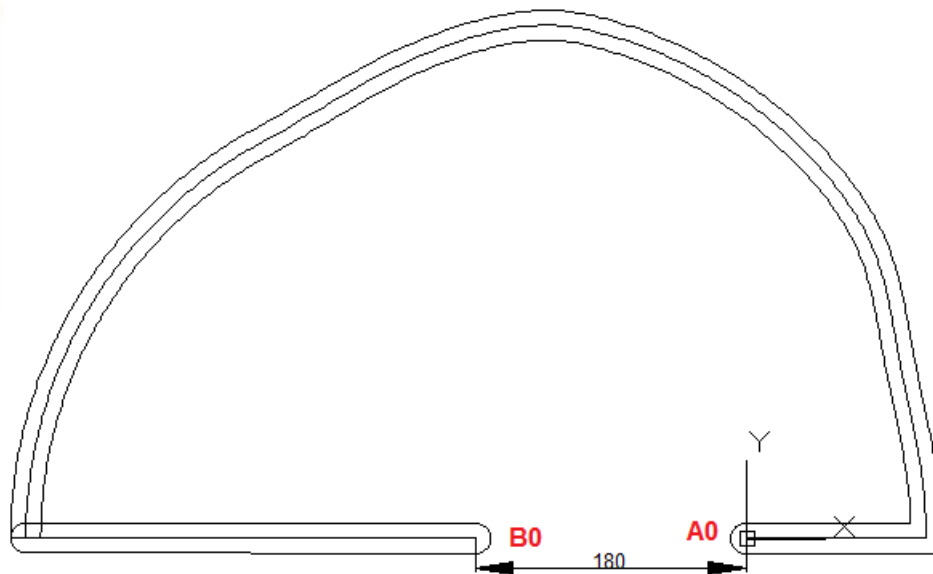


Figura 6.105. Modelado de la leva en AutoCAD

Este gráfico es importado a Working Model 2D para simular el movimiento, Fig. 6.106 donde se edita el elemento ranura sobrescribiendo en su geometría las dos primeras columnas de Excel.

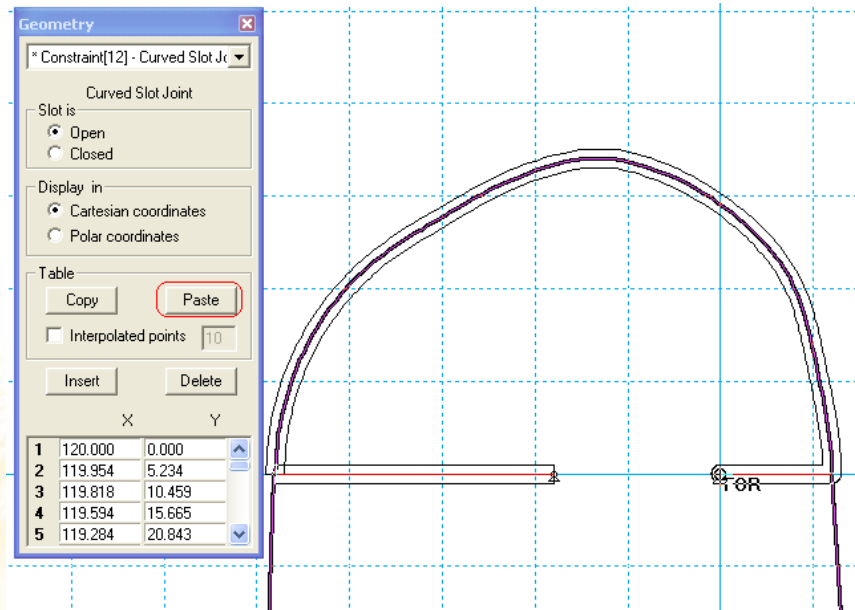


Figura 6.106. Modelado de la leva en Working Model

La ley que describe la leva impulsada se aprecia en la Fig. 6.107

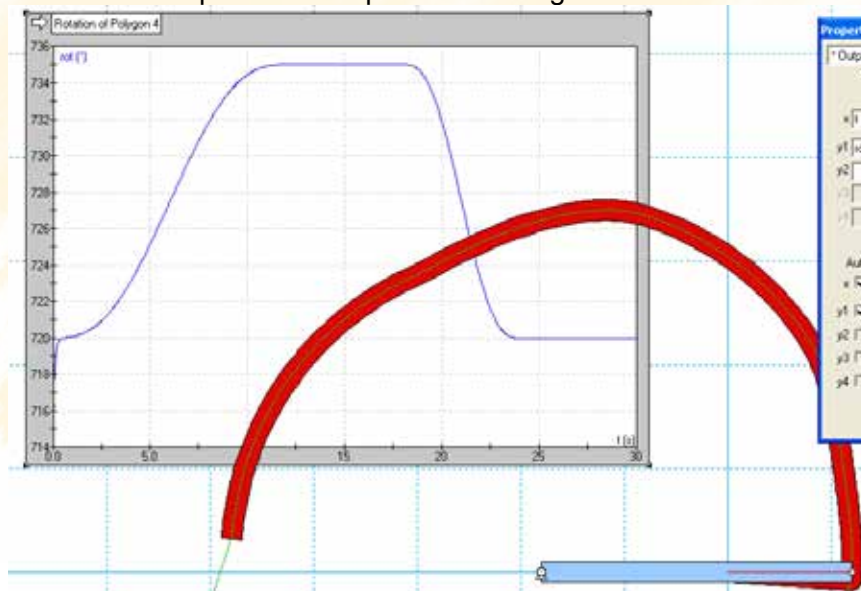


Figura 6.107. Oscilación de la leva en Working Model según la ley especificada

Aplicando los instrumentos de análisis se observa que el desplazamiento angular de la leva coincide con el requerimiento formulado, por lo que se concluye que la metodología es correcta. Es importante resaltar que solo se pueden construir levas con un ángulo de oscilación máximo de 180° debido a que en este caso se alinean los vectores 2 y 4, y como ocurre en los eslabonamientos de cuatro barras la ventaja mecánica desciende a 0.

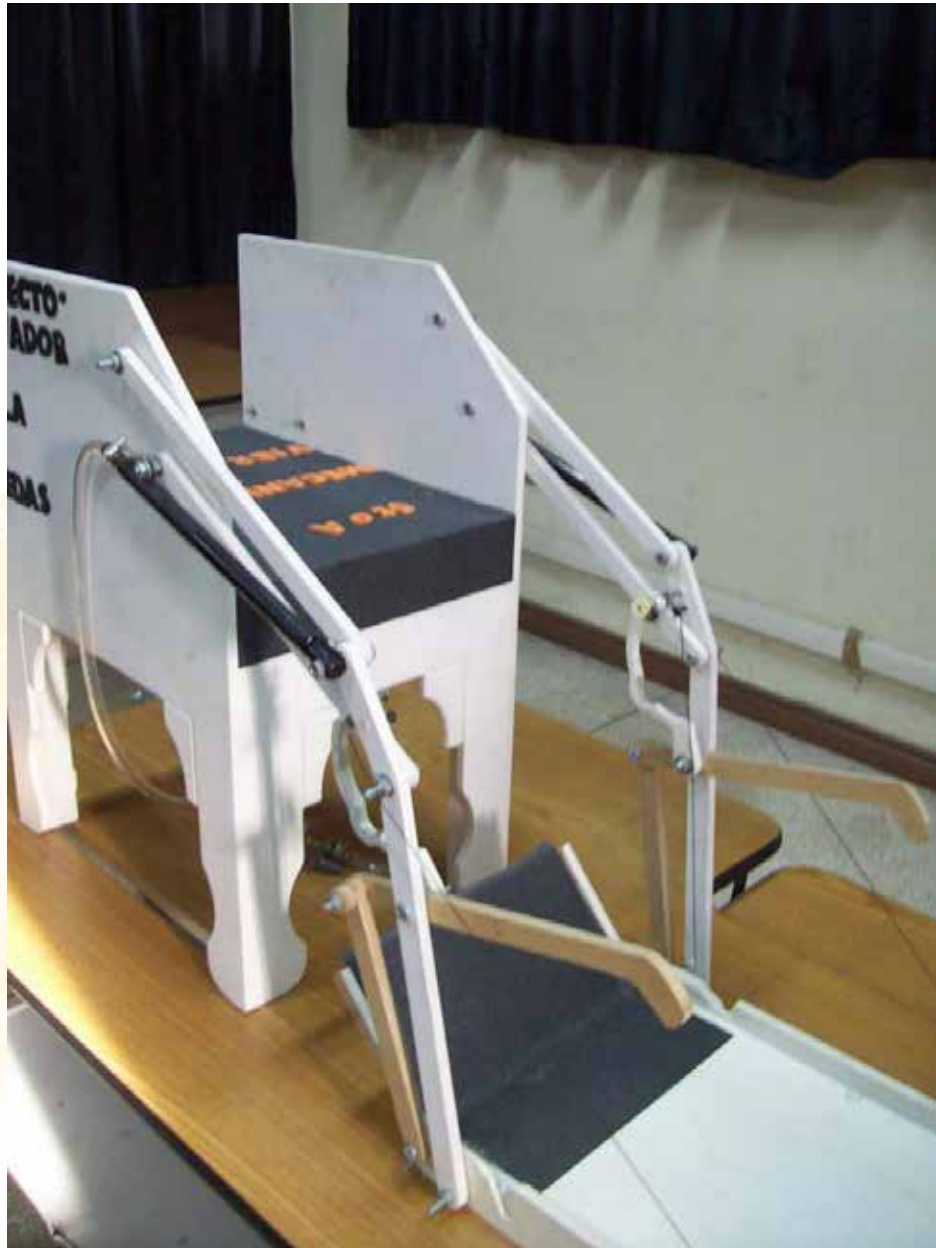


Figura 6.107. Aplicación práctica de la leva inversa

6.20 DINÁMICA DE LEVAS

La dinámica de levas se enmarca en un análisis profundo del mecanismo leva seguidor que sirve para determinar el grado de vibración residual que exhibe el sistema. Y por lo tanto la fiabilidad con la que el seguidor reproduce la ley asumida.

El modelo matemático de un grado de libertad se basa en la configuración del equipo de levas TM 21 del laboratorio de mecanismos de la Universidad de las Fuerzas Armadas como se observa en la Fig.6.109

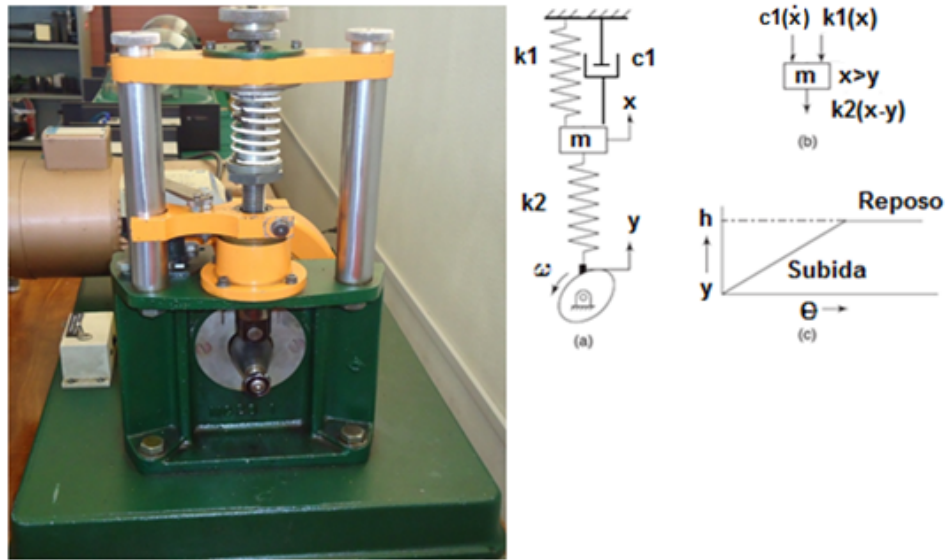


Figura 6.109. Equipo TM21 y sistema masa resorte

Se supone que $k_2 \gg k_1$ y que $x > y$

$$\sum F = m \ddot{x} \quad (6.105)$$

$$\sum F = -k_1 x - c_1 \dot{x} - k_2(x - y) = m \ddot{x} \quad (6.106)$$

La ecuación diferencial a resolverse es por tanto Ec. 6.107:

$$m \ddot{x} + c_1 \dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 y \quad (6.107)$$

Dónde:

m = masa del seguidor
 c_1 = amortiguación hidráulica
 k_1 = rigidez del resorte
 k_2 = rigidez del seguidor
 y = ley del seguidor

Para resolver la Ec. 6.107 es necesario introducir los parámetros físicos e inerciales definidos previamente, Tabla 6.2

Tabla 6.2: parámetros inerciales

Nombre de la propiedad o parámetro	Valor
Constante de resorte real, k1 en [N/m]	4030
Rigidez del actuador/seguidor, k2 en [N/m]	330000000
Amortiguamiento, c1 en [N*s/m]	8.642
Masa del sistema, m [kg]	1.3
Altura/alzada de la leva, h [m]	0.05

Como también las ecuaciones del desplazamiento de las diferentes leyes de desplazamiento utilizadas.

6.21.1 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

La solución de la ecuación diferencial para el sistema sin amortiguación en forma general es la suma de dos términos, la solución particular xp y la solución homogénea xh.

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t) + (c_1 t^5 + c_2 t^4 + c_3 t^3 + c_4 t^2 + c_5 t + c_6) \quad (6.108)$$

Donde la frecuencia natural es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{(330000000 + 4030)}{1.12}} \frac{60}{2\pi} = 163189 \text{ rpm} \quad (6.109)$$

La constante de amortiguación de la obtendrá a partir de la relación de amortiguación $\zeta = 0.06$

$$c = c_{cr} \zeta = \zeta 2\sqrt{km} \quad (6.110)$$

Se integran las ecuaciones mediante el software Wolfram Mathematica utilizando el comando NDSolve[] que resuelve numéricamente la ecuación diferencial, Evaluate[] para evaluar el resultado y Plot[] para visualizar gráficamente los mismos con la cual se puede realizar la comparación, es importante bajar el orden la ecuación diferencial:

$$m \ddot{x} + c_1 \dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 y \quad (6.111)$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (6.112)$$

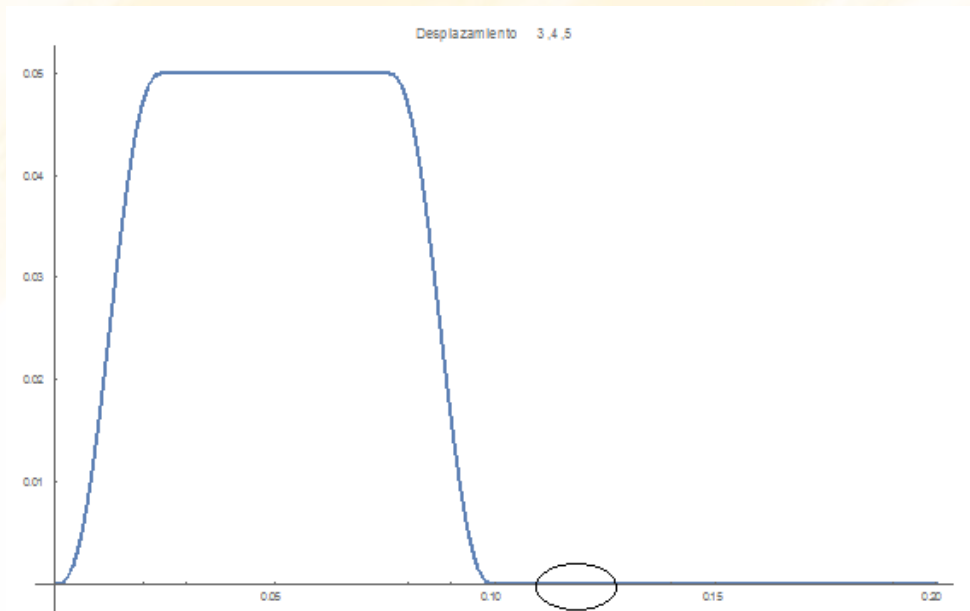
$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} (-c_1 v - (k_1 + k_2)x + k_2 y) \quad (6.113)$$

6.22.2 RESPUESTA DINÁMICA DEL SEGUIDOR

La respuesta dinámica del seguidor para una leva con ley de desplazamiento polinomial 3,4,5 se calcula mediante la siguiente plantilla

```
ka=4030;
kb=330000000;
m=1.3;
ca= 8.642;
ω=300*((2 π)/60);
τ=2*(π/ω);
h=50/1000;

s1[t_]:=Piecewise[{{h*(10*((ω*t)/(45 π/180))^3-15*((ω*t)/(45 π/180))^4+6*((ω*t)/(45 π/180))^5),0<t<(45 π/180)/ω},{h*(45 π/180)/ω<t<(135 π/180)/ω},{h-h*(10*((ω*t)-(45 π/180)-(90 π/180))/(45 π/180))^3-15*((ω*t)-(45 π/180)-(90 π/180))/(45 π/180))^4+6*((ω*t)-(45 π/180)-(90 π/180))/(45 π/180))^5),(135 π/180)/ω<t<(180 π/180)/ω},{0,(180 π/180)/ω<t<2π}}];
ed1=NDSolve[{z'[t]==y[t],y'[t]==(1/m)*(-(ca)*y[t]-
(ka+kb)*z[t]+(kb)*s1[t]),z[0]==0,y[0]==0},{z,y},{t,0,τ}];
Plot[Evaluate[z[t]/.ed1],{t,0,τ},PlotLabel->"Desplazamiento 3,4,5",PlotRange->All]
Plot[Evaluate[y[t]/.ed1],{t,0,τ},PlotLabel->"Velocidad 3,4,5",PlotRange->All]
Plot[Evaluate[y'[t]/.ed1],{t,0,τ},PlotLabel->"Aceleración 3,4,5",PlotRange->All]
Plot[Evaluate[z[t]/.{ed1}],{t,0.15,0.2},PlotRange->{-0.0000001,0.0000001},PlotLegends->Automatic]
```



Se puede ampliar la visualización de la vibración residual en el reposo bajo y se observa una oscilación de alta frecuencia

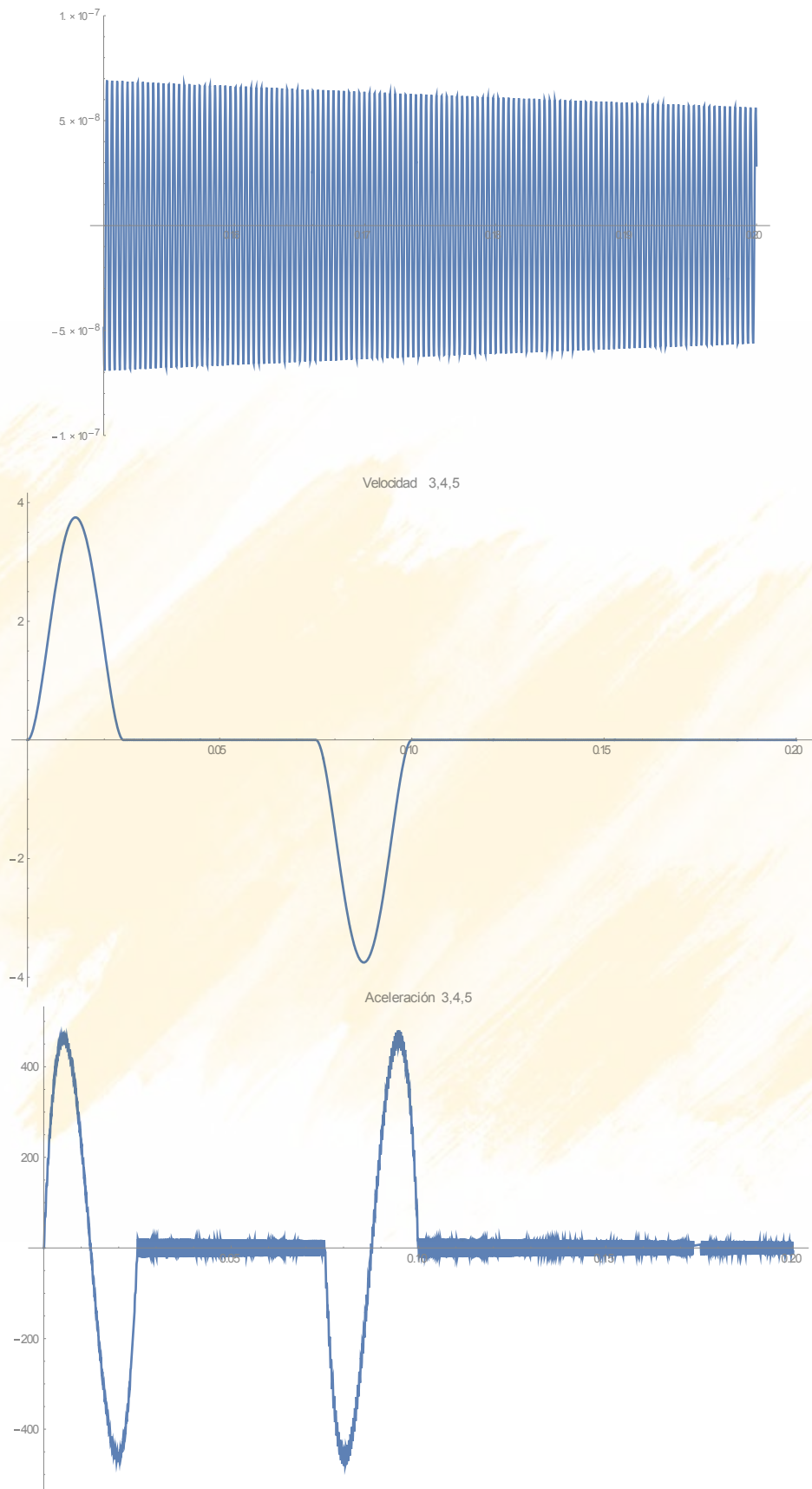


Figura 6.110. Vibración residual, s,v,a

Si se incrementa el valor de la masa en 100% se obtiene el siguiente comportamiento

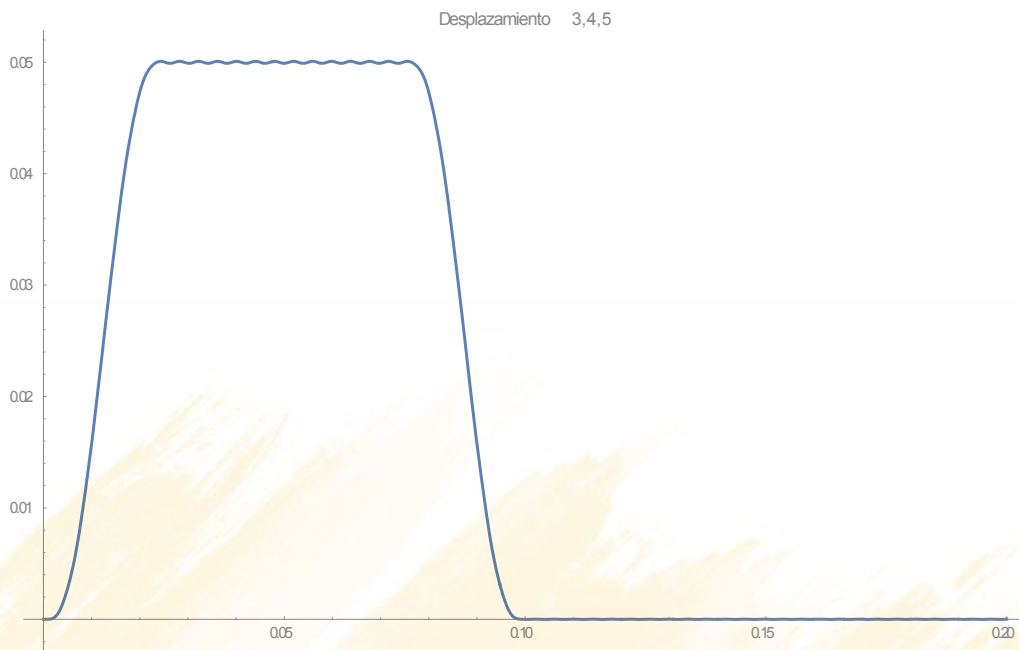


Figura 6.111. Vibración residual en el desplazamiento con incremento de masa

De igual manera si se triplica la velocidad, se percibe mayor vibración

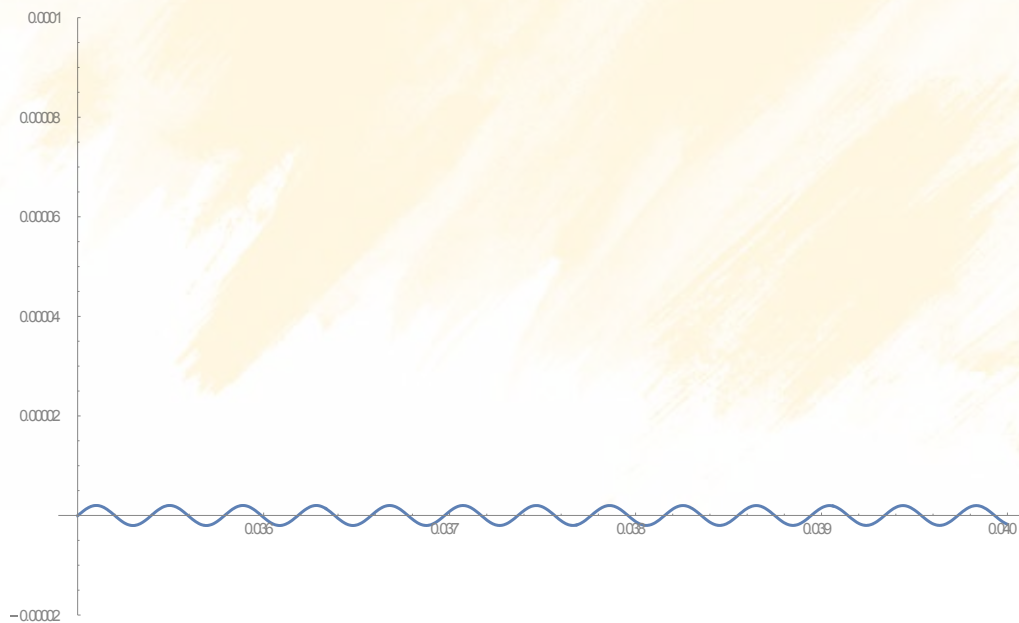


Figura 6.112. Vibración residual en el desplazamiento con incremento de velocidad

6.22.3. COMPARATIVA DE LA RESPUESTA DINÁMICA UTILIZANDO DIFERENTES LEYES

El fichero que efectúa la comparativa es el siguiente, se utiliza, la ley uniforme, ley armónica, ley cicloidal, ley polinomial 3,4,5 y 4,5,6,7

```

ka=4030; kb=330000000; m=1.30; ca=8.642; ω=300*((2 π)/60); τ=2*(π/ω);
h=50/1000;
β1=45 π/180;
β2=90π/180;
β3=45π/180;
s1[t_]:=Piecewise[{{h*(10*((ω*t)/β1)^3-
15*((ω*t)/β1)^4+6*((ω*t)/β1)^5),0<t<β1/ω},{h,β1/ω<t<(β1+β2)/ω},{h-h*(10*((ω*t)-β1-
β2)/β3)^3-15*((ω*t)-β1-β2)/β3)^4+6*((ω*t)-β1-
β2)/β3)^5),(β1+β2)/ω<t<(β1+β2+β3)/ω},{0,(β1+β2+β3)/ω<t<2π}}];

s2[t_]:=Piecewise[{{h*(35*((ω*t)/β1)^4-84*((ω*t)/β1)^5+70*((ω*t)/β1)^6-
20*((ω*t)/β1)^7),0<t<β1/ω},{h,β1/ω<t<(β1+β2)/ω},{h-h*(35*((ω*t)-β1-β2)/β3)^4-84*((ω*t)-
β1-β2)/β3)^5+70*((ω*t)-β1-β2)/β3)^6-20*((ω*t)-β1-
β2)/β3)^7),(β1+β2)/ω<t<(β1+β2+β3)/ω},{0,(β1+β2+β3)/ω<t<2π}}];

s3[t_]:=Piecewise[{{h/(β1)*((ω*t)-(β1))/(2 π)*Sin[2
π*(ω*t)/β1]},0<t<β1/ω},{h,β1/ω<t<(β1+β2)/ω},{h-h/(β3)*((ω*t)-β1-β2)-(β3)/(2 π)*Sin[2
π*((ω*t)-β1-β2)/(β3)]},(β1+β2)/ω<t<(β1+β2+β3)/ω},{0,(β1+β2+β3)/ω<t<2π}}];

s4[t_]:=Piecewise[{{h/2*(1-Cos[ π*(ω*t)/β1]},0<t<β1/ω},{h,β1/ω<t<(β1+β2)/ω},{h/2*(1+Cos[
π*((ω*t)-β1-β2)/(β3)]},(β1+β2)/ω<t<(β1+β2+β3)/ω},{0,(β1+β2+β3)/ω<t<2π}}];

s5[t_]:=Piecewise[{{h (ω*t)/β1,0<t<β1/ω},{h,β1/ω<t<(β1+β2)/ω},{h*(1-((ω*t)-β1-
β2)/(β3))),(β1+β2)/ω<t<(β1+β2+β3)/ω},{0,(β1+β2+β3)/ω<t<2π}}];

ed1=NDSolve[{z'[t]==y[t],y'[t]==(1/m)*(-ca)*y[t]-
(ka+kb)*z[t]+(kb)*s1[t]},z[0]==0,y[0]==0},{z,y},{t,0,τ}];
ed2=NDSolve[{z'[t]==y[t],y'[t]==(1/m)*(-ca)*y[t]-
(ka+kb)*z[t]+(kb)*s2[t]},z[0]==0,y[0]==0},{z,y},{t,0,τ}];
ed3=NDSolve[{z'[t]==y[t],y'[t]==(1/m)*(-ca)*y[t]-
(ka+kb)*z[t]+(kb)*s3[t]},z[0]==0,y[0]==0},{z,y},{t,0,τ}];
ed4=NDSolve[{z'[t]==y[t],y'[t]==(1/m)*(-ca)*y[t]-
(ka+kb)*z[t]+(kb)*s4[t]},z[0]==0,y[0]==0},{z,y},{t,0,τ}];
ed5=NDSolve[{z'[t]==y[t],y'[t]==(1/m)*(-ca)*y[t]-
(ka+kb)*z[t]+(kb)*s5[t]},z[0]==0,y[0]==0},{z,y},{t,0,τ}];

Plot[Evaluate[z[t]/.{ed1,ed2,ed3,ed4,ed5}],{t,0,τ},PlotLabel->"Desplazamiento
",PlotLegends->Automatic]
Plot[Evaluate[y[t]/.{ed1,ed2,ed3,ed4,ed5}],{t,0,τ},PlotLabel->"Velocidad ",PlotRange-
>All,PlotLegends->Automatic]
Plot[Evaluate[y'[t]/.{ed1,ed2,ed3,ed4,ed5}],{t,0,τ},PlotLabel->"Aceleración ",PlotRange-
>All, PlotLegends->Automatic]
Plot[Evaluate[z[t]/.{ed1, ed2,ed3,ed4,ed5}],{t,0.15,0.154},PlotRange->{-
0.0001,0.0001},PlotLegends->Automatic]

```


En la figura 6.113 se observa que la oscilación de la respuesta dinámica en el caso de la ley uniforme es considerable

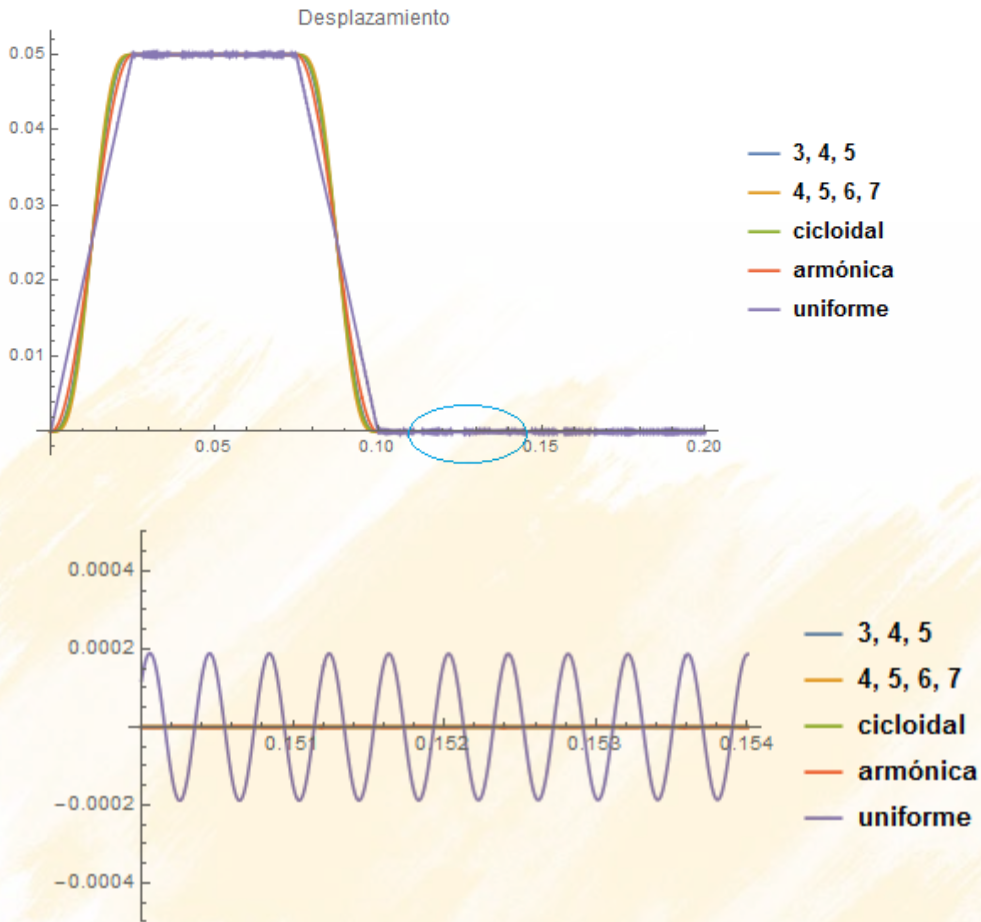


Figura 6.113. Comparación desplazamiento

En el gráfico correspondiente a la oscilación de la aceleración de la ley uniforme es significativamente mayor que las otras leyes, ver Fig. 6.114



Figura 6.114. Aceleración ley uniforme

Descartando entonces la ley uniforme se obtiene los siguientes gráficos:

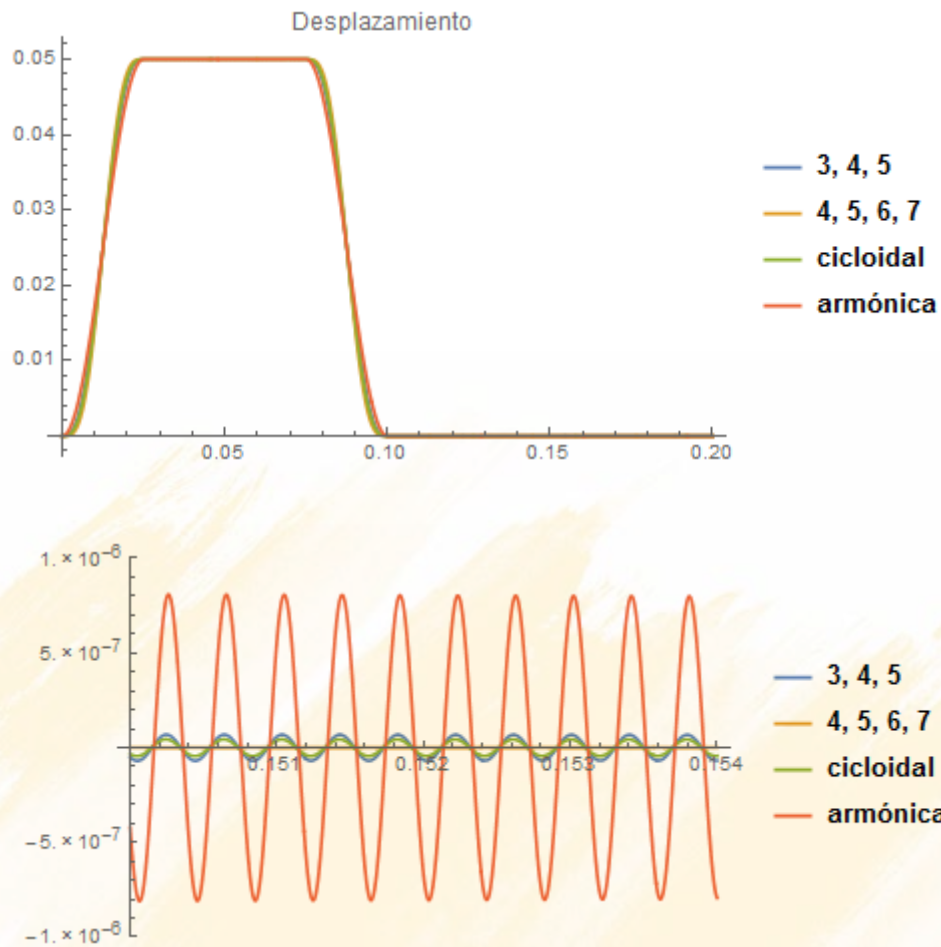


Figura 6.115. Comparativa desplazamiento

Se observa ahora en la Fig. 6.115 que descartando la ley uniforme la que más oscilaciones presenta es la ley armónica como se había pronosticado en las secciones correspondientes, de igual manera la variación y amplitud de la aceleración se observa en la Fig. 6.116 con un valor pico de 800 mm/s^2

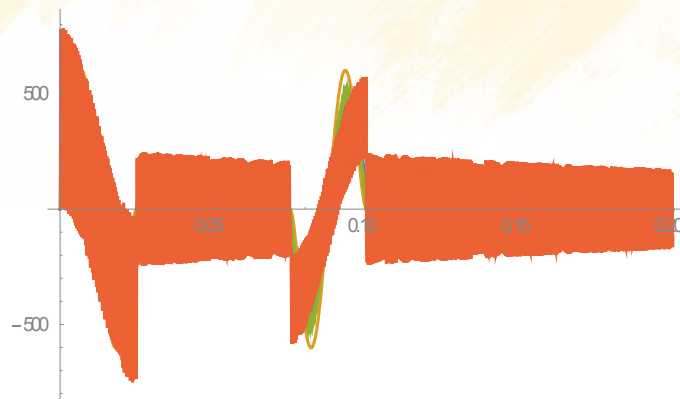


Figura 6.116. Comparativa aceleraciones

Descartando entonces la ley armónica tenemos tres comportamientos similares en donde se constata que la ley con mejor control de vibración es la correspondiente al polinomio 4,5,6,7, cuya oscilación es imperceptible

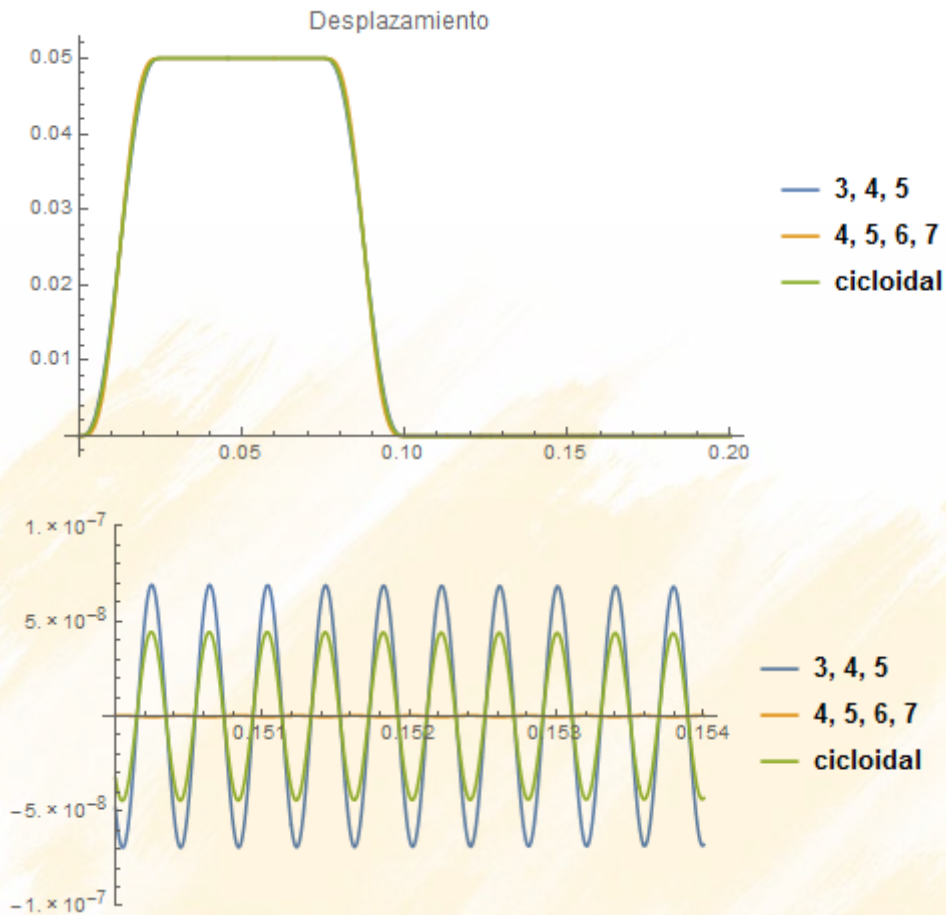


Figura 6.117. Comparativa desplazamiento

Eso si la aceleración de esta ley es la mayor de todas como puede verse en la Fig. 6.118, lo que conlleva el peligro del despege del seguidor

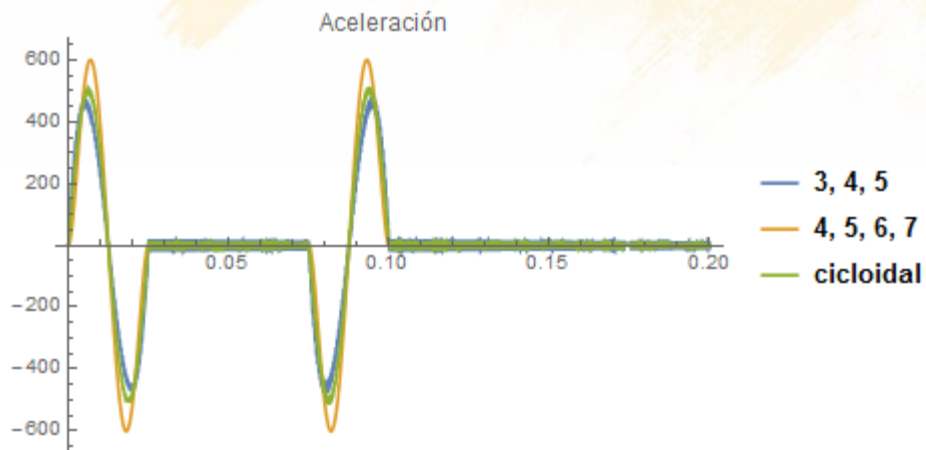


Figura 6.118. Comparativa aceleración

6.22.4 COMPARATIVA SEGÚN DURACIÓN DE LA RAMPA

Es interesante verificar el efecto de la pendiente o duración de la rampa, se utilizó la ley 4,5,6,7 y se varió la duración del desplazamiento en 15° , 45° , 60° , 90° y 120°

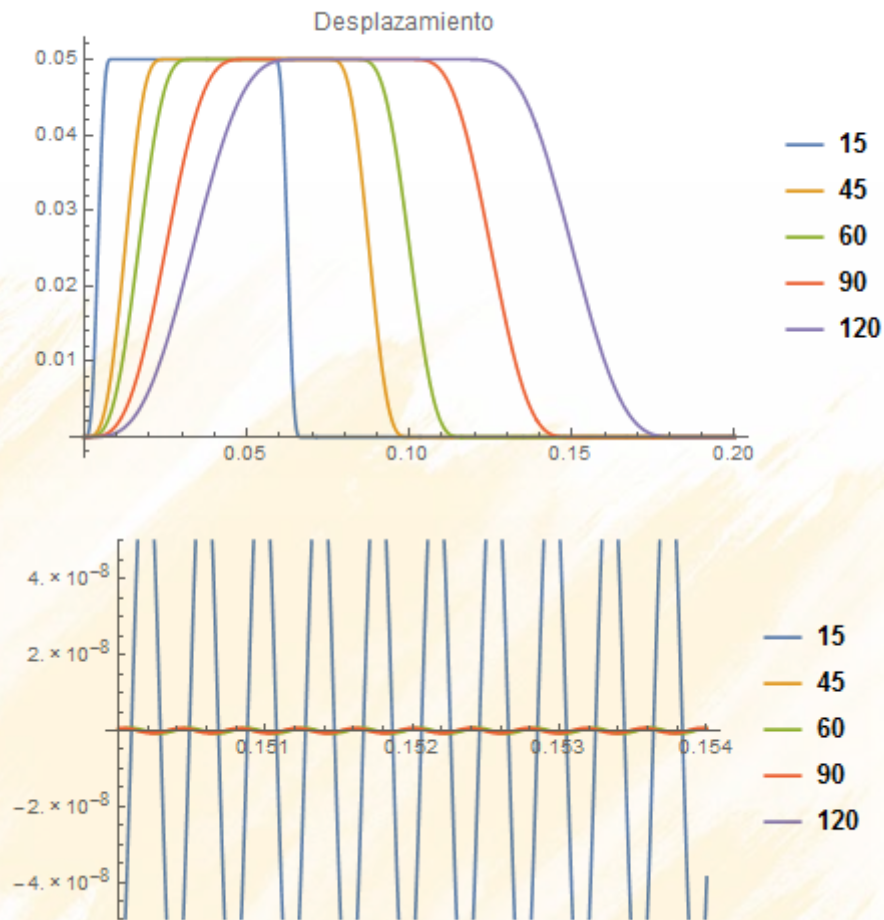


Figura 6.119. Comparativa desplazamiento diferentes ángulos β

Se puede observar que el peor comportamiento es con la duración de $\beta_1 = 15^\circ$ tanto en desplazamiento Fig. 6.119 como en velocidad y aceleración, Fig. 6.120

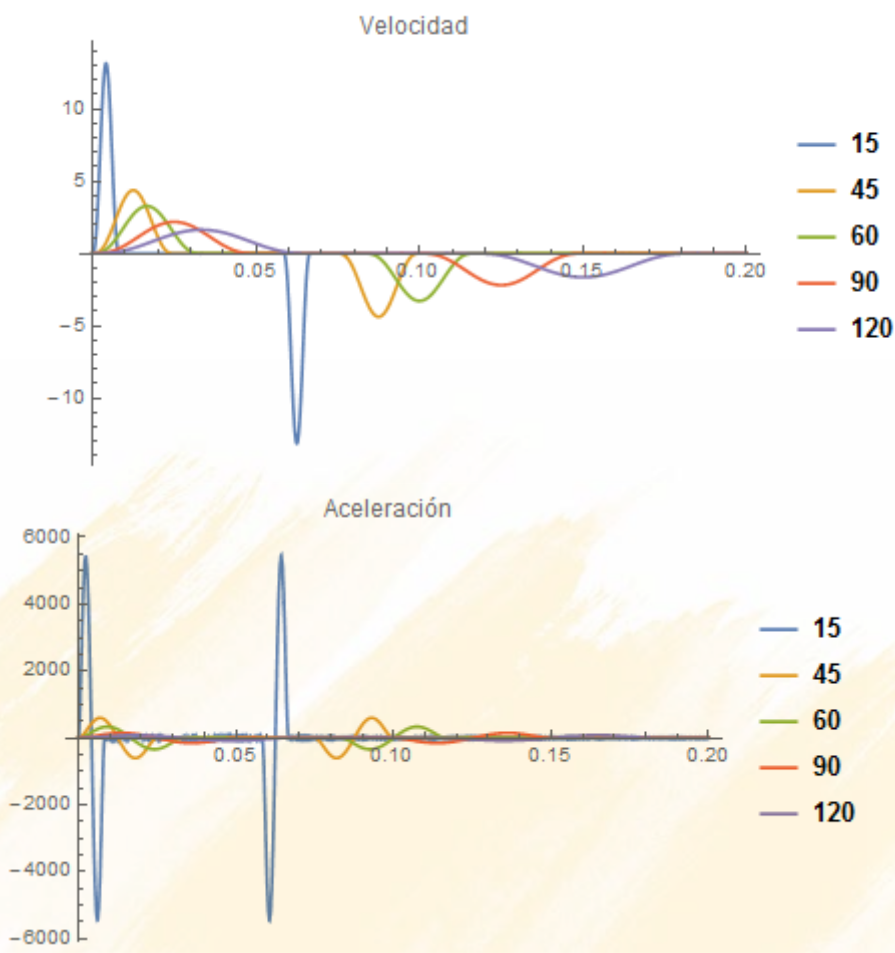


Figura 6.119. Comparativa velocidad y aceleración diferentes ángulos β

6.22.5 VIBRACION TORSIONAL

Los mecanismos de levas suelen poseer un volante de inercia que provee estabilidad al sistema, controlando las fluctuaciones de velocidad, adicionalmente un eje de cierta longitud, que es por tanto el elemento elástico del sistema, ver Fig.6.120, Todos estos componentes generan vibración torsional.

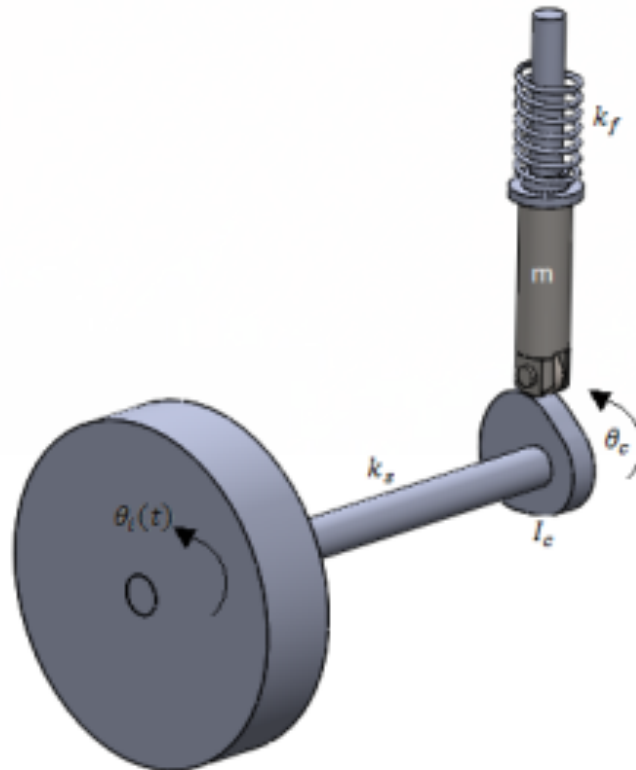
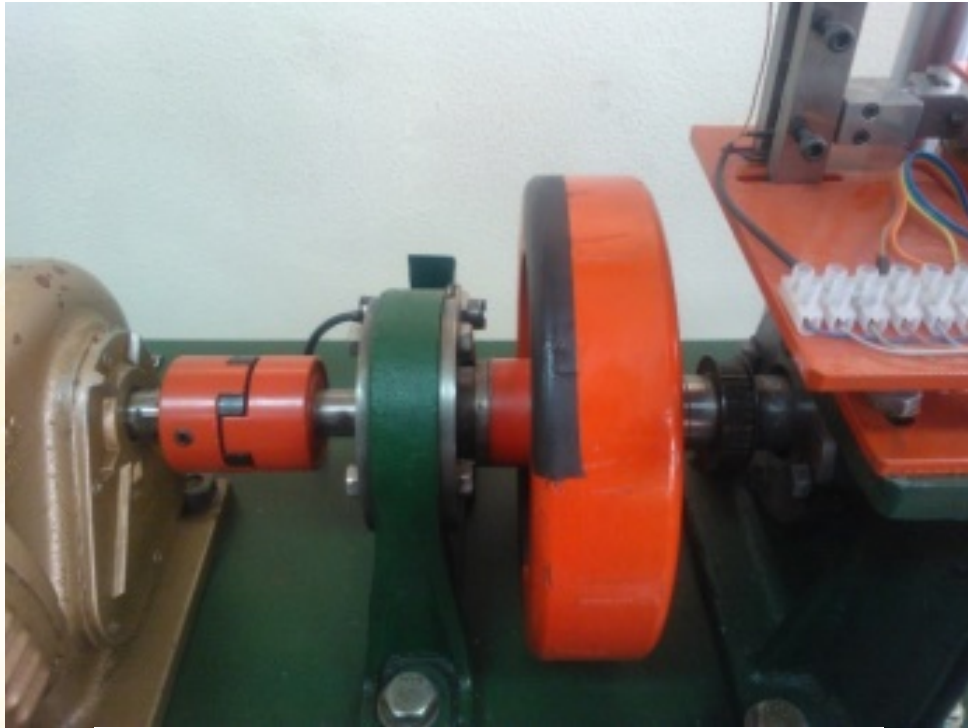


Figura 6.120. Esquema del equipo leva seguidor con volante de inercia

Así pues, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener de la sumatoria de pares de torsión³⁷

$$\sum T = I \ddot{\theta} \quad (6.114)$$

Cuyo desarrollo se observa en la Ec. 6.115

$$I \ddot{\theta}_c + k_s[\theta_c(t) - \theta_i(t)] = T_{leva} \quad (6.115)$$

Dónde:

I = momento de inercia de masa
 $\ddot{\theta}_c$ = aceleración angular de la leva
 k_s = rigidez del eje
 θ_c = posición angular de la leva
 θ_i = posición angular del volante de inercia
 T_{leva} = Par torsional de la leva

Para obtener el Torque externo se iguala la potencia de entrada con la potencia de salida en el sistema leva seguidor, Ec. 6.116

$$T_{leva} \dot{\theta}_c = F_c \dot{x} \quad (6.116)$$

Dónde:

F_c = Fuerza de contacto
 \dot{x} = velocidad del seguidor
 $\dot{\theta}_c$ = velocidad angular de la leva

La fuerza de contacto resulta de la sumatoria de fuerzas actuantes sobre la leva, La fuerza cinetostática de contacto está dada por Ec.6.117

$$F_c(t) = -m \ddot{x} - c \dot{x} - k_f x \quad (6.117)$$

Reemplazando la Ec. 6.117 en la 6.116 y 6.1145 se obtiene la siguiente ecuación diferencial que gobierna la vibración torsional, Ec. 6.118

$$I \ddot{\theta}_c + k_s[\theta_c(t) - \theta_i(t)] + (m \ddot{x} + c \dot{x} + k_f x) \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}_c} = 0 \quad (6.118)$$

Los valores que se grafican en la Fig. 6.121 corresponden a la diferencia que existe entre la posición angular de la leva y la posición angular del volante de Inercia:

³⁷ H. Rothbart, "Cam Design Hadbook", Mc. Graw Hill, vol.1, pp.374–376, 2004

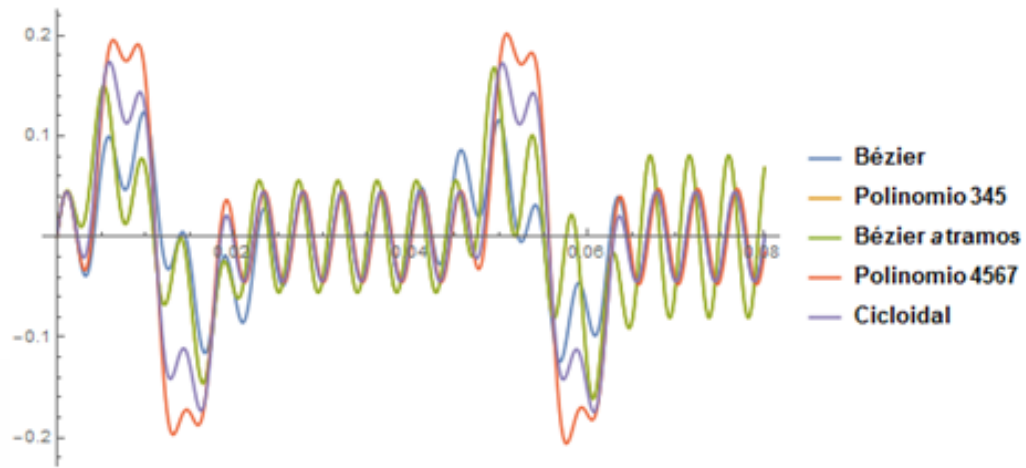


Figura 6.121. Comparativa vibración torsional

La gráfica muestra que la leva Bézier grado 15 exhibe mejor control de la vibración torsional, seguido del polinomio 4,5,6,7

6.22.6. DESPEGUE DEL SEGUIDOR

Es importante añadir el análisis de despegue entre el seguidor y la leva, ya que de esta manera se determina la ley que mejor resiste el incremento de velocidad angular en la leva sin evidenciar despegue del seguidor. El modelo que predice el salto o despegue, es el modelo de dos grados de libertad según la Fig. 6.122.

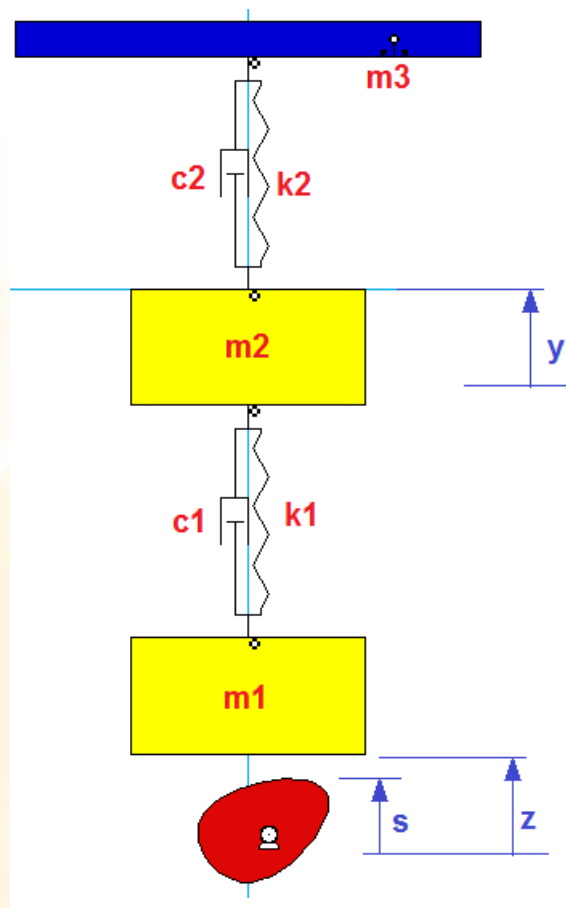


Figura 6.122. Modelo de dos masas simplificado

Este modelo matemático toma en cuenta que la masa del sistema está dividida entre el seguidor y el efector final. Para plantear la ecuación diferencial se puede usar el método de ensamblaje directo usado en el estudio de elementos finitos, donde se considera m_1 , m_2 , m_3 las masas en los nodos del sistema de resortes por tanto las matrices de rigideces y amortiguación parciales son:

Nodos 1 y 2	Nodos 2 y 3
$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$

Efectuando el ensamblaje se obtiene, Ec. (6.119):

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

Dónde:

k_1 = rigidez del vástago del seguidor

k_2 = rigidez del resorte de cierre de fuerza

c_1 = amortiguación del vástago del seguidor

c_2 = amortiguación viscosa del seguidor con respecto a tierra

m_1 = masa equivalente concentrada en el lado del rodillo

m_2 = masa equivalente concentrada en el lado del efector

m_3 = masa ficticia de la referencia fija

F_c = fuerzas de contacto

s = ley de la leva

z, y = respuesta dinámicas de m_1 y m_2 respectivamente

Es claro que $k_1 \gg k_2$

Considerando que el nodo correspondiente a la masa m_3 es fijo, el sistema de ecuaciones diferenciales queda, Ec. (6.120):

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.120)$$

Usando los parámetros y y z de la Fig. 6.122 y tomando en cuenta que la fuerza externa en la masa m_1 es la fuerza de contacto $F_c(t)$, Ec. (6.121).

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.121)$$

Finalmente desarrollando la Ec. (6.121) se obtienen dos ecuaciones diferenciales Ec. (6.122) y (6.123).

$$c_1 \dot{z} - c_1 \dot{y} - k_1 y + k_1 z + m_1 \ddot{z} = F_c \quad (6.122)$$

$$\dot{y}(c_1 + c_2) + z(k_1 + k_2) - c_1 \dot{z} - k_2 z + m_2 \ddot{y} = 0 \quad (6.123)$$

Las cuales se resuelven de la siguiente manera:

Inicialmente se considera que el seguidor y la leva no se separan, por tanto $z = s$, siendo s la ley del seguidor, por tanto se resuelve numéricamente la Ec.6.123, reemplazando la z por s

como si se tratara de un sistema de un grado de libertad, Ec. 6.124, con condiciones iniciales cero.

$$\dot{y}(c_1 + c_2) + s(k_1 + k_2) - c_1\dot{s} - k_2s + m_2\ddot{y} = 0 \quad (6.124)$$

De la solución de Ec. (6.123) se obtiene \dot{y} , y . Luego se evalúa para cada tiempo la fuerza de contacto (Ec. 6.122) según el formato indicado en la Ec.6.125

$$c_1\dot{s} - c_1\dot{y} - k_1y + k_1s + m_1\ddot{s} = F_c \quad (6.125)$$

Se determina el instante t_1 en que esta fuerza se hace cero, lo que implica el inicio del despegue. De la solución de Ec. 6.124 se determina el desplazamiento $y(t_1)$ y la velocidad $\dot{y}(t_1)$, también se considera que $z(t_1) = s(t_1)$ y $\dot{z}(t_1) = \dot{s}(t_1)$, siendo estas las cuatro condiciones iniciales necesarias para resolver el sistema homogéneo de dos grados de libertad, Ec. 6.126 y 6.127:

$$c_1\dot{z} - c_1\dot{y} - k_1y + k_1z + m_1\ddot{z} = 0 \quad (6.126)$$

$$\dot{y}(c_1 + c_2) + z(k_1 + k_2) - c_1\dot{z} - k_2z + m_2\ddot{y} = 0 \quad (6.127)$$

En esta segunda solución se prueba z contra s , cuando $z \leq s$, nuevamente se establece el contacto y nuevamente se debe usar la Ec. (6.124) con la (6.125). Una vez resuelto el modelo se puede observar la gráfica de la respuesta del sistema de ecuaciones diferenciales, Fig. (6.123), aquí se puede identificar una ligera prominencia al momento de finalizar la etapa de subida. Esta prominencia es la evidencia del despegue del seguidor.

```

ka=33000000;
kb=4030;
ma=0.55;
mb=0.55;
ca=6.893;
cb=70;
ω=415*((2 π)/60);
τ=2*(π/ω);
h=50/1000;

```

```

s2[t_]:=Piecewise[{{h*(10*((ω*t)/(80 π/180))^3-15*((ω*t)/(80 π/180))^4+6*((ω*t)/(80 π/180))^5),0<t<(80 π/180)/ω},{h,(80 π/180)/ω<t<(160 π/180)/ω},{h-h*(10*((ω*t)-(80 π/180)-(80 π/180))/(80 π/180))^3-15*((ω*t)-(80 π/180)-(80 π/180))/(80 π/180))^4+6*((ω*t)-(80 π/180)-(80 π/180))/(80 π/180))^5),(160 π/180)/ω<t<(240 π/180)/ω},{0,(240 π/180)/ω<t<(2 π)/ω}}];

```

```

v2[t_]:=Piecewise[{{h*((231573735 t^2)/256-(57661860015 t^3)/1024+(14357803143735 t^4)/16384),0<t<(80 π/180)/ω},{0,(80 π/180)/ω<t<(160 π/180)/ω},{-h*((302535 -(8 π)/9)+(83 π t)/6)^2)/(64 π^2)-(2722815 -(8 π)/9)+(83 π t)/6^3)/(128 π^3)+(24505335 -(8 π)/9)+(83 π t)/6^4)/(1024 π^4),(160 π/180)/ω<t<(240 π/180)/ω},{0,(240 π/180)/ω<t<(2 π)/ω}}];

```

```

a2[t_]:=Piecewise[{{h*((231573735 t)/128-(172985580045 t^2)/1024+(14357803143735 t^3)/4096),0<t<(80 π/180)/ω},{0,(80 π/180)/ω<t<(160 π/180)/ω},{-h*((8370135 -(8 π)/9)+(83 π t)/6)/(64 π)-(225993645 -(8 π)/9)+(83 π t)/6^2)/(256 π^2)+(677980935 -(8 π)/9)+(83 π t)/6^3)/(512 π^3),(160 π/180)/ω<t<(240 π/180)/ω},{0,(240 π/180)/ω<t<(2 π)/ω}}];

```

```

fs2=NDSolve[{x'[t]==y[t],y'[t]==(1/mb)*(-(ca+cb)*y[t]-
(ka+kb)*x[t]+(ka)*s2[t]+(ca)*v2[t]),x[0]==0,y[0]==0},{x,y},{t,0,τ}];
fc2[t_]:=ma*a2[t]+ca*v2[t]+ka*s2[t]-ca*Evaluate[y[t]/.fs2]-ka*Evaluate[x[t]/.fs2];

```

```
Plot[fc2[t],{t,0,0.1}]
```

```

sol2=NDSolve[{xb'[t]==yb[t],yb'[t]==(1/mb)*(-(ca+cb)*yb[t]-
(ka+kb)*xb[t]+(ka)*z[t]+(ca)*q[t]),z'[t]==q[t],q'[t]==(1/ma)*(-ca*q[t]+ca*yb[t]+ka*xb[t]-
ka*z[t]),xb[0]==0.045,yb[0]==1.668,q[0]==1.668,z[0]==0.045},{xb,yb,z,q},{t,0,τ}];
xc[t_]:=Piecewise[{{Evaluate[x[t]/.fs2],t<=0.024},{Evaluate[xb[t-0.024]/.sol2],t>0.024}}]

```

```
Plot[{xc[t],s2[t]},{t,0,0.145}]
```

```
xc2[t_]:=Piecewise[{{xc[t],t<=0.034},{Evaluate[x[t]/.fs2],t>0.034}}]
```

```
Plot[{xc2[t],s2[t]},{t,0,0.145}]
```

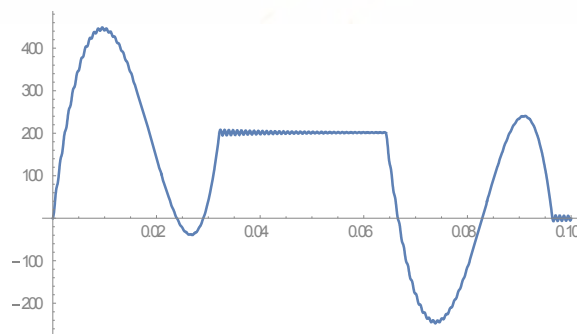


Figura 6.123. Fuerza de contacto

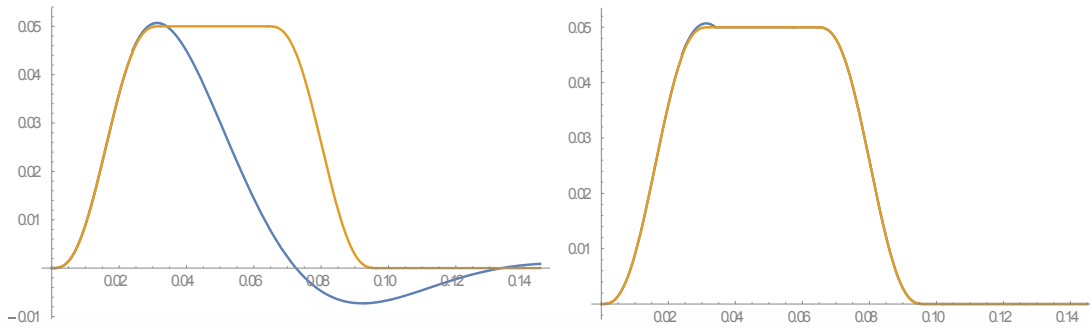


Figura 6.124. Evidencia del despegue

La comparativa entre diversas levas se observa en la Fig. 125

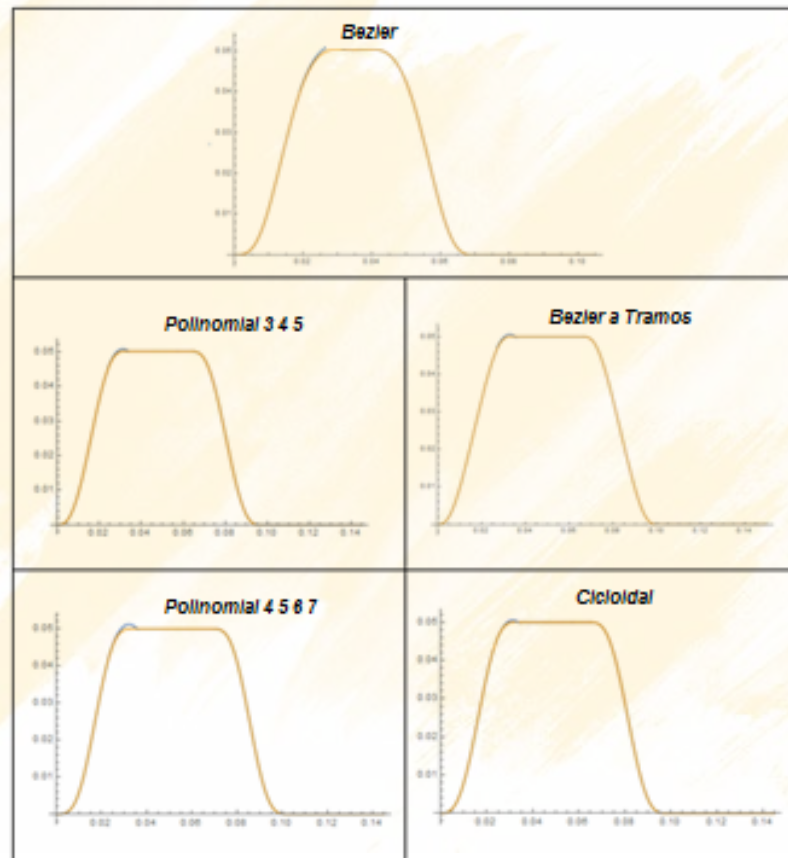


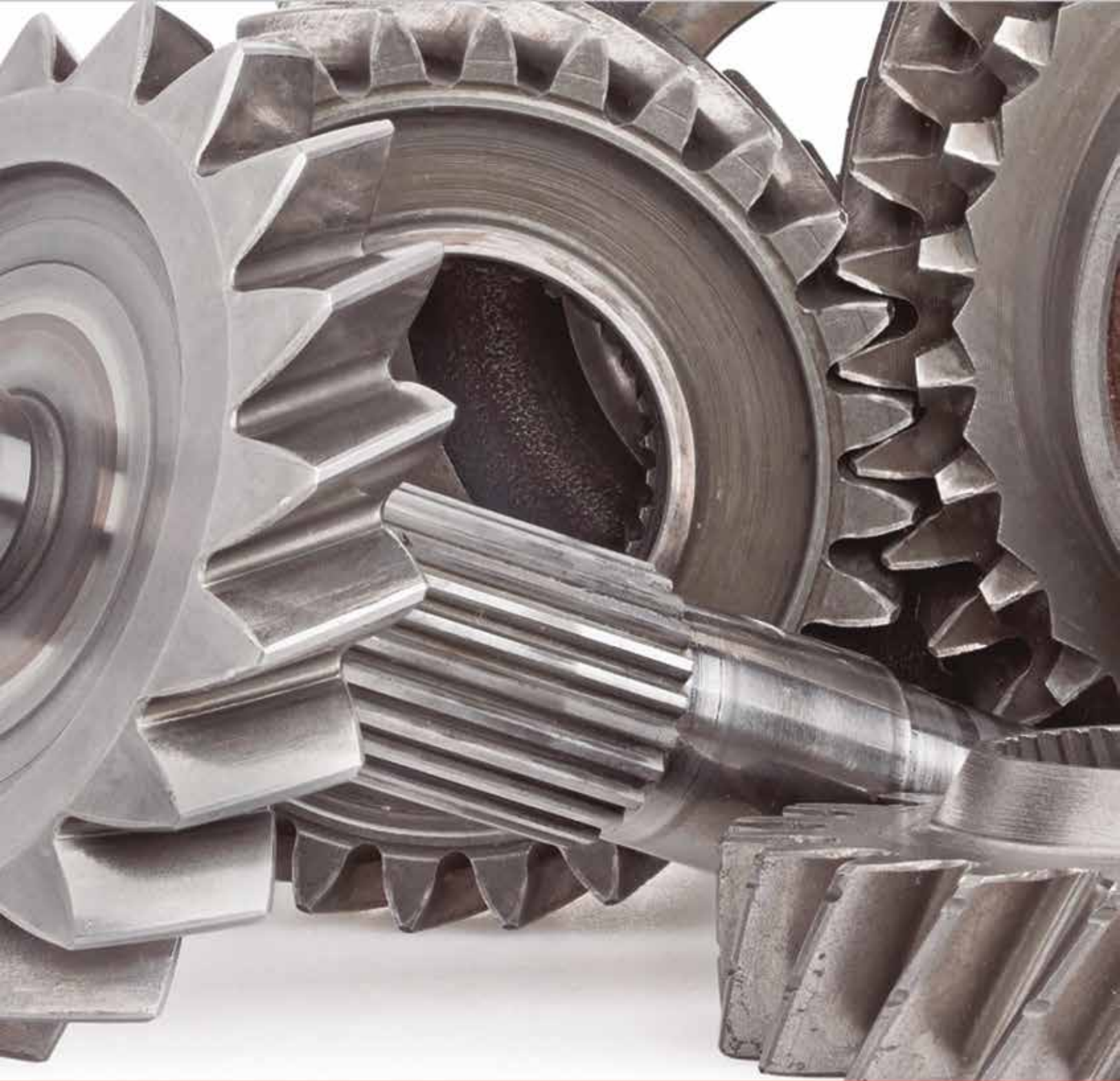
Figura 6.125. Respuesta dinámica del despegue

Estas gráficas se obtuvieron para las siguientes velocidades, ver Tabla 6.3

Tabla 6.3: Sensibilidad al despegue

Leva	Velocidad [rpm]	Tiempo [s]
Bézier grado 15	570	0.9
Polinomio 345	415	1.5
Bézier a tramos	400	1.62
Polinomio 4567	390	1.38
Cicloidal	410	1.38

Se constata nuevamente que el perfil Bézier grado 15 es el que más retarda el despegue del seguidor con respecto a la velocidad. En definitiva las curvas polinomiales de más alto grado tienen mejor control de vibración pero son más sensibles al despegue del seguidor.



CAPÍTULO 7

ENGRANAJES

7.1 DEFINICION

Desde el minúsculo reloj de pulsera al motor de un trasatlántico, son innumerables los mecanismos que cumplen su cometido gracias a los engranajes.

El engrane es una rueda o cilindro dentado empleado para transmitir un movimiento giratorio desde un eje a otro en una máquina. Un conjunto de dos engranes que transmite el movimiento de un eje a otro se denomina engranaje.

7.2 ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES RECTOS

Los engranajes de diente recto son más simples de producir y por ello más baratos, la transmisión del movimiento se realiza por medio de los dientes, quienes se empujan sin resbalar. Se utilizan para la transmisión de movimiento entre ejes paralelos, ver Fig. 7.1.

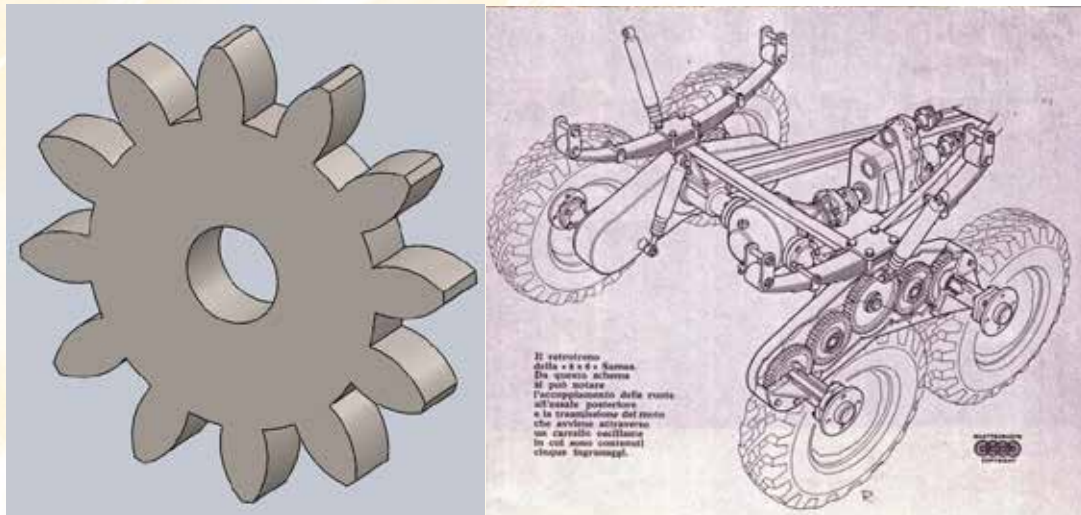


Figura 7.1. Engrane de dientes rectos

7.2.1 LEY FUNDAMENTAL DEL ENGRANAJE

Conceptualmente los dientes de cualquier forma evitarían el deslizamiento. Utilizando Working Model 2D se diseñan unos engranes con perfiles arbitrarios y se efectúa el análisis correspondiente, ver Fig. 7.2

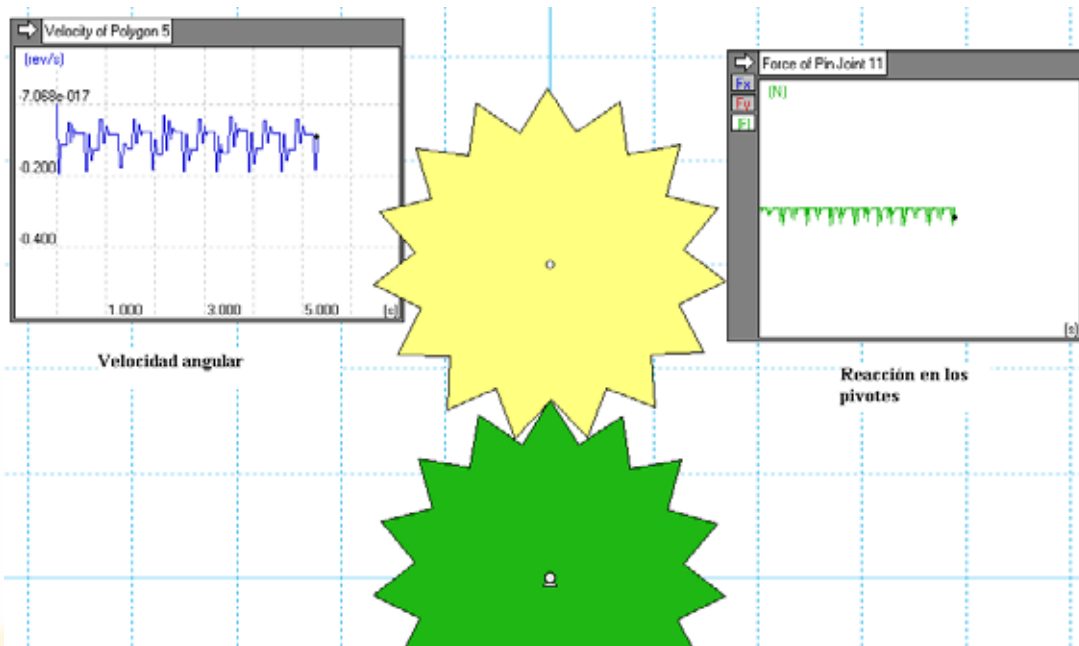


Figura 7.2. Forma arbitraria de los dientes

Como se observa en este caso a pesar de que la velocidad del motor es constante, la velocidad de la rueda conducida no es constante, ni tampoco la reacción en los pivotes, por lo tanto este perfil triangular viola la **ley fundamental del engranaje** que expresa que: la razón de la velocidad angular entre los engranes de un engranaje permanece constante en toda la conexión.

Con la finalidad de cumplir la ley fundamental del engrane, los perfiles de los dientes que engranan deben conjugarse entre sí. Existe un número infinito de pares conjugados posibles, pero sólo algunas curvas tiene aplicación práctica en los dientes de engrane. La **cicloide** se usa aún como perfil de dientes en los relojes de pulsera o de mesa, pero en la mayoría de los engranes se usa la curva que por su forma se conoce como **involuta del círculo**.

7.2.2 FORMA DE INVOLUTA PARA DIENTES DE ENGRANE

Leonard Euler (Suiza) en 1754, trabajó sobre los principios de diseño y sobre las reglas de la acción conjugada y determino el perfil más idóneo, es así que efectuando síntesis de perfil de dientes en la cual las condiciones son:

- Las curvas deben transmitir una velocidad angular constante
- Las reacciones en los cojinetes deben ser constantes, lo que implica que la línea normal común debe mantener un ángulo constante con la normal a la línea de centros.

Y luego del procedimiento matemático respectivo³⁸ se demostró que la involuta del círculo, ver Fig. 7.3 es la única curva de diente que puede cumplir estas condiciones.

³⁸ Joseph Stiles Beggs, Mecanismos, Pág. 71-73

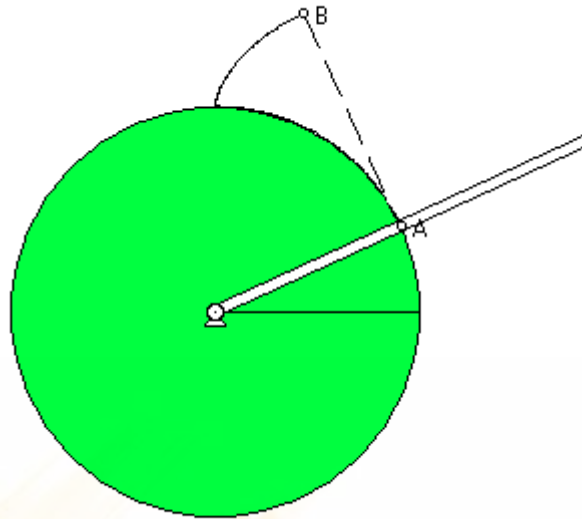


Figura 7.3. Involuta del círculo, se mantiene la tensión en la cuerda AB

La involuta del círculo se puede trazar envolviendo una cuerda en un cilindro y luego desenrollándola y tensando la cuerda AB para que su punto B, trace la curva correspondiente, que es similar a una espiral, ver Fig. 7.3

Matemáticamente se deduce la expresión analítica de la siguiente forma, ver Fig. 7.4

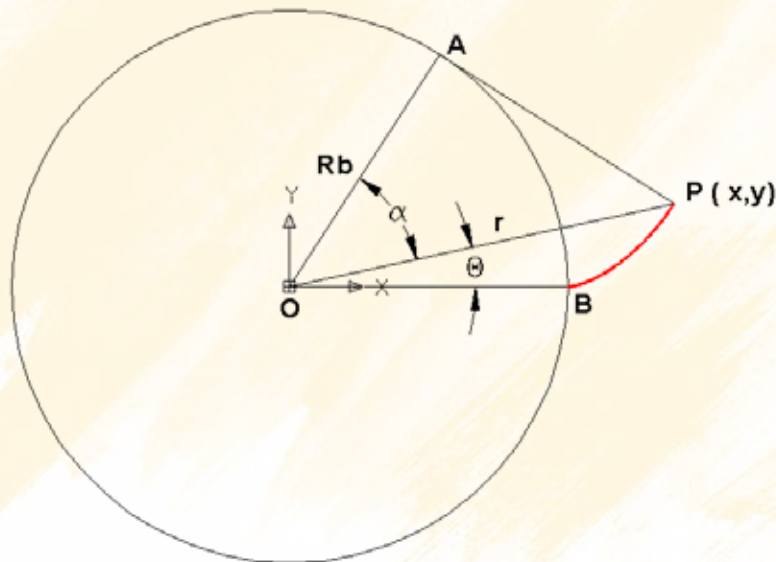


Figura 7.4. Determinación analítica de la curva involuta

De la definición de involuta se cumple que:

$$\text{Arco } AB = \text{Segmento } AP \quad (7.1)$$

$$R_b[\theta + \alpha] = R_b \tan[\alpha] \quad (7.2)$$

De donde

$$\theta = \tan[\alpha] - \alpha = \text{inv}[\alpha] \quad (7.3)$$

Leyéndose involuta de α

Las ecuaciones paramétricas que definen el punto P son por tanto:

$$x = r \cos \theta = \frac{R_b}{\cos \alpha} \cos[\tan[\alpha] - \alpha] \quad (7.4)$$

$$y = r \sin \theta = \frac{R_b}{\cos \alpha} \sin[\tan[\alpha] - \alpha] \quad (7.5)$$

Donde R_b es el radio generador de la involuta o radio base que a su vez se define mediante la Ec. 7.6

$$R_b = \frac{m Z}{2} \cos[\phi] \quad (7.6)$$

Donde
m es el módulo del diente
Z es el número de dientes
 ϕ es el ángulo de presión

7.2.3 GRAFICACIÓN EN WOLFRAM MATHEMATICA DE UNA RUEDA DENTADA

El siguiente fichero permite dibujar el diente y la forma aproximada de un engrane.

Al correr el programa arroja en primer lugar dos ángulos que son los valores de la intersección con el diámetro primitivo y con el diámetro externo los cuales deberán ser copiados y sustituir a las variables α_1 y α_f .

Luego entrega el esquema del diente con las intersecciones y ejes de simetría, ver Fig. 7.5

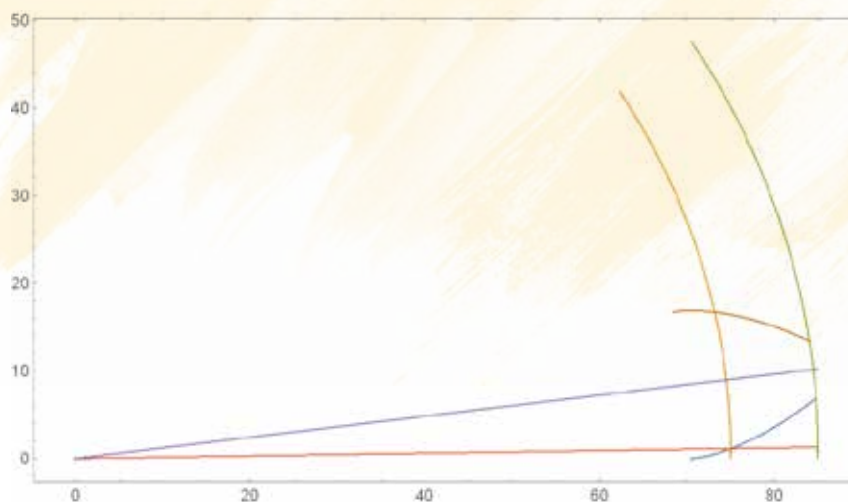


Figura 7.5. Diente del engrane

$m = 10; Z = 15; \phi = 20; \delta = 360/(4 Z) \pi/180;$

$Dp = m Z; Rbase = Dp/2 \cos[\phi \pi/180]; Rp = Dp/2; Rexterno = Rp + m;$
 $inv[\alpha, \vartheta] := \tan[\alpha] - \alpha;$

"x,y Curva involuta";

$x[\alpha, \vartheta] := Rbase/\cos[\alpha] \cos[inv[\alpha, \vartheta]];$
 $y[\alpha, \vartheta] := Rbase/\cos[\alpha] \sin[inv[\alpha, \vartheta]];$

"x1,y1 Diametro primitivo";

$x1 = Rp \cos[\alpha]; y1 = Rp \sin[\alpha];$

"x2,y2 Diametro externo";

$x2 = Rexterno \cos[\alpha]; y2 = Rexterno \sin[\alpha];$

"Intersección involuta con Radio primitivo para obtener eje de simetria 0.349065";

$FindRoot[x[\alpha, \vartheta]^2 + y[\alpha, \vartheta]^2 == Rp^2, \{\alpha, 0.1\}]$
 $\alpha1 = 0.34906585039886584;$

"Intersección involuta con Radio externo para obtener el rango 0.5932";

$FindRoot[x[\alpha, \vartheta]^2 + y[\alpha, \vartheta]^2 == Rexterno^2, \{\alpha, 0.1\}]$
 $\alpha f = 0.5932277708471628;$

"Graficación de la linea que interseca con el Diametro primitivo";

$x3 = t;$
 $y3 = \tan[\tan[\alpha1] - \alpha1] t;$

$x4 = t;$
 $y4 = \tan[\tan[\alpha1] - \alpha1 + \delta] t;$

"Generación de la parte simetrica del diente";

$r[\alpha, \vartheta] := \sqrt{x[\alpha, \vartheta]^2 + y[\alpha, \vartheta]^2};$
 $\gamma[\alpha, \vartheta] := \text{ArcTan}[y[\alpha, \vartheta]/x[\alpha, \vartheta]];$
 $\beta = \tan[\alpha1] - \alpha1 + \delta;$
 $\theta[\alpha, \vartheta] := 2\beta - \gamma[\alpha, \vartheta];$
 $y5[\alpha, \vartheta] := r[\alpha, \vartheta] \sin[\theta[\alpha, \vartheta]];$
 $x5[\alpha, \vartheta] := r[\alpha, \vartheta] \cos[\theta[\alpha, \vartheta]];$

$\text{ParametricPlot}[\{x[\alpha, \vartheta], y[\alpha, \vartheta], \{x1, y1\}, \{x2, y2\}, \{x3, y3\}, \{x4, y4\}, \{x5[\alpha, \vartheta], y5[\alpha, \vartheta]\}, \{\alpha, 0, \alpha f\}, \{t, 0, Rexterno\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{Full}]$

$\text{ParametricPlot}[\{x[\alpha, \vartheta], y[\alpha, \vartheta], \{x5[\alpha, \vartheta], y5[\alpha, \vartheta]\}, \{\alpha, 0, \alpha f\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{Full}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$

$xtrans[\alpha, \vartheta] := x[\alpha, \vartheta] \cos[\vartheta] - y[\alpha, \vartheta] \sin[\vartheta]$
 $ytrans[\alpha, \vartheta] := x[\alpha, \vartheta] \sin[\vartheta] + y[\alpha, \vartheta] \cos[\vartheta]$

$x5trans[\alpha, \vartheta] := x5[\alpha, \vartheta] \cos[\vartheta] - y5[\alpha, \vartheta] \sin[\vartheta]$
 $y5trans[\alpha, \vartheta] := x5[\alpha, \vartheta] \sin[\vartheta] + y5[\alpha, \vartheta] \cos[\vartheta]$

$\text{ParametricPlot}[\{xtrans[\alpha, \vartheta], ytrans[\alpha, \vartheta], \{x5trans[\alpha, \vartheta], y5trans[\alpha, \vartheta]\}, \{\alpha, 0, \alpha f\}, \{\vartheta, 0, 2\pi\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{Full}, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$

$Inv1 = \text{Table}[\{xtrans[\alpha, \vartheta], ytrans[\alpha, \vartheta]\}, \{\alpha, 0, \alpha f, \alpha f/100\}, \{\vartheta, 0, 2\pi, 2\pi/Z\}];$
 $Inv5 = \text{Table}[\{x5trans[\alpha, \vartheta], y5trans[\alpha, \vartheta]\}, \{\alpha, 0, \alpha f, \alpha f/100\}, \{\vartheta, 0, 2\pi, 2\pi/Z\}];$
 $engrane = \text{Join}[Inv1, Inv5];$
 $\text{ListPlot}[engrane, \text{AspectRatio} \rightarrow \text{Automatic}]$

Y finalmente un gráfico, ver Fig. 7.6 donde se aprecia el esquema del engrane

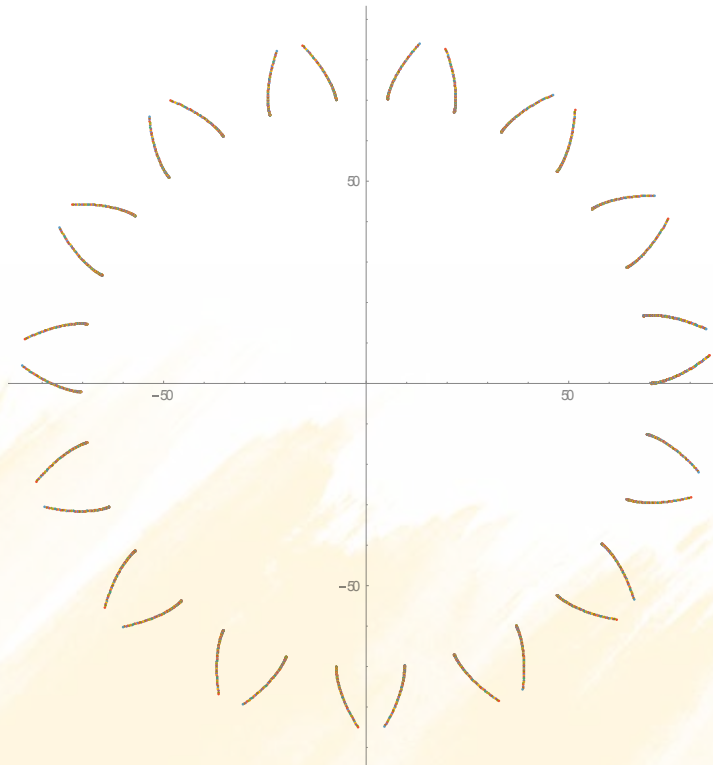


Figura 7.6. Esquema del engrane

La siguiente versión del mismo programa genera únicamente una porción de involuta en un listado de Excel que se crea en la carpeta **Documentos** para luego continuar la construcción del engrane en AutoCAD fácilmente, utilizar la sentencia = A1&", "&B1:

$m = 10; Z = 15; \phi = 20; \delta = 360/(4 Z) \pi/180;$

$D_p = m Z;$
 $R_{base} = D_p/2 \cos[\phi \pi/180];$
 $R_p = D_p/2;$
 $R_{externo} = R_p + m;$

$inv = \tan[\alpha] - \alpha;$

"x,y Curva involuta";
 $x = R_{base}/\cos[\alpha] \cos[inv];$
 $y = R_{base}/\cos[\alpha] \sin[inv];$

"Intersección involuta con Radio externo para obtener el rango 0.5932";

$\text{FindRoot}[x^2+y^2==R_{externo}^2,\{\alpha,0.1\}]$
 $\alpha f = 0.5932277708471628;$

$\text{ParametricPlot}[\{x,y\},\{\alpha,0,\alpha f\},\{t,0,R_{externo}\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{Full}]$

$\text{dienteX} = \text{Table}[x,\{\alpha,0,\alpha f,0.01\}]$
 $\text{dienteY} = \text{Table}[y,\{\alpha,0,\alpha f,0.01\}]$
 (*Exportación*)
 $\text{Export}["dienteX.xls",\text{dienteX}]$
 $\text{Export}["dienteY.xls",\text{dienteY}]$

70.47695	0	70.4769465589431,0	
70.48047	2.35E-05	70.4804705531001,2.34944299620596E-05	
70.49104	0.000188	70.491044297618,0.000188006199176498	
70.50867	0.000635	70.5086730793762,0.000634806589082947	
70.53337	0.001506	70.5333657122972,0.0015056754417163	
70.56513	0.002943	70.5651345410131,0.00294315713308837	
70.604	0.005091	70.6039954459597,0.00509081858537208	
70.64997	0.008094	70.6499678498609,0.00809351000934484	
70.70307	0.012098	70.7030747255528,0.0120976290788075	
70.76334	0.017251	70.7633426050831,0.0172513892515803	
70.8308	0.023705	70.8308015900124,0.023705092967296	
70.90549	0.031611	70.9054853628257,0.031611410470618	

Figura 7.6. Parte de la tabla generada en Excel

Esos datos constituyen las coordenadas de una polilínea generada en AutoCAD, ver Fig. 7.7

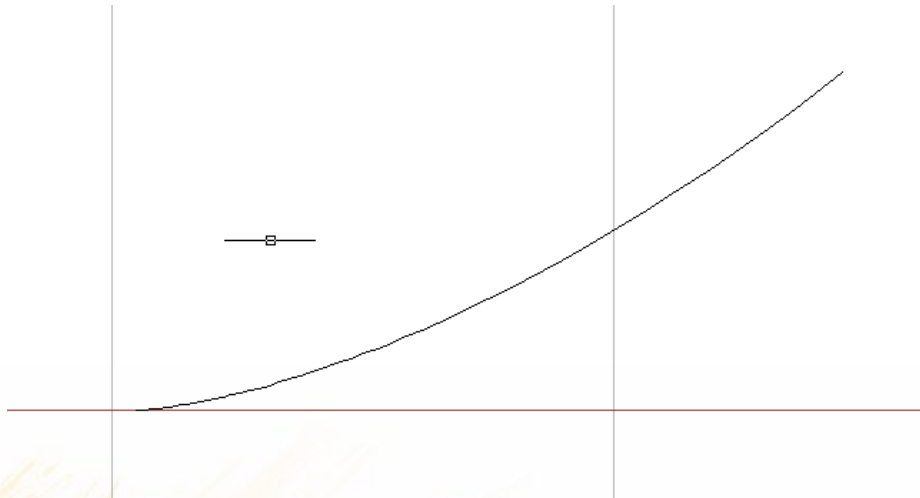


Figura 7.7. Involuta generada

Se dibuja el diámetro primitivo, exterior e interior.

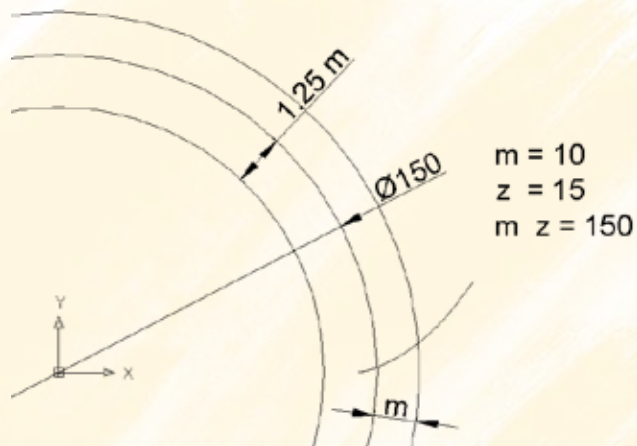


Figura 7.7. Diámetro primitivo, exterior e interior

Se dibuja una línea radial desde el cero absoluto hasta el inicio de la involuta y desde el cero absoluto hasta la intersección con el diámetro primitivo, ver Fig. 7.8

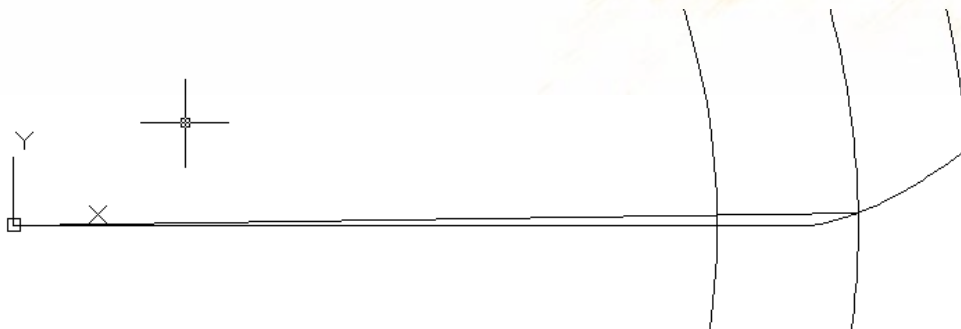


Figura 7.8. Líneas radiales

Se efectúa un filete de radio 0.4 m y se genera una polilínea, ver Fig. 7.9

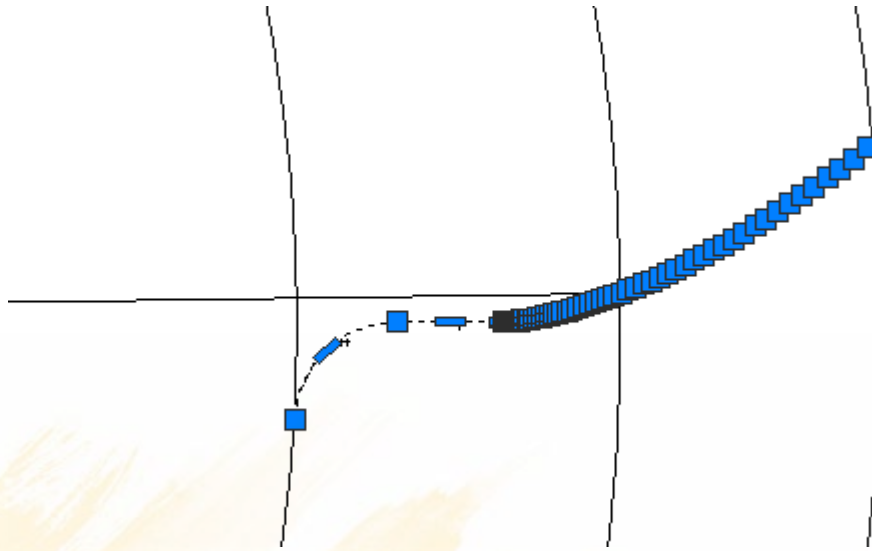


Figura 7.9. Flanco completo del diente

La intersección es rotada un ángulo igual a

$$\delta = \frac{360}{4Z} = 6^\circ$$



Figura 7.10. Eje de simetría y simetría

Se efectúa un arreglo polar de 15 dientes, todo el engrane debe ser una polilínea cerrada, ver Fig. 7.11

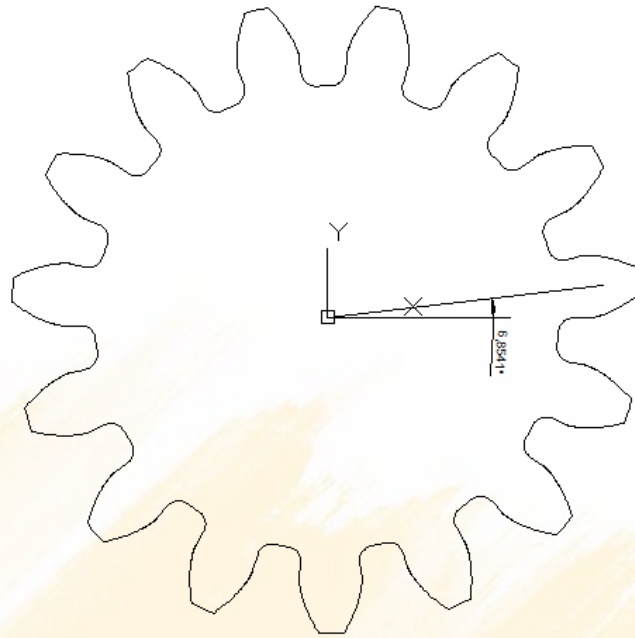


Figura 7.11. Engrane completo

Se rota el ángulo medido y se copia otro a la derecha del primero, ver Fig. 7.12, a una distancia de 150 mm

$$C = \frac{m}{2} [Z_1 + Z_2] = 150 \text{ mm} \quad (7.7)$$

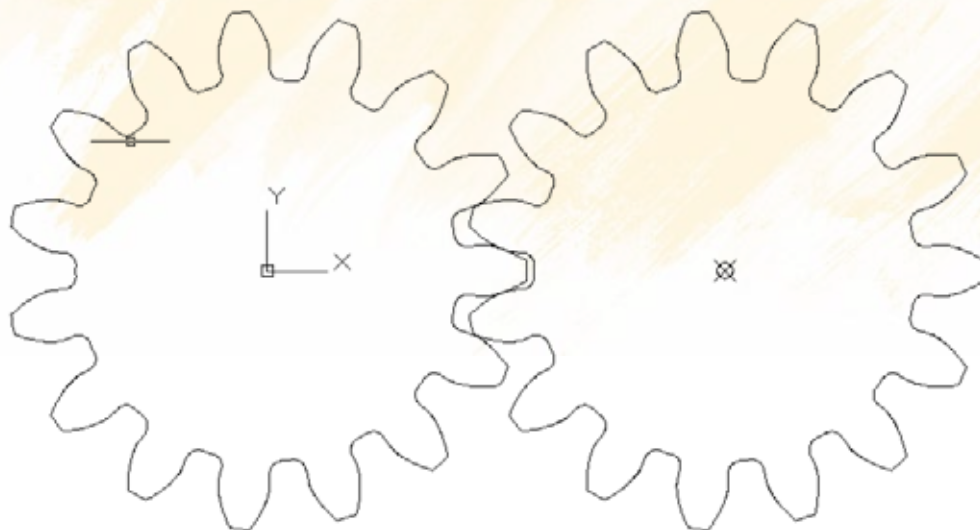


Figura 7.11. Un par de engrane generan un engranaje

Se verifica la hipótesis que predice que la velocidad de la rueda de salida será constante mediante la simulación en Working Model 2D, ver Fig. 7.12

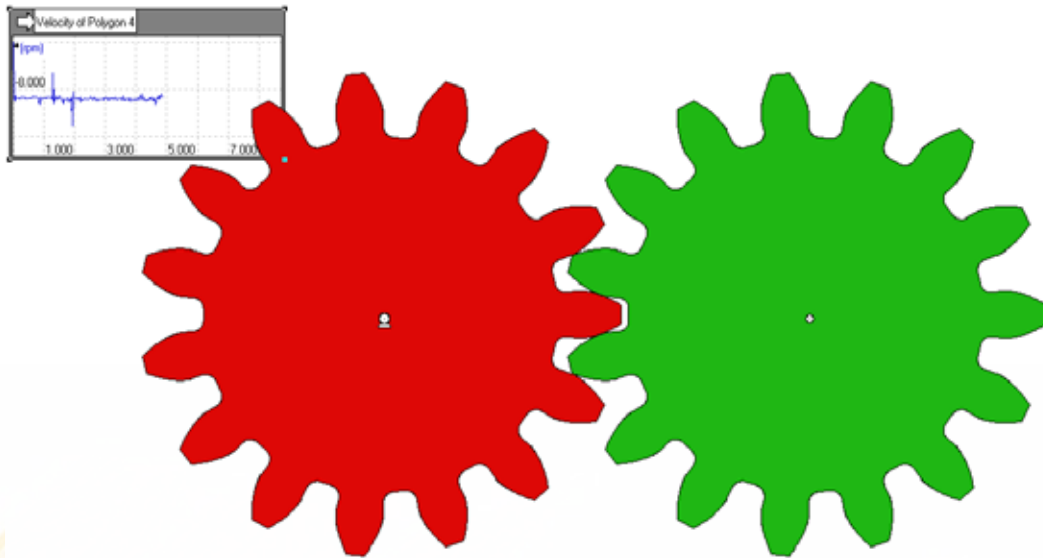


Figura 7.12. Verificación de la velocidad de salida

Se puede efectuar el mismo análisis mediante el siguiente programa en AutoLISP, que nos permite trazar la involuta en base de las ecuaciones deducidas anteriormente. Se transcribe el siguiente programa en bloc de notas y se grava con el nombre de engrane en cualquier carpeta con extensión .lsp.

Finalmente desde el AutoCAD se carga el mismo con la sentencia "**apload**"

```

(DEFUN intr ()
  (SETQ modulo (GETREAL "modulo en mm : ")) (TERPRI)
  (SETQ numero (GETINT "numero de dientes : ")) (TERPRI)
  (SETQ angulo (GETREAL "Angulo de presion : ")) (TERPRI)
  (SETQ ang ( * pi ( / angulo 180 ))) (TERPRI)
  (SETQ Radio (*( / ( * modulo numero ) 2 )( cos ang))) (TERPRI)
  (SETQ deltat (GETREAL "Precision en el angulo theta: ")) (TERPRI)
  (WHILE (<= deltat 0)
    (PROMPT "Debe ser positivo mayor que 0") (TERPRI)
    (SETQ deltat (GETREAL "Precision en el angulo t: ")) (TERPRI)
    (SETQ ti (GETREAL "Inicio angulo en theta: ")) (TERPRI)
    (SETQ tf (GETREAL "Final angulo en theta : ")) (TERPRI)
    (SETQ tf ( * pi ( / tf 180))) (TERPRI)
    (WHILE (<= tf ti)
      (PROMPT "Debe ser un valor mayor que inicio") (TERPRI)
      (SETQ tf (GETREAL "Final angulo en theta: ")) (TERPRI)
      (SETQ n (FIX ( / (- tf ti) deltat))))
      (DEFUN func1 (th)
        (*( / Radio (cos th) ) ( sin ( - ( / (sin th) (cos th) ) th )))
      (DEFUN func2 (th)
        (*( / Radio (cos th) ) ( cos ( - ( / (sin th) (cos th) ) th )))
      (DEFUN inic ( / y1 x1)
        (SETQ t1 ti)
        (SETQ x1 (func2 t1))
        (SETQ y1 (func1 t1))
        (SETQ p1 (LIST x1 y1)))
      (DEFUN dib ( / x2 y2 p2)
        (REPEAT n
          (SETQ t2 (+ t1 deltat))
          (SETQ x2 (func2 t2 ))
          (SETQ y2 (func1 t2 ))
          (SETQ p2 (LIST x2 y2))
          (COMMAND "line" p1 p2 ""))
          (SETQ p1 p2 t1 t2)))
      (DEFUN ult ( / p2 yf)
        (SETQ xf (func2 tf ))
        (SETQ yf (func1 tf ))
        (SETQ p2 (LIST xf yf))
        (COMMAND "line" p1 p2 ""))
      (DEFUN c:engrane ( / modulo numero angulo ang deltat t1 ti tf n p1
        x1)
        (SETVAR "blipmode" 0) (SETVAR "cmdecho" 0)
        (intr)
        (inic)
        (dib)
        (ult)
        (SETVAR "blipmode" 1) (SETVAR "cmdecho" 1))

```

En el cuadro de dialogo que se despliega, se carga el programa **engrane** mediante **“load”** y luego cerramos con **“close”**, se dibuja el engrane siguiendo los pasos anteriores. Ver Fig. 7.13

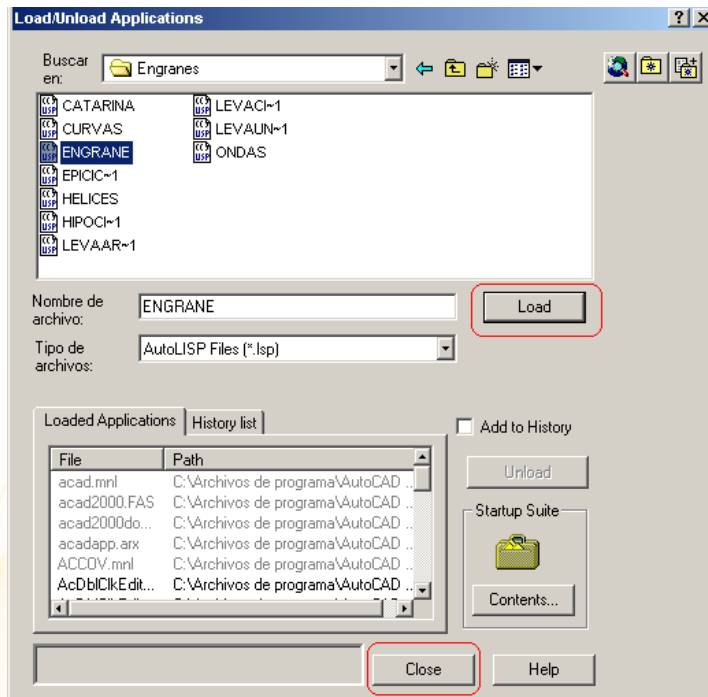


Figura 7.13. Cuadro de dialogo para cargar un archivo en AutoLISP

7.2.4 PARAMETROS DE UN ENGRANE

Los parámetros del engrane se observan en la Fig. 7.14

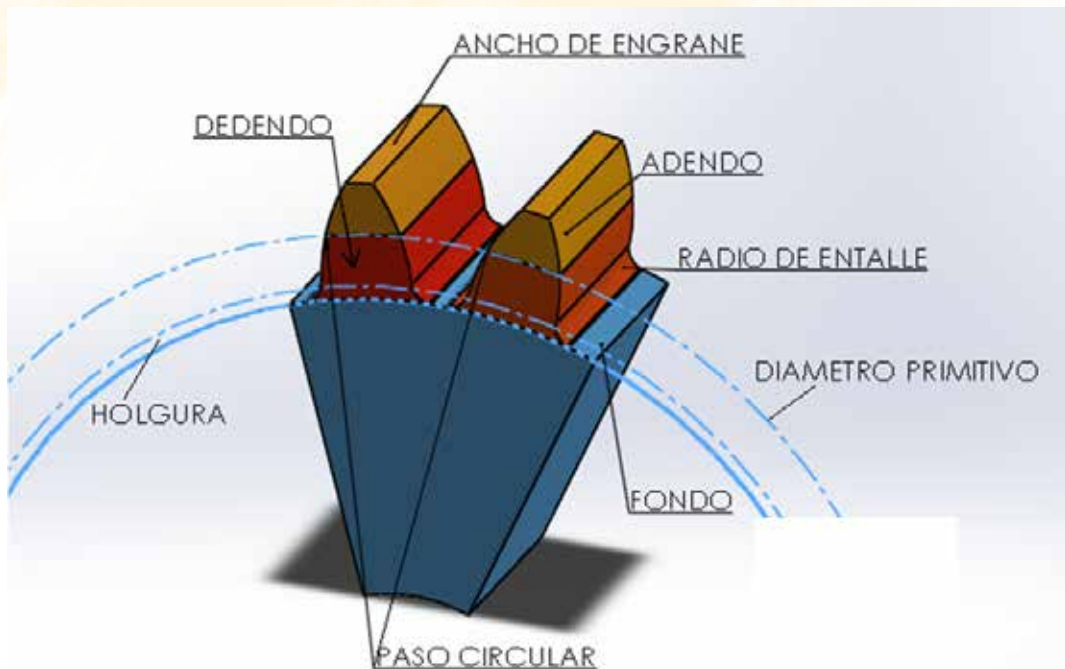


Figura 7.14. Parámetros del engrane

- **ANGULO DE PRESIÓN:** El ángulo de presión entre dos dientes de engrane se definen de la misma manera que en el mecanismo leva seguidor, es decir el ángulo que subtiende la fuerza de contacto con la tangente común. Inicialmente se empleó 14.5°, pero los valores estándar de 20° y 25° generan un diente más robusto, siendo el de 20° el más utilizado

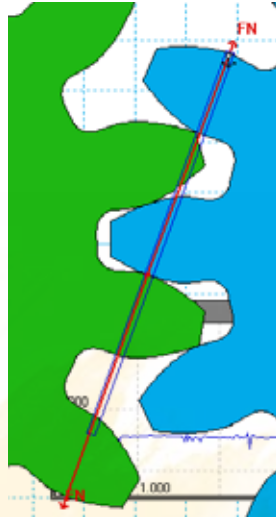


Figura 7.15. Ángulo de presión

La simulación en Working Model 2D, ver Fig. 7.15, confirma que la fuerza de contacto siempre se mantiene a 20°, con ligeras variaciones debido a las imperfecciones del dibujo, Obviamente el radio base se calcula con este ángulo de presión.

- **NUMERO DE DIENTES:** El número de dientes se define como **Z**, el número de dientes máximo recomendable en un engrane es de 200 y el mínimo de acuerdo a la tabla 7.2
- **MÓDULO:** El tamaño del diente esta estandarizado de acuerdo al módulo **m** en el sistema internacional, mientras mayor sea el modulo más resistente es el engrane, dos ruedas engranadas deben tener el mismo módulo, los módulos son magnitudes estandarizadas que deben ser escogidos de acuerdo a la siguiente tabla :

Módulo	mm
	0.3
	0.4
	0.5
	0.8
	1
	1.25
	1.5
	2
	2.5
	3
	4
	5
	6
	8
	10
12	
16	
20	
25	

Tabla 7.1. Módulos preferidos

- **DIAMETRO PRIMITIVO:** Es la circunferencia en la que se verifica la tangencia entre dos ruedas dentadas es igual a:

$$D_p = m Z \quad (7.8)$$

- **PASO CIRCULAR:** El paso circular es la medida del arco, desde un punto de un diente al mismo punto en un diente contiguo, medido en el diámetro primitivo y es igual a :

$$p_c = \pi m \quad (7.9)$$

- **RADIO BASE:** El radio base es el de la circunferencia que origina la involuta, se calcula con la fórmula:

$$R_b = \frac{D_p}{2} \cos \phi \quad (7.10)$$

- **ADENDO:** El adendo es la medida desde el diámetro primitivo hasta el diámetro exterior, su magnitud es igual a ***m***
- **DEDENDO:** El dedendo es una medida igual a ***1.25 m*** y define la circunferencia interior o dependo del engrane
- **ALTURA DEL DIENTE:** La altura del diente corresponde según esto a ***2.25 m***
- **HOLGURA:** El dedendo es mayor que el adendo en ***0.25 m*** de manera que proporciona una holgura igual a este valor
- **ANCHO O ESPESOR DE LA CARA:** El espesor de un engrane, en forma general se puede tener un valor nominal de ***12 m***.
- **DISTANCIA ENTRE CENTROS:** Es igual a:

$$c = \frac{m}{2} [Z_1 + Z_2] \quad (7.11)$$

- **INTERFERENCIA Y REBAJE ENTRE DIENTES:** Como se puede determinar del gráfico realizado en AutoCAD, la porción de diente abajo del círculo base es una línea recta e interferirá con la punta del engrane conectado que es involuta. Si el engrane ha sido cortado con un "cortador" estándar, la herramienta de corte también interferirá con la porción del diente situada debajo del círculo base y desprenderá el material de interferencia produciendo el rebaje y debilitamiento de la base del diente.

El rebaje o interferencia se puede impedir con sólo evitar el uso de engranes con muy pocos dientes, para determinar el número de dientes adecuado que se puede utilizar recurrimos a la siguiente ecuación, Ec. 7.12

$$Z_2 = \frac{Z_1^2 - 34}{34 - 2 Z_1} \quad (7.12)$$

Con la Ec. 7.12 se determina la siguiente tabla:

Número posible de dientes en las ruedas para que no exista interferencia con ángulo de 20°	
Piñón : Z1	Engrane : Z2
13	13-17
14	13-27
15	13-48
16	13-112
17	13 - ∞

Tabla 7.2. Selección número de dientes

- **LONGITUD DE ACCIÓN:**

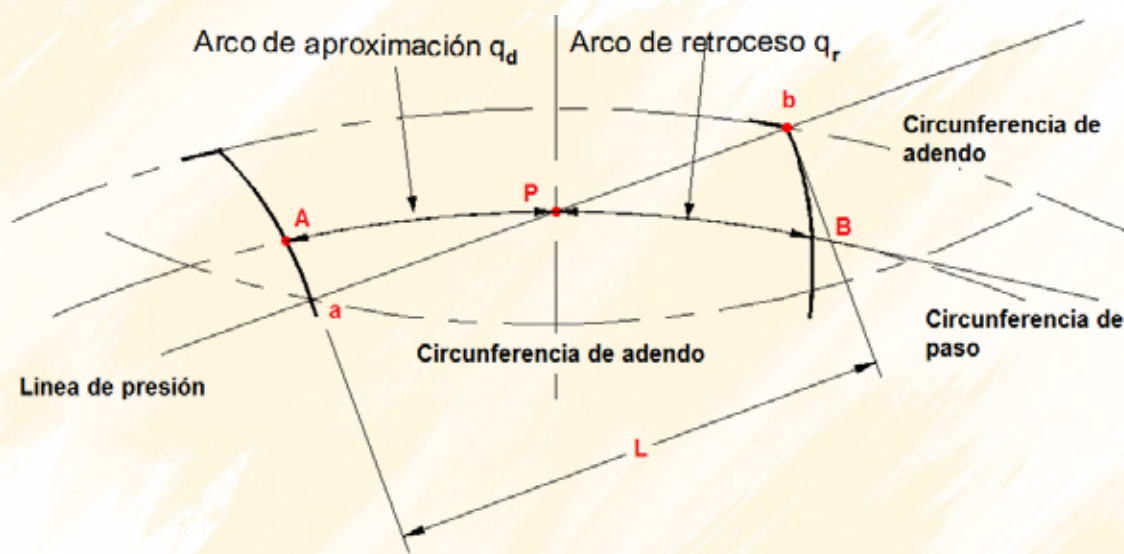


Figura 7.16. Longitud de acción

Se puede definir una trayectoria denominada longitud de acción L que está definida por los puntos de inicio y fin del contacto entre dos dientes y que caracteriza el engranado del piñón y el engrane. El valor de L se evalúa con la Ec. 7.13.

$$L = \sqrt{[r_p + a_p]^2 - [r_p \cos \phi]^2} + \sqrt{[r_g + a_g]^2 - [r_g \cos \phi]^2} - c \sin \phi \quad (7.13)$$

Donde r es el radio primitivo
 a_p es el adendo del piñón
 a_g es el adendo del engrane
 ϕ es ángulo de presión

- **RELACION DE CONTACTO m_p** : Finalmente la relación de contacto m_p define el número promedio de dientes en contacto durante la operación del engranaje

$$m_p = \frac{L}{p_c \cos \phi} \geq 1.2 \quad (7.14)$$

La relación siempre debe ser mayor a 1.2, lo que significa que habrá momentos en que 2 pares de dientes estén en contacto.

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Determine los parámetros del engranaje, si un piñón de 19 dientes se acopla con un engrane de 37 dientes, de módulo 5 mm y ángulo de presión de 20°.

"Datos";
 $Z_p = 19;$
 $Z_g = 37;$
 $m = 5;$
 $\phi = 20 \pi/180;$
" Diámetros primitivos y distancia entre centros";
 $D_p = m Z_p; r_p = 0.5 D_p;$
 $D_g = m Z_g; r_g = 0.5 D_g;$
 $c = (D_p + D_g)/2;$
 $a = m;$
 $a_p = a_g = a;$
" Longitud de acción";
 $L = \text{Sqrt}[(r_p + a_p)^2 - (r_p \text{Cos}[\phi])^2] + \text{Sqrt}[(r_g + a_g)^2 - (r_g \text{Cos}[\phi])^2] - c \text{Sin}[\phi];$
"Relación de contacto";
 $p_c = \pi m;$
 $m_p = L/(p_c \text{Cos}[\phi])$

El valor que se obtiene es:

$$m_p = 1.6208883190497367$$

Se puede esperar un funcionamiento suave.

7.2.5 DISEÑO DE TRENES DE ENGRANAJES

El diseño de un tren de engranajes de ejes fijos consiste en determinar el número de ruedas que han de constituir el tren, y el número de dientes de cada una, para conseguir una relación de transmisión dada.

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Diseñar un tren para lograr la relación de transmisión = 58 / 1 (Roque Alejandro Calero Pérez, 1999).

Las restricciones son las siguientes:

- En general no es recomendable el empleo de ruedas con números de dientes menos de 12 ni mayores de 100, ver Tabla 7.2 con respecto a la interferencia.
- Las relaciones parciales deben estar entre 5 y 7 (en casos excepcionales pueden llegar hasta 12), mientras mayor sea este valor mayor será el número de dientes
- El número de etapas se las calcula en base de la Ec. 7.15:

$$etapas = \frac{\log(e)}{\log(e_{limite})} \quad (7.15)$$

Donde e es la relación de transmisión pedida
 e_{limite} relación parcial limite que puede estar entre 5 y 7

$e = 58.0;$
 $e_{lim} = 7;$
 $etapas = \text{Log10}[e]/\text{Log10}[e_{lim}]$

El valor obtenido es 2.08 es decir se debe utilizar 3 etapas, como 58 no se puede factorizar, se utiliza el siguiente proceso de inspección

$$\frac{7 \cdot 7 \cdot 58}{1 \cdot 1 \cdot 49} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 58}{1 \cdot 1 \cdot 25} = \frac{60 \cdot 60 \cdot 58}{12 \cdot 12 \cdot 25}$$

Si se toma en cuenta la interferencia según la tabla 7.2

$$\frac{4 \cdot 4 \cdot 58}{1 \cdot 1 \cdot 16} = \frac{72 \cdot 72 \cdot 58}{18 \cdot 18 \cdot 16}$$

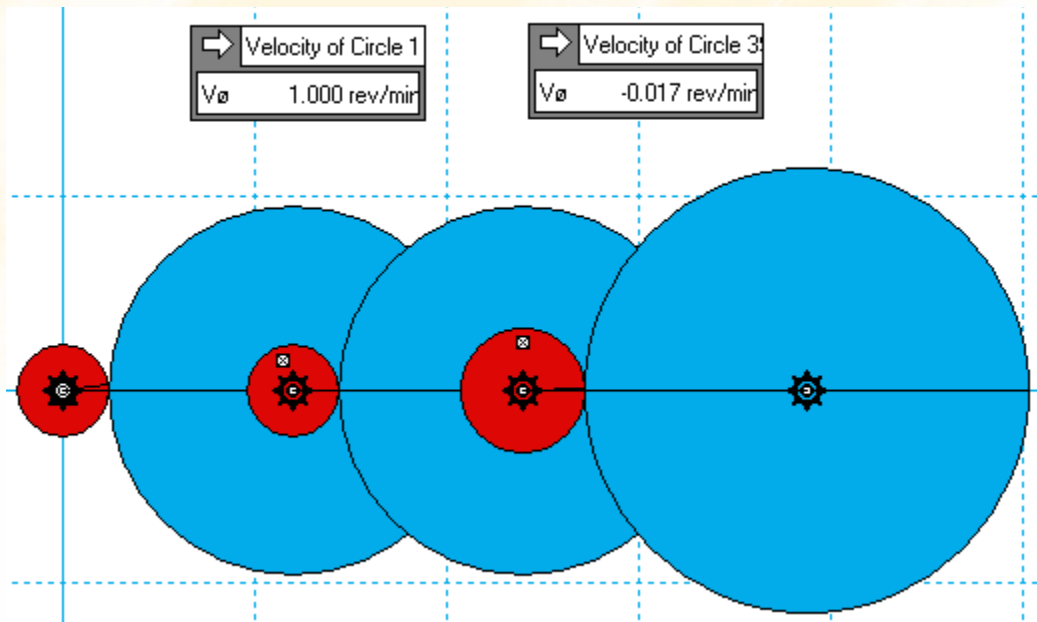


Figura 7.17. Tren de engranajes en Working Model 2D

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Diseñar un tren para lograr la relación de transmisión = 300 / 1.

Se determina el número de etapas con la Ec. 7.15 que da un valor de 3.54 por lo tanto se tiene 4 etapas

A continuación se descompone 300 como:

$$\frac{5 \ 5 \ 4 \ 3}{1 \ 1 \ 1 \ 1} = \frac{80 \ 80 \ 64 \ 45}{16 \ 16 \ 16 \ 15}$$

Con lo que se evita la interferencia

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Diseñar un tren reductor para una trituradora de chatarra. El motor de impulsión de 20 HP gira a 1400 rpm y el eje de la trituradora debe girar entre 18 y 14 rpm.

En primer lugar se determina la relación de transmisión

$$i = \frac{\omega_{entrada}}{\omega_{salida}} = \frac{1400}{16} = 87.5 \quad (7.16)$$

A continuación el número de etapas con la Ec. 7.15 que entrega un valor de 2.77 es decir se debe utilizar 3 etapas

Si la primera etapa es de 5 el residuo será de:

$$\frac{87.5}{5} = 17.5$$

La raíz cuadrada (2 etapas restantes) de 17.5 es:

$$\sqrt[2]{17.5} = 4.18$$

El valor de la segunda etapa estará entre 5 y 4.18, se escogerá por tanto un valor de 4.5. El nuevo residuo es por tanto:

$$\frac{17.5}{4.5} = 3.88$$

Por tanto se selecciona un valor de 4 para la última etapa y las relaciones son:

$$\frac{5 \ 4.5 \ 4}{1 \ 1 \ 1} = \frac{80 \ 72 \ 64}{16 \ 16 \ 16}$$

Tomando en cuenta piñones de 16 dientes para evitar la interferencia.

La relación de transmisión real para los engranes compuestos se calcula mediante el producto en Ec. 7.17:

$$i = \prod_{j=1}^n \left[\mp \frac{Z_{conducido}}{Z_{conductor}} \right]_j \quad (7.17)$$

Lo que da un valor de:

$$i = \left[-\frac{80}{16} \right] \left[-\frac{72}{16} \right] \left[-\frac{64}{16} \right] = -90$$

La frecuencia de salida será:

$$\omega_{salida} = \frac{\omega_{entrada}}{i} = -\frac{1400}{90} = -15.55 \text{ rpm}$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Diseñar un tren para lograr la relación de transmisión = 383 / 649 < 1

Como no se pueden obtener factores primos se puede utilizar el método de las fracciones parciales.

$$\frac{383}{649} = \frac{1}{649/393} = \frac{1}{1 + .6514} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}}$$

Luego se evalúa la fracción reducida

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{22}$$

Y se determina el error mediante:

$$\frac{\frac{13}{22} - \frac{383}{649}}{\frac{13}{22}} 100\% = 0.1\%$$

- **TRENES DE ENGRANAJES CON REVERSIÓN O COAXIAL:**

En los ejemplos anteriores las localizaciones de los ejes de entrada y de salida están en lugares diferentes. En algunos casos es deseable o necesario tener el eje de salida concéntrico con el eje de entrada lo que se conoce como tren con reversión.

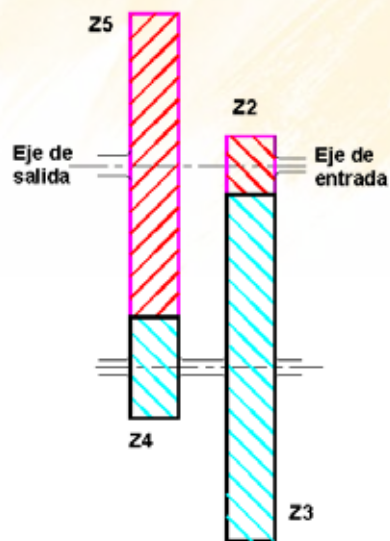


Figura 7.18. Tren de engranes con reversión

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Diseñar un tren compuesto con reversión con una relación exacta de 18:1

Factorizamos la relación del tren en factores cercanos y menores a 7:

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{18}{1}$$

Puesto que la distancia entre centros debe ser igual debemos usar la siguiente relación:

$$Z_2 + Z_3 = Z_4 + Z_5 = K \quad (7.18)$$

Por otro lado la relación de transmisión está dada por:

$$\frac{18}{1} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{Z_3}{Z_2} \cdot \frac{Z_5}{Z_4}$$

Por tanto

$$6 Z_2 = Z_3 \quad \text{y} \quad 3 Z_4 = Z_5 \quad (7.19)$$

Reemplazando en 7.18 se obtiene:

$$Z_2 + 6 Z_2 = Z_4 + 3 Z_4 = K \quad (7.20)$$

O lo que es lo mismo

$$7 Z_2 = 4 Z_4 = K$$

El mínimo valor de K debe ser su mínimo común múltiplo que es 28, pero no se pueden tener engranes de 7 y 4 dientes, por lo que ensayamos con $28 \times 2 = 56$ que nos da 14 y 8 dientes, finalmente con $28 \times 3 = 84$, se obtiene:

$$Z_2 = \frac{84}{7} = 12; \quad Z_4 = \frac{84}{4} = 21; \quad Z_3 = 72; \quad Z_5 = 63;$$

Lo cual es una solución viable, las operaciones anteriores podemos ponerlas en un sencillo algoritmo de Wolfram Mathematica

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Diseñar un tren compuesto con reversión con una relación exacta de 48:1

```
i = 48;  
a1 = 6; a2 = 8;  
f=2;  
K= f(1+a1)(1+a2);  
Z2 = K/(a1+1)  
Z4 = K/(a2+1)  
Z3 = a1 Z2  
Z5 = a2 Z4
```

Obteniéndose: $Z_2 = 18$; $Z_4 = 14$ $Z_3 = 108$; $Z_5 = 112$

7.3 ANÁLISIS DE ENGRANAJES PLANETARIOS

Los engranajes planetarios son muy utilizados donde se requiere un sistema compacto, adicionalmente su análisis es más complicado razón por la cual se pondrá énfasis en estos sistemas. Un engranaje planetario se compone de los siguientes elementos:

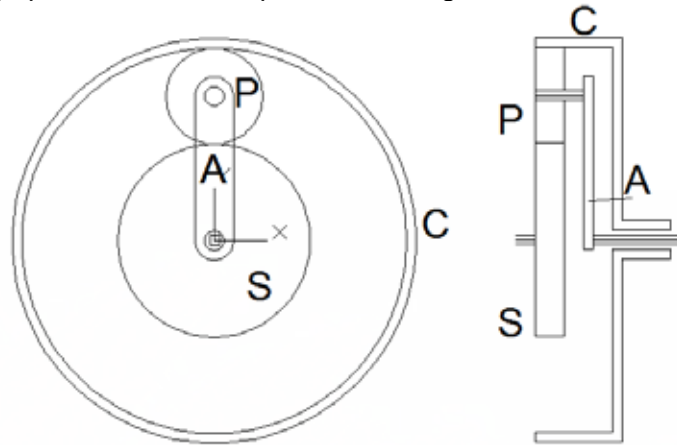


Figura 7.19. Tren de engranes planetarios

En la Fig. 7.19 se identifican los siguientes componentes:

- S: Engrane Solar
- P: Planeta o planetario que puede ser uno o más
- A: Brazo o portaplaneta
- C: Corona de dientes internos

Para entender el método de análisis se van a realizar los siguientes ejemplos:

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Analizar el siguiente tren epíciclico si el brazo gira a 60 rpm en sentido antihorario

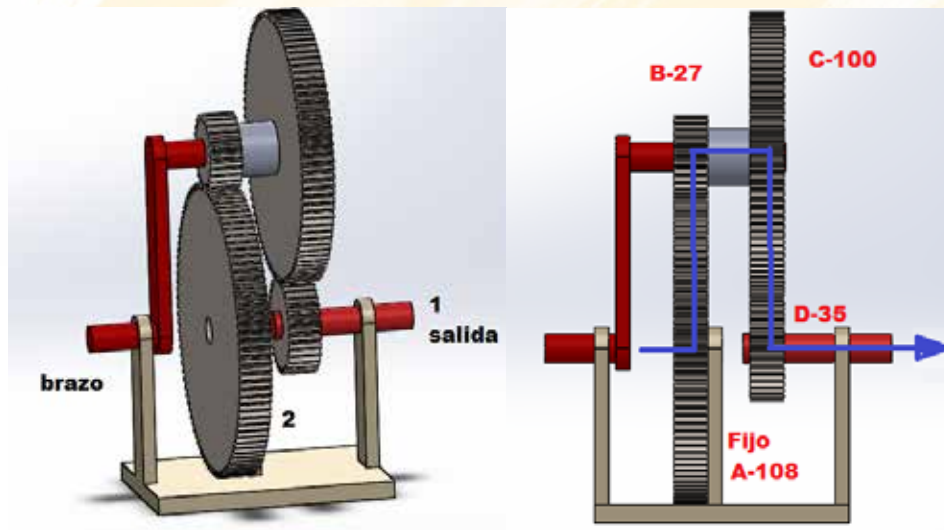


Figura 7.20. Tren de engranes planetarios

- En primer lugar se identifican los engranajes planetarios que son el engrane B y C
- A continuación se identifica un posible flujo de fuerza en el que necesariamente estarán los planetarios

Flujo: **A B C D**

- Se selecciona el primer y último engrane unido a los planetarios es decir **A** y **D**
- Se aplica la expresión de velocidades relativas siguiente:

$$\frac{\omega_{fa}}{\omega_{la}} = \frac{\omega_f - \omega_a}{\omega_l - \omega_a} \quad (7.21)$$

Donde *f* (*first*) es el primer engrane que está unido a los planetarios es decir **A**
l (*last*) es el último engrane que está unido a los planetarios es decir **D**, y
a (*arm*) es el portaplaneta o brazo

- Por tanto la ecuación 7.21 se la cambia por:

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \frac{\omega_A - \omega_a}{\omega_D - \omega_a} \quad (7.22)$$

- Se reemplazan los valores conocidos

$$\begin{aligned} \omega_a &= 60 \text{ rpm} \\ \omega_A &= 0 \text{ rpm} \end{aligned}$$

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \frac{0 - 60}{\omega_D - 60}$$

- Se resuelve la relación convencional : $\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}}$, para resolver esta relación se supone que el portaplaneta está fijo

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \left(-\frac{Z_D}{Z_C}\right) \left(-\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \left(-\frac{35}{100}\right) \left(-\frac{27}{108}\right)$$

- Finalmente esta relación se la reemplaza en la Ec. 7.22.

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \frac{0 - 60}{\omega_D - 60} = \left(-\frac{35}{100}\right) \left(-\frac{27}{108}\right)$$

- Obteniéndose el valor de ω_D

$$\omega_D = -60 \left(-\frac{100}{35}\right) \left(-\frac{108}{27}\right) + 60 = -625.714 \text{ rpm}$$

- La eficiencia se la calcula tomando en cuenta que la relación básica $\rho < 1$ y el eje de entrada 2 está fijo $\omega_2 = 0$

$$\rho = \left(-\frac{Z_D}{Z_C}\right) \left(-\frac{Z_B}{Z_A}\right) < 1$$

- Por tanto la ecuación a utilizar puesto que se trata de un multiplicador y no de un reductor es :

$$\eta = \frac{[\rho - E_0]}{\rho - 1} = \frac{[0.0875 - 0.99]}{0.0875 - 1} = 98.9\% \quad (7.25)$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Si el brazo gira a 100 rpm en sentido antihorario cuál es la velocidad angular de F, determine la eficiencia si la eficiencia básica E_0 es 99%

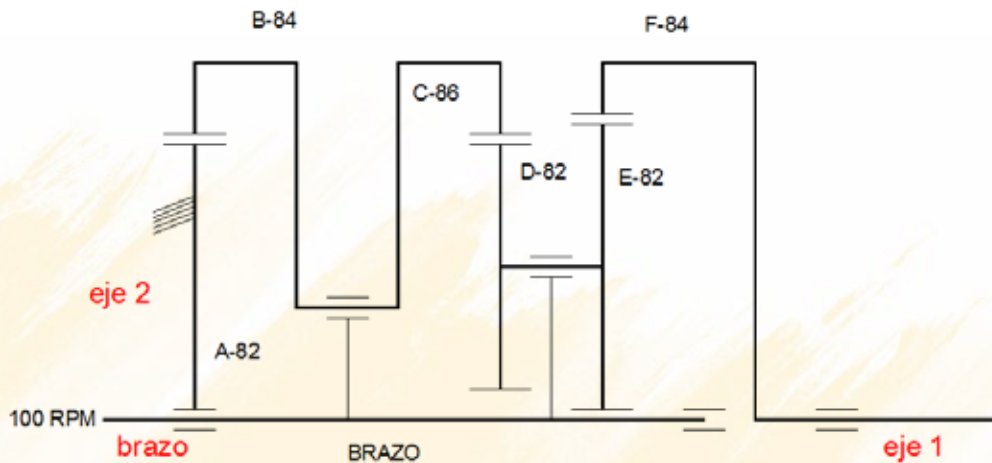


Figura 7.21. Tren de engranes planetarios

- En primer lugar se identifican los engranajes planetarios que son el engrane B, C y D, E
- A continuación se identifica un posible flujo de fuerza en el que necesariamente estarán los planetarios

Flujo: **A B C D E F**

- Se selecciona el primer y último engrane unido a los planetarios es decir **A** y **F**
- Se aplica la expresión de velocidades relativas siguiente:

$$\frac{\omega_{fa}}{\omega_{la}} = \frac{\omega_f - \omega_a}{\omega_l - \omega_a} \quad (7.23)$$

Donde *f* (*first*) es el primer engrane que está unido a los planetarios es decir A
l (*last*) es el último engrane que está unido a los planetarios es decir F, y
a (*arm*) es el portaplaneta o brazo

- Por tanto la ecuación 7.23 se la cambia por:

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Fa}} = \frac{\omega_A - \omega_a}{\omega_F - \omega_a} \quad (7.24)$$

- Se resuelve la relación convencional : $\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Fa}}$, para resolver esta relación se supone que el portaplaneta está fijo

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Fa}} = \prod_{j=1}^n \left[\mp \frac{Z_{conducido}}{Z_{conductor}} \right]_j = \left(+ \frac{Z_B}{Z_A} \right) \left(+ \frac{Z_D}{Z_C} \right) \left(+ \frac{Z_F}{Z_E} \right) = \left(+ \frac{84}{82} \right) \left(+ \frac{82}{86} \right) \left(+ \frac{84}{82} \right)$$

- Finalmente esta relación se la reemplaza en la Ec. 7.22.

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Fa}} = \frac{0 - 100}{\omega_F - 100} = \left(+ \frac{84}{82} \right) \left(+ \frac{82}{86} \right) \left(+ \frac{84}{82} \right) = \frac{1764}{1763} = 1.00057$$

- Obteniéndose el valor de ω_F

$$\omega_F = -100(1.00057) + 100 = -0.057 \text{ rpm}$$

- La eficiencia se la calcula tomando en cuenta que la relación básica $\rho > 1$ y el eje de entrada 2 esta fijo $\omega_2 = 0$

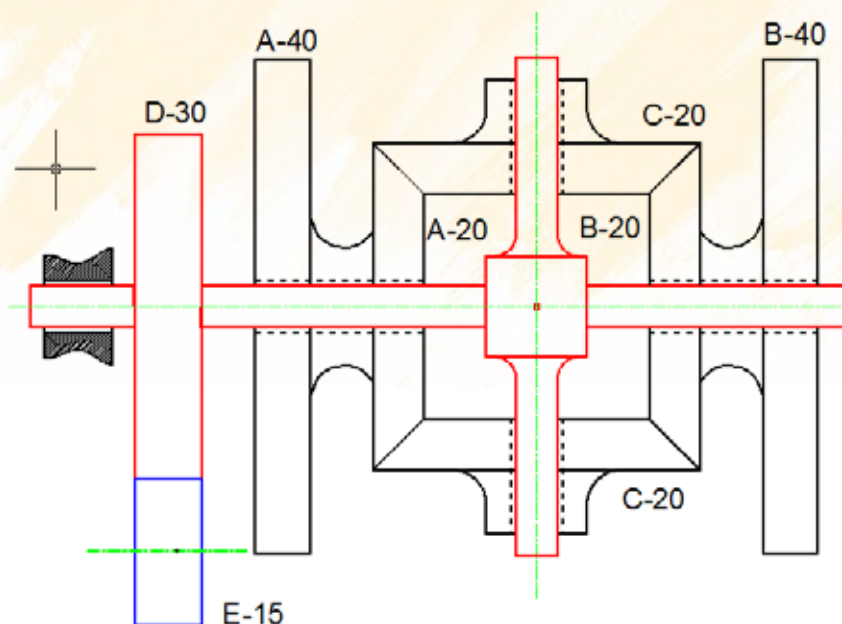
$$\rho = \left(+ \frac{Z_B}{Z_A} \right) \left(+ \frac{Z_D}{Z_C} \right) \left(+ \frac{Z_F}{Z_E} \right) > 1$$

- Por tanto la ecuación a utilizar es :

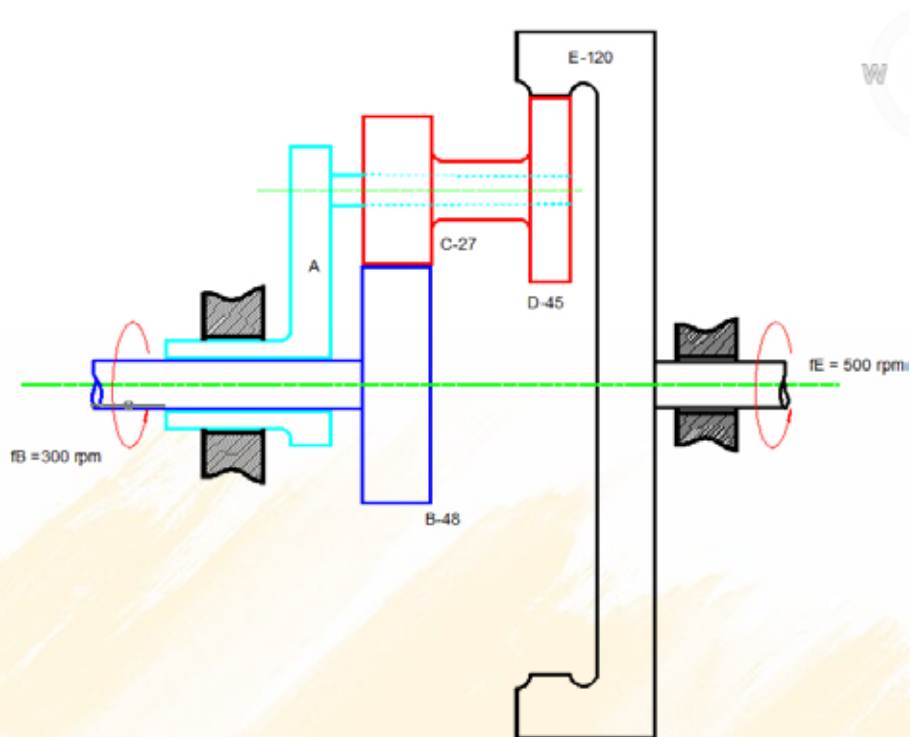
$$\eta = \frac{E_0[\rho - 1]}{\rho - E_0} = \frac{0.99[1.00057 - 1]}{1.00057 - 0.99} = 7.3\% \quad (7.25)$$

EJERCICIOS PARA EL ESTUDIANTE:

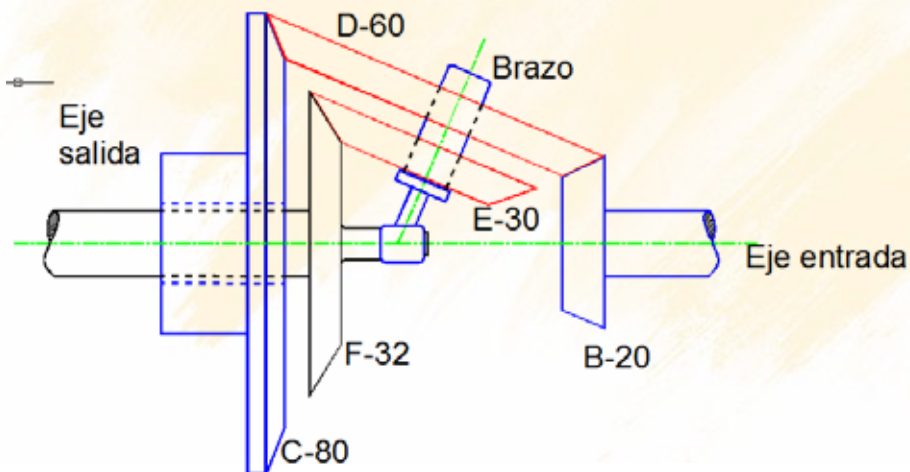
Determinar la velocidad de E en el siguiente diferencial. El engrane A gira a 100 rpm en sentido antihorario y el engrane B gira a 100 rpm en sentido horario.



Si $w_{21} = 500 \text{ rpm}$ y $w_{51} = 300 \text{ rpm}$ antihorario vista desde la derecha, calcule la magnitud y la dirección de w_A



Engrane B es conectado al eje de entrada y engrane F es conectado al eje de salida. EL brazo A lleva las ruedas D y E. Si la entrada es 1000 rpm, determine la velocidad del eje de salida, si el engrane C esta fijo.



7.4 ENGRANAJES DIFERENCIALES

7.4.1 ECUACIONES BÁSICAS

Los engranajes diferenciales es un tipo de engranaje planetario que se utiliza principalmente en el tren motriz de todos los automóviles, como sistema compensador de las diferencias de velocidades angulares que se suscitan en una curva.

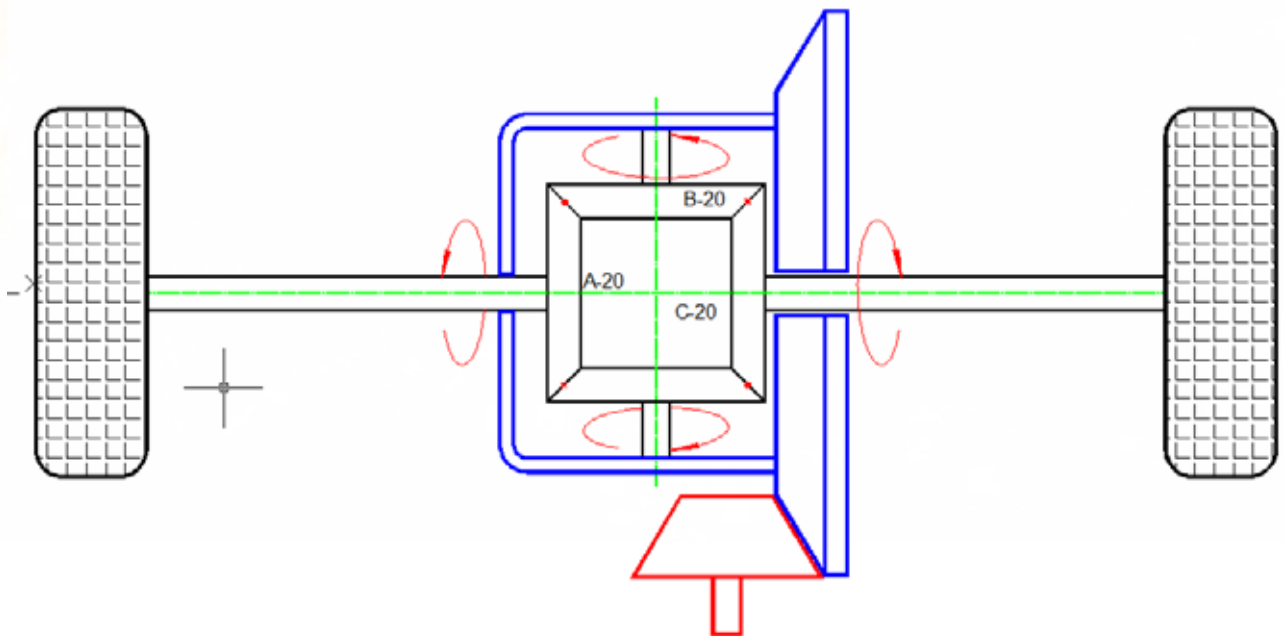
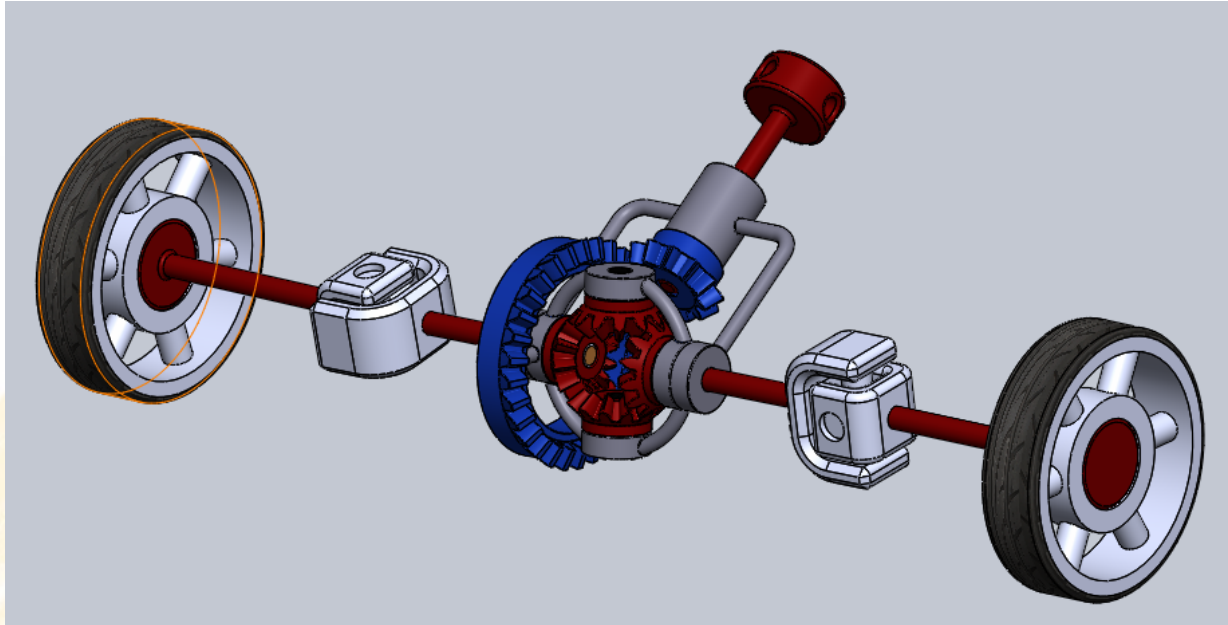


Figura 7.21. Diferencial

- Se identifican el engrane planetario que es el engrane B
- A continuación se identifica el flujo de fuerza: Flujo: **A B C**
- Se selecciona el primer y último engrane unido a los planetarios es decir **A y C**

- Se aplica la expresión de velocidades relativas siguiente:

$$\frac{\omega_{fa}}{\omega_{la}} = \frac{\omega_f - \omega_a}{\omega_l - \omega_a} = \frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Ca}} = \frac{\omega_A - \omega_a}{\omega_C - \omega_a} \quad (7.26)$$

- Se resuelve la relación convencional: $\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Ca}}$, para resolver esta relación se supone que el portaplaneta está fijo, puesto que son engranes cónicos el signo es global y negativo.

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Ca}} = -\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)\left(\frac{Z_C}{Z_B}\right) = -1 \quad (7.27)$$

- Se reemplaza la Ec. 7.27 en 7.26

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Ca}} = \frac{\omega_A - \omega_a}{\omega_C - \omega_a} = -1 \quad (7.28)$$

- La ecuación que gobierna el diferencial es por tanto un promedio de velocidades

$$\frac{\omega_A + \omega_C}{2} = \omega_a \quad (7.29)$$

- Para el equilibrio estático como cuerpo libre se tiene que

$$T_A + T_C = T_a \quad (7.30)$$

7.4.2 APLICACIONES

Además del profuso uso dado en el campo automotriz como compensador de la diferencia de velocidades angulares que se presentan en curvas, los diferenciales han tenido y tienen diferentes e interesantes aplicaciones:

- **SISTEMA AUTONIVELANTE**

Si se integra la Ec. 7.29, se podría aplicar la misma en la forma

$$\frac{\theta_A + \theta_C}{2} = \theta_a \quad (7.31)$$

Con lo cual serviría como sistema para mejorar la nivelación de vehículos de exploración, por cuanto si uno de los brazos se encuentra con un obstáculo que le obligue a oscilar por ejemplo 30° y el otro está sobre una superficie plana, el habitáculo solamente oscilara 15° ya que a este está unido el portaplaneta "a"

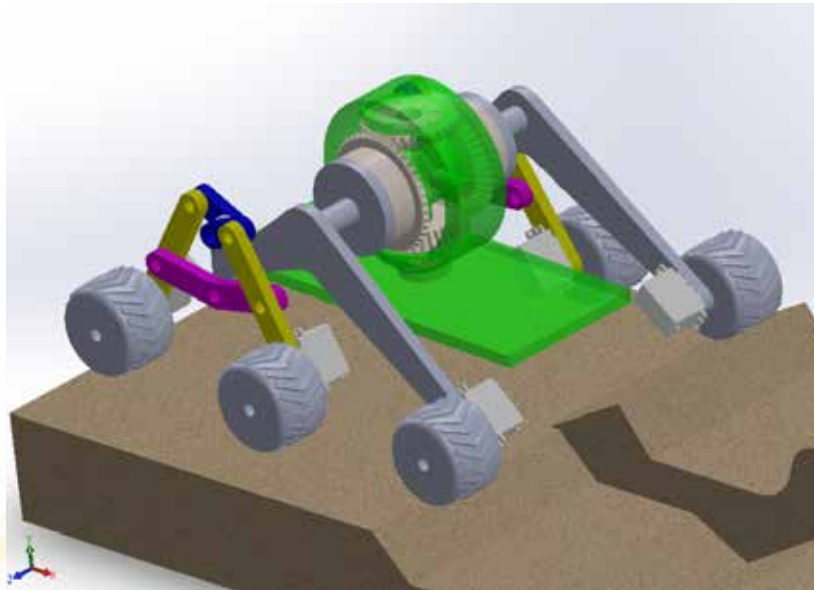


Figura 7.22. Diferencial como compensador de desniveles

- **GENERADOR DE MOVIMIENTO INTERMITENTE**

Si en un extremo de la rueda A se instala un mecanismo que produzca un movimiento oscilante y en el otro extremo B se instala movimiento continuo, la salida producirá un movimiento intermitente sin impacto, ver Fig. 7.23

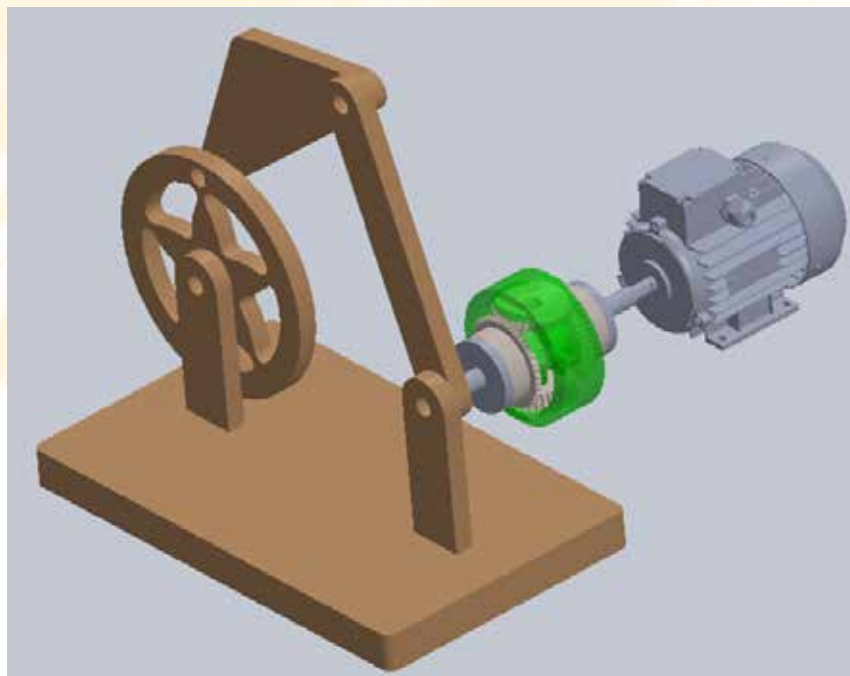


Figura 7.23. Diferencial como sumador de frecuencias

El fichero de Mathematica para generar curvas con movimiento intermitente es el siguiente:

```

Manipulate[ $\omega_2 = 100;$ 
 $r_1 = 200;$ 
 $k_3 = (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2)/(2 r_2 r_4);$ 
 $k_1 = r_1/r_2;$ 
 $k_2 = r_1/r_4;$ 
 $k_4 = r_1/r_3;$ 
 $k_5 = (r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)/(2 r_2 r_3);$ 
 $A = k_3 + (1 - k_2) \cos[\theta] - k_1;$ 
 $B = -2 \sin[\theta];$ 
 $c = k_1 - (k_2 + 1) \cos[\theta] + k_3;$ 
 $d = k_5 + (k_4 + 1) \cos[\theta] - k_1;$ 
 $e = -2 \sin[\theta];$ 
 $F = k_5 + (k_4 - 1) \cos[\theta] + k_1;$ 
 $\theta_4 = 2 \text{ArcTan}[(-B - \sqrt{B^2 - 4 A c})/(2 A)];$ 
 $\theta_3 = 2 \text{ArcTan}[(-e - \sqrt{e^2 - 4 d F})/(2 d)];$ 
 $\omega_3 = \omega_2 (r_2 \sin[\theta] - \theta_4)/(r_3 \sin[\theta_4 - \theta_3]);$ 
 $\omega_4 = \omega_2 (r_2 \sin[\theta] - \theta_3)/(r_3 \sin[\theta_4 - \theta_3]);$ 
 $\omega_{\text{out}} = 0.5 (\omega_4 + \omega_5);$ 
Plot[ $\{\omega_{\text{out}}\}, \{\theta, 0, 12\}, \{r_2, 1, 400\}, \{r_3, 150, 280\}, \{r_4, 200, 400\}, \{\omega_5, 0, 400\}$ 

```

El resultado es el siguiente:

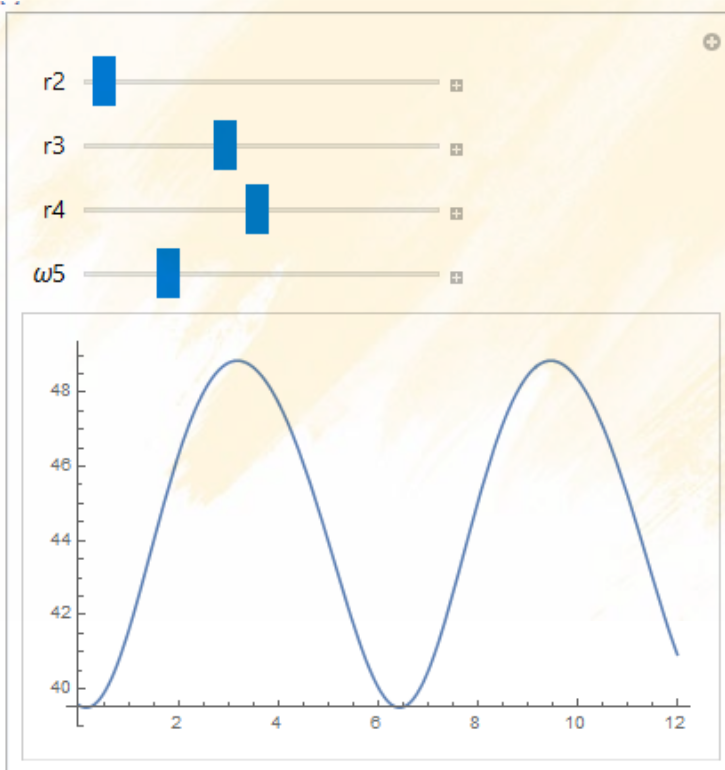


Figura 7.24. Diferencial como sumador de frecuencias

- **MUÑECA DEL EFECTOR FINAL EN BRAZOS MANIPULADORES**

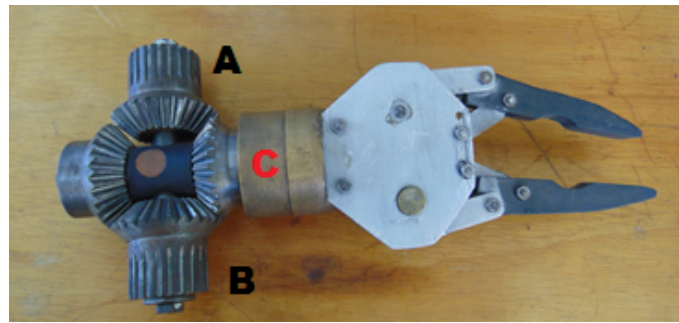
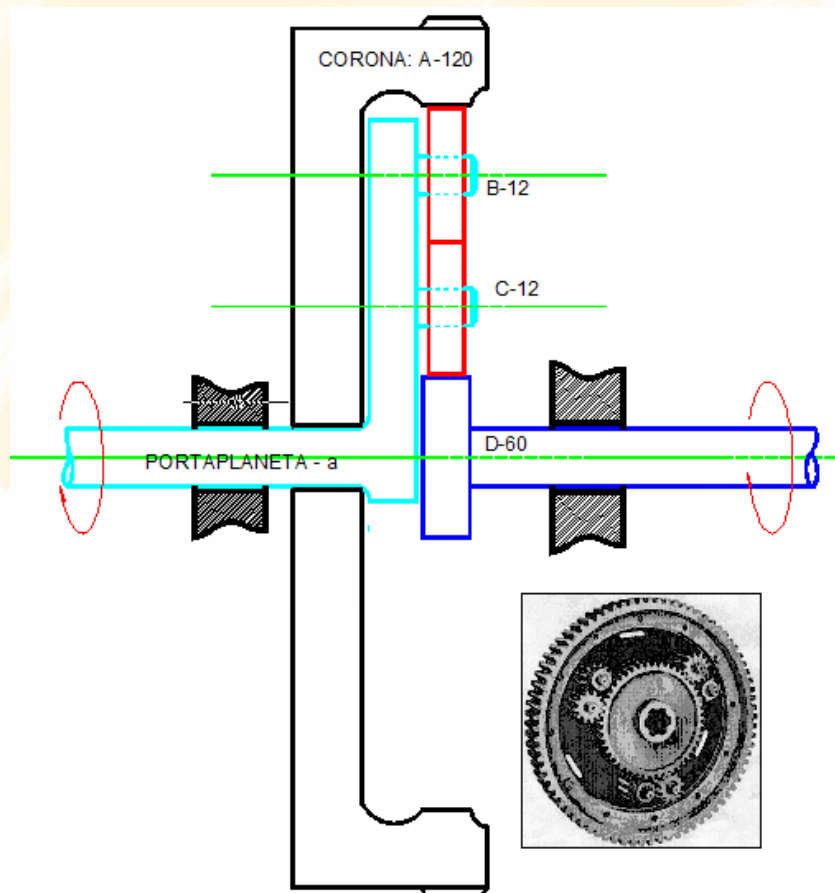


Figura 7.25. Diferencial como control en efector

Los brazos robots suelen tener un diferencial en la muñeca para controlar el efector final, si A y B giran en el mismo sentido el efector girara alrededor del eje AB, mientras que si giran en sentido contrario el efector girara alrededor de C, ver Fig. 7.25

- **DIFERENCIAL CON ENGRANES RECTOS**

Se puede construir un diferencial con dientes rectos mediante la siguiente configuración, la diferencia es que una de las salidas será en el brazo portaplaneta, Fig. 7.26. En este caso el cálculo es el siguiente



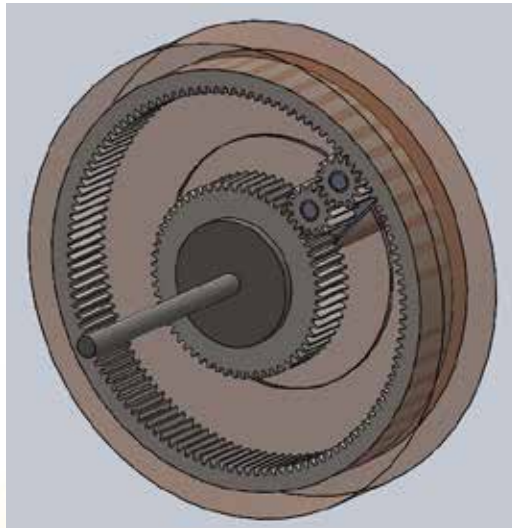


Figura 7.26. Diferencial como dientes rectos

- Se identifican el engrane planetario que es el engrane **B** y **C**
- El flujo de fuerza: Flujo: **A B C D**
- Se selecciona el primer y último engrane unido a los planetarios es decir **A** y **D**
- Se aplica la expresión de velocidades relativas siguiente:

$$\frac{\omega_{fa}}{\omega_{la}} = \frac{\omega_f - \omega_a}{\omega_l - \omega_a} = \frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \frac{\omega_A - \omega_a}{\omega_D - \omega_a}$$

Se resuelve la relación convencional: $\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}}$, para resolver esta relación se supone que el portaplaneta está fijo

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \left(+\frac{Z_B}{Z_A}\right) \left(-\frac{Z_C}{Z_B}\right) \left(-\frac{Z_D}{Z_C}\right) = 1/2$$

- Se reemplaza de la forma conocida

$$\frac{\omega_{Aa}}{\omega_{Da}} = \frac{\omega_A - \omega_a}{\omega_D - \omega_a} = \frac{1}{2}$$

- La ecuación que gobierna el diferencial es por tanto un promedio de velocidades

$$\frac{\omega_D + \omega_a}{2} = \omega_A$$

EJERCICIO PARA EL ESTUDIANTE:

Intente hallar una configuración sin corona de dientes internos

- **DIFERENCIAL EN COMPUTADORA ANALÓGICA MECÁNICA**

Para control de tiro de la artillería embarcada, donde se necesita añadir correcciones a la dirección de tiro.

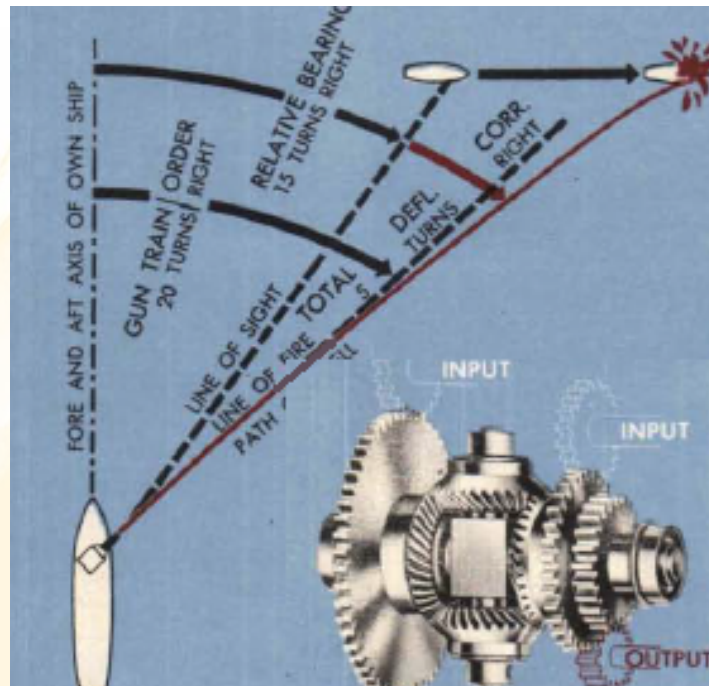


Figura 7.26. Diferencial como corrección de tiro³⁹

³⁹ BASIC FIRE CONTROL MECHANISMS

7.5 ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES HELICOIDALES

7.5.1. CARACTERIZACIÓN

Los engranes cilíndricos de dentado helicoidal están caracterizados por su dentado oblicuo con relación al eje de rotación. En estos engranajes el movimiento se transmite de modo igual que en los cilíndricos de dentado recto, pero la transmisión es más suave. Los engranes helicoidales tienen el inconveniente de producir empujes axiales.

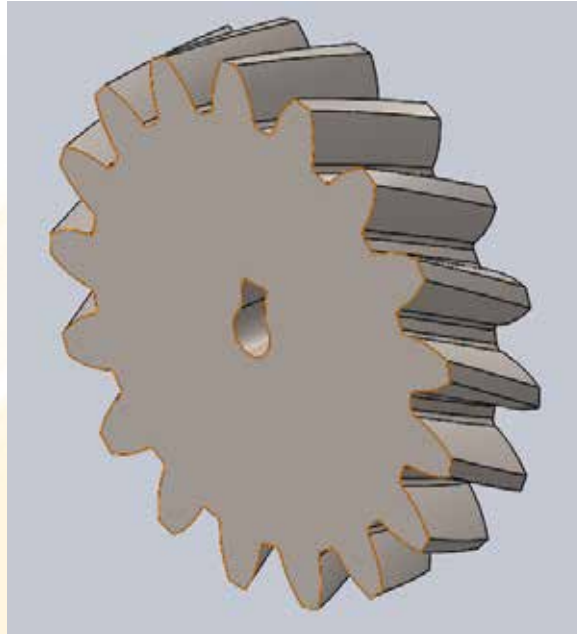


Figura 7.27. Engranaje helicoidal

Los ejes de los engranajes helicoidales pueden ser paralelos, en ese caso el ángulo de la hélice es el mismo pero de distinta mano, Fig. 7.28. En este caso se aplica la siguiente ecuación:

$$\beta_1 + \beta_2 = \Sigma; \quad \beta_1 - \beta_2 = 0 \quad (7.32)$$

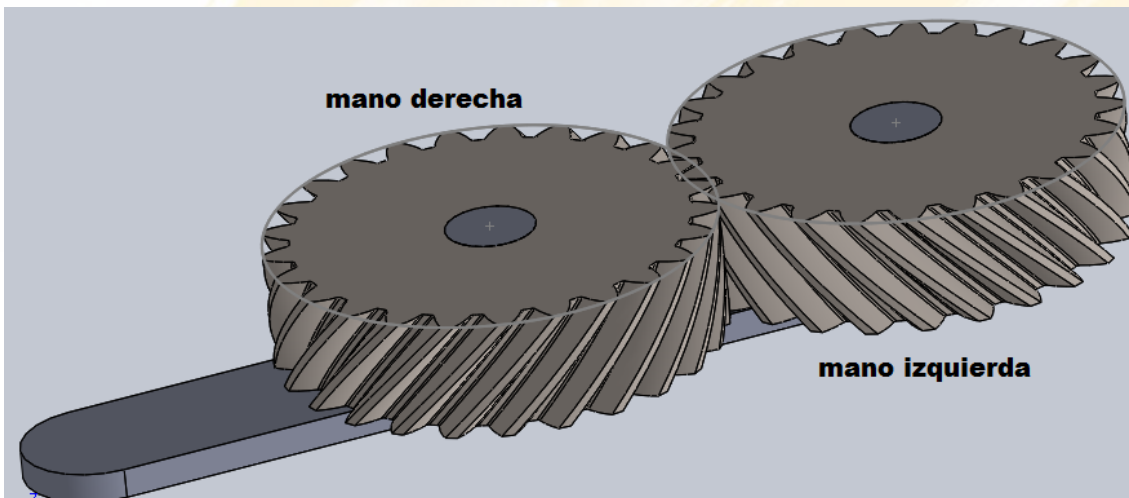


Figura 7.28. Engranaje helicoidal, ejes paralelos $\beta_1 = -\beta_2$

En los engranajes de ejes oblicuos la inclinación del dentado puede ser cualquiera pero del mismo sentido en las dos ruedas, en este caso:

$$\beta_1 + \beta_2 = \Sigma \quad (7.33)$$

Donde β_1 es el ángulo del dentado de la rueda 1
 β_2 es el ángulo del dentado de la rueda 2
 Σ es el ángulo entre ejes.

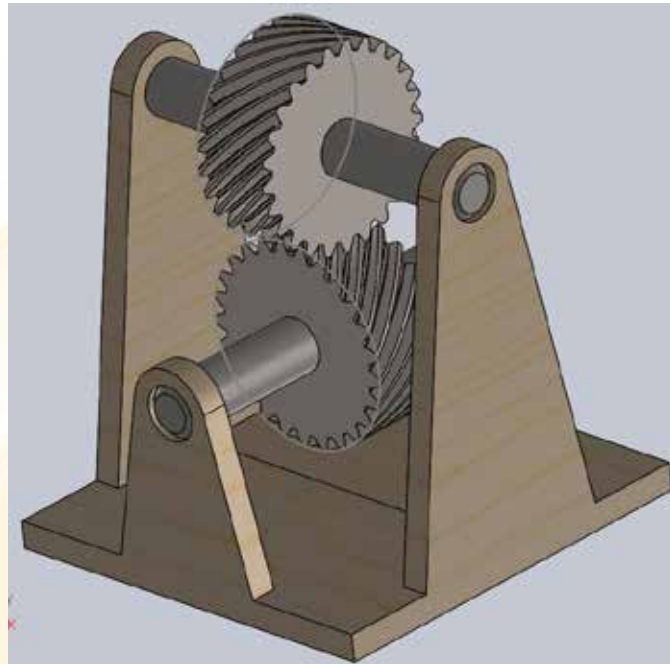


Figura 7.29. Engranaje helicoidal, ejes cruzados $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$

Para eliminar el empuje axial, el dentado puede hacerse doble helicoidal continuo o interrumpido, y doble helicoidal intercalado continuo o interrumpido figura 7.30.

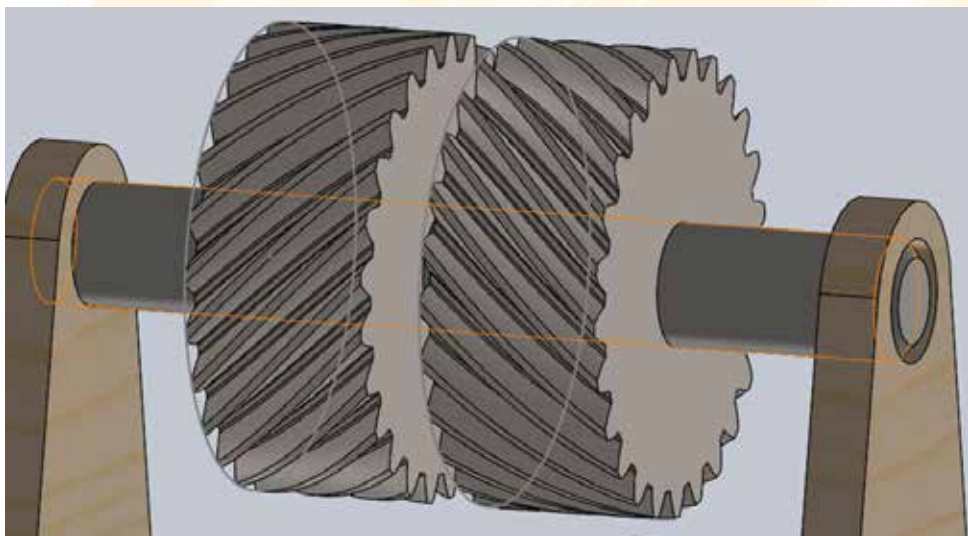


Figura 7.30. Engranajes doble helicoidales

7.5.2 INCLINACIÓN DEL DENTADO Y ÁNGULO DE HÉLICE

En los engranajes de ejes paralelos, la inclinación del dentado se hace de 10° a 20° para evitar empujes excesivos. El número de dientes mínimo recomendado es $Z = 12$. El avance en sentido axial en una vuelta completa de la rueda es el paso de la hélice H .

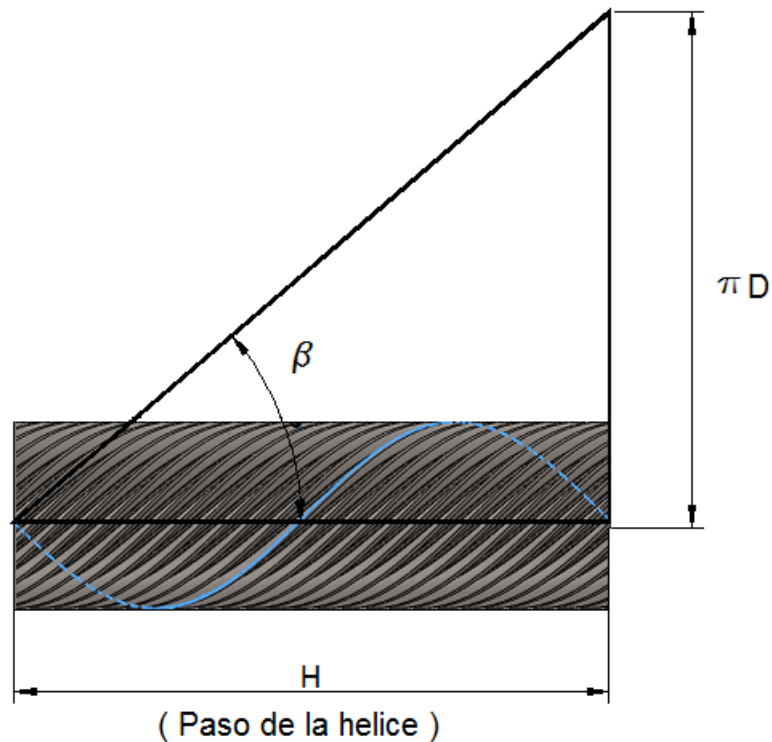


Figura 7.28. Definición del paso de la hélice H

Paso de la hélice

$$H = \frac{\pi D_p}{\tan \beta} = \frac{\pi 73.397}{\tan 17.5} = 731.24 \text{ mm} \quad (7.34)$$

7.5.3. CÁLCULO DEL ENGRANE HELICOIDAL

Al igual que en los engranajes cilíndricos de dentado recto, el módulo caracteriza las magnitudes del engrane y es directamente proporcional a la potencia transmitida. El módulo calculado corresponde al normal o real y debe ser aproximado al mayor número preferido. Establecida la inclinación del diente según la velocidad de operación, se cuenta con los datos necesarios para el cálculo de las dimensiones de la rueda, considerando conocido el número de dientes Z .

Para la fabricación del engrane helicoidal se necesita por tanto, el módulo real o normal, el número de dientes Z y el ángulo de inclinación β . Entonces dado el módulo normal el módulo aparente o circunferencial se calcula mediante:

$$m_a = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad (7.35)$$

El diámetro primitivo es:

$$D_p = m_a Z \quad (7.36)$$

El diámetro exterior de la rueda es por tanto:

$$D_e = m_a Z + 2m_n = \frac{m_n Z}{\cos \beta} + 2m_n \quad (7.37)$$

Altura del diente es:

$$h = 2.167 m_n \quad (7.38)$$

Número imaginario de dientes para la selección de la fresa modular es:

$$Z_i = \frac{Z}{\cos \beta^3} \quad (7.39)$$

En los engranajes helicoidales de ejes paralelos se recomienda los siguientes valores para el ángulo de hélice y la relación de transmisión:

Tabla 7.2. Selección ángulo β

No.	Velocidad	Ángulo de hélice β	Relación de transmisión i
1	Lenta < 100 rpm	5° a 10°	10
2	Normal (100 a 500 rpm)	15° a 25°	6 a 7
3	Elevada > 500 rpm	> 30°	4 o 2

Los diferentes pasos que se hallan en un engrane se dimensionan de acuerdo a la Fig. 7.29

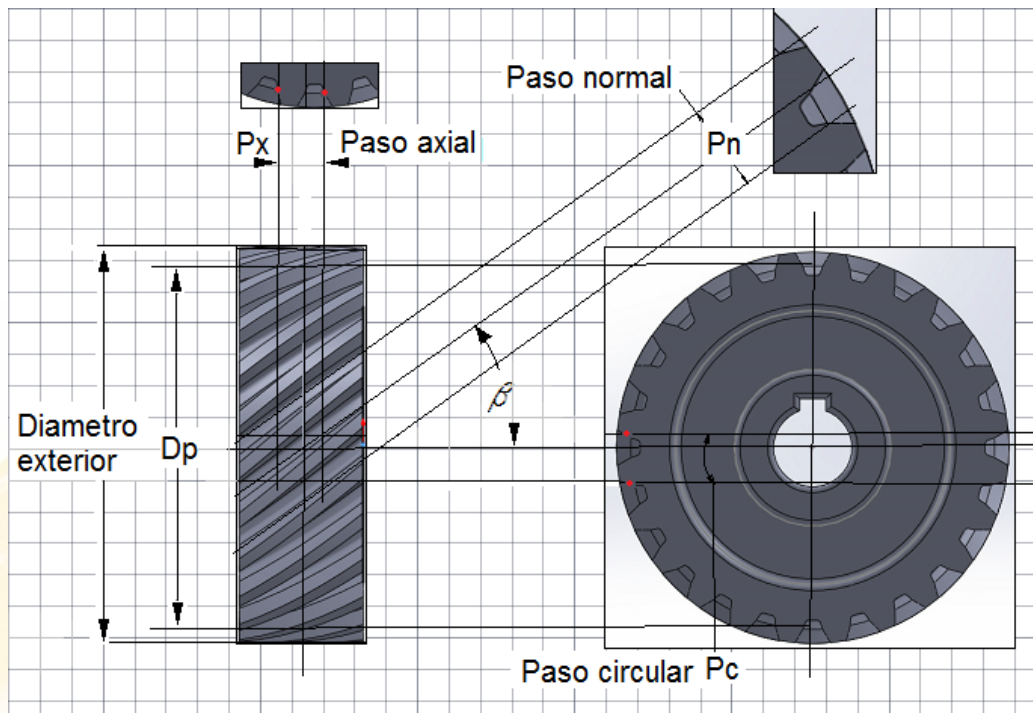


Figura 7.29. Parámetros del engrane

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Determine los parámetros de construcción de un engrane helicoidal, para un piñón de 28 dientes de módulo real 2.5 mm y ángulo de hélice 17.5°.

Se parte del módulo normal

$$m_a = \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{2.5}{\cos(17.5)} = 2.6213 \text{ mm}$$

$$D_p = m_a Z = 2.6213 (28) = 73.397 \text{ mm}$$

$$D_e = D_p + 2m_n = 78.397 \text{ mm}$$

Por lo tanto se necesita un disco de 78.4 mm

Altura del diente es:

$$h = 2.167 m_n = 2.167 (2.5) = 5.41 \text{ mm}$$

Número de dientes imaginario

$$Z_i = \frac{Z}{\cos \beta^3} = \frac{28}{[\cos(17.5)]^3} = 32 \text{ dientes}$$

Paso de la hélice

$$H = \frac{\pi D_p}{\tan \beta} = \frac{\pi 73.397}{\tan 17.5} = 731.24 \text{ mm}$$

La serie de ruedas para instalar en la fresadora suponiendo que el paso del tornillo patrón de la fresadora es 5 mm, se calcula mediante la expresión siguiente:

$$\frac{p}{P} = \frac{H}{40 (\text{paso del tornillo de la fresadora})} = \frac{731.24}{200} = 3.656 = \frac{B D}{A C}$$

Donde

$$\frac{B D}{A C} = \frac{120}{100} \frac{150}{50} = 3.6$$

Donde A es el engranaje conductor que se monta en el tornillo de la fresadora y D es el último engrane de la transmisión que se monta en el cabezal divisor universal, ver Fig. 7.30

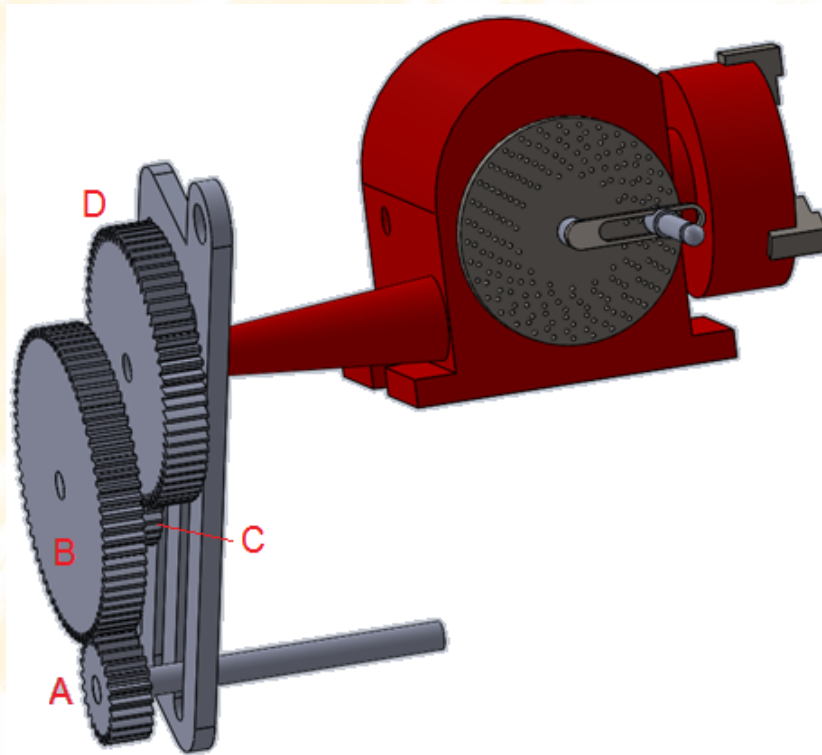


Figura 7.30. Instalación del cabezal divisor universal, la lira y los engranes A, B, C, D

- **PARAMETROS ADICIONALES**

Paso normal o real

$$p_n = \pi m_n \tag{7.40}$$

Paso circunferencial o aparente

$$p_c = \frac{p_n}{\cos \beta} \quad (7.41)$$

Paso axial

$$p_x = \frac{H}{Z} = \frac{p_n}{\sin \beta} \quad (7.42)$$

Distancia entre centros

$$C = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad (7.43)$$

Finalmente es necesario remitirse a la tabla 7.2 para determinar el mínimo número aceptable de dientes en un engranaje en función del Angulo de hélice β y el ángulo de presión.

β	14.5°	20°	25°
0°	32	18	12
5°	32	17	12
10°	31	17	11
15°	29	16	11
20°	27	15	10
25°	25	14	9
30°	22	12	8
35°	19	10	7
40°	15	9	6
45°	12	7	5
50°	10	6	4
55°	7	4	3
60°	5	3	3
65°	4	2	2
70°	2	2	2
75°	2	1	1
80°	1	1	1

Tabla 7.3. Mínimo número aceptable de dientes⁴⁰

⁴⁰ KennethJ.Waldron, KINEMATICS ,DYNAMICS, AND DESIGN OF MACHINERY

7.6 TORNILLO SIN FIN RUEDA HELICOIDAL

El sistema tornillo sin fin rueda helicoidal, ver Fig.7.31 se utiliza cuando se requiere una gran relación de transmisión en poco espacio, pudiendo con solo dos elementos tener una relación de 40 o más, una ventaja adicional es que según el ángulo de hélice escogido puede sostener la carga, es decir se puede omitir un freno. En contra es ineficiente 40 a 85% y produce un gran calentamiento.

7.6.1. FORMULACIÓN

La tabla 7.4 presenta varias fórmulas muchas de ellas empíricas que se utilizan para diseñar y fabricar este mecanismo conociendo:

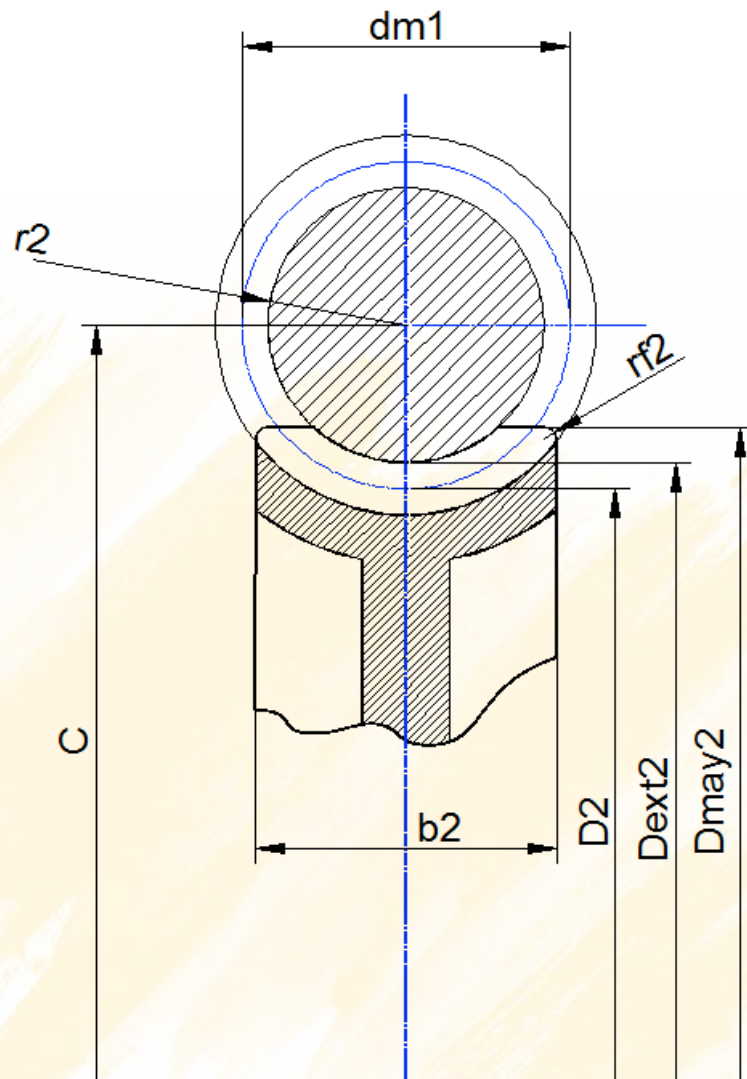
- Módulo m
- Número de dientes de la rueda Z_2
- Número de entradas del tornillo Z_1
- Distancia entre centros C



Figura 7.31. Tornillo sin fin rueda helicoidal

Para obtener	Conociendo	Formula
Relación de transmisión i	Número de dientes Z_2 y número de entradas tornillo Z_1	$i = \frac{Z_2}{Z_1}$
Diámetro primitivo tornillo dm_1	Distancia entre centros C	$dm_1 = \frac{C^{0.875}}{1.488}$
Diámetro primitivo tornillo dm_1	Módulo normal	$dm_1 = [8 \text{ a } 10]m_n$
Diámetro exterior del tornillo	Módulo normal	$dext_1 = dm_1 + 2m_n$
Diámetro interno del tornillo	Módulo normal	$dint_1 = dm_1 - 2.167 m_n$
Altura del diente tornillo	Módulo normal	$h_1 = 2.167 m_n$
Ancho del fondo del filete o espesor de la cuchilla de torneado	Paso axial del tornillo	$T = \left[\frac{px_1}{4 \tan \gamma_m} - m_n \right] 2 \tan \gamma_m$
Longitud roscada del tornillo	Módulo y Z_2	$b_1 \geq 2 m_n \sqrt{Z_2 + 1}$ $b_1 \geq px_1 \left[4.5 + \frac{Z_2}{50} \right]$
Paso axial del tornillo	Paso normal de la rueda	$px_1 = \pi m_x = pn_2$
Radio del filete del tornillo	Paso axial	$r_1 = 0.05 px_1$
Paso aparente del tornillo para el cálculo de la transmisión	Paso axial, número de entradas	$pa_1 = px_1 \frac{Z_1}{\cos \gamma_m}$
Relación de transmisión para la manufactura del tornillo	Paso del tornillo patrón fresadora $pasotornillo$	$i_1 = \frac{pa_1}{40 pasotornillo}$

Angulo de hélice del tornillo	Número de entradas del tornillo Z_1	$\tan \gamma_m = \frac{Z_1 m_x}{dm_1}$
Módulo normal	Módulo axial	$m_n = m_x \cos \gamma_m$



Diámetro primitivo de la rueda D_2	Distancia entre centros	$D_2 = 2 C - dm_1$
Diámetro primitivo de la rueda D_2	Módulo normal	$D_2 = \frac{m_n Z_2}{\cos \gamma_m}$
Diámetro exterior de la rueda D_2	Diámetro primitivo rueda	$D_{ext_2} = D_2 + 2 m_n$
Paso normal de la rueda	Número de dientes Z_2	$pn_2 = \pi m_n = \pi \frac{D_2}{Z_2}$
Módulo aparente	Módulo normal	$m_a = \frac{m_n}{\cos \gamma_m}$
Altura del diente	Módulo normal	$h = 2.167 m_n$
Diámetro mayor de la rueda	Diámetro exterior de la rueda D_2	$D_{may_2} = D_{ext_2} + 0.4775 pn_2$

Ancho de la rueda 2	Diámetro exterior y módulo	$b_2 \geq 2 \sqrt{\left[\frac{D_{ext_2}}{2}\right]^2 - \left[\frac{D_2}{2} - m_n\right]^2}$ $b_2 = 6 + 2.38 pn_2$
Concavidad periférica	Diámetro primitivo tornillo dm_1	$r_2 = 0.5 dm_1 - m_n$
Radio de filete en rueda	Conociendo el paso normal de la rueda pn_2	$rf_2 = 0.25 pn_2$
Paso de la hélice de la rueda para el cálculo de la transmisión	Diámetro primitivo	$H_2 = \frac{\pi D_2}{\tan \gamma_m}$
Relación de transmisión para la manufactura de la rueda	Paso del tornillo patrón fresadora $pasotornillo$	$i_2 = \frac{H_2}{40 pasotornillo}$

Tabla 7.4. Parámetros para diseño del sistema tornillo sin fin rueda helicoidal⁴¹

EJEMPLO DE APLICACIÓN: Determine los parámetros de construcción de una transmisión tornillo sin fin engrane helicoidal. La rueda tendrá 30 dientes, el número de entradas del tornillo será 1 y distancia entre centros $C = 100$ mm

1.- Se calcula el diámetro primitivo del tornillo

$$dm_1 = \frac{C^{0.875}}{1.488} = \frac{100^{0.875}}{1.488} = 37.792 \text{ mm}$$

2.- Se calcula diámetro primitivo de la rueda

$$D_2 = 2 C - dm_1 = 2 [100] - 37.792 = 162.208 \text{ mm}$$

3.- Se calcula el paso normal de la rueda

$$pn_2 = \pi \frac{D_2}{Z_2} = \pi \frac{162.208}{30} = 16.986 \text{ mm}$$

4.- Puesto que $pn_2 = px_1$ se calcula el módulo axial del tornillo

$$m_x = \frac{px_1}{\pi} = \frac{16.986}{\pi} = 5.407 \text{ mm}$$

5.- El ángulo de hélice del tornillo se calcula mediante

$$\tan \gamma_m = \frac{Z_1 m_x}{dm_1} = \frac{1 [5.407]}{37.792} ; \gamma_m = 8.142^\circ$$

6.- El módulo normal se calcula mediante:

$$m_n = m_x \cos \gamma_m = 5.407 \cos 8.142^\circ = 5.35 \text{ mm}$$

7.- Puesto que el módulo es un número estandarizado se toma un valor de 5 mm. Con este

⁴¹ Dudley, PRACTICAL GEAR DESIGN HANDBOOK

valor nuevamente se calcula el ángulo de hélice γ_m

$$\cos \gamma_m = \frac{m_n}{m_x} = \frac{5}{5.35}; \gamma_m = 22.371^\circ$$

El ángulo actual difiere demasiado del calculado por lo que se repite el cálculo hasta que converja, mediante el incremento de dm_1 . Luego de un proceso iterativo se obtiene un diámetro $dm_1 = 49.1 \text{ mm}$ y un ángulo de hélice γ_m de 6.261° . El fichero que permite ajustar el diámetro primitivo del tornillo es el siguiente:

```

Centro= 100; Z2=30; Z1=1;
dm1=Centro^0.875/1.488
dm1 =49.20
D2 = 2 Centro-dm1;
pn2 = π D2/Z2 ;
px1 = pn2;
mx = px1/π
γm = ArcTan[Z1 *mx/dm1]
mn = mx Cos[γm]
mn=5
γm = ArcCos[mn/mx]
    
```

Estos parámetros mantienen la concordancia con la distancia entre centros estipulada y se puede ahora determinar la geometría y el resto de parámetros constructivos como:

8.- El espesor de la cuchilla para el tallado del tornillo

$$T = \left[\frac{px_1}{4 \tan \gamma_m} - m_n \right] 2 \tan \gamma_m = 6.804 \text{ mm}$$

9.- Ancho de la parte roscada en el tornillo

$$b1 \geq 2 m_n \sqrt{Z_2 + 1} \geq 56 \text{ mm}$$

$$b1 \geq px_1 \left[4.5 + \frac{Z_2}{50} \right] \geq 86 \text{ mm}$$

10.- Radio del filete

$$r_1 = 0.05 px_1 = 0.8 \text{ mm}$$

11.- El ángulo entre flancos es 40° para un ángulo de presión de 20°

12. El tornillo sin fin puede construirse ya sea en un torno o en fresadora, si es en torno se deberá trabajar con un módulo de 5 mm. Si es en fresadora se deberá utilizar el paso aparente y hallar el respectivo set de engranes.

$$pa_1 = px_1 \frac{Z_1}{\cos \gamma_m} = 15.897 \text{ mm}$$

$$\frac{pa_1}{40 \text{ (paso del tornillo de la fresadora)}} = \frac{15.897}{200} = \frac{1}{12.581} = \frac{B D}{A C}$$

13.- Para modelar en un programa CAD se necesita el diámetro interno

$$d_{int_1} = dm_1 - 2.167 m_n = 49.1 - 2.167[5] = 38.265 \text{ mm}$$

A continuación el cálculo de la rueda helicoidal:

1.- El módulo normal

$$m_a = \frac{m_n}{\cos \gamma_m} = \frac{5}{\cos(6.261^\circ)} = 5.03 \text{ mm}$$

2.- Diámetro primitivo

$$D_2 = \frac{m_n Z_2}{\cos \gamma_m} = \frac{5 (30)}{\cos(6.261^\circ)} = 150.9 \text{ mm}$$

3.- Diámetro exterior

$$D_e = D_2 + 2m_n = 160.9 \text{ mm}$$

4.- Altura del diente es

$$h = 2.167 m_n = 2.167 (5 \text{ mm}) = 10.835 \text{ mm}$$

5.- Diámetro mayor es

$$D_{may_2} = D_{ext_2} + 0.4775 p n_2 = 168.446 \text{ mm}$$

6.- Ancho de la cara cualquiera de las formulas:

$$b_2 \geq 2 \sqrt{\left[\frac{D_{ext_2}}{2}\right]^2 - \left[\frac{D_2}{2} - m_n\right]^2} = 77.692 \text{ mm}$$

$$b_2 = 6 + 2.38 p n_2 = 46.42 \text{ mm}$$

7.- Concavidad periférica

$$r_2 = 0.5 dm_1 - m_n = 19.55 \text{ mm}$$

8.- Radio del filete de la rueda

$$r_{f_2} = 0.25 p n_2 = 3.951 \text{ mm}$$

9.- Paso de la hélice de la rueda

$$H_2 = \frac{\pi D_2}{\tan \gamma_m} = 4321 \text{ mm}$$

10.- Relación de transmisión

$$\frac{H_2}{40 \text{ (paso del tornillo de la fresadora)}} = \frac{4321}{40 [5]} = 21.605 = \frac{B D}{A C}$$

$$\frac{B D}{A C} = \frac{200}{50} \frac{108}{20} = 21.6$$

7.6.2. MODELADO CAD

Se modela el tornillo tomando como referencia el diámetro mínimo d_{int_1} y la longitud roscada b_1 , ver Fig.7.32. El sólido de revolución se parecía en Fig. 7.33

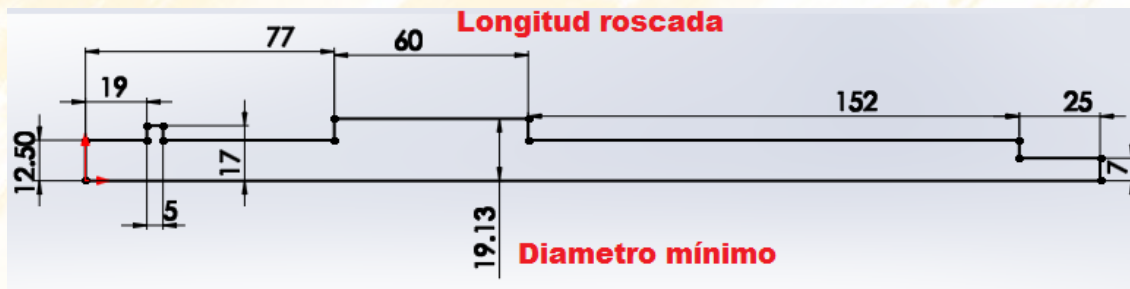


Figura 7.32. Croquis eje tornillo sin fin

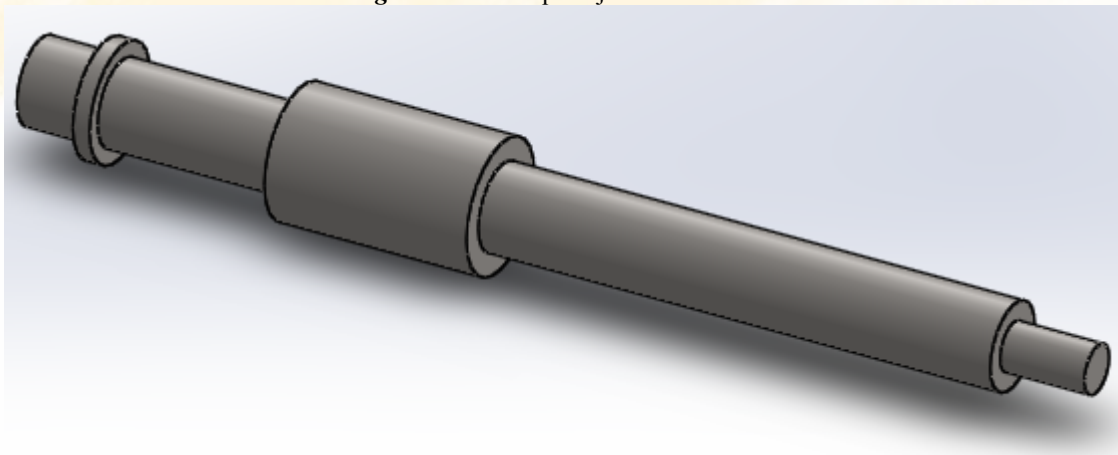


Figura 7.33. Solido de revolución

A continuación se genera el perfil del diente con las siguientes medidas en función del módulo 5 mm y del paso axial 15.802 mm que da un espesor de diente en el diámetro primitivo de 7.901 mm, ver Fig. 7.34.

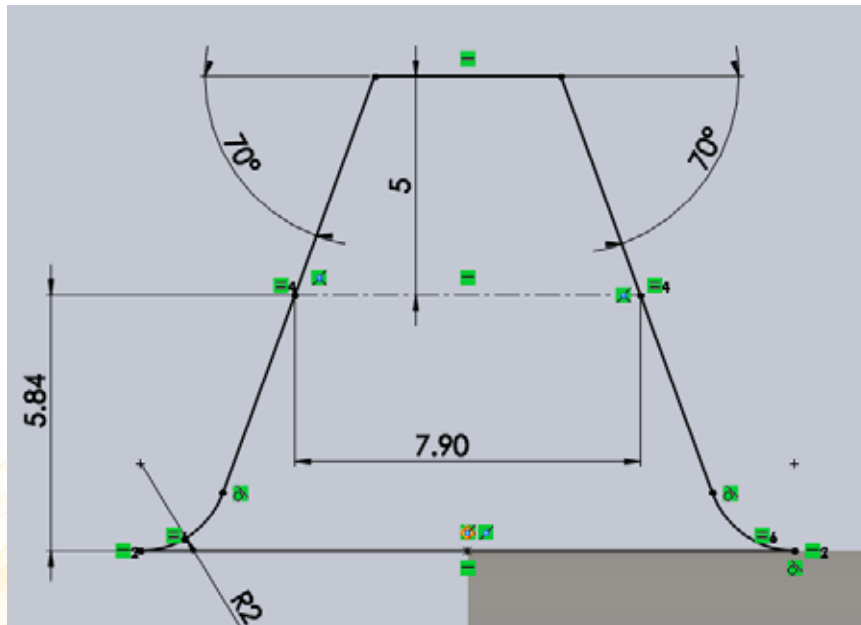


Figura 7.34. Perfil del diente del tornillo

La hélice se la genera desde el diámetro interno con los siguientes parámetros: paso de rosca, $p_x = 15.802 \text{ mm}$, sentido de las agujas del reloj, ángulo inicial 90° , ver Fig. 7.35

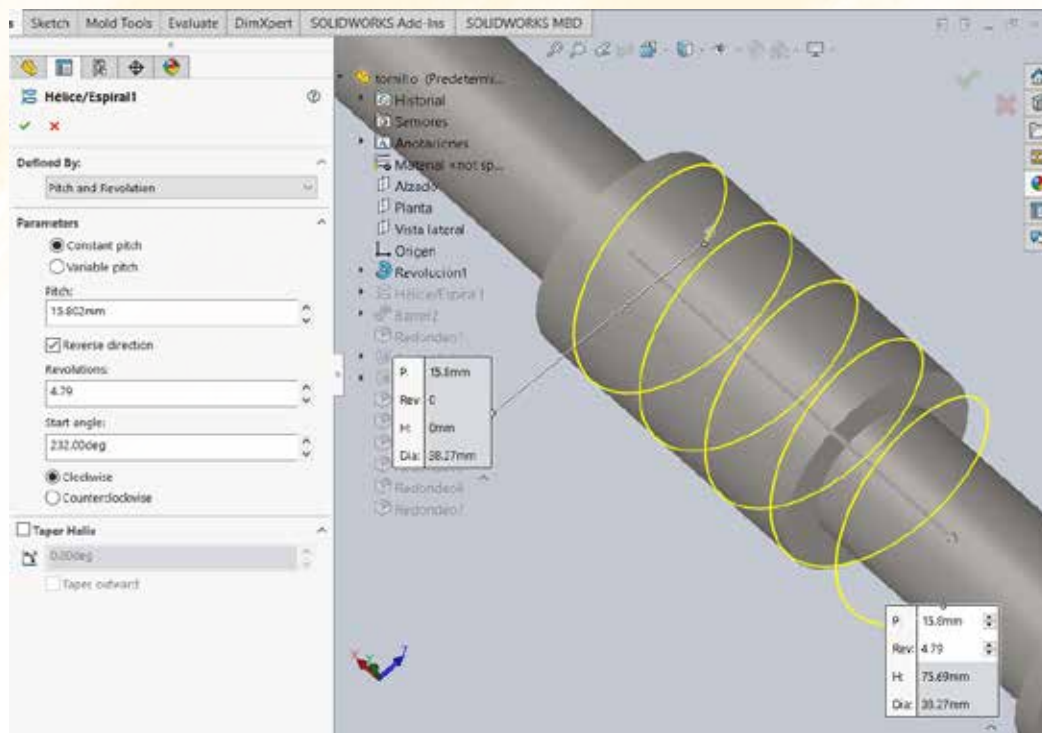


Figura 7.35. Generación de la hélice.

Con la herramienta de saliente base barrido se construye el tornillo y se iguala la hélice a la distancia b_1 , ver Fig. 7.36

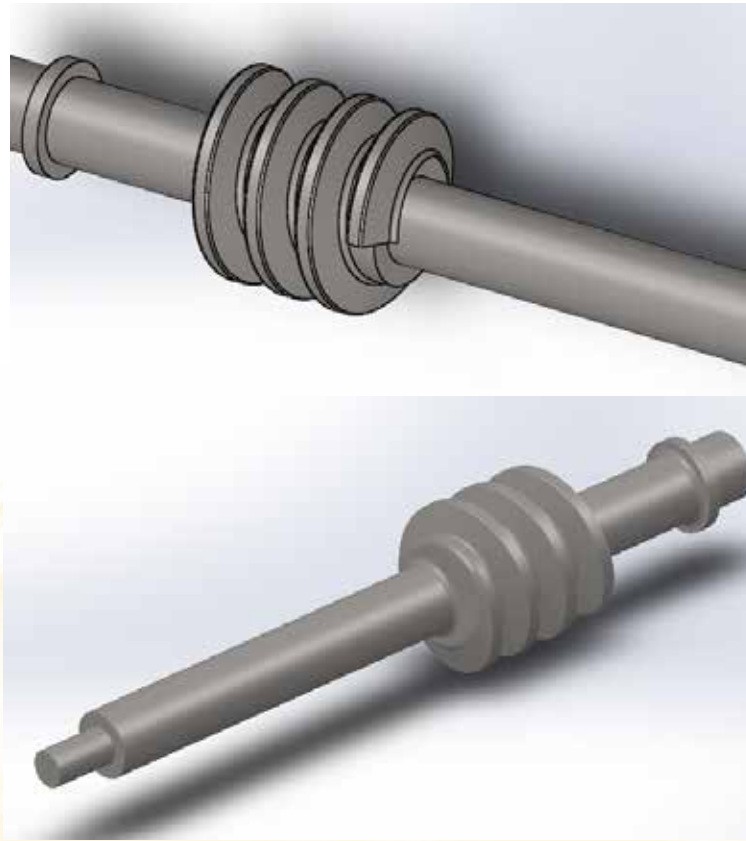


Figura 7.36. Tornillo sin fin terminado

2.- Modelado de la rueda, En base del diámetro mayor 168.50 mm y diámetro de eje se construye el perfil de la Fig. 7.37

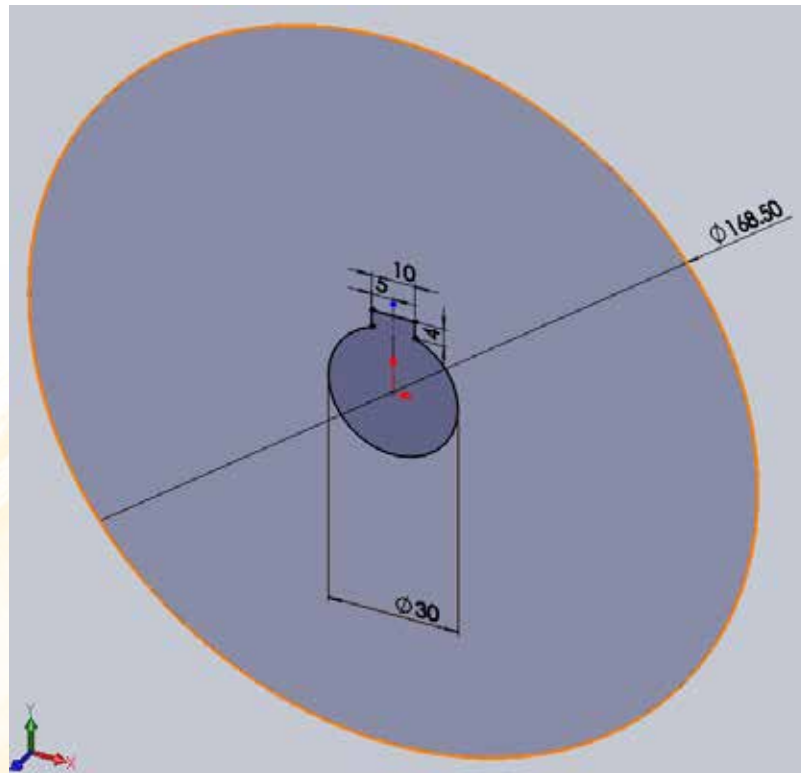


Figura 7.37. Perfil diámetro mayor

Se extruye a 50 mm, chaflán de 5 mm y corte por revolución del diámetro mínimo de la rueda, ver Fig. 7.38

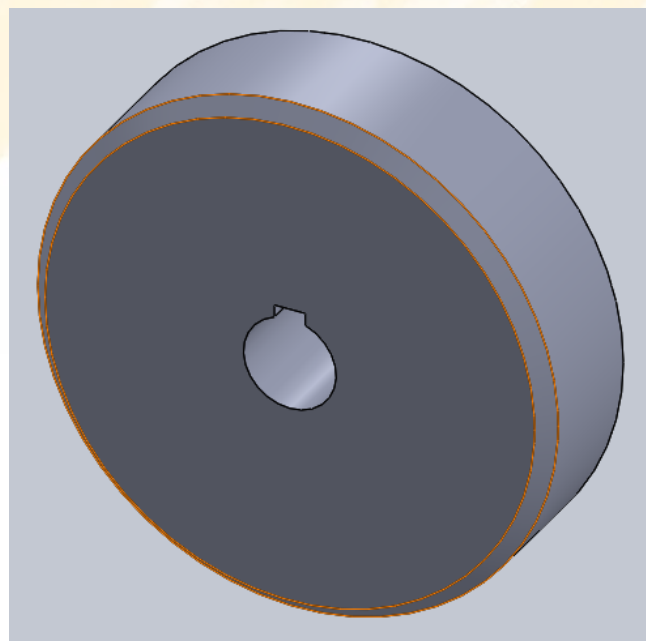


Figura 7.38. Disco para la rueda helicoidal

En base al diámetro menor del tornillo de 38.26 mm y a la distancia entre centros estipulada de 100 mm se genera un corte por revolución según la Fig. 7.39

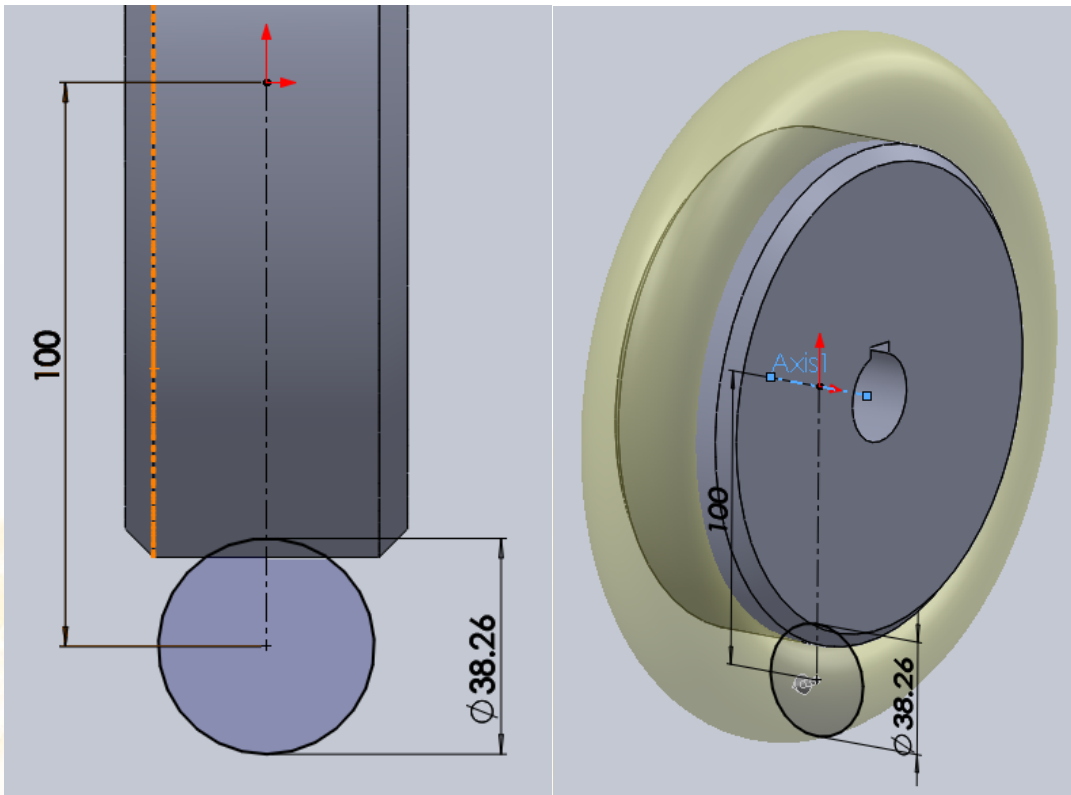


Figura 7.39. Corte por revolución

Se genera el perfil del diente con la siguiente plantilla

```

m=5;Z=30;φ=20;δ=360/(4 Z) π/180;

Dp=162.208;
Rbase=Dp/2 Cos[φ π/180];
Rp=Dp/2;
Rexterno=0.5 168.446;

inv=Tan[α]-α;

"x,y Curva involuta";
x=Rbase/Cos[α] Cos[inv];
y=Rbase/Cos[α] Sin[inv];

"Intersección involuta con Radio externo para obtener el rango
0.5932";
FindRoot[x^2+y^2==Rexterno^2,{α,0.1}]
af=0.4929052902217413;

ParametricPlot[{{x,y}},{α,0,af},{t,0,Rexterno},PlotRange->Full]

dienteX=Table[x,{α,0,af,0.01}]
dienteY=Table[y,{α,0,af,0.01}]
(*Exportación*)
Export["dienteX.xls",dienteX]
Export["dienteY.xls",dienteY]

```

Los archivos de Excel generados deben ser unificados en uno solo y guardados como texto (delimitado por tabulaciones), ver Fig. 7.40

76.21283032	0	0
76.21664112	2.54066E-05	0
76.22807542	0.000203307	0
76.24713895	0.000686471	0
76.27384124	0.001628217	0
76.30819562	0.003182691	0
76.35021929	0.005505143	0
76.39993323	0.008752214	0
76.4573623	0.013082215	0
76.52253518	0.018655422	0
76.59548443	0.025634371	0
76.67624646	0.034184158	0
76.7648616	0.044472746	0
76.86137404	0.056671285	0
76.96583192	0.070954436	0
77.07828729	0.087500701	0
77.19879615	0.106492776	0
77.32741847	0.128117899	0
77.46421821	0.152568225	0
77.6092633	0.180041207	0
77.7626257	0.210739993	0
77.9243814	0.244873841	0
78.09461042	0.282658548	0
78.27339684	0.324316901	0
78.4608288	0.370079149	0

Figura 7.40. Archivo de texto delimitado por tabulaciones

El perfil de involuta se lo completa de acuerdo al siguiente croquis, ver Fig. 7.41, el ángulo de 3°

proviene del siguiente cálculo:

$$\frac{360^\circ}{4 Z_2} = \frac{360^\circ}{4 [30]} = 3^\circ$$

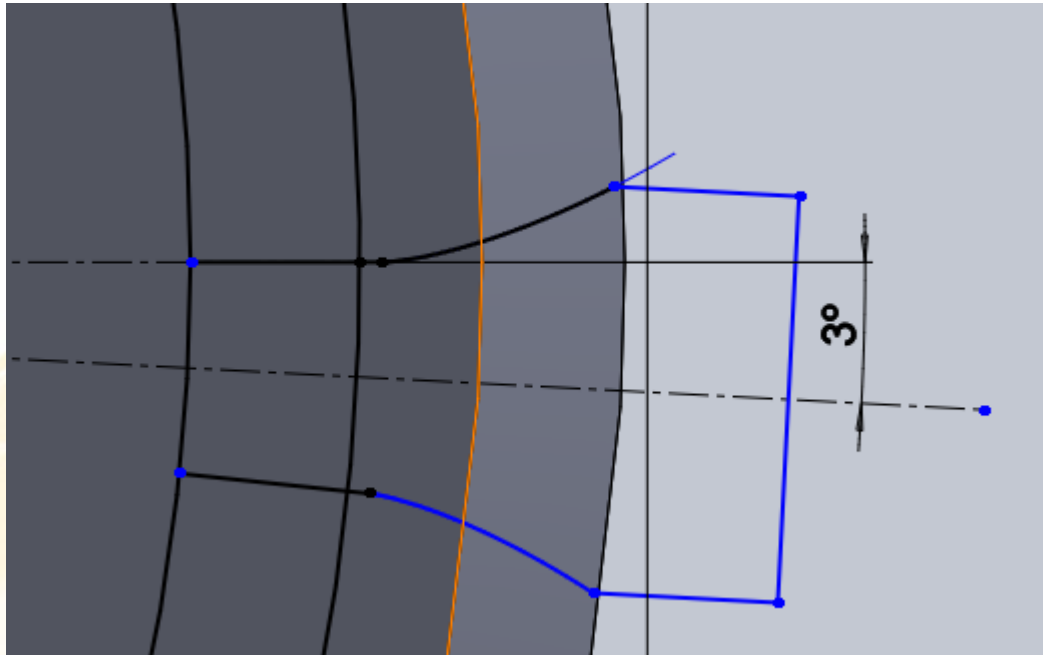


Figura 7.41. Perfil del espacio vacío

Se genera un nuevo plano a 3°, es decir con respecto al eje del espacio vacío que se formara con el diente, ver Fig. 7.42

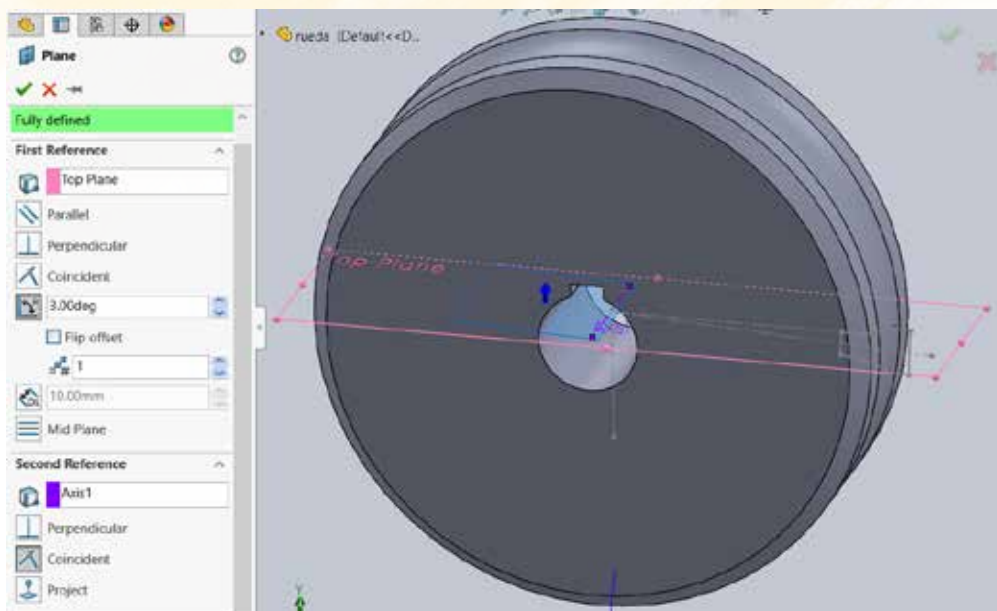


Figura 7.42. Plano de 3° con respecto a la horizontal

En este nuevo plano nuevamente se dibuja el diámetro mínimo de la rueda a 100 mm de distancia, ver Fig. 7.43.

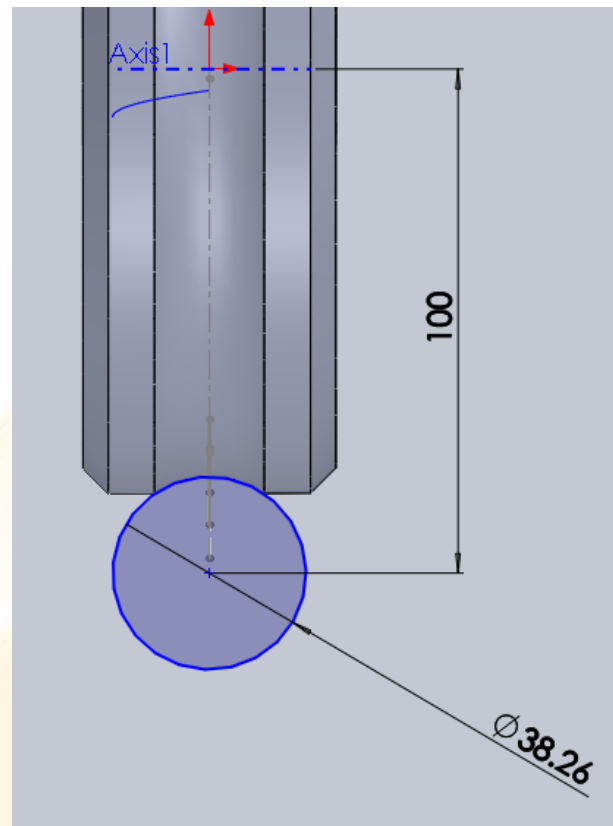


Figura 7.43. Circunferencia generadora de la rueda

En base a este perfil se genera una hélice con el mismo paso del tornillo helicoidal, ver Fig. 7.44

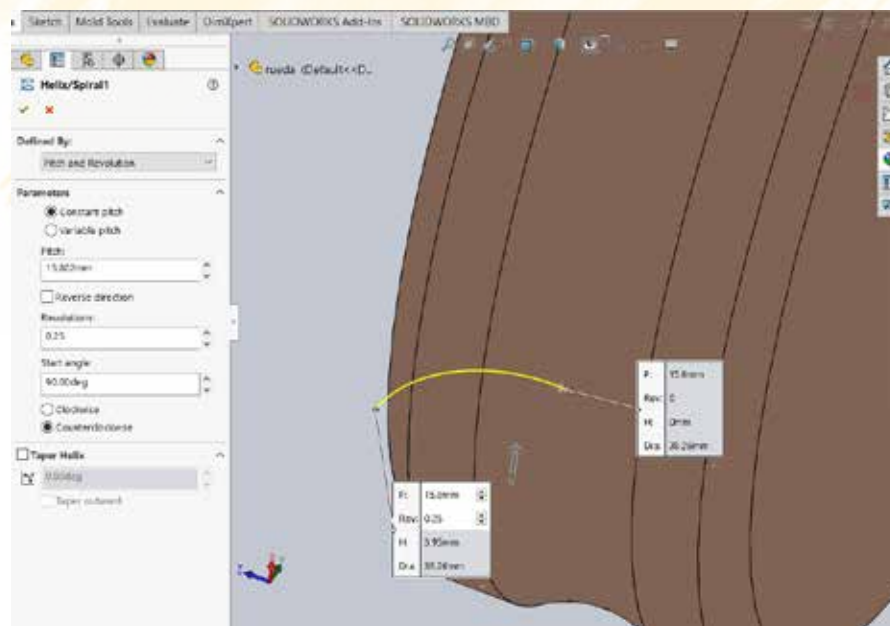


Figura 7.44. Hélice para efectuar el corte

A continuación se corta el perfil de acuerdo a la hélice, ver Fig. 7.45

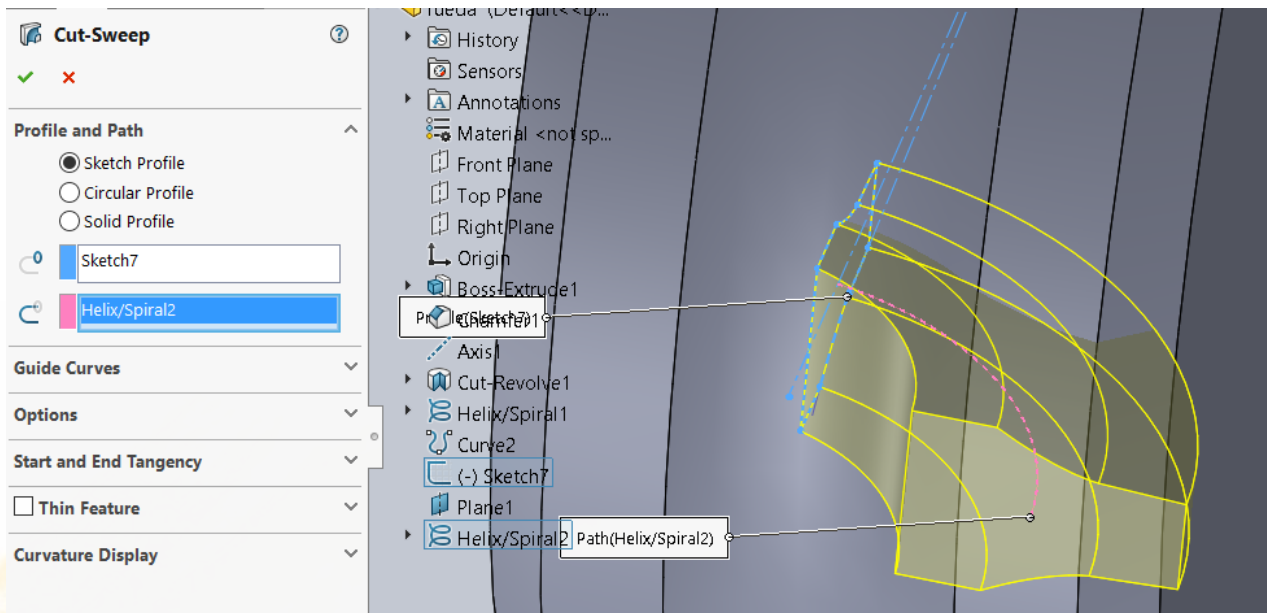


Figura 7.45. Corte primera mitad de la hélice

Insertar una nueva hélice pero de dirección reversa y en sentido de las manecillas del reloj, ver Fig. 7.46

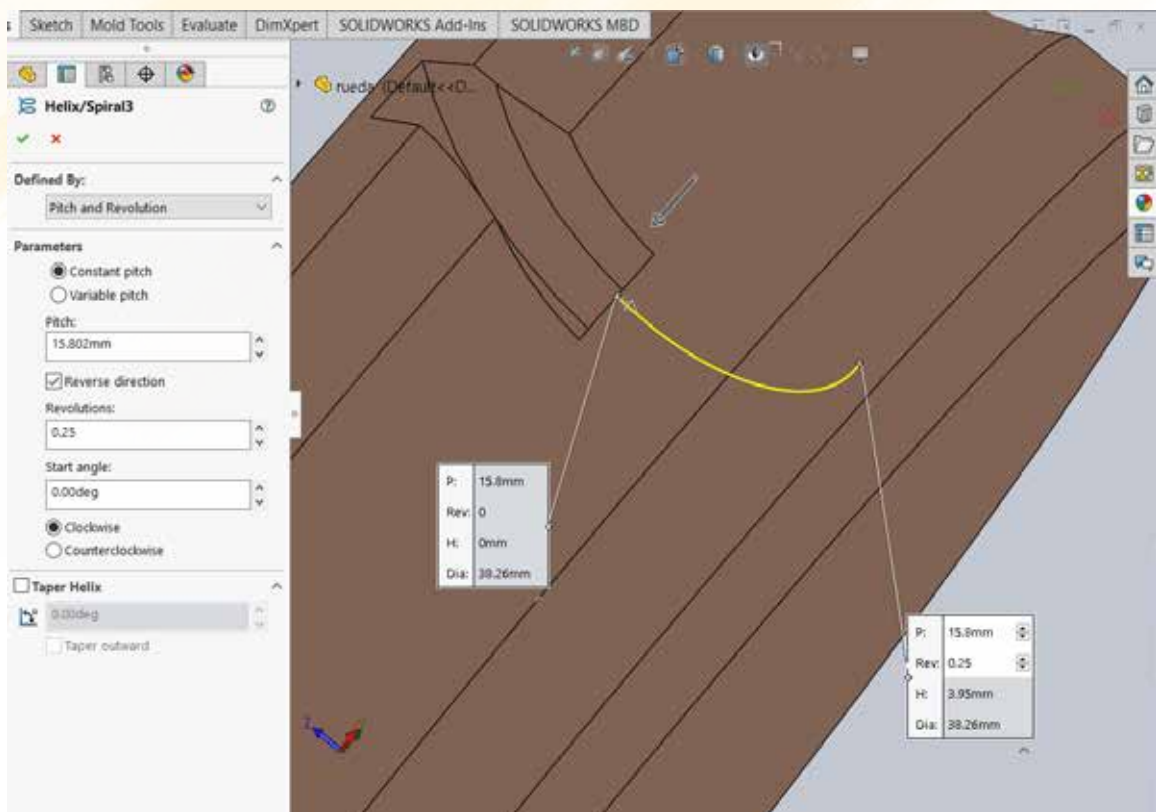


Figura 7.46. Segunda hélice generada

Se corta el espacio vacío de acuerdo a esta nueva hélice, ver Fig. 7.47

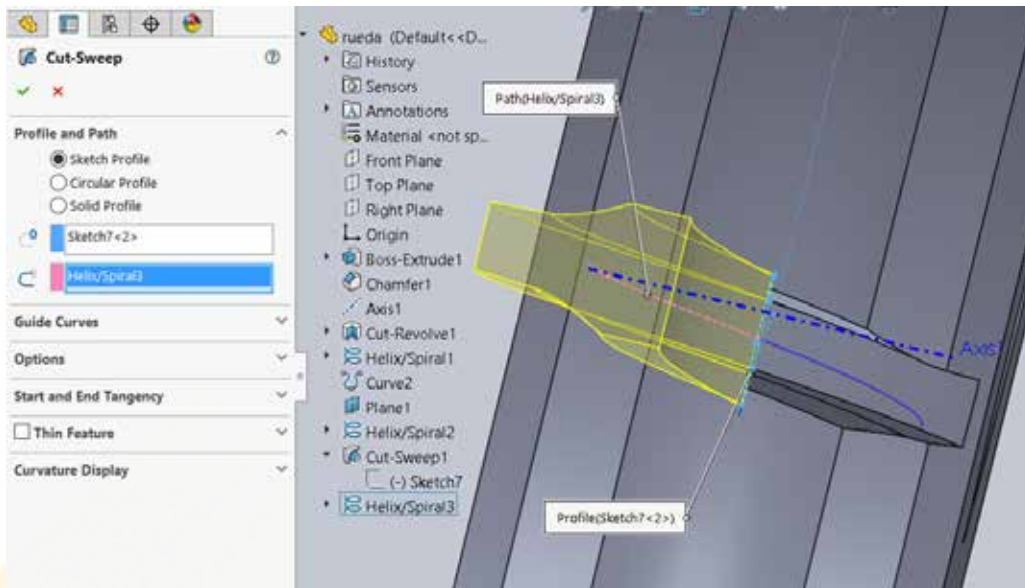


Figura 7.47. Corte según la segunda hélice

El resultado se lo observa en la Fig. 7.48.

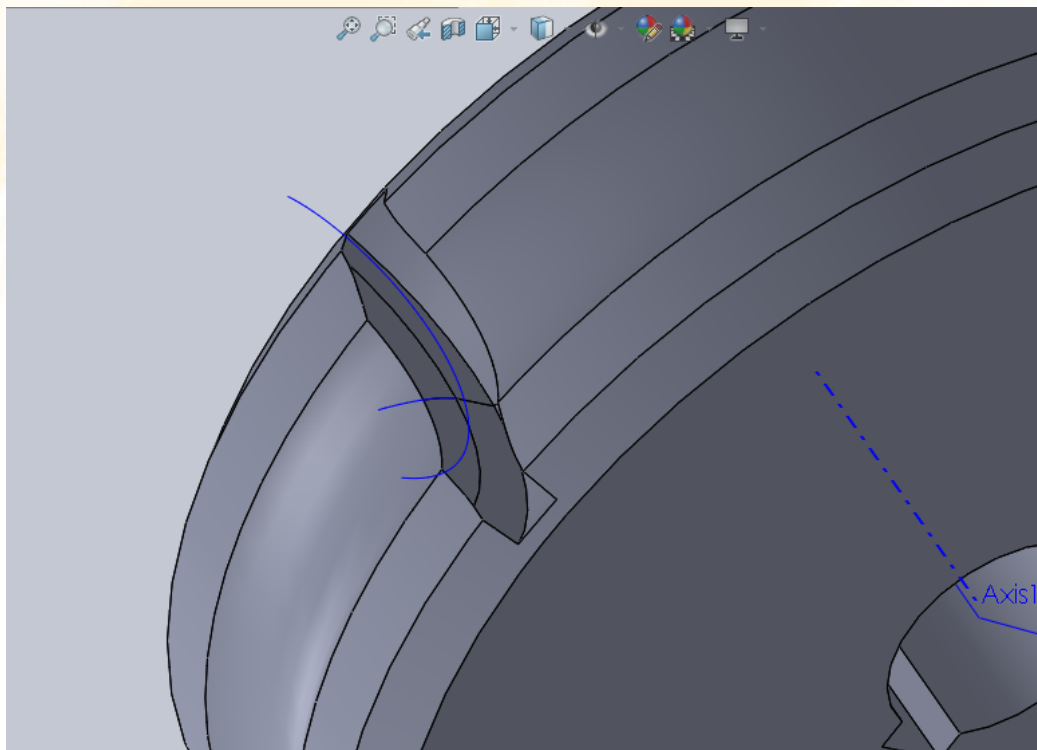


Figura 7.48. Corte según la segunda hélice

Generar el arreglo polar con los 30 dientes que corresponden al dato Z_2 , ver Fig. 7.49

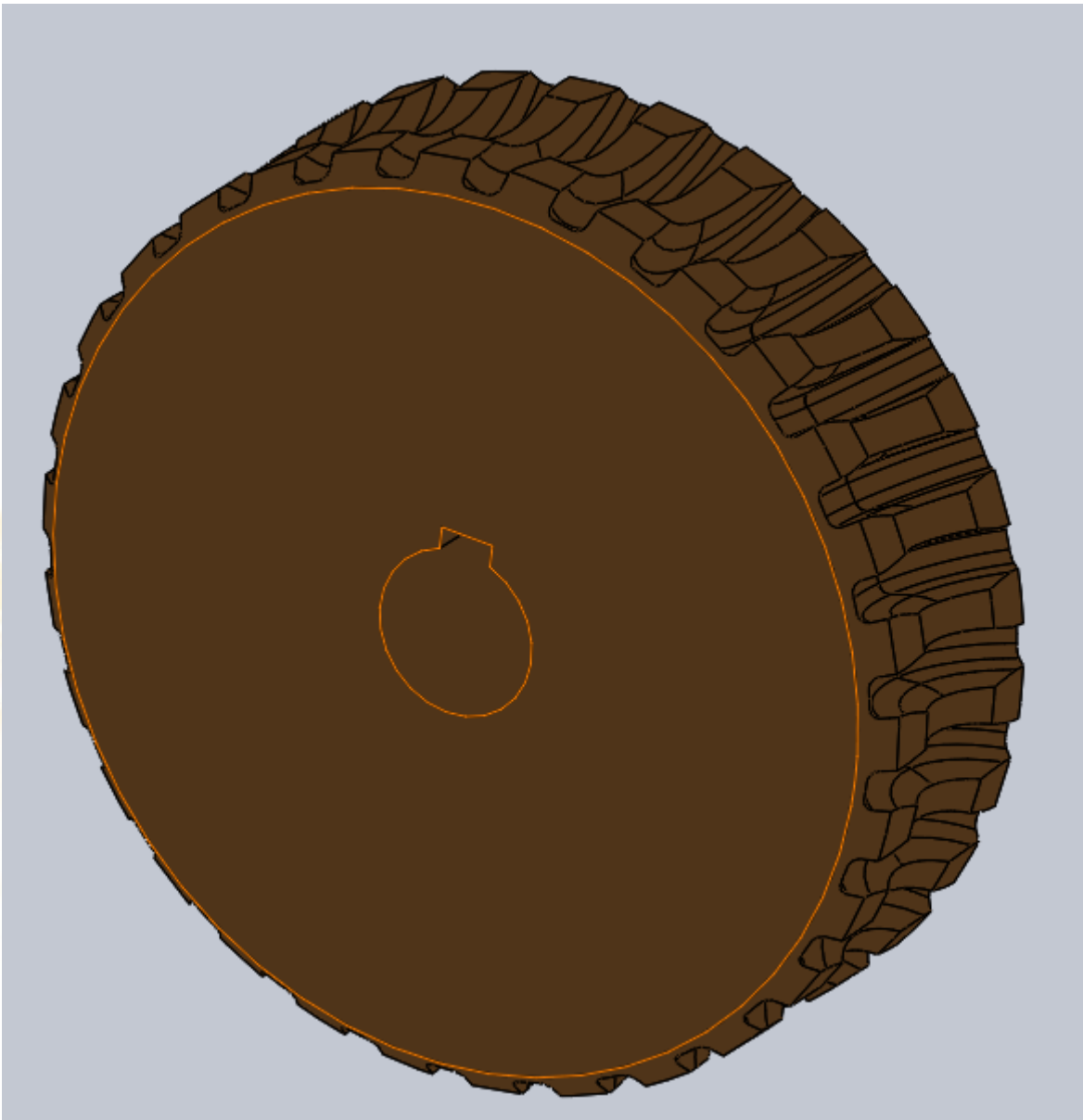


Figura 7.49. Rueda dentada helicoidal

El bastidor debe ser realizado según la altura de ejes de 100 mm y el producto final se lo observa en la Fig. 7.50

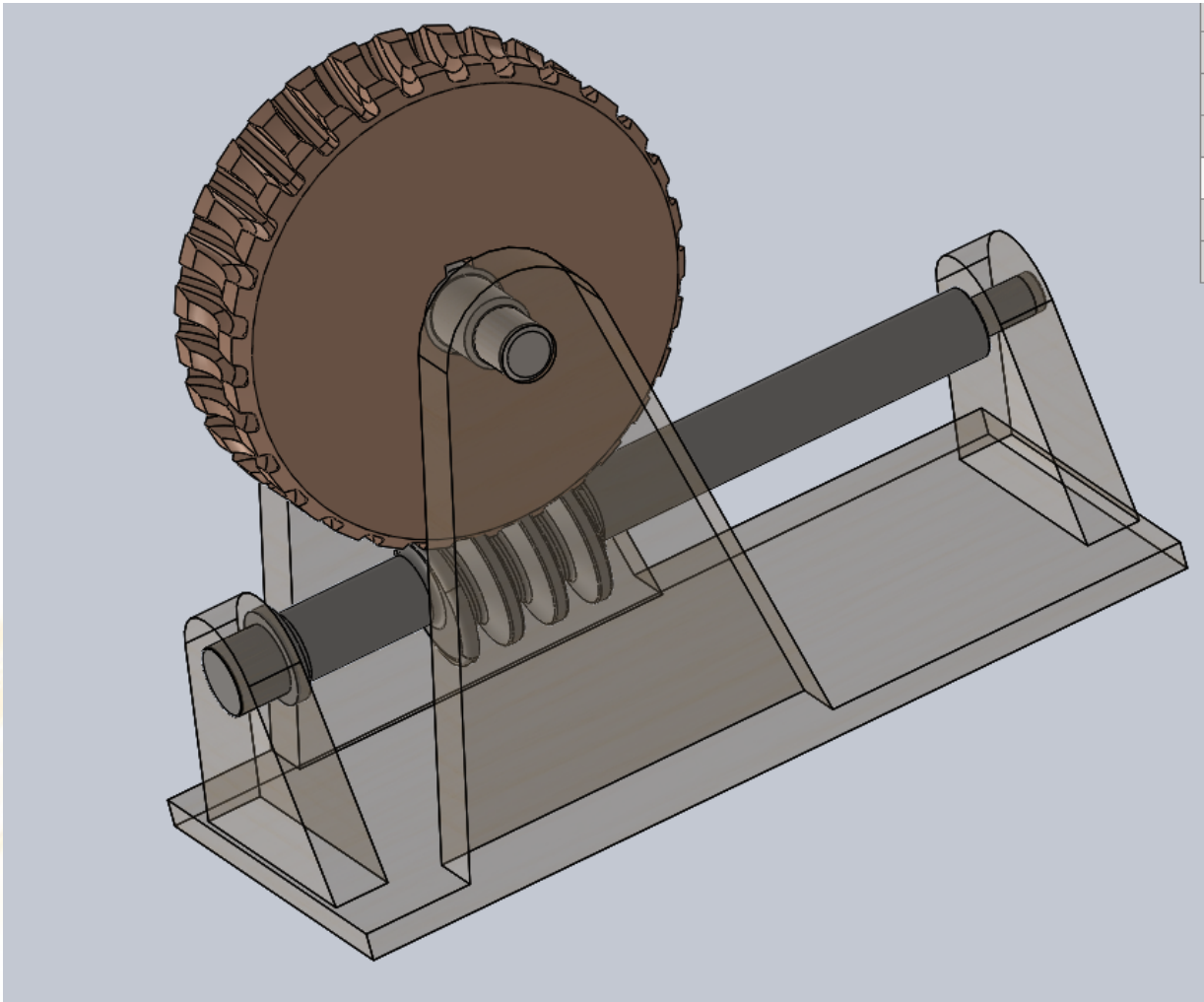


Figura 7.50. Mecanismo final

Bibliografía

- Abell, M. (2016). *Mathematica by example*, San Diego, USA: Elsevier.
- Dudley's. (2012). *Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*, Boca Raton, USA: CRC Press.
- Erdman, A. (1998). *Diseño de Mecanismos, Análisis y Síntesis*. México, México: Prentice Hall
- Echeverría, J. (2009). *Síntesis cinemática de orden superior y de generación de movimiento para tres y cuatro posiciones prescritas de mecanismos de cuatro barras - diseño y simulación de aplicaciones industriales (tesis de postgrado)*. Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.
- Magrab, E. (2014). *An Engineer's Guide to Mathematica*. West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons.
- Nieto, J. N. (1978). *Síntesis de Mecanismos*. Madrid, España: AC.
- Norton, R. L. (2004). *Diseño de maquinaria*. México: Mc. Graw Hill.
- Norton, R. L. (2009). *Cam Design and Manufacturing Handbook*. New York: Industrial Press.
- Roque Alejandro Calero Pérez, J. A. (1999). *Fundamentos de mecanismos y máquinas para ingenieros*. Madrid, España: McGraw-Hill Interamericana de España.
- Rothbart, H. (2004). *Cam Design Handbook*. New Jersey, USA: Mc Graw Hill.
- Sandor, G. (1984). *Advanced Mechanism Design, Analysis and Synthesis Volume 2*. New Jersey, USA: Prentice Hall
- Shigley, J. (1988). *Teoría de máquinas y mecanismos*. México, México: Mc Graw Hill.
- Stiles Beggs, J. (1963). *Mecanismos*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Hispano Americana.
- Waldron, K. (2016). *Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery*. West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons
- Olmedo, F., Echeverría, J., Piovan, M. (2015). *Dinámica de levas planas, Análisis de incertidumbre de tipo paramétrico para precisión en altas velocidades*. X Congreso de Ciencia y Tecnología - ESPE 2015", ISSN: 1390-4671, pp. 164-169
- Olmedo, F. (2011). *Diseño del mecanismo de accionamiento de la plataforma de acceso del sistema de elevación para personas con movilidad limitada*. VI Congreso de Ciencia y Tecnología - ESPE 2011 ISSN 1390-4663, pp. 91-102

Publicaciones Científicas

ISBN: 978-9942-765-41-3



9 789942 765413



ESPE

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA