Geometría plana

un espacio de aprendizaje

Carmen Samper
Óscar Molina

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Geometría plana

un espacio de aprendizaje

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Catalogación en la fuente - Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional

Samper, Carmen

Geometría plana: un espacio de aprendizaje / Carmen Samper, Óscar Molina. – 1ª.ed. - Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2013

272 p., 114 figuras

Incluye bibliografía

ISBN: 978-958-8650-71-5 (Versión impresa)

ISBN: 978-958-8650-72-2 (Versión digital)

1. Geometría Plana 2. Enseñanza de la Geometría. 3. Conceptos Geométricos. 4. Matemáticas - Currículo. 5. Métodos de Enseñanza 6. Evaluación Curricular – Universidad Pedagógica Nacional. I. Molina, Óscar. II. Tít.

516.22 cd. 21 ed.

Geometría plana

un espacio de aprendizaje

Carmen Samper
Óscar Molina

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Geometría plana
un espacio de aprendizaje

ISBN: 978-958-8650-71-5 (Versión impresa)
ISBN: 978-958-8650-72-2 (Versión digital)
Primera edición, 2013

Autores Parte I:
Carmen Samper
Óscar Molina
Patricia Perry
Leonor Camargo

Autores Parte II:
Carmen Samper
Óscar Molina

Preparación Editorial
Universidad Pedagógica Nacional
Fondo Editorial
Calle 72 Nº 11 - 86
Tel: 347 1190 y 594 1894
editorial.pedagogica.edu.co

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador Fondo Editorial

Carmen Samper
Óscar Molina
Editores

Patricia Perry
Corrección de estilo

Lápiz Blanco S.A.S.
Diseño de Carátula y Diagramación
www.lapizblanco.com

Impresión Javegraf
Bogotá, Colombia, 2013

Contenido

Introducción

El curso Geometría Plana, del programa académico que la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) ofrece para la formación inicial de profesores de matemáticas, ha sido objeto de un proceso de innovación que comenzó en el año 2004. Cristalizar la aproximación metodológica con la que en el curso se enseña la geometría plana euclidiana es el propósito principal que nos alienta a escribir este libro. Tal aproximación metodológica la describimos en el Capítulo 1 a través del tipo de tareas que se proponen a los estudiantes, el recurso tecnológico que los apoya para realizarlas y el tipo de interacción entre profesor y estudiantes o entre estudiantes que soporta la construcción de conocimiento en el aula. Específicamente, la cristalización se refleja en la presentación de los 46 problemas abiertos que se proponen, cuya resolución propicia una discusión matemática suficientemente rica para que emerjan los elementos que conformarán el sistema teórico que se va consolidando a lo largo del curso. Las directrices para dicho sistema son el modelo de Birkhoff (1932) para la geometría euclidiana, en el cual “se introducen los hechos encarnados en la regla y el transportador” (p. 2), y la propuesta de Moise y Downs (1986) que concuerda básicamente con dicho modelo. Ello, porque se corresponden, en esencia, con el modelo de geometría que corporeiza el software de geometría dinámica, artefacto que desempeña un papel importante en nuestra aproximación metodológica. Si bien no ilustramos, a través de protocolos, la interacción que se produce en esas discusiones, sí relatamos aspectos notables usuales constituidos por las propuestas de construcción y exploración con geometría dinámica que hacen los estudiantes, las conjeturas que proponen, finalizando con la explicitación del sistema teórico local a que da lugar cada problema propuesto.

En los primeros dos capítulos, presentamos las razones que motivaron la innovación del curso; los referentes teóricos que sustentan la propuesta de innovación y son producto de las diversas investigaciones que el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría*, *Æ • G*, de la Universidad Pedagógica Nacional, ha desarrollado desde el año 2000; las definiciones de los términos que usamos al describir los objetivos de la innovación; una descripción de la aproximación metodológica; un recuento no solo de las actuaciones problemáticas que presentan los estudiantes cuando hacen demostraciones sino también de las estrategias que se diseñaron para apoyar al estudiante a superar dichas actuaciones; y una herramienta didáctica para ayudar al estudiante a entender el estatus teórico y operativo de las definiciones, los postulados y teoremas, elemento imprescindible para poder construir demostraciones.

Los siguientes capítulos contienen una propuesta específica: problemas y resultados. El desarrollo de cada uno de estos capítulos incluye: presentación del problema propuesto a los estudiantes, con su respectivo objetivo, seguida por la explicitación de las conjeturas que usualmente formulan ellos como respuesta al problema, la descripción de los asuntos que se tratan en la discusión matemática y la enunciación de los elementos teóricos que se establecen tras la discusión. Finaliza cada capítulo con una sección de ejercicios. En el Capítulo 3, "Relaciones entre puntos y rectas", y en el Capítulo 4, "Relaciones entre puntos, rectas y planos", se introducen los elementos primitivos del sistema teórico y se estudian las relaciones entre ellos. En el Capítulo 5, "Ángulos", se desarrolla el sistema teórico local cuyo núcleo es dicho objeto. El Capítulo 6, "Congruencia de triángulos" trata no solo esta relación sino también las que se deducen de ella, como lo relativo a desigualdades. El Capítulo 7, "Cuadriláteros", versa sobre esta figura geométrica, incluyendo no solo paralelogramos sino también trapecios. El tema de semejanza de triángulos se aborda en el Capítulo 8, "Proyección paralela y semejanza de triángulos". Terminamos con el Capítulo 9, "Circunferencias", en el cual se presenta el estudio de esta figura geométrica.

A pesar de que la propuesta se ha implementado con estudiantes universitarios, ello no implica que esta no pueda ser usada en otros niveles escolares, o que no pueda ser germen para otros procesos de innovación.

PARTE 1
CONTEXTUALIZACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN DEL CURSO

Patricia Perry - Carmen Samper
Leonor Camargo - Óscar Molina

Capítulo 1

Innovación en un aula de geometría de nivel universitario

La línea de geometría del programa de formación inicial de profesores de matemáticas que ofrece la Universidad Pedagógica Nacional está conformada por tres cursos ubicados en los tres primeros semestres del programa. El primero, Elementos de Geometría, tiene como objetivo que los alumnos reconstruyan o amplíen su panorama geométrico y desarrollen competencias necesarias para participar en el siguiente curso de la línea. Se lleva a cabo mediante procesos exploratorios para hacer un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas. En términos generales, los estudiantes avanzan en su aprendizaje de la visualización geométrica de figuras, la argumentación matemática fundamentada y la generalización de propiedades geométricas de triángulos y cuadriláteros, a partir del estudio de ejemplos y contraejemplos.

El segundo curso, Geometría Plana, tiene como meta que los estudiantes aprendan a demostrar en geometría y comiencen a forjar una visión amplia de la práctica de la demostración. Tal objetivo ha iluminado el proceso de innovación curricular cuyo recuento presentamos a continuación.

Con la idea clara de cuál debería ser la meta del curso y una fuerte convicción sobre el papel imprescindible de la interacción entre profesor y estudiantes para el logro del objetivo, en 2004 iniciamos un proceso de innovación curricular que se extendió hasta el año 2009. En ese lapso, a medida que se iban aclarado presupuestos teóricos para fundamentar la innovación, y con base en la realimentación que obteníamos en cada versión realizada del curso, fuimos ajustando cada vez más las características del curso hasta llegar a un diseño del mismo bastante detallado y con el que estamos satisfechos en gran medida. Es importante resaltar que esta innovación estuvo acompañada de manera permanente por la realización de estudios de investigación que, aunque no se centraron en indagar sobre el proceso mismo de la innovación y sus resultados, se ocuparon de explorar y comprender aspectos específicos de los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en el curso. Tales investigaciones fueron desarrolladas por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ • G*, de la Universidad Pedagógica Nacional, conformado en la actualidad por los coautores de este y el siguiente capítulo, de los cuales dos son los profesores que han llevado a cabo la innovación y son los autores de los demás capítulos del libro. Es así como las decisiones de ajustes al diseño curricular han sido objeto de consideración y reflexión de todo el grupo y no solo de los profesores del curso.

Antes de emprender la innovación del curso Geometría Plana, este tenía como propósito principal ofrecer a los estudiantes un espacio académico para el aprendizaje de un cierto contenido geométrico. En dicho espacio, el profesor presentaba el sistema teórico adoptado en el libro de texto que se estudiaba en el curso, y los estudiantes debían aprender, de manera individual y, sobre todo, por fuera del aula, axiomas, definiciones y teoremas, a la vez que se podían ejercitar en la elaboración de demostraciones imitando los esquemas de demostración ejemplificados por el profesor, con ejercicios tomados del libro, sin que esto fuera objeto de tratamiento didáctico en la clase.

Al hacer una revisión curricular del curso, nos hicimos la pregunta sobre qué ideas de demostración y práctica demostrativa podrían forjarse, en consecuencia, los estudiantes. Con base en la lectura de diversos textos provenientes de la literatura especializada (e. g., de Villiers, 1990; Hersh, 1993; Dreyfus, 1999; Hanna, 2000; Godino y Recio, 2001) y reflexiones al respecto, pudimos imaginar que dicha idea tendría que ser reducida y distorsionada. Muy probablemente, para ellos la práctica demostrativa sería una actividad ritual caracterizada por el uso de formas esotéricas de comunicar, una actividad conformada por una serie de acciones sacadas de la manga que solo un experto puede realizar oportunamente, una actividad cuyo único propósito es validar un enunciado que en muchos casos puede no entenderse y del que no se está convencido. Tal perspectiva los llevaría a creer que la demostración no puede ser actividad central de la matemática escolar y que su ausencia en la clase de matemáticas no tendría repercusiones negativas importantes en la formación matemática de los estudiantes pues no se pretende que ellos sean expertos en matemáticas. De continuar con este tipo de formación, la experiencia matemática de las siguientes generaciones de estudiantes de educación básica secundaria y media probablemente seguiría siendo pobre o nula en cuanto a experiencias asociadas a la demostración, con las consecuencias que de ello se derivan para su formación matemática y el desarrollo de su razonamiento.

Así, en calidad de formadores de profesores de matemáticas, nos hicimos conscientes de la doble responsabilidad respecto al aprendizaje de la demostración: no solamente debemos apoyar a nuestros estudiantes para que aprendan a demostrar sino también procurar que las experiencias de aprendizaje que tengan al respecto les sirvan como referentes y ejemplos para el ejercicio de su profesión. A través de tales experiencias, se aportan elementos para la visión que pueden llegar a construir los estudiantes sobre lo que es demostrar, el papel que juega la demostración en la actividad matemática, etc.

Otras consideraciones generales que motivaron las decisiones curriculares de nuestra innovación tienen que ver con los siguientes asuntos.

Las necesidades de formación profesional de los estudiantes inscritos en el programa. Nuestros estudiantes, como futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria, necesitan desarrollar, por una parte, su capacidad de actuación en contextos relacionados con las matemáticas y, por otra, su capacidad para generar ambientes de aprendizaje de las matemáticas escolares. El desarrollo de estas dos capacidades es gradual y depende en gran medida de la calidad de las experiencias de aprendizaje que propicien los diferentes cursos que ofrece el programa de formación. Tener en mente estas dos necesidades condujo a revisar e introducir cambios en la meta y los objetivos del curso, en el tipo de tareas propuestas a los estudiantes, en la gestión del contenido, y en el tipo de interacción social en el aula.

El papel de la práctica demostrativa dentro del quehacer matemático. La práctica demostrativa está en el corazón del quehacer matemático. Esto implica que no es posible la formación matemática de los estudiantes, en cualquier grado, sin alguna suerte de práctica demostrativa. Este reconocimiento iluminó en buena medida la dirección de los cambios que debíamos hacer para generar experiencias significativas de aprendizaje matemático.

El reconocimiento de la complejidad inherente al aprendizaje de la demostración. Este aprendizaje no se puede dejar exclusivamente en manos de los estudiantes; exige de parte del profesor un apoyo deliberado y sistemático al proceso de los aprendices. La complejidad incluye aspectos diversos como, por ejemplo, la comprensión y el uso del enunciado condicional, el manejo bien diferenciado de distintos tipos de argumentos (deductivo, inductivo, abductivo), la lógica que hay detrás de acciones propias de la manera de justificar en matemáticas, el estatus de los enunciados que intervienen durante el proceso de justificación.

El reconocimiento de que el uso de la geometría dinámica favorece la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. En el campo de la geometría se cuenta con la geometría dinámica como recurso tecnológico para el aprendizaje de la demostración. Con tareas geométricas bien diseñadas, el uso de la geometría dinámica para explorar y experimentar favorece la generación de un ambiente de indagación y, si se usa para buscar ideas para la justificación, se convierte en herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración.

Cimientos de la innovación

Como se ha dicho ya, en el curso innovado la meta es que los estudiantes aprendan a demostrar. Esto hace que la práctica de demostrar, desde ahora designada por actividad demostrativa, ocupe un lugar privilegiado en el curso. Vamos entonces a precisar qué entendemos al respecto.

Actividad demostrativa en el ámbito educativo

La *actividad demostrativa* involucra los procesos de conjeturación y justificación, relacionados entre sí por el hecho de que se justifica lo que se conjetura (Diagrama 1).

Diagrama 1. Esquema de la actividad demostrativa

El proceso de *conjeturación* tiene por meta la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto pero este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual son candidatas a entrar en un proceso de justificación que las valide dentro de un sistema teórico determinado. Son acciones propias de este proceso: detectar un invariante y verificarlo siempre que surjan elementos de incertidumbre, formular la conjetura y corroborarla. Formular una conjetura se refiere a explicitar en términos matemáticos, y como un enunciado condicional general, un hecho matemático (aquí, geométrico) que se ha reconocido a través del estudio de casos particulares. Corroborar la conjetura significa examinar si lo que se reporta en el antecedente es suficiente para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura, y si el consecuente incluye todas las conclusiones posibles.

El proceso de *justificación* tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento (e. g., creencias, representaciones gráficas, sistema teórico). En este proceso es posible reconocer tres acciones propias: seleccionar entre elementos identificados, teóricos o empíricos, aquellos que podrían sustentar la afirmación; organizar esos elementos de manera deductiva; formular la justificación.

Entre las acciones —de índole heurística— que apoyan los dos procesos están la visualización y la exploración. Mediante la *visualización* se consigue información geométrica de una figura ya sea identificando los elementos que la componen y algunas configuraciones que se pueden formar con ellos (de dimensión igual o menor que la de la figura inicial) o interpretando símbolos que representan propiedades geométricas (e. g., de congruencia "≅"', perpendicularidad "⊥", paralelismo "∥"), con el ánimo de encontrar relaciones geométricas subyacentes. Requiere establecer nexos entre la figura y el saber previo para identificar, aislar y enfocar elementos de interés por medio de la vista, detectar o descubrir propiedades que inicialmente pasan inadvertidas, o evocar propiedades geométricas.

Mediante la *exploración*, realizada en el mundo de los fenómenos y/o en el mundo de la teoría, se buscan regularidades (propiedades o relaciones geométricas).

- En el mundo de los fenómenos, la exploración recae sobre representaciones (gráficas y materiales) de figuras geométricas y tiene un carácter empírico. Puede llevarse a cabo tomando medidas, calculando o haciendo construcciones (auxiliares, para enriquecer la figura; de referencia, para comparar; de casos, para llegar a un resultado por ensayo y error). Nos referimos entonces a una *exploración empírica*. Cuando esta se lleva a cabo en un entorno dinámico, es decir, uno en el que las representaciones son susceptibles de movimiento, la denominamos *exploración dinámica* y su objetivo es detectar invariantes. Los entornos de geometría dinámica ofrecen una herramienta particular de exploración: la opción de arrastre de los objetos. Con esta opción, una imagen en la pantalla se puede transformar en un sinnúmero de imágenes –una sucesión casi continua de representaciones– todas asociadas a la misma figura geométrica inicial. Esto permite estudiar qué propiedades permanecen invariantes y cuáles se modifican.

- En el mundo de la teoría, la exploración recae sobre los enunciados que conforman el conocimiento individual. La designamos *exploración teórica* y se lleva a cabo con el propósito de reconocer o encontrar enunciados que permitan justificar una afirmación o tomar decisiones sobre hacia dónde dirigir la exploración empírica.

Naturalmente, no puede haber actividad demostrativa sin razonamiento que movilice las ideas y acciones y sin la argumentación asociada. Más aún, la *actividad demostrativa* forma un entramado con el razonamiento y con la argumentación. A continuación precisamos qué entendemos al respecto.

Razonar matemáticamente es conectar, atendiendo reglas de la disciplina, experiencias y saberes, enraizados en ella, con el propósito de indagar, obtener nueva información, interpretar información, explicar, determinar una manera de proceder, formular dudas, contradecir, refutar, concluir, etc. El *razonamiento matemático* es el producto de razonar matemáticamente.

Para precisar lo que entendemos por argumentación y distinguir tres tipos de argumentos, recurrimos a una versión reducida del modelo propuesto por Stephen Toulmin, tal como la presentan Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010) en un modelo que han construido para planear, gestionar y analizar actividades cuyo propósito es aproximar a los estudiantes a "aspectos relevantes del demostrar y la demostración".

Un *argumento* es un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una general (garantía). Las proposiciones podrían no estar todas explicitas pero debería ser posible identificarlas en un esfuerzo por formalizar lo expresado. La forma como se relacionan las proposiciones particulares (p y r) y la general (r) define el tipo de argumento: deductivo, inductivo o abductivo. El argumento puede estar dirigido a uno mismo o a otro.

Argumento deductivo: En este, se aplica una proposición general (r: $p \longrightarrow q$) con la que se cuenta, a unos datos que se tienen (p_1: particularización de p), para obtener la aserción (q_1: particularización de q). El esquema del argumento es: $(p_1 \wedge r) \longrightarrow q_1$ (Diagrama 2). La aserción así obtenida es necesaria. Los argumentos deductivos ocurren primordialmente en el proceso de justificación.

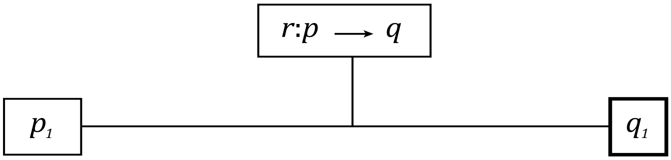


Diagrama 2. Esquema que destaca lo inferido en un argumento deductivo

Argumento inductivo de descubrimiento: En este, las proposiciones particulares $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ son n casos que particularizan la proposición p y la proposición general (q) se satisface para cada p_i. Se concluye la proposición general (r: $p \longrightarrow q$). El esquema del argumento es: $(p_1 \wedge r) \wedge (p_2 \wedge q) \wedge (p_3 \wedge q) \wedge \ldots (p_n \wedge q) \longrightarrow r$ (Diagrama 3). La conclusión así obtenida es de índole provisional, es una conclusión plausible y para indicarlo en el diagrama usamos una línea punteada. Sería una conclusión válida si (q) coexiste con todas los casos posibles de (p), situación que se podría esquematizar con la tautología: $(p \wedge q) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$. Además, si es posible validarla, constituye nueva información en el sistema teórico de referencia. Los argumentos inductivos se dan principalmente durante el proceso de conjeturación.

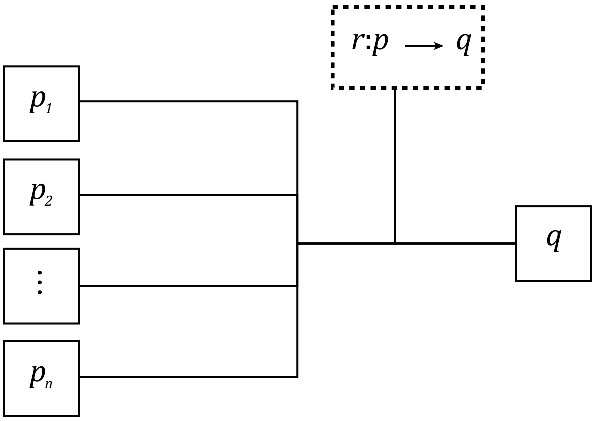


Diagrama 3. Esquema que destaca lo inferido en un argumento inductivo

Argumento abductivo: En este, la proposición particular que se tiene se refiere a un hecho que se observa (q_1: caso de q), y se cuenta con la proposición general (r: $p \longrightarrow q$). Se concluye que es posible el hecho (p_1: caso de p). El esquema del argumento es: $((q_1 \wedge r) \dashrightarrow (p_1))$ (Diagrama 4). La conclusión así obtenida es de índole provisional, es una conclusión plausible; indicamos esto en el esquema con el símbolo" -→" y en el diagrama con el borde punteado. Cabe mencionar que la procedencia de la regla general no es única: o es una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o es una regla aceptada como elemento del sistema teórico en el que se está trabajando, que se elige en una exploración teórica. Si bien en ambos casos *p* es posiblemente verdadero, en el primero está el asunto de la validez de la regla, circunstancia que podría desencadenar en una *argumentación deductiva* que permita justificarla. Los argumentos abductivos pueden surgir tanto en los procesos de conjeturación como en el de justificación.

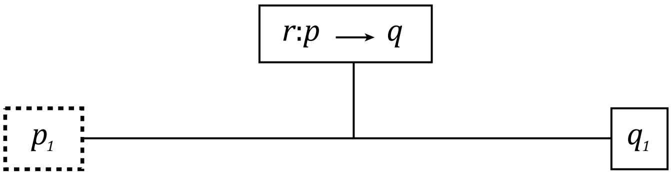


Diagrama 4. Esquema que destaca lo inferido en un argumento abductivo

Los siguientes ejemplos pretenden aclarar la diferencia debida a la procedencia de la regla en el argumento abductivo. Dos estudiantes tienen una representación, hecha con geometría dinámica, de un cuadrilátero y descubren que *las diagonales son congruentes* (q_1). El primero de ellos detecta además *la perpendicularidad de las diagonales* (p_1) y cree que la congruencia depende de la perpendicularidad. Por tanto, se imagina una regla: *si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares entonces son congruentes* (r). Para determinar si la regla es válida hay dos acciones posibles: examinar más cuadriláteros con diagonales perpendiculares, lo que podría terminar en un argumento inductivo, o intentar formular una argumentación deductiva. En cambio, el otro estudiante recuerda dos teoremas cuyo consecuente es , a saber: *si un cuadrilátero es rectángulo entonces* ***sus diagonales son congruentes*** y *si un cuadrilátero es trapecio isósceles entonces* ***sus diagonales son congruentes***. Estos teoremas lo llevan a considerar que el cuadrilátero representado, en el que vio las diagonales congruentes, puede ser un rectángulo o un trapecio isósceles; esto da lugar a dos proposiciones particulares: el cuadrilátero representado es un rectángulo (p_1), y el cuadrilátero representado es un trapecio isósceles (p_2). Examina la figura y reconoce que esta es un rectángulo, por lo que decide usar la primera regla mencionada.

Tras las precisiones anteriores respecto a la idea de *argumento*, cabe decir que entendemos por *argumentación* la formulación de argumentos para apoyar una idea; hablamos de *contraargumentación* si lo que se pretende es rechazarla. Por ser un acto comunicativo, toda argumentación se enmarca dentro de ciertas características que el grupo social en el que se expresa considera apropiadas. En particular, la información que se acepta como datos y las garantías que se usan en los argumentos las debe admitir dicho grupo, al igual que la forma como se articulan los argumentos en la argumentación (e. g., uso de analogías, esquemas de razonamiento lógico, semejanzas, contrastes); adicionalmente el grupo social determina las formas de expresar los argumentos, las cuales deben estar al alcance de dicho grupo.

La *justificación matemática* es una argumentación en la cual se encadenan argumentos, de tal forma que una proposición concluida en un determinado argumento se usa como dato en otro. De acuerdo a la edad y a las experiencias académicas previas es conveniente que el grupo social defina la pertinencia de usar garantías de diversa naturaleza, razón por la cual es pertinente distinguir tres productos del proceso de justificar: la explicación de validación, la prueba y la demostración. La *explicación de validación* es una justificación cuyas garantías provienen de fuentes no teóricas (e. g., empíricas, de autoridad, rituales, de convicción personal). En la *prueba,* las garantías son teóricas pero no todas son elementos del sistema teórico (local o global) dentro del cual se trabaja o no se incluyen explícitamente todos los argumentos esenciales. La *demostración* es la justificación en la cual toda garantía proviene del sistema teórico con el que se cuenta e incluye todos los argumentos esenciales.

Para concluir nuestras precisiones, afirmamos que el objetivo de la actividad demostrativa es producir un *teorema matemático* entendido como un sistema conformado por un enunciado, su demostración y la teoría que la guía y enmarca (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti, 1997). Al adoptar una visión de actividad demostrativa como la mencionada, atendemos a dos funciones primordiales de la demostración matemática en el ámbito educativo (de Villiers, 1990; Hanna, 1995; Mariotti, 2006): por un lado, promover la comprensión del contenido matemático inmerso tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones y, por otro lado, apuntar a la validación de dichos enunciados, en el marco de la conformación de un sistema teórico.

Aprender a demostrar

Bajo la influencia del enfoque sociocultural del aprendizaje, tan en boga en la actualidad, y, en particular, bajo la perspectiva participacionista (Sfard, 2008) entendemos que a*prender a demostrar* es un proceso gradual que ocurre principalmente en la comunidad del aula, mediante el cual los estudiantes van siendo capaces de participar en la actividad demostrativa con una disposición genuina o auténtica (i. e., asumen un papel de colaboradores o líderes por iniciativa propia, según lo permita y lo requiera la circunstancia), y un comportamiento autónomo (i. e., activan sus recursos intelectuales para hacer propuestas y sostenerlas, para considerar y tomar posición frente a las propuestas de los otros miembros de la comunidad del aula) y relevante (i. e., intervienen con aportes que son útiles aun si tienen errores).

Con el propósito de hacer operacional nuestra idea de aprender a demostrar como participación en actividad demostrativa, específicamente cuando intentamos observar y analizar la disposición y el comportamiento de los estudiantes, hemos adoptado el modelo de comportamiento racional formulado por Habermas según la versión de Morselli y Boero (2009). Así, relacionamos el comportamiento autónomo con los aspectos epistémico y comunicativo del modelo, y el comportamiento relevante con el aspecto teleológico. La disposición genuina se refleja en la medida en que los tres aspectos del modelo se hagan evidentes. Aunque no suponemos una correlación directa entre estos dos marcos de referencia, vemos factible hacer las siguientes tres asociaciones que nos sirven como herramienta analítica (Diagrama 5):

Página siguiente

Características de la participación	Se asocia con los aspectos	Aspectos del comportamiento racional
Autónoma: se activan recursos propios para comunicar y justificar las ideas propias, y para confrontar y entender las de los demás.	→	*Epistémico*: referido al control de los requerimientos establecidos por la comunidad de discurso matemático y a la consciencia de la necesidad de validar las ideas tomando en cuenta las premisas compartidas y las formas legítimas de razonar. *Comunicativo*: tiene que ver con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático.
Relevante: se hacen contribuciones que tienen algún desarrollo, o que son tenidas en cuenta, y que de alguna manera son útiles para la actividad en que están involucrados, incluso si tienen errores.	→	*Teleológico:* referido a enfocarse en una meta, formular un plan o desarrollar uno (quizá no formulado) para alcanzar la meta, escoger estrategias que puedan contribuir a llevar a cabo el plan, tener la meta bajo control.
Genuina: se asume una disposición de compromiso y se muestra interés auténtico en busca de lograr la producción de un teorema.	→	Epistémico, Comunicativo y Teleológico.

Diagrama 5. Correlación entre características de participación y aspectos del comportamiento racional

Descripción general del nuevo curso

Propósito y objetivos

El propósito del curso es generar para los estudiantes un espacio y una oportunidad de aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana, no solo desde el punto de vista disciplinar de las matemáticas sino también desde el punto de vista pedagógico. Esperamos que esta experiencia de aprendizaje se constituya en un referente significativo tanto para su desempeño en los cursos siguientes de la licenciatura como para el ejercicio de su profesión.

Objetivo general

Se pretende que los estudiantes aprendan a demostrar y amplíen su visión de la demostración y del papel que esta tiene como actividad fundamental del quehacer matemático y como recurso de comprensión.

Objetivos específicos

Se pretende que los estudiantes

1. Comiencen a formarse una idea de lo que es un sistema teórico matemático y de lo que significa trabajar dentro de tal sistema.
2. Adviertan que además de la validación de un enunciado, la demostración tiene como funciones la explicación del mismo, el vínculo de este con otros enunciados en una organización y la comunicación de ideas.
3. Ganen confianza en su capacidad de explorar empírica y teóricamente con miras a formular conjeturas y justificarlas.
4. Ganen confianza en su capacidad de justificar matemáticamente.

Aproximación metodológica

Con respecto a la gestión del contenido geométrico, hay cambios drásticos que se fueron consolidando a través de las diferentes versiones del curso. Ni el profesor ni el libro de texto son la fuente de donde se toma el contenido que se estudia. Tampoco hay una forma fija de secuenciar el tratamiento de los distintos elementos teóricos que se consideran. Una cantidad considerable de los enunciados que se demuestran los formula la comunidad de la clase, en calidad de conjeturas provenientes de las producciones de los estudiantes al resolver tareas propuestas por el profesor. Así mismo, todas las demostraciones que se hacen en el curso las realizan los estudiantes con el apoyo, en mayor o menor grado, del profesor. Las definiciones se introducen para satisfacer una necesidad manifiesta de precisar cuál es el objeto geométrico de estudio[1]. Para hacerlo, por un lado, se parte de la imagen conceptual que los estudiantes tienen del objeto y, por otro, se hace un análisis centrado en el papel de cada condición dentro de la definición. En ocasiones, algunos hechos geométricos se incorporan de manera legítima al sistema teórico porque se advierte la necesidad de demostrarlos para poderlos usar en la demostración del teorema que se está realizando.

Destacamos tres elementos sobre los que recayó nuestro esfuerzo didáctico innovador para generar un entorno favorable para aprender a demostrar: las tareas matemáticas, la interacción social en la clase y el uso de la geometría dinámica.

Las tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes

El eje principal del curso es la justificación matemática y, por tanto, las tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes deben ofrecerles oportunidades para involucrarse en tal práctica de manera significativa. Por ello, se busca desplazar del currículo tareas del tipo "Demuestre/Justifique que…" y, en cambio, se le da un papel protagónico a tareas que dan lugar a la actividad demostrativa o a la exploración teórica en busca de la justificación de enunciados. Las tareas que incluyen situaciones problema no se proponen esporádicamente ni tampoco con el propósito de complementar o aplicar lo que se hace en el curso; son, en cambio, parte central del medio didáctico usual que organiza el profesor para el aprendizaje de los estudiantes.

Para favorecer la actividad demostrativa es necesario propiciar la resolución de problemas abiertos a través de los cuales se realizan exploraciones empíricas, dinámicas o no, para comprender la situación,

1 Debe advertirse que, en general, los estudiantes tienen alguna familiaridad con los términos que designan a los objetos geométricos que se estudian en el curso, razón por la cual los usan aun si tienen ideas vagas al respecto Además, muchas de las definiciones que se introducen ya han sido objeto de estudio en el curso Elementos de Geometría.

encontrar regularidades, formular conjeturas, encontrar ideas para validarlas y producir sus justificaciones, con base en el sistema teórico que se va consolidando paulatinamente. Para favorecer la exploración teórica se formulan preguntas que impulsan a los estudiantes a explicitar y examinar sus concepciones, imágenes conceptuales, conocimientos, etc., acerca de elementos del sistema teórico, con el fin de avanzar colectivamente en la formulación de definiciones, postulados o teoremas y en la justificación de estos últimos. Tanto en la actividad demostrativa como en la exploración teórica (que puede ser parte de ella o no), el convencimiento personal, condición necesaria para buscar una justificación, se logra en la medida en que los estudiantes se involucran en tareas colectivas de indagación. Adicionalmente, tales actividades proveen los recursos de justificación.

Las tareas para proponer a los estudiantes fueron elemento central de la innovación y objeto de un cuidadoso diseño por parte del grupo de investigación. Específicamente se procuró que las situaciones problema fueran *interesantes*, para así poder estimular la actividad demostrativa; los problemas fueran *abiertos*, para así generar diversos puntos de vista y favorecer la argumentación, y también *pertinentes*, para así propiciar una experiencia sistemática de trabajo dentro de un sistema teórico en construcción.

Por lo general, la resolución de la tarea por parte de los estudiantes y la posterior socialización del trabajo realizado hasta llegar a la institucionalización del correspondiente contenido geométrico requieren más de una sesión de clase y en ocasiones hasta cuatro o cinco (no necesariamente consecutivas), dependiendo de la riqueza de la situación planteada y de la participación misma de los estudiantes. Las tareas en las que es posible formular distintas conjeturas plausibles se plantean con el propósito de generar experiencias en las que los estudiantes puedan, por una parte, vivenciar la ampliación del sistema teórico, incluyendo un conjunto de elementos en torno a un núcleo temático y, por otra parte, participar en la organización de los elementos teóricos que han producido. Otras situaciones son menos abarcadoras y se constituyen en la oportunidad de consensuar una conjetura específica y demostrarla, introduciendo al sistema teórico un elemento más.

Subyacente a esta forma de gestionar el contenido geométrico está la hipótesis didáctica según la cual poder construir un sistema teórico en la clase a partir de la resolución de situaciones problema, requiere que en ocasiones, la comunidad acepte, por una parte, dejar provisionalmente incompleta la demostración de una conjetura y, por otra parte, desviarse para considerar otra situación problema que conducirá a obtener los elementos necesarios que permitirán completar la demostración inicial. Tratamos de vincular la coherencia local a una más global. Consideramos que esta forma de gestionar el contenido es uno de los elementos de la innovación que desafían de manera más fuerte la tradición de la matemática escolar que propende hacia la presentación de los contenidos organizada en términos de relaciones establecidas desde el saber matemático y no desde el punto de vista de la construcción del conocimiento de los estudiantes.

Interacción social en la clase

Formular una conjetura o proferir una idea de la que se está más o menos convencido no es suficiente para emprender la construcción de la respectiva justificación, y menos aun cuidando que esta se haga dentro de un determinado sistema teórico. Por ello, la interacción social en el aula entre profesor y estudiantes y entre estudiantes es un factor imprescindible del aprender a demostrar. Esto porque es en la comunicación de ideas, en el análisis crítico de estas, en la argumentación colectiva donde surgen los elementos teóricos necesarios para construir una demostración, se comprende el papel que juegan dichos elementos en el proceso y también se comprenden las conexiones entre ellos para ligarlos en una justificación. El papel del profesor como guía de la interacción es fundamental pues es él —como experto de la comunidad de la clase— quien puede dirigir el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propios de la práctica de la demostración en matemáticas. Además cumple un papel esencial en el establecimiento y utilización de las normas que rigen el funcionamiento de la demostración y del sistema teórico. A través de la interacción social, los estudiantes pueden cambiar la tradicional relación que tienen con el conocimiento, con su profesor y con sus compañeros. Con respecto al conocimiento, pueden llegar a comprender que más que conocer la estructura de un sistema teórico, tienen que vivir la experiencia de conformarlo en colaboración con los demás miembros de la comunidad. Con respecto al profesor, pueden dejar de considerarlo como la autoridad en la clase y la única persona que tiene el saber, y en cambio pueden llegar a verlo como el miembro experto de la comunidad que guía el proceso. Con respecto a los otros estudiantes, pueden llegar a establecer un compromiso mutuo de trabajar en pro de la construcción de un sistema teórico.

Al iniciar el curso, el profesor hace explícitas las normas sociales y sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) relacionadas con la exigencia de justificar todas las ideas, escuchar la argumentación del otro y producir justificaciones de acuerdo con parámetros establecidos. También controla de manera sistemática el cumplimiento de tales normas. Gradualmente, a medida que avanza el desarrollo del curso, transfiere la responsabilidad a los estudiantes quienes comienzan a sentirse cómodos haciendo demostraciones y controlando el cumplimiento de las normas planteadas. Podemos mencionar interacciones de tres tipos a través de las cuales los estudiantes participan en la actividad matemática que tiene lugar en la clase.

Trabajo de los estudiantes. De manera individual o por parejas y pudiendo disponer de la geometría dinámica, los estudiantes abordan, durante el tiempo asignado para ello, las tareas propuestas por el profesor. Durante tal trabajo, el profesor pasa por los puestos con el propósito de recoger información sobre lo que están haciendo los estudiantes y los resultados a los que están llegando, información que luego utiliza en la puesta en común para animar a los estudiantes que no se atreven por su cuenta a exponer públicamente sus conjeturas o propuestas. Muy ocasionalmente entra en conversación con un estudiante específico y, por lo general, no es para dar explicaciones relacionadas con el contenido geométrico implicado en la solución de la tarea. El involucrarse en la solución de estas tareas, por lo general, pone a los estudiantes en capacidad de hablar sobre el tema aun si no llegan a enunciar una conjetura que se pueda aceptar o si no alcanzan a elaborar la demostración. En Perry, Samper y Camargo (2006) se presenta un recuento del trabajo colaborativo de tres estudiantes para resolver una situación problema; consideramos que tal caso ilustra un tipo de interacción en el que la producción del grupo no es la reunión de las contribuciones de sus integrantes, surgidas de monólogos en voz alta, sino más bien la construcción conjunta a través del diálogo de ellos; en ese sentido, el caso representa bien una característica de la interacción social que consideramos clave para el aprendizaje de la demostración.

Conversación instruccional. Es a través de este tipo de interacción como se va construyendo colectivamente el contenido geométrico que se trata en la clase. Después del trabajo de los estudiantes, el profesor gestiona la socialización de las producciones de éstos con miras a guiar a la comunidad en la construcción de significados compartidos y en la organización colectiva de las ideas que encontraron para producir las demostraciones. Cuando los estudiantes han tenido que producir conjeturas, en el proceso de analizarlas el profesor juega un papel clave en la determinación de la secuencia en que estas se revisan, teniendo en cuenta dos criterios: el examen de una conjetura no debe quitarle sentido al examen de otra, y tal examen debe respetar la organización teórica que permite construir sobre unos elementos para obtener otros.

A través de una *conversación instruccional* del profesor con uno o varios estudiantes sobre las producciones presentadas, se favorece la construcción colectiva de significados que tiene lugar cuando los miembros más experimentados de una cultura instruyen a los menos experimentados (Tharp y Gallimore, 1988, citado en Forman, 1996). En esta conversación se llevan a cabo acciones como responder preguntas que ayudan a ganar familiaridad y comprensión de los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, revisar la formulación misma de las conjeturas, establecer la definición de un objeto que interviene en la situación, etc.

Conversación matemática. En el marco de una *conversación matemática*, considerada como el diálogo entre el profesor y los estudiantes (o entre los estudiantes) sobre un tema matemático específico, las ideas se comunican, se comentan y se critican. No nos referimos a esta interacción como una discusión matemática porque ello implica que los estudiantes tienen una posición definida con respecto a una idea matemática y que pueden confrontarla con otras; en nuestro caso, esto no ocurre pues para los estudiantes de ese nivel, esta tarea es algo compleja. Consideramos que en una interacción como esta, la participación estudiantil se hace más autónoma, auténtica y relevante, lo que permite que el profesor actúe como un miembro más de la comunidad en aspectos relacionados con contenido matemático. En esta conversación, la responsabilidad de culminar con éxito una tarea recae en toda la comunidad. El papel del profesor se enfoca en administrar las propuestas de los estudiantes, controlar el uso correcto de los elementos del sistema teórico, e institucionalizar el conocimiento. En resumen, el profesor es el director de una orquesta en la que cada miembro contribuye con sus conocimientos y el maestro armoniza sus ideas, dando la entrada en el momento preciso para producir una gran obra: la organización de unos elementos que surgen y que van conformando un sistema teórico.

El papel de la geometría dinámica

El tercer elemento de la aproximación metodológica a la enseñanza de la demostración, se enfoca en la importancia de la geometría dinámica como herramienta de mediación en el proceso de aprender a demostrar. Siguiendo a muchos investigadores en el campo (e. g., Furinghetti y Paola, 2003; Hanna, 2000; Laborde, 2000; Mariotti, 2000; Christou, Mousoulides, Pittalis y Pita-Pantazi, 2004), suponemos que si vinculamos las tareas de construcción geométrica con las prácticas de justificar y organizar sistemas teóricos, incrementamos la posibilidad de aprender a demostrar.

Hemos podido reconocer que el uso de la geometría dinámica puede mediar en varios asuntos que son de importancia fundamental en el aprendizaje de la demostración (Camargo, Samper y Perry, 2006, 2007; Perry, Samper y Camargo, 2006). Dado que los principios presentes en el diseño del programa Cabri se corresponden esencialmente con los postulados de la geometría euclidiana, es premisa subyacente tras la innovación que por medio de la geometría dinámica es posible establecer conjeturas, sobre propiedades invariantes bajo el arrastre, con un alto grado de probabilidad de que ellas sean verdaderas en el sistema teórico en construcción. A continuación puntualizamos sucintamente el papel que desempeña la geometría dinámica en la clase.

Entender que el cumplimiento de la tesis de un enunciado "si… entonces…" depende de todas las condiciones de la hipótesis. La mayoría de los postulados, definiciones y teoremas en geometría se enuncian usando la estructura lógica de una proposición condicional, sea esta explícita o implícita en la respectiva formulación. Además, dos de las estructuras básicas para establecer validez matemática son los denominados Modus Ponendo Ponens y Modus Tollendo Tollens, esquemas que hacen uso de la condicional. Una utilización apropiada de las definiciones, postulados y teoremas en el contexto de la actividad demostrativa requiere reconocer en su formulación la estructura subyacente del enunciado condicional y comprenderlo como un objeto matemático cuyas propiedades quedan bien definidas desde la lógica matemática. Para captar mejor las condiciones exigidas en una definición o un teorema, el uso de la geometría dinámica se constituye en un apoyo para estudiar las consecuencias de eliminar parte de las condiciones de la hipótesis del teorema, o alguna de las propiedades de la definición, y de esta manera comprender el papel que cumple cada una de ellas; así, puede decidirse si son imprescindibles. En el análisis de situaciones de este tipo, es innegable que la posibilidad de hacer de manera rápida y precisa diversas construcciones permite ilustrar cómo la ausencia de alguna condición distorsiona los resultados que se esperan.

Propiciar la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos que llevan a la demostración de teoremas. La facilidad de hacer construcciones auxiliares de diversa naturaleza y eliminarlas si no dan los frutos esperados es uno de los factores que hacen de los programas de geometría dinámica una herramienta poderosa en la búsqueda de una justificación. La visualización de una representación fiel a las condiciones establecidas en la situación permite evocar elementos del sistema teórico que posiblemente resulten útiles en una demostración.

Crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema teórico. Este es un uso de la geometría dinámica muy importante para hacer posible la participación autónoma y relevante de los estudiantes en la actividad demostrativa que tiene lugar en la clase. A partir de una situación problema abierta, que favorece la exploración de propiedades geométricas, los estudiantes producen un conjunto diverso de conjeturas que, con la guía del profesor, se van organizando dentro del sistema teórico.

Corroborar las conjeturas formuladas por otros. Cuando los estudiantes exploran situaciones problema abiertas y enuncian sus conjeturas, una estrategia que puede usar el profesor para determinar si una conjetura formulada se corresponde con las condiciones de dependencia creadas, al hacer la construcción, es solicitar a los estudiantes un recuento del procedimiento de construcción, pues en ocasiones los estudiantes no perciben las condiciones reales “que han dado” a su construcción y por tanto, la hipótesis de la conjetura formulada no es correcta. En estas ocasiones, se busca que los estudiantes realicen la construcción propuesta en una conjetura para analizar la validez de esta. La opción Revisar Construcción que tienen incorporada los programas de geometría dinámica es muy útil en este proceso.

Entender el desarrollo lógico de una demostración. En aquellas situaciones teóricas que buscan establecer la existencia de un objeto geométrico con propiedades especiales, el proceso necesario, desde la teoría, para desarrollar una demostración básicamente coincide con la organización requerida para realizar la construcción en el ambiente de la geometría dinámica.

Descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras, que se podrían involucrar en la demostración. Cuando se enuncia una situación geométrica sin la correspondiente representación gráfica, el hecho de poder realizarla con geometría dinámica, con las propiedades que exigen las condiciones establecidas en la hipótesis, da lugar a que la exploración de la figura refleje confiablemente las relaciones geométricas que existen entre las partes constituyentes de la figura. Tales relaciones pueden evocar elementos teóricos valiosos para la demostración.

Evaluación

En esta innovación es claro que la evaluación realizada a los estudiantes cumple dos funciones diferentes: por un lado, da información sobre los resultados del aprendizaje, y, por otro lado, hace parte del proceso mismo de aprendizaje. Relativas a la primera función, se hacen en el curso cuatro tipos de tareas:

Comprobaciones periódicas. Se realizan cinco en total, una cada tres semanas. Los estudiantes de manera individual y ocasionalmente usando la geometría dinámica deben responder a dos o tres preguntas. Se busca evaluar el grado de conocimiento de la teoría y el avance en la competencia demostrativa. Aun cuando las discusiones en clase tienden a tener un toque de informalidad, en las comprobaciones, según lo solicitado, los estudiantes deben realizar o bien un desarrollo cuidadoso y completo, justificando con elementos teóricos cada paso de la demostración, o bien presentar un plan que incluya los pasos importantes para desarrollar la demostración.

Tareas para realizar fuera del aula. En la última sesión semanal, el profesor asigna a los estudiantes un conjunto de tres o cuatro problemas relacionados con el tema que se trató durante la semana. Son problemas diseñados por el profesor o tomados del libro de Moise y Downs; con frecuencia se incluyen preguntas surgidas durante la semana que quedaron sin responder o sin desarrollar en detalle. Los estudiantes, en grupos de tres constituidos desde el comienzo del curso, deben entregar por escrito el desarrollo de la tarea en la primera sesión de la siguiente semana. Durante la semana, el profesor dedica tiempo a comentar el trabajo realizado destacando errores y aciertos.

Cuaderno comunal de notas de clase. La toma de notas de lo que se trabaja en el aula es una tarea que se distribuye entre los estudiantes, organizados en grupos de tres, y en la que también participa el profesor. A lo largo del semestre, en cuatro o cinco oportunidades, cada grupo tiene la responsabilidad de hacer un informe escrito de lo que se trató en sendas sesiones específicas. El informe debe incluir no solo el problema en torno al cual giró el desarrollo temático de la clase, los elementos que se introducen al sistema teórico y las demostraciones realizadas sino también las diferentes propuestas hechas por los estudiantes para construir las justificaciones, indicando cuáles de ellas se aceptaron, cuáles no y por qué no se aceptaron; así mismo deben quedar registradas las actuaciones problemáticas que el profesor destacó y el tratamiento apropiado sugerido por el profesor. Finalmente, se debe mencionar cuál fue el uso dado a la geometría dinámica. Una vez que el grupo entrega sus notas de clase al profesor, este hace los ajustes que considera necesarios produciendo así la versión definitiva del informe, y la envía por correo electrónico a todos los estudiantes.

Examen final. A las distintas secciones del curso se les pone el mismo examen final, diseñado con la participación de los profesores que las hayan tenido a su cargo durante el semestre; de esa manera, el conocimiento y las competencias que se sondean son más bien generales.

Con respecto a la segunda función, todas las tareas que realizan los estudiantes reciben de manera oportuna una realimentación en la que se destacan, por un lado, los errores cometidos por los estudiantes y, por otro, soluciones interesantes. Con el análisis de las ideas erróneas de los estudiantes se busca determinar qué elementos de estas son útiles para construir a partir de ellos algún hecho geométrico verdadero o rescatar aspectos, ya sea en las construcciones o en el análisis de las situaciones, que han pasado inadvertidos por otros miembros de la comunidad. Es por ello que toda idea que profiere el estudiante, sea equivocada o no, merece un reconocimiento.

Balance de la experiencia de innovación

Todo proceso de innovación requiere una evaluación. Hemos emprendido la tarea de determinar las posibilidades reales de éxito que tiene la aproximación metodológica configurada durante nuestra innovación para favorecer el aprendizaje de la demostración. Hemos realizado dos estudios sobre la actividad demostrativa de un grupo de tres estudiantes a quienes se les pidió resolver un problema sin la intervención del profesor (Perry, Molina, Camargo, Samper, 2011; Molina, Samper, Perry, Camargo, 2011). Los estudios se realizaron teniendo en cuenta nuestra concepción de lo que es aprender a demostrar y la relación que establecemos entre esta y el modelo de comportamiento racional de Habermas tal como lo adaptan Morselli y Boero (2009). En el primero, nos concentramos en el proceso de argumentación desarrollado por los estudiantes y en el segundo en el proceso de generación y desarrollo de ideas matemáticas subyacentes a la producción de un teorema. Dichos análisis nos permiten asegurar que, en general, se evidencia que los estudiantes tienen habilidad en el manejo de los aspectos comunicativo, teleológico y epistémico del comportamiento racional y que, por tanto, están aprendiendo a demostrar.

Referencias

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. F. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, 27 (especial), 371-383.

Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2007). Cabri's role in the task of proving within the activity of building part of an axiomatic system. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 571-580). Larnaca, Chipre: Departamento de Educación, Universidad de Chipre. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/927/

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M. y Pita-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 339-352.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 85-109.

Forman, E. A. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: Implications of sociocultural theory for educational reform. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 115-130). New Jersey, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Furinghetti, F. y Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. En N. Pateman, B. Dougherty, J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference held jointly with the 25th PME-NA Conference* (vol. 2, pp. 397-404). Honolulu, HI, EUA: Escuela de Educación, Universidad de Hawái.

Godino, J. y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15* (3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 5-23.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 151-161.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración*, *29*(1), 73-96.

Morselli, F. y Boero, P. (2009). Proving as a rational behaviour: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon, Francia: Institut National de Recherche Pédagogique. Tomado de http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf

Perry, P., Samper, C. y Camargo, L. (2006, junio). *Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave*. Ponencia presentada en III Congreso Iberoamericano de Cabri, Bogotá, Colombia. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/929/

Perry, P., Molina, Ó., Camargo, L. y Samper, C. (2011). Analyzing the proving activity of a group of three students. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 151-160). Rzeszów, Polonia: Universidad de Rzeszów. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2093/

Sfard, A. (2008). Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas. En G. Castrillón (Ed.), *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (Patricia Perry y Luisa Andrade, Trs.). Santiago de Cali, Colombia: Programa Editorial Universidad del Valle.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and authonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Capítulo 2

El enunciado condicional:

actuaciones problemáticas y diagramas para abordarlas

En este capítulo exponemos algunas actuaciones problemáticas relacionadas con la comprensión del enunciado condicional, que hemos identificado en los estudiantes y que definitivamente afectan el aprendizaje de la demostración. Presentamos también una breve descripción de estrategias didácticas que hemos diseñado para modificar la actuación de los estudiantes. Denotamos como *actuaciones problemáticas* aquellas acciones que alejan al estudiante de la comprensión que la comunidad matemática tiene de un objeto matemático. El uso de la palabra "problemática" no hace referencia a problemas en el desarrollo cognitivo de los estudiantes; tan solo es una forma de indicar que estamos atendiendo aspectos del comportamiento del estudiante que deben cambiar si queremos que ellos puedan tener una participación autónoma y relevante en la actividad demostrativa.

Actuaciones problemáticas con el enunciado condicional

El enunciado condicional tal como se usa en matemáticas es un objeto de naturaleza compleja cuyo aprendizaje parece no darse *per se* con la maduración intelectual del sujeto o con su uso en la lógica cotidiana, también denominada lógica natural. Duval (1991) señala que aunque la lógica cotidiana hace uso de formas lingüísticas y conectivas proposicionales propias de la lógica matemática, la condicional, en el uso cotidiano, no se considera como un enunciado compuesto de dos proposiciones cuya formulación o uso exige tener la seguridad de que las condiciones suficientes, expresadas en el antecedente, existen para asegurar como resultado necesario de ellas el consecuente, operación imprescindible en la formulación de un argumento deductivo. Es decir, en el manejo de un enunciado condicional en la lógica natural no se realiza operación alguna para verificar si se tienen las condiciones suficientes establecidas en el antecedente de la condicional para así poder concluir el consecuente. Según el investigador, la manera de operar en la argumentación cotidiana lleva a no discriminar el estatus operatorio —la función— de cada proposición involucrada en un paso de deducción.

Asociado al problema mencionado por Duval (1991), pero sin enfocarse el momento de la formulación de condicionales sino en el de su uso, Laudien (1999) encontró evidencia empírica para apoyar la tesis de que los estudiantes malinterpretan el enunciado condicional (si-entonces) entendiéndolo como un enunciado bicondicional (si y solo si). Explicamos este asunto así: en el uso cotidiano, la proposición condicional está compuesta por dos proposiciones que, tácita o explícitamente, se consideran verdaderas; esto lleva a que tanto la condicional como la recíproca de esta se tomen como afirmaciones verdaderas. Por ejemplo, si un padre establece para su hijo la siguiente regla: "si sacas promedio por encima de 39, te regalo un teléfono celular", la interpretación que usualmente se asigna a este enunciado lleva a concluir que si el padre le regaló un celular, el promedio del estudiante fue superior a 39 y si el promedio no fue superior a 39, el padre no le regaló un celular. Es decir, se usan la condicional y su recíproca como equivalentes.

Esa idea limitada de la condicional es problemática a la hora de usarla en deducciones, pues conduce a esquemas de razonamiento no válidos que Laudien denomina "negación del antecedente" y "afirmación del consecuente". El primero se refiere a la situación en que, ante la presentación de una condicional ($p \longrightarrow q$) y la negación del antecedente ($\neg p$), los estudiantes concluyen la negación del consecuente ($\neg q$), en lugar de reconocer que los datos dados no permiten decidir, desde la lógica matemática, si un objeto tiene la propiedad cuando no tiene la propiedad . Para seguir con el ejemplo, si el hijo obtiene un promedio de 35, el esquema de razonamiento que obedece a interpretar como bicondicional la regla enunciada por el padre, lleva a las personas a concluir que este no le regalará un celular. Pero, si se analiza la situación desde la matemática, revisando la tabla de verdad de la condicional, habría que reconocer que es imposible determinar lo que hará el padre. Debido a la interpretación dada por los estudiantes es difícil que ellos comprendan que en la matemática, dadas una condicional y la negación de su antecedente, es igualmente posible que se dé el consecuente como que no se dé (la situación $p \longrightarrow q$ verdadero y p falso se da tanto cuando q es verdadero como cuando es falso). El segundo esquema de razonamiento no válido, ocurre cuando, frente a una condicional ($p \longrightarrow q$) y la afirmación del consecuente (q), los estudiantes concluyen que es verdadero, de nuevo desconociendo la imposibilidad de determinar si el antecedente se da o no. En el ejemplo, la interpretación de la regla establecida por el padre lleva a que los estudiantes afirmen que debido a que el padre le regaló un celular a su hijo, el promedio de este tuvo que haber sido superior a 39. De nuevo, si se trata de una condicional analizada según la tabla de verdad, es imposible saber si el antecedente fue verdadero o no. En resumen, el razonamiento no válido, en ambos casos, surge porque en el imaginario de los estudiantes no existe la idea de que la combinación antecedente falso y consecuente verdadero determina una condicional verdadera, desde el punto de vista matemático. Las respuestas de los estudiantes, producto de los esquemas de razonamiento no válidos, serían adecuadas para las preguntas hechas si se tuviera un enunciado bicondicional.

En busca de una explicación en términos del efecto de la enseñanza, y no solamente de la asociación con la lógica cotidiana, Hoyles y Küchemann (2002), destacan que, en lo que concierne al desarrollo del razonamiento deductivo, las experiencias escolares de los estudiantes se reducen usualmente a la interpretación de la condicional lógica como una proposición hipotética, cuyo enunciado es de la forma "Si , " y que generalmente se refiere al caso en el que el antecedente es verdadero. Deloustal–Jorrand (2002) denomina esta concepción de condicional como concepción causal de la condicional, y menciona que tal interpretación induce a los estudiantes a centrarse en el carácter temporal del fenómeno al que refiere la condicional y no en el efecto que el valor de verdad de las proposiciones y tiene sobre el valor de verdad de la expresión condicional . En diferentes grupos de estudiantes que han tomado nuestro curso Geometría Plana*,* hemos podido evidenciar diversos tipos de actuaciones problemáticas relacionadas con la formulación de enunciados condicionales. Con frecuencia encontramos que, contrario a nuestras expectativas, la construcción hecha en geometría dinámica y la exploración realizada no conducen a la formulación de una condicional que asocie apropiadamente el antecedente de esta con las propiedades que se usaron en la construcción o se impusieron por arrastre de los objetos libres, y el consecuente de la condicional con las propiedades que se "descubren" en la exploración.

Las actuaciones problemáticas al respecto consisten en formular: (a) una condicional en la que no se menciona, en la hipótesis o en la tesis, las condiciones establecidas en el enunciado de la situación propuesta o las que se generan por la construcción; (b) una condicional cuyo antecedente está compuesto por las relaciones que se obtuvieron y no por las dadas o las construidas, es decir, la conjetura enuncia la proposición recíproca de la condicional modelada en la geometría dinámica; (c) una condicional que generaliza una propiedad, a partir de un caso particular que se evidencia en la construcción hecha; (d) una condicional que no incluye todas las condiciones que se evidencian en la construcción, desconociendo así que al representar una situación general, se espera que estas se reporten como resultado.

A partir del estudio cuidadoso de estas dificultades hemos identificado más puntualmente los asuntos problemáticos que se evidencian en el trabajo de los estudiantes. A continuación definimos cada asunto problemático y presentamos las estrategias que hemos puesto en juego para atender dichos asuntos.

Actuación problemática 1: concepción restringida de una condicional

Se concibe la condicional de manera restringida, considerando que esta se refiere únicamente a casos en los que el antecedente es verdadero. Esta actuación problemática está relacionada con el significado de una afirmación condicional desde el punto de vista de la lógica. Aunque este asunto problemático no se evidencia con frecuencia en el curso pues no es usual tener que examinar la validez de una afirmación en la cual es posible que el antecedente sea falso, (especialmente porque en geometría la mayoría de los problemas propuestos establecen como verdaderas todas las condiciones dadas), es importante estar pendientes de situaciones en las que se puede tratar este asunto con los estudiantes. Por ejemplo, para entender que un conjunto de puntos unitario es convexo se requiere hacer un análisis de la definición desde esta óptica. La definición establece como conjunto de puntos convexo aquel que satisface la siguiente condicional: si dos puntos A y B pertenecen al conjunto X entonces el $\overline{AB} \subset X$. Así, en este caso, el antecedente es falso (pues no se tiene un conjunto con al menos dos puntos) y por ello la condicional es verdadera; por tanto, el conjunto es convexo.

Actuación problemática 2: confusión acerca de la relación entre una condicional y las afirmaciones condicionales asociadas

La condicional se considera como un todo conformado por dos proposiciones cuya relación, si se considera, es vaga, difusa. Es decir, los estudiantes no están conscientes de la relación de dependencia o inclusión que ahí se expresa. Esto lleva a tratar las proposiciones o sus negaciones, involucradas en la condicional, como si su posición en esta pudiera ser intercambiada sin afectar el correspondiente valor de verdad y su respectivo significado. Por lo tanto, los estudiantes usan la recíproca como si fuera equivalente a la condicional o la inversa como la negación de esta. Así por ejemplo, se considera que la regla “si sacas promedio por encima de 39, te regalo un teléfono celular” es equivalente a “si te regalo un teléfono celular entonces sacas promedio por encima de 39” (recíproca) o “si no sacas promedio por encima de 39, no te regalo un teléfono celular” (inversa) equivalente a “si no te regalo un teléfono celular entonces no sacas promedio por encima de

39” (contrarrecíproca). Este asunto problemático surge con frecuencia cuando se hace demostración indirecta.

Actuación problemática 3: formulación incorrecta del antecedente y el consecuente de un enunciado condicional

Se formula un enunciado condicional que no incluye la información significativa y relevante para reportar una propiedad. Esta actuación surge cuando se expresa en el formato si-entonces una condicional dada en otros términos o cuando se reescribe para hacerla operativa para su demostración. Los estudiantes pueden no incluir una condición que debería hacer parte del antecedente aun si esta se da explícitamente. Por ejemplo, puede ocurrir que la afirmación “Si un triángulo es isósceles entonces las alturas a los lados congruentes son congruentes” que debería expresarse como: “Si un ΔABC es isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{CX}$ y $\overline{BY}$ alturas, entonces $\overline{CX} \cong \overline{BY}$”, los estudiantes la escriban así: “Si un ΔABC es isósceles con $\overline{CX} \cong \overline{BY}$”, entonces $\overline{CX}$ y $\overline{BY}$ son alturas y son congruentes”. Es decir, los estudiantes usualmente colocan la última propiedad del antecedente como parte del consecuente.

Actuación problemática 4: inconsistencia entre el proceso de construcción con geometría dinámica y la conjetura formulada

La relación de dependencia que se expresa en la condicional es incorrecta o incompleta. Esta actuación se da cuando se enuncian conjeturas obtenidas de exploraciones con geometría dinámica. La conjetura formulada puede no ser una generalización verdadera, inducida a partir de un caso particular visto en la exploración, o puede ser una afirmación en la cual se hace caso omiso de alguna propiedad construida o resultante en la figura. La conjetura es inconsistente con el proceso de construcción por alguna de las siguientes razones: en el antecedente se mencionan propiedades que surgieron de la construcción, no se incluyen todas las condiciones impuestas en el proceso o algunas de las propiedades construidas se mencionan en el consecuente, o la conjetura no reporta todas las propiedades invariantes que claramente conlleva la construcción. Por ejemplo, después de construir un rectángulo y medir las diagonales y los segmentos determinados por el punto de intersección de estas, un estudiante formula la conjetura "Si un $\square ABCD$ es un rectángulo y las diagonales son congruentes entonces las diagonales se bisecan"; sin embargo, como el estudiante construyó el rectángulo y luego midió las diagonales y los segmentos determinados por el punto de intersección de estas, las dos propiedades de las diagonales deberían ser parte del consecuente de la conjetura.

Actuación problemática 5: uso de un postulado, teorema o definición sin tener las condiciones que los respectivos antecedentes mencionan

Esta actuación problemática consistente en obtener una conclusión a partir de un enunciado condicional sin examinar si este es aplicable (es decir, sin examinar si se tienen todas las condiciones impuestas en el antecedente de la condicional) afecta la producción de argumentos deductivos. Por ejemplo, un estudiante demuestra que dos lados correspondientes de dos triángulos son congruentes y en el siguiente paso, concluye que los triángulos son congruentes aludiendo al criterio hipotenusa-cateto. La actuación problemática reside en haber aplicado el criterio de congruencia triangular hipotenusa-cateto sin haber determinado previamente que los triángulos en cuestión eran rectángulos.

Estrategias didácticas para atender los asuntos problemáticos relativos a la condicional

Hemos diseñado estrategias didácticas que aplicadas sistemáticamente en el curso pueden ayudar a los estudiantes a superar las actuaciones problemáticas. Para el diseño de las estrategias tuvimos en cuenta la necesidad de:

1. Aclarar la estructura lógica de la condicional y el papel que juega cada componente de una proposición de la forma si-entonces;
2. Dar significado a la condicional a partir del establecimiento de relaciones de dependencia entre propiedades geométricas;
3. Diferenciar entre una proposición condicional, su inversa, su recíproca y su contrarrecíproca;

4. Enfatizar en acciones de carácter heurístico asociadas al proceso de la actividad demostrativa para favorecer la construcción de conjeturas de la forma si-entonces que dan significado a la condicional*;*
5. Identificar el papel que juega la condicional en la construcción de una justificación matemática y en el mecanismo para producir una cadena deductiva;
6. Establecer normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) que incentiven a los estudiantes a hacer explícitos sus razonamientos y a construir demostraciones en forma colectiva.

Un denominador común de todas las estrategias es el análisis de afirmaciones condicionales incorrectas en el marco de las conversaciones matemáticas (ver capítulo anterior). Creemos que estos actos socialmente compartidos influyen de manera considerable en el aprendizaje de los estudiantes. Es usual que no todos los estudiantes interpreten información visual o textual de la misma forma, y por medio de la interacción generada, sus diferentes interpretaciones se complementan o se modifican. Usualmente, es necesario acudir a la geometría dinámica para construir las condiciones exigidas en el antecedente de una condicional propuesta, examinar la figura resultante y verificar posibles inconsistencias entre lo que se propone como consecuente y lo que se puede proponer realmente. La realimentación dada por la geometría dinámica está en conformidad con el sistema teórico que se consolida colectivamente y se convierte en uno de los factores que viabiliza la participación autónoma y relevante de los estudiantes en la actividad demostrativa. Las Estrategias A y C están relacionadas con situaciones específicas: la Estrategia A, con la situación en la que una condicional no está dada en el formato si-entonces; la Estrategia C, con situaciones que requieren una exploración mediada por un artefacto de construcción para establecer un hecho geométrico. Las Estrategias B y D están ligadas al proceso deductivo seguido para obtener una conclusión válida, ya sea que se comience con un postulado o un teorema conocido o con una afirmación que los estudiantes consideran es equivalente a éstos, tal como el enunciado converso o el inverso.

Estrategia didáctica A

El propósito principal de la Estrategia A es proveer mecanismos para que los estudiantes comprendan la estructura de un enunciado condicional, y puedan hacer de la información –obtenida al resolver un problema o al reformular un enunciado en la forma si-entonces– una fuente fiable para la demostración. Esperamos que los estudiantes puedan superar las actuaciones problemáticas 3 y 4. La estrategia consiste en las siguientes acciones: **a.** solicitar la identificación completa de la hipótesis y la tesis de los enunciados condicionales y su reformulación en el formato si-entonces, si es pertinente; **b.** proponer la reformulación de la afirmación en términos específicos, usando los nombres dados a los objetos de las figuras que modelan la afirmación. El ejercicio de identificar las proposiciones que conforman la condicional y colocarlas en un patrón lingüístico específico ayuda a reconocer que la condicional involucra dos proposiciones que no se pueden intercambiar, enfatizando sus papeles específicos: la hipótesis contiene la información aceptada como verdadera y la tesis es aquello que debe establecerse como verdadero. Se busca que determinen completamente la información que contiene la condicional. Las razones por las cuales se solicita reformular la condicional son: facilitar la comunicación entre estudiantes, contribuir a la interpretación de la afirmación y aclarar la relación lógica entre hipótesis y tesis o entre antecedente y consecuente. El uso de nombres específicos ayuda a que los estudiantes representen la situación, y por medio de ella: identifiquen explícitamente las condiciones expresadas en la hipótesis, compartan lo que hicieron para construir y explorar la situación, y expresen lo que piensan y ven en la representación.

Estrategia didáctica B

La Estrategia B se enfoca, en reconocer, por una parte, la diferencia entre una condicional dada y las condicionales, que denominamos aquí, asociadas a la original, a saber: recíproca, inversa y contrarrecíproca, y por otra, las relaciones entre ellas. Se usa en el contexto de construcción de demostraciones. Esperamos que los estudiantes tengan elementos para darse cuenta por qué el uso de proposiciones asociadas con la condicional no siempre lleva a un argumento válido. Es decir, esta estrategia fue diseñada para dirigirse a las actuaciones problemáticas 1 y 2. Las acciones de la Estrategia B son: **a.** examinar si el uso de una condicional asociada provee una argumento válido; **b.** explicitar el significado de una condicional y sus condicionales asociadas; **c.** proponer el uso de la simbolización lógica de las proposiciones involucradas en una argumentación para: comparar el esquema de razonamiento representado con otros esquemas de razonamiento válidos; analizar la tabla de verdad; identificar y analizar cualquier discrepancia entre los argumentos de los estudiantes, (tales como la negación del antecedente o la afirmación del consecuente), con los esquemas de razonamiento válidos. Por ejemplo, cuando el argumento de un estudiante corresponde al esquema de afirmación del consecuente, se invita a los estudiantes a simbolizar las afirmaciones usadas, representar el esquema de razonamiento y destacar los casos de consecuente verdadero y condicional verdadera, para mirar cómo corresponden tanto a un antecedente verdadero como a uno falso.

Estrategia didáctica C

En el contexto de las exploraciones realizadas con la geometría dinámica, es norma sociomatemática que los estudiantes formulen sus descubrimientos como proposiciones en el formato si-entonces. Ahí no es infrecuente encontrar producciones de los estudiantes en las que se evidencia que la comprensión de la condicional es limitada o está distorsionada. La Estrategia C se diseñó para apoyar la comprensión de la estructura de la condicional, específicamente para resaltar las dos partes que la componen y la relación entre ellas, recurriendo a las relaciones de dependencia entre propiedades que se pueden visualizar en las construcciones geométricas dinámicas.[2] Se propuso para ayudar a los estudiantes a superar la actuación problemática 4. Las acciones de la Estrategia C son: **a.** solicitar una descripción de todas las acciones realizadas durante el proceso de construcción y exploración con geometría dinámica; **b.** identificar las propiedades construidas y las que resultan. En conversaciones matemáticas, los estudiantes comparten sus experiencias, identifican errores, comprenden por qué lo son, descubren hechos geométricos, y articulan colectivamente al sistema teórico la proposición que será un teorema.

Estrategia didáctica D

Esta estrategia está centrada en el proceso deductivo necesario para establecer pasos de una demostración. Por lo tanto, está relacionada con el uso de condicionales y la actuación problemática 5. Las siguientes son las acciones incluidas en la Estrategia D: **a.** solicitar la identificación de definiciones, postulados y teoremas que tengan como

2 Esta estrategia se apoya en la concepción causal de la condicional que, tal como lo mencionamos anteriormente, no es la que se usa en matemáticas pues excluye los casos en los que el antecedente de la condicional es falso. Aun así, consideramos útil la estrategia pero somos conscientes de la necesidad de contrarrestar esta limitación a través de otras estrategias en las que subyazga la concepción matemática.

conclusión una proposición que corresponda a la afirmación que debe demostrarse o que tenga una relación muy cercana a esta; es decir, se busca que los estudiantes realicen, colectivamente, un proceso abductivo y encuentren, por esa vía, una posible hipótesis para un hecho geométrico cuya conclusión se conoce; luego, se revisa cada condición de la hipótesis escogida para hacer un contraste con la información que previamente se ha establecido en la demostración y se determina su utilidad para esta; **b.** analizar por qué se propone una construcción auxiliar en una demostración; para ello, se invita a los estudiantes a identificar la situación que se genera con la construcción auxiliar y los vínculos que se pueden establecer con la información que se tenía previamente para avanzar en la demostración; esta acción se enfoca en la posibilidad de introducir otros elementos teóricos que ayuden al progreso del proceso deductivo; **c.** solicitar el análisis de todas las condiciones de la hipótesis de un hecho geométrico que se quiere usar en un proceso deductivo para ver si todas ellas se han establecido previamente; **d.** exigir, en cada paso de la demostración, la identificación de los pasos previos de esta que se han usado para obtener la correspondiente conclusión, para así reafirmar que esta es consecuencia lógica de aquellos pasos. Las dos últimas acciones están centradas en asegurar el uso de esquemas de razonamiento válidos.

Una propuesta didáctica basada en el uso de diagramas

La gran cantidad de acciones que se tienen que articular para producir una demostración hace difícil la enseñanza y el aprendizaje de esta. Como se evidencia de la sección anterior, construir una demostración matemática requiere, entre otras acciones, identificar el antecedente y el consecuente de un enunciado condicional; reconocer todas las condiciones, incluso las tácitas, que hacen parte del antecedente de un teorema, un postulado o una definición para verificar su existencia ya sea como información dada o deducida y poder decidir si un cierto hecho se puede usar para deducir información; usar esquemas de deducción válida; asignar el estatus teórico correspondiente a una proposición que se usa como garantía de una conclusión; e identificar aquello que se debe demostrar.

La representación figural, el lenguaje natural y la notación especializada son registros regularmente usados en un curso de geometría para la construcción de demostraciones. Sin embargo, tal como lo señala Duval (2007), hacen falta otros registros para ayudar a los estudiantes a organizar sus ideas y a entender cómo las diferentes proposiciones entran en juego para formar una cadena deductiva que permita ir desde hechos conocidos a una conclusión.

Hemos diseñado, en calidad de propuesta didáctica, una secuencia de cinco tipos de diagramas que pueden constituirse en registros valiosos durante el proceso de aprendizaje. Cada tipo de diagrama es útil para una cierta clase de tareas de deducción, mediante las cuales se apoya el aprendizaje de la demostración. Los diferentes diagramas se usan como recursos para: indicar relaciones entre propiedades; diferenciar el antecedente y el consecuente de una proposición condicional; reconocer el estatus operativo de una proposición condicional; y enfatizar el estatus teórico de una proposición (su función específica como definición, postulado o teorema dentro del sistema teórico de referencia). Tenemos la tesis de que al usar estos diagramas, los estudiantes pueden entender por qué los teoremas, postulados y definiciones demuestran, en efecto, un enunciado, y pueden diferenciar entre el estatus de una proposición y el contenido de ella, elementos que Duval considera imprescindibles para aprender a demostrar: "Una demostración no puede operar como demostración hasta que haya una comprensión de la organización deductiva específica del discurso" (Duval, 2007, p. 159).

Reconocemos que el uso de cualquier herramienta en la construcción de conocimiento matemático influye sobre cómo se representan las ideas, cómo se usan en argumentos, se presentan y se defienden, y cómo se razona. Nuestros diagramas en sí mismos solo resaltan la estructura ternaria de las proposiciones; por tanto, es el profesor quien los hace significativos y eficaces.

Tipos de diagramas

Aunque en el curso Geometría Plana solo empleamos los dos últimos tipos de diagramas, presentamos los cinco por considerar que conocer la secuencia completa le permite al profesor remontar sus explicaciones a la conceptualización misma de los enunciados condicionales. Los primeros cuatro tipos de diagramas son herramientas principales en el curso Elementos de Geometría pues en ese curso se trabajan los aspectos mencionados en el Capítulo 1 (e. g., el significado de una definición, el proceso deductivo usando Modus Ponens) concentrándose más en ellos que en conformar un sistema teórico.

Diagrama para definiciones

El diagrama para definiciones (de ahora en adelante denominado diagrama-definición) está constituido por tres marcadores de posición. Los marcadores de posición tienen diferentes formas para indicar funciones diferentes de las proposiciones que los pueden sustituir. El que tiene forma de rombo se destina para el nombre del objeto cuya definición se está considerando, y sirve de puente entre las proposiciones que remplazan a los otros dos marcadores de posición, el de forma rectangular y el óvalo. La elección de la forma romboidea, que puede evocar con relativa facilidad dos flechas opuestas que apuntan a los dos conjuntos de información conectados por la definición, pretende poner de manifiesto la naturaleza bicondicional de una definición. Su colocación en un nivel diferente al del óvalo y el rectángulo indica que ha de recurrirse a la definición para poder obtener una conclusión. Los otros dos marcadores de posición se distinguen en su forma con el propósito de indicar que la información que cada uno de ellos refiere, aunque equivalente, juega una función diferente dentro de la deducción: condiciones que se tienen dadas o conclusión que se obtiene (Diagrama 6).

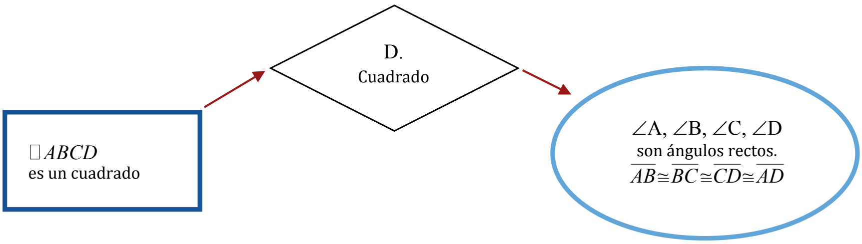


Diagrama 6: Ejemplo de diagrama-definición

Las tareas de deducción que promueven el uso de este tipo de diagrama varían según la información que se proporciona:

1. Dadas las propiedades definitorias de una figura o relación geométrica, información que se puede colocar en el rectángulo o el óvalo gracias a la naturaleza bicondicional de una definición, el estudiante debe identificar de qué objeto se trata y proporcionar el término con el que se le conoce, o sabiendo que una figura específica es representante de una cierta clase, el estudiante debe explicitar las propiedades definitorias de tal clase de figura.
2. Dado el término designante de una figura o relación en el marcador de posición destinado para ello, el estudiante debe particularizar el

objeto de definición en otro de los marcadores, y en el tercero debe particularizar las propiedades definitorias.

Se pueden proponer tareas de deducción durante los procesos de definición, encadenando una definición con otra, y usar los diagramas-definición para ilustrar el proceso de razonamiento correspondiente. Cada vez que en el curso se elabora o se analiza una definición, se puede emplear el diagrama-definición para ayudar a los estudiantes a establecer la información que se puede deducir de la definición misma; de esa manera es posible esperar que ellos recuerden el tipo de diagrama usado cuando incluyan una definición como garantía en una demostración y, por ende, le asignen correctamente su estatus teórico.

Diagrama para enunciados condicionales

Como ya lo mencionamos, en el lenguaje cotidiano existe la tendencia a tratar el enunciado condicional como si antecedente y consecuente fueran intercambiables, y por ello es frecuente confundirlo con su enunciado converso. Esta interpretación equivocada conduce a los estudiantes a acciones en las que los enunciados condicionales que producen o utilizan no están de acuerdo con conceptos o procedimientos matemáticos. Como ejemplos, señalamos al comienzo de este capítulo, los esquemas de razonamiento no lógico denominados afirmación del consecuente y negación del antecedente. El diagrama para enunciados condicionales que son teoremas o postulados (de ahora en adelante denominado diagrama-condicional) se usa para ayudar a los estudiantes en la comprensión de la estructura del enunciado condicional, para hacerla significativa al establecer la relación de dependencia entre las propiedades involucradas, y para que recuerden el enunciado en cuestión. Los componentes del diagrama son los mismos que los del diagrama-definición: tres marcadores de posición. El marcador de posición que tiene forma de flecha se destina para el nombre de un postulado o un teorema, el de forma rectangular para las condiciones suficientes en la relación de dependencia y el óvalo para las condiciones necesarias en la relación de dependencia. El marcador que conecta los dos conjuntos de información tiene forma de flecha que apunta a la proposición que se puede concluir para enfatizar la relación de dependencia referida por el enunciado condicional. Su ubicación en un nivel diferente al de los otros dos indica que ha de recurrirse al postulado o al teorema para poder obtener una conclusión (Diagrama 7).

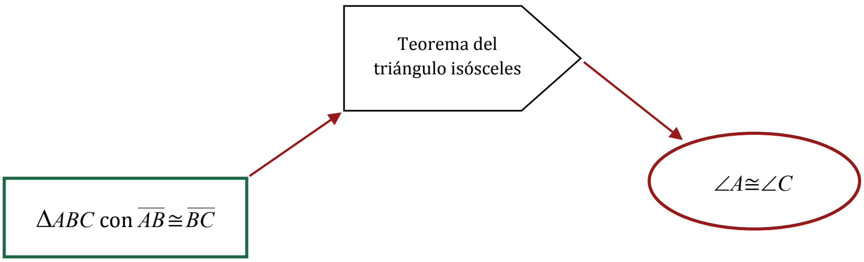


Diagrama 7: Ejemplo de diagrama-condicional

En tareas en las que se usa este diagrama, la premisa, la conclusión o la garantía (teorema o postulado), dadas como información, remplazan al marcador de posición correspondiente; no se incluye una representación figural que presente las condiciones del antecedente.

1. Dado el nombre de un teorema o postulado, el estudiante debe colocar el antecedente en el marcador de posición rectangular y el consecuente en el de forma ovalada. En la producción del estudiante se pueden encontrar indicios de si da por sentado que el enunciado condicional y su converso son equivalentes y la comprensión de la relación de dependencia en cuestión.
2. Dado el antecedente de un teorema o de un postulado (no designado aún), el estudiante debe identificar el teorema o postulado, escribiendo en la flecha el respectivo nombre, y completar el diagrama colocando en el óvalo la correspondiente consecuencia. La respuesta no siempre es única.
3. Dada la tesis de un teorema o postulado (no designado aún), el estudiante debe identificar todas las proposiciones condicionales teóricas estudiadas que tienen tal consecuente. De esa manera se pretende legitimar el razonamiento abductivo en el aula.

Diagrama para deducir

Este diagrama es útil para la tarea de obtener una conclusión a partir de un determinado hecho, caso en el cual la deducción está constituida por un único paso; explicita el papel de cada componente del enunciado condicional en el primer nivel de organización de una demostración (Duval, 2007). El diagrama para deducir (de ahora en adelante denominado diagrama-deducción) está conformado por tres marcadores de posición titulados “Qué sé”, “Qué uso” y “Qué concluyo” que corresponden respectivamente a los tres componentes requeridos para poner en juego los esquemas de razonamiento Modus Ponendo o Modus Tollendo Tollens, a saber: la premisa (el hecho dado), la garantía y la conclusión.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
ΔABC *es recto*	Definición de rectas perpendiculares	$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

Diagrama 8: Ejemplo de diagrama-deducción

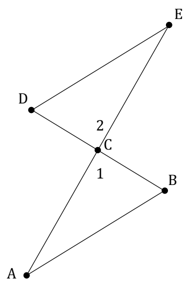
El tipo de tareas que se proponen para usar este diagrama es similar al de las diseñadas para el diagrama-condicional pero el contexto es diferente porque ahora los estudiantes deben deducir. Este diagrama propicia el uso de la teoría estudiada (definiciones, postulados y teoremas) en la deducción de conclusiones.

Diagrama A para demostración

Este tipo de diagrama se introduce cuando los estudiantes se han familiarizado suficientemente con los tres tipos de diagramas antes descritos y están preparados para producir cadenas deductivas de proposiciones para demostrar un enunciado. El diagrama A para demostración (de ahora en adelante denominado diagrama A-demostración) se configura mediante la yuxtaposición de varios diagramas-deducción y el empleo de colores como códigos para distinguir la hipótesis (verde), la tesis (rojo) y los varios enunciados que son conclusiones parciales del proceso deductivo (un color por enunciado). El empleo de color para distinguir cada enunciado tiene como propósito resaltar el cambio de estatus operatorio de una proposición cuando en un paso es consecuencia (ha sido deducida) y en uno posterior es premisa (se conoce); tal cambio se evidencia visualmente cuando un enunciado de un determinado color está ubicado en distintos marcadores de posición. Es en esta diferenciación de estatus operatorio dentro de la deducción donde se evidencia el segundo nivel de la demostración (Duval, 2007); es decir, se destaca el cambio de ser una conclusión en un paso a ser un dato en otro paso. Reunir premisas de colores diferentes en el marcador de posición “Qué sé” para usar un elemento teórico en cuyo antecedente están incluidas tales premisas debería habituar a los estudiantes a constatar si se tienen todas las condiciones de la garantía. Si se da una representación figural es posible obtener información mediante el reconocimiento visual de una propiedad en la figura siempre y cuando lo permita una regla sociomatemática del aula. La información así obtenida se registra en el marcador de posición "Qué concluyo", y la garantía correspondiente se registra como "información dada gráficamente". Podemos mencionar como ejemplos de esta situación: la interestancia de puntos, los ángulos opuestos por el vértice, los ángulos alternos internos, punto en el interior de un ángulo.

Ejemplo 1. Determine si el siguiente enunciado es verdadero. Si lo es, demuéstrelo.

Si C es el punto medio del $\overline{AE}$ y del $\overline{BD}$ entonces $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ (ver la figura adjunta).



Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
C es punto medio de $\overline{AE}$	Definición punto medio	$\overline{AC} \cong \overline{CE}$
C es punto medio de $\overline{DB}$	Definición punto medio	$\overline{DC} \cong \overline{BC}$
	Información dada gráficamente	$\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice.
$\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice.	Teorema Ángulos opuestos por el vértice son congruentes	$\angle 1 \cong \angle 2$
$\overline{AC} \cong \overline{CE}$ $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ $\angle 1 \cong \angle 2$	Postulado Lado-ángulo-lado	$\Delta ACB \cong \Delta ECD$
$\Delta ACB \cong \Delta ECD$	Definición de triángulos congruentes	$\angle EDC \cong \angle ABC$

Continúa

	Información dada gráficamente	$\angle EDC$ y $\angle ABC$ son alternos internos
$\angle EDC \cong \angle ABC$ $\angle EDC$ y $\angle ABC$ son alternos internos	Teorema Ángulos alternos congruentes entonces rectas paralelas	$\overline{AB} \parallel \overline{ED}$

Diagrama B para demostración

El diagrama B de demostración (de ahora en adelante denominado diagrama B-demostración) es similar al conocido formato de dos columnas que se usa en los libros de texto de geometría, pero presenta una variación. Los marcadores de posición primero y tercero del diagrama-deducción se funden en uno solo que ahora tiene como encabezamiento "Afirmación" y el segundo se titula "Gartantía y datos" y se destina para registrar la garantía y también los números de los pasos previos que contienen las premisas de la hipótesis del teorema, postulado o definición usado como garantía. Los enunciados que corresponden a información dada, la hipótesis, se registra en verde. Las proposiciones que se deducen, sea de manera gráfica o teórica, cada una tiene un color diferente, y la tesis demostrada se registra en rojo. El número que se refiere a un paso va en el mismo color que el enunciado de tal paso.

Ejemplo 2. Se presenta la misma demostración del Ejemplo 1, ahora usando el diagrama B-demostración.

Afirmación	Garantía y datos
1. C es punto medio de $\overline{AE}$	Dado
2. $\overline{AC} \cong \overline{CE}$	Definición punto medio (1)
3. C es punto medio de $\overline{DB}$	Dado
4. $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	Definición punto medio (3)
5. $\angle 1$ y $\angle 2$ son opuestos por el vértice.	Información dada gráficamente
6. $\angle 1 \cong \angle 2$	Teorema Ángulos opuestos por el vértice son congruentes (5)

Continúa

7. $\Delta ACB \cong \Delta ECD$	Postulado Lado-ángulo-lado (2,4,6)
8. $\angle EDC \cong \angle ABC$	Definición de triángulos congruentes (7)
9. $\angle EDC$ *y* $\angle ABC$ son alternos internos	Información dada gráficamente
10. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{ED}$	Teorema Ángulos alternos congruentes entonces rectas paralelas (8,9)

En resumen, con el uso de los diagramas apuntamos a operacionalizar la producción de una demostración en matemáticas en lo que concierne al procedimiento de construir una cadena deductiva de proposiciones. Proponemos usar los diagramas en básicamente cuatro situaciones: siempre que se introduzca una definición, un postulado o un teorema al sistema teórico de referencia; después de un proceso de exploración empírica como fuente para la formulación de una conjetura, en cuyo caso se usa un diagrama-condicional para resaltar el papel de cada parte del enunciado condicional; para destacar cómo se usa una condicional para obtener una conclusión, en cuyo caso se usa el diagrama-deducción; para organizar de manera deductiva las proposiciones mediante las cuales se justifican las conjeturas, en cuyo caso se usan los diagramas-demostración.

Referencias

Deloustal-Jorrand, V. (2002). Implication and mathematical reasoning. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 281-288). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Hoyles, C. y Küchemann, D. (2002). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, *51(*3), 193-223.

Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225-231). Columbus, EUA: Eric Clearinghouse for Science Mathematics, and Environmental Education.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and authonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

PARTE 2
ELEMENTOS DEL DISEÑO Y DESARROLLO CURRICULAR DEL CURSO

Carmen Samper - Óscar Molina

Capítulo 3:
Relaciones entre puntos y rectas

Caracterización de una recta

El libro *Elementos* de Euclides (tr. 1991, p. 13, 14,15) comienza con las siguientes afirmaciones que pretenden definir los objetos *punto, línea*, *línea recta* y *superficie*:

Punto es lo que no tiene partes.
Línea es longitud sin anchura.
Línea recta es aquella que yace por igual sobre sus puntos.
Superficie es lo que tiene largo y ancho.

En la actualidad, las definiciones anteriores no se consideran válidas por incluir en su formulación términos no establecidos o definidos previamente. Con el ánimo de presentar la geometría de manera tal que todo el razonamiento matemático empleado se basara en deducción a partir de axiomas establecidos y no en evidencia empírica, Moritz Pasch (1843-1930) analizó cuidadosamente la propuesta de Euclides para detectar y explicitar los supuestos hechos en ella.

Escribe así un texto de geometría que, según Campos (1994), fue el primero en que se "consideraba la geometría como un sistema de relaciones lógicas entre variables" (p. 344). De ahí en adelante, el tratamiento riguroso de la geometría exige iniciar con la mención de los términos primitivos o no definidos, y, las relaciones primitivas o no demostradas. A partir de la propuesta hecha por Pasch en 1882 se precisa el estatus teórico de los diferentes elementos de un sistema axiomático. En particular, David Hilbert (1862-1943) propuso un sistema axiomático, en 1899, que da lugar a un tratamiento moderno de la geometría euclidiana. Comienza estableciendo como nociones primitivas del sistema a los objetos *punto*, *recta* y *plano*.

En correspondencia con lo planteado por Hilbert, el sistema axiomático que se construirá en este curso también establece que *punto*, *recta* y *plano* son términos primitivos y que la pertenencia es una relación primitiva. El problema que se presenta a continuación se diseñó para iniciar la construcción del sistema teórico, específicamente, para introducir los hechos geométricos (postulados o teoremas) y definiciones de la geometría euclidiana que describen la relación entre puntos y rectas. Además, la discusión que se genera permite introducir aspectos, desde la lógica matemática, de la comunicación, y de los esquemas de razonamiento válidos. El problema pone en juego las nociones de los estudiantes acerca de relaciones entre rectas y puntos, por ejemplo, que una recta tiene infinitos puntos.

Para abordar el proceso de construcción del sistema teórico, es necesario instaurar, para el grupo de estudiantes, que los elementos primitivos del sistema que se empieza a construir son los sugeridos por Hilbert. Cuando se propone el problema en el curso, también se han institucionalizado los siguientes postulados, con el propósito de que el problema tenga pertinencia:

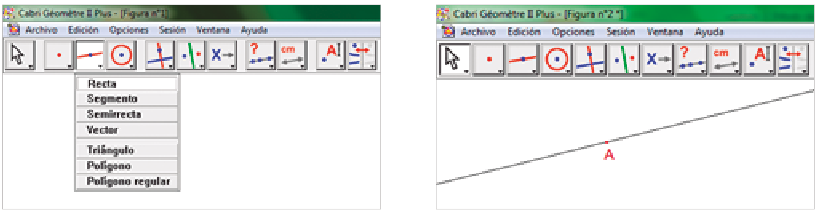
Postulado Existencia: Los puntos, las rectas y los planos existen.
Postulado Conjuntos de puntos: Las rectas y los planos son conjuntos, no vacíos, de puntos.

Así mismo se ha hecho explícito ante los estudiantes que los enunciados que conforman un sistema axiomático tienen estatus teóricos diferentes, y que un postulado es una afirmación que se acepta como válida sin discusión.

Problema 1: Construya una recta en Cabri. Determine los hechos geométricos involucrados en la construcción.

Es usual que surjan los siguientes tres procesos de construcción. Debido a las diferencias en los procedimientos realizados, las representaciones gráficas, en la pantalla, difieren.

Propuesta 1.1 Teniendo la pantalla en blanco, usar la herramienta *recta*.



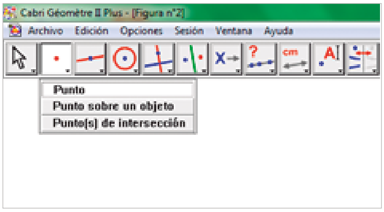
(a) Procedimiento de la Construcción 1

(b) Representación de la Construcción 1

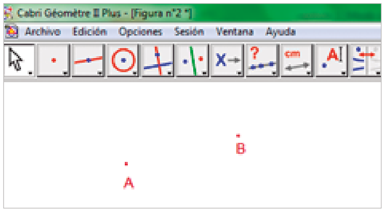
Figura 1

Propuesta 1.2 Teniendo la pantalla en blanco, primero usar la herramienta *punto* (Figura 2a), construir dos puntos (Figura 2b) y luego usar la herramienta *recta* (Figura 2c) para construir la recta que los contiene (Figura 2d).

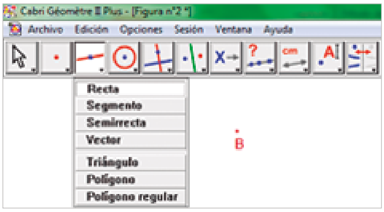
Continúa →



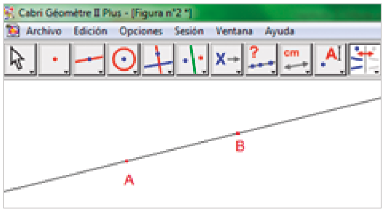
(a) Paso 1 Construcción 2



(b) Paso 2 Construcción 2



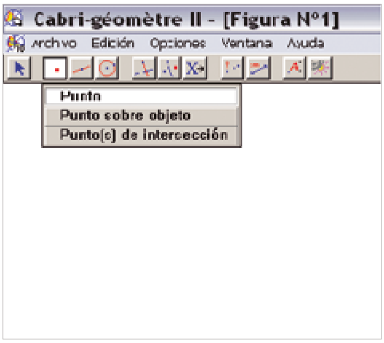
(c) Paso 3 Construcción 2



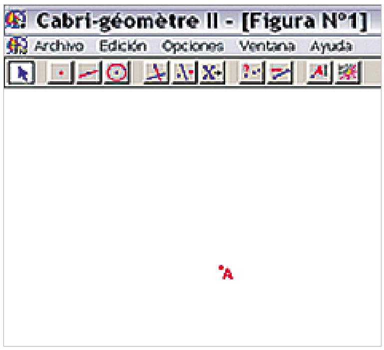
(d) Representación de la Construcción 2

Figura 2

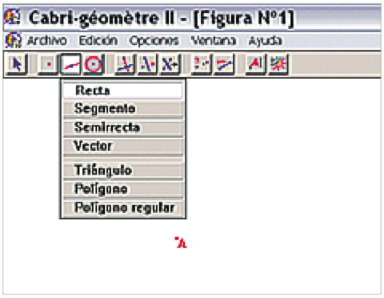
Propuesta 1.3 Teniendo la pantalla en blanco, primero usar la herramienta *punto* (Figura 3a), construir un punto (Figura 3b) y luego usar la herramienta *recta* (Figura 3c) para construir la recta que lo contiene (Figura 3d).



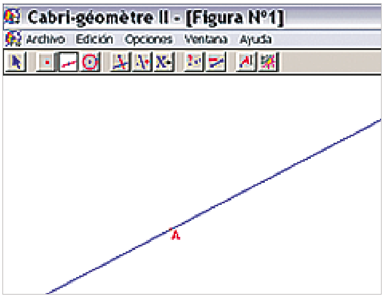
(a) Paso 1 Construcción 3



(b) Paso 2 Construcción 3



(c) Paso 3 Construcción 3



(d) Paso 4 Construcción 3

Figura 3

Ligados a los anteriores procesos de construcción o a las representaciones gráficas que surgen de estos y que se observan en las pantallas, los estudiantes, tal como lo solicita el enunciado del problema, deben proponer hechos geométricos.

En cuanto a la representación, se formulan las siguientes afirmaciones:

Conjetura 1.1 Una recta tiene un punto. (Ligada a las representaciones de la Construcción 1 y Construcción 3)
Conjetura 1.2 Una recta tiene por lo menos dos puntos. (Ligada a la representación de la construcción 2)

En cuanto al procedimiento de construcción, se presentan las siguientes afirmaciones:

Conjetura 1.3 Una recta pasa por dos puntos. (Ligada a la Propuesta 1.2)
Conjetura 1.4 Dado un punto, existe una recta que lo contiene. (Ligada a la Propuesta 1.3)
Conjetura 1.5 Infinitas rectas pasan por un punto. (Ligada a la Propuesta 1.1)
Conjetura 1.6 Infinitas rectas en un plano pasan por un punto. (Ligada a la Propuesta 1.1)
Conjetura 1.7 Las rectas tienen infinitos puntos. (Ligada a la Propuesta 1.1 o 1.2)

Una vez presentadas las afirmaciones, se inicia el proceso de análisis con el propósito de determinar cuáles de ellas son hechos geométricos verificables con la geometría dinámica, cuáles de ellas se introducirán al sistema teórico y con cuál estatus teórico (postulado o teorema). Las primeras afirmaciones que se discuten son la primera y la tercera. Se hace especial énfasis en el lenguaje que se usa (que debe ser formal) y en la estructura lógica de las afirmaciones, en cuanto proposiciones condicionales.

Respecto a la primera afirmación se aclara que las expresiones "tiene un punto" y "tiene por lo menos un punto" significan lo mismo, y se enfatiza lo relacionado con los cuantificadores "una" y "toda". Se analiza si la Conjetura 1.1 se puede demostrar. Es usual que los estudiantes usen el *Postulado Conjuntos de puntos* para justificar la validez de dicha afirmación, lo que es correcto; sin embargo, para complementar la respectiva justificación, es necesario precisarles que se debe introducir la definición de *conjunto no vacío*. Producto de todo lo anterior, queda establecido el siguiente teorema. Como es costumbre hasta ahora, le asignamos un nombre al teorema. El propósito es doble: por una parte, proveer una forma fácil de hacer referencia a este cuando se use y, por otra, recordar de qué se trata, para lo cual se destaca en el nombre una palabra de la hipótesis del enunciado (la primera) y otra de la tesis.

Teorema Recta - punto Toda recta tiene por lo menos un punto.

Aun cuando en la mayoría de los textos de geometría, el teorema se enunciaría como se ha expuesto anteriormente, nosotros siempre privilegiamos el formato condicional de la proposición, reescribiéndolo como sigue:

Teorema Recta - punto Si *m* es una recta, entonces existe por lo menos un punto en *m*.

En cuanto a la Conjetura1.3, se solicita a los estudiantes proponentes que la reformulen como condicional. Suelen surgir dos propuestas:

1. Si *A* y *B* son dos puntos entonces existe una recta que los contiene.
2. Si *m* es una recta entonces contiene dos puntos.

Se analiza cuál de los dos enunciados se corresponde con el proceso que realizaron para construir la recta en Cabri. Dado que construyeron inicialmente dos puntos, la primera propuesta es la que informa sobre el proceso. Por ello, y ante la dificultad de justificarla, esta se establece como el *Postulado Dos puntos -recta*.

Postulado Dos puntos - recta Si *A* y *B* son dos puntos, entonces existe una única recta *m* que los contiene.

El análisis realizado es muy importante por ser esta la primera vez que los estudiantes hacen y formulan una conjetura a partir de su exploración empírica con geometría dinámica. Este es, entonces, el momento propicio para enfatizar que la conjetura debe corresponderse con el proceso de construcción (o de exploración) desarrollado. Ello porque los estudiantes deben comprender que la condicional que formulan como conjetura reporta una relación de dependencia. De otro lado, los estudiantes también deben conocer que las conjeturas que formulan con base en el uso de geometría dinámica, tienen un alto grado de plausibilidad de ser válidas en la teoría que se está construyendo, dado que este software corporeiza la teoría de la geometría plana euclidiana.

Cuando se retoma el estudio de las afirmaciones surgidas del Problema 1, se destaca que la Conjetura 1.2 (i. e., *Una recta tiene por lo menos dos puntos*) y la segunda propuesta que surge de la reformulación de la Conjetura 1.3 (i. e., *Si m es una recta, entonces contiene dos puntos*) proveen la misma información. Se analiza si la segunda propuesta se puede demostrar usando la teoría disponible. A continuación se presentan algunas de las demostraciones propuestas por los estudiantes.

Nota: En adelante, seguiremos el siguiente convenio para la escritura de las justificaciones: T. significa Teorema, P. significa Postulado, D. significa Definición, Pr. significa Principio y Prop. significa Propiedad. Además se usará el diagrama-deducción a tres columnas descrito en el Capítulo 2.

Justificación 1

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
m recta	P. Conjuntos de puntos	Existen puntos A y B en m

Justificación 2

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
m recta	T. Recta - punto	Existe $A \in m$, A punto
m recta	T. Recta - punto	Existen puntos A y B en m

Justificación 3

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
m recta	P. Puntos - recta	Existen puntos A y B en m

La primera justificación se descarta cuando se explica a los estudiantes que el uso del plural en la expresión *P. Conjuntos de puntos* no significa que el conjunto tenga más de un punto. Para que los estudiantes acepten que la segunda justificación tampoco es válida es necesario explicitar que en la teoría disponible no hay manera de asegurar que los dos puntos, A y B, son diferentes; es decir, se debe explicar que el *T. Recta - punto* garantiza la existencia de solo un punto. La discusión sobre la aceptabilidad de la tercera justificación lleva a destacar la relación lógica que existe entre el *P. Dos puntos - recta* y la afirmación: *Si m es una recta entonces m tiene dos puntos*; al respecto, los estudiantes están asumiendo como válido que una afirmación condicional es equivalente a su recíproca. Para dar claridad sobre este aspecto, vale la pena justificar, desde la lógica, por qué una condicional no es equivalente a su recíproca, hecho que implica hablar de las tablas de verdad de proposiciones compuestas. Las tablas correspondientes a la *conjunción* y a la *disyunción* se construyen con base en la lógica natural, mientras que la construcción de la tabla de verdad de una *condicional*, generalmente se hace a partir de la aceptación de que la negación de una condicional es equivalente a la conjunción del antecedente con la negación del consecuente, $\neg(p \longrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ asunto que fácilmente aceptan los estudiantes, desde la lógica cotidiana.

Habiendo descartado las anteriores justificaciones propuestas por los estudiantes, se requiere introducir otro postulado al sistema teórico con el objetivo de poder justificar las Conjeturas 1.2 y 1.7. El postulado que se introduce consiste en una modificación sustancial de la propuesta original de Euclides, ya que introduce al sistema teórico el conjunto de los números reales, estableciendo una relación entre estos y los puntos de una recta. Ello significa que adoptaremos los lineamientos propuestos por George Birkhoff (1884-1944) para construir un sistema teórico que permite confirmar experimentalmente hechos geométricos de la geometría de Euclides, debido a que los postulados que propone Birkhoff introducen el uso de la regla con escala y del transportador. Esto último lleva a establecer también una relación entre los números reales y los ángulos. El enfoque que asumimos permite que la geometría dinámica sea una herramienta útil para el aprendizaje, puesto que al utilizar las herramientas que permiten obtener medidas de longitud de segmentos o medidas de ángulos en las construcciones que se hacen en este entorno, los estudiantes pueden establecer, bajo el arrastre, las propiedades invariantes que la construcción tenga, hecho que se convierte en germen para el establecimiento de algún teorema de la geometría plana euclidiana.

El postulado, al que hacemos referencia, es el siguiente:

Postulado Recta - números reales Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que:

i. A cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real;
ii. A cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.

Este postulado permite definir una función biyectiva entre el conjunto de los números reales y los puntos de una recta. Por ello, se introduce la siguiente definición:

Definición Coordenada de un punto El número real que le corresponde a cada punto de la recta se denomina la coordenada del punto. La coordenada x del punto se denotará $c(A) = x$, donde x es un número real.

La intención ahora es demostrarla Conjetura1.2 (i. e., *Una recta tiene por lo menos dos puntos*). En este momento vale la pena abordar algunas cuestiones sobre los diferentes métodos de demostración. Hasta ahora, las demostraciones que se han realizado son directas; ello quiere decir que de las condiciones que impone el antecedente del enunciado, se deduce el consecuente, utilizando elementos del sistema teórico y haciendo uso del esquema de razonamiento Modus Ponendo Ponens, principalmente.

Para demostrar la Conjetura 1.2 es necesario usar el método denominado *demostración indirecta*. Este método consiste en introducir la negación del consecuente del enunciado como una premisa adicional a las incluidas en el antecedente del enunciado. La idea general de este tipo de demostración es deducir alguna afirmación que contradiga otra previamente establecida en la demostración que, por lo general, es alguna condición del antecedente mismo, o una propiedad aceptada como teorema ya sea en la teoría que enmarca la demostración o en otra teoría matemática. Con esto entonces, se contradice el *Principio* *del Tercio excluido*[3]. Como suponer verdadera la negación del consecuente lleva a una contradicción, entonces por el Principio de Reducción al absurdo[4], se deduce que el consecuente del enunciado original tiene que ser verdadero y, por ende, consecuencia necesaria del antecedente (Caicedo, X., 1990).

Otro método que usaremos para demostrar es conocido como *demostración por casos*. Consiste en establecer, como una disyunción, todos los posibles casos (C_i) de una situación. La situación puede estar relacionada con el consecuente mismo del enunciado que se quiere demostrar o ser una que surge en algún momento del desarrollo de la demostración. Cada uno de los casos C_i se considera como premisa nueva, y a partir de esta, junto con el antecedente original, se deduce información. Si esta es una contradicción lógica, por el Principio de Reducción al absurdo, la premisa que se introdujo no puede ser verdadera. Después de desechados algunos de los casos C_i se usa el esquema de razonamiento Modus Tollendo Ponens para concluir la validez de los casos restantes.

Los dos últimos métodos de demostración, en esencia, proponen agregar a las premisas dadas, nuevas premisas, C_n, que se suponen verdaderas, y a partir de todas deducir, mediante esquemas válidos de razonamiento y elementos del sistema teórico, una contradicción lógica, es decir, la negación del Principio del Tercio excluido. Ello conlleva a desechar como verdaderas las premisas que se introdujeron C_n y a establecer como verdadero el consecuente del enunciado que se quiere demostrar o aquellas proposiciones que eventualmente permiten deducir el consecuente (procedimiento válido gracias al Principio de Reducción al absurdo).

3 El Principio del Tercio excluido dice que en una lógica aristotélica (bivalente: falso o verdadero) se tiene como verdadera o bien la proposición o bien la negación de, pero no ambas. Es decir, se excluye la posibilidad de que la proposición $p \wedge \neg q$ sea verdadera. Negar el Principio del Tercio excluido implica entonces considerar como verdadera la proposición $p \wedge \neg q$.

4 El Principio de Reducción al absurdo establece que si se añade una premisa p a un conjuntos de premisas dado, y se deduce una propiedad que contradice otra entonces la premisa introducida no puede ser verdadera. Por tanto, se concluye que del conjuntos se deduce como verdadera la negación de dicha premisa: $p \wedge \neg q$.

Finalmente, la demostración de la Conjetura 1.2 es la siguiente:

Demostración

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
1. *m* es una recta	T. Recta – punto	Existe un punto *A* en *m*
2. *A* punto de *m*	P. Recta – números reales (i)	Sea $a \in R$ tal que $c(A) = a$
3.	Prop. números reales	Sea $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$
4. Sea $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$	P. Recta – números reales (ii)	Sea $B \in m$ tal que $c(B) = b$
5. $A \in m$, $B \in m$	Negación de conclusión	$A = B$
6. $c(A) = a$, $c(B) = b$, $A = B$	P. Recta – números reales (i)	$a = b$
7. $a = b \wedge b \neq a$	Pr. de Reducción al absurdo	$A \neq B$

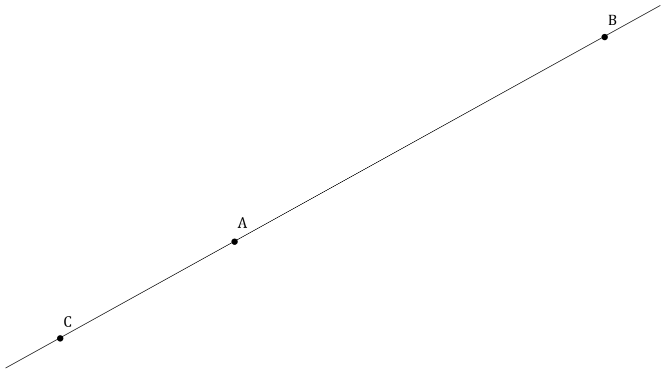
Volviendo a la demostración anterior, aplicando el mismo razonamiento a cada número real diferente escogido, se establece la existencia de un punto en *m* distinto a los anteriores, lo que lleva a garantizar que la recta tiene tantos puntos como números reales hay. Esto demuestra la Conjetura 1.7 (i.e. *Las rectas tienen infinitos puntos*). Dada la relación entre esta afirmación y la Conjetura 1.2, se establece un único teorema:

Teorema Recta - infinitos puntos Si *m* es una recta entonces existen infinitos puntos en .

Relaciones de interestancia

Para estudiar los hechos geométricos concernientes a las posibles posiciones relativas de tres puntos y su relación con el orden de sus respectivas coordenadas, proponemos tres problemas que suscitan la inclusión de tales hechos en el sistema teórico. El primero de ellos es el siguiente:

Problema 2: ¿Es posible la siguiente situación? (Figura 4)



$c(A) = -4$, $c(B) = 0$ y $c(C) = 3$

Figura 4

Las respuestas de los estudiantes se recogen en las siguientes dos afirmaciones:

Conjetura 2.1 Dados tres puntos *A, B* y *C* de la recta *m*, si $c(A) < c(B) < c(C)$ entonces *B* está entre *A* y *C*.
Conjetura 2.2 Dado *B* entre *A* y *C* entonces $c(A) < c(B) < c(C)$.

Al analizar la Conjetura 2.1, se nota el uso de una idea intuitiva que es muy importante: la relación “estar entre”. Es una noción que aparece de manera formal solo con Pasch (1882) pero que parece ser que Euclides la usó de manera implícita. Pasch axiomatiza esta idea, cosa que se hará en este texto usando la noción de distancia. Ello permitirá definir segmento y rayo. En adelante, llamaremos *interestancia* a esta relación.

Definición Interestancia El punto *B* está entre los puntos *A* y *C* si
i *A,B* y *C* son colineales, y
ii $AB + BC = AC$ (*AB* es la notación que se usa para indicar la distancia entre *A* y *B*.)

La notación que se usa para indicar la relación de interestancia de tres puntos es *A* - *B* - *C* que se lee *B está entre A y C*.

La definición anterior requiere definir la distancia entre puntos, noción que los estudiantes usan libremente sin caer en cuenta de que la construcción del sistema teórico exige que se formalice. Para Birkhoff, la distancia entre dos puntos es una relación primitiva. Nosotros seguiremos la propuesta de Edwin Moise, plasmada en su texto *Geometría Elemental desde un Punto de Vista Avanzado* que se publicó en español en el año 1968, en el cual establece una métrica para puntos de una recta, es decir, una función entre parejas de puntos y los números reales no negativos, que permite definir la *distancia entre puntos*. Pero teniendo en cuenta que nuestros estudiantes son alumnos universitarios de segundo semestre, nos inclinamos más a la adaptación que al respecto hacen Moise y Downs (1968) en el texto *Geometría Moderna* . Así, se introducen un postulado y una definición.

Postulado Puntos - número A cada par de puntos diferentes le corresponde un número real positivo único.

Problema 3: ¿Cómo se encuentra la distancia entre dos puntos?

Definición Distancia El número real asignado a dos puntos se llama la distancia entre los puntos.

Este postulado define una función del conjunto de pares de puntos en el conjunto de reales no negativos y da pie para introducir una métrica. Para ello, se propone el siguiente problema.

Surgen propuestas como "contar la cantidad de puntos entre los dados". Pero, teniendo coordenadas, es usual que los estudiantes propongan usarlas, específicamente con la métrica cartesiana.

Definición Métrica La distancia entre dos puntos A y B es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas. La distancia entre un punto y él mismo es cero.

La demostración de la Conjetura 2.1 se basa en la *D. Interestancia*, el *P. Recta - números reales* y la definición y propiedades del valor absoluto. En el Ejercicio 1 se presenta el esquema de la demostración. El objetivo de dicho ejercicio es apoyar a los estudiantes en el proceso de aprender a organizar deductivamente las afirmaciones que conforman la demostración. Para los teoremas cuyas demostraciones son extensas, presentar los pasos fundamentales es un mecanismo para ayudar a los estudiantes a ver el esquema general de la demostración y para guiarlos en el desarrollo deductivo de esta. Generalmente, se asignan este tipo de tareas para que los estudiantes, trabajando en parejas, las completeten, y después se revisan en clase. El teorema que se introduce al sistema teórico correspondiente a la afirmación mencionada, es:

Teorema Doble orden – interestancia Dados tres puntos A, B y C de la recta m, si c(A) < c(B) < c(C) o c(C)<c(B)<c(A) entonces $A – B – C$.

En la respectiva discusión para la Conjetura 2.2, vale la pena resaltar que lo único que se puede asegurar es que la coordenada de B está entre la coordenada de A y la coordenada de C; es decir, la Conjetura 2.2 está incompleta pues deben mencionarse dos posibilidades para el consecuente de la proposición: c(A) < c(B) < c(C) o c(C) < c(B) < c(A). Ello lleva a establecer el siguiente teorema:

Teorema Interestancia – doble orden Si $A – B – C$ entonces c(A) < c(B) < c(C) o c(C) < c(B) < c(A).

La demostración de este teorema se realiza estudiando todos los posibles casos de la relación de orden entre las coordenadas y usando la definición de interestancia para descartar cuatro de esos casos.

Otra situación interesante de analizar al respecto de la relación de interestancia se establece con el hecho de que al tener tres puntos en una misma recta, siempre uno de ellos está entre los otros dos, lo cual se puede traducir en el siguiente teorema:

Teorema Tres puntos Si A, B *y* C son puntos colineales, entonces uno de esos puntos está entre los otros dos.

Si se tienen cuatro puntos tal que $AB = CD$ entonces, recurriendo meramente a lo visual la separación entre A y B debe ser la misma que hay entre C y D. De hecho, la siguiente representación (Figura 5) no es aceptada por los estudiantes como correcta:

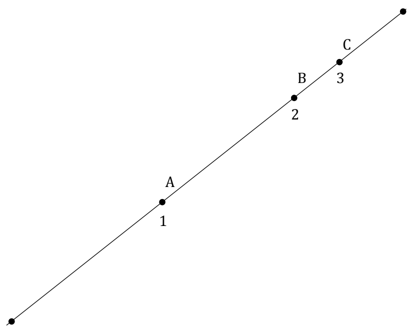
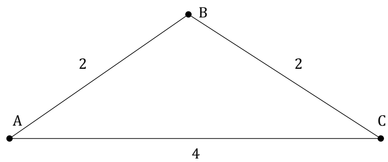


Figura 5

La razón que frecuentemente exponen los estudiantes para descartarla es "no habría suficientemente espacio entre los puntos *B* y *C* para asignarle a cada número real entre 2 y 3 un punto" o "ello significaría que hay más puntos entre *B* y *A* de lo que hay entre *B* y *C*". Aclarar estas concepciones requiere hablar de la densidad de los números reales y del cardinal de los conjuntos de puntos, cosa que se menciona pero no se profundiza porque es tema de cursos más avanzados. Sin embargo, como esa representación incomoda y pueden suceder cosas contradictorias, como la que sugiere el siguiente problema, es necesario introducir un convenio como se explicará más adelante.

Problema 4: María ha representado la siguiente situación en una hoja de papel y se da cuenta de que $AB + BC = AC$ (Figura 6).



c(A) = 0, c(B) = 2 y c(C) = 4

a. Según nuestro sistema teórico, ¿es aceptable la representación que hizo María?
b. Represente la situación con geometría dinámica y determine si la posición de B se corresponde o no con la propuesta por María.

Figura 6

Con geometría dinámica no se puede construir un punto *B* externo a la $\overleftrightarrow{AC}$ que cumpla esa condición, hecho que se evidencia si el número de dígitos que se le asignan a las medidas de la longitud de los segmentos es suficientemente grande (seis cifras decimales); si esto último no sucede, parecería que existe una región limitada, a la cual puede pertenecer *B*. Esta situación se debe aprovechar para destacar que la información que suministra el entorno de geometría dinámica requiere verificación, ya sea aumentando el número de dígitos para las medidas, o arrastrando puntos para determinar si la propiedad se mantiene. Un análisis de la situación, desde la evidencia empírica, lleva a determinar que siendo el entorno de geometría dinámica un modelo de la geometría euclidiana y el que usaremos para resolver los problemas propuestos, y, dado que en estos entornos los segmentos congruentes se ven del mismo tamaño, a pesar de que no hay elementos teóricos que obliguen a que eso tenga que ser así cuando hacemos representaciones en papel, se establece el siguiente acuerdo, cada vez que sea necesario recurrir al uso de coordenadas:

Convenio Unidad de medida La unidad de medida se debe mantener para todos los objetos que se representen en una misma situación.

Caracterización de segmentos

Los siguientes problemas tienen como propósito crear la necesidad de introducir hechos geométricos que garanticen la existencia de puntos que cumplan una propiedad determinada –en particular, cierta relación de interestancia–, a partir de dos puntos dados.

Problema 5: ¿Cuántos puntos tiene un segmento?

Antes de discutir sobre la solución del problema se establece la definición de segmento.

Definición Segmento Dados dos puntos A y B, el segmento AB (que se denota con $\overline{AB}$ es la unión de los puntos A y B con todos los puntos que están entre A y B.

En notación de conjuntos, la definición se representa de la siguiente manera:

$$\overline{AB} = \{A,B\} \cup \{X \mid A - X - B\}$$

En la tercera definición de los *Elementos* se establece una relación entre los puntos y las líneas que, cabe anotar, para Euclides no se refieren solo a líneas rectas. Sin embargo, esta relación coincide con una de las características incluidas en nuestra definición de segmento: los puntos A y B delimitan al segmento. Euclides (tr. 1991) establece como la Definición 3: "Los extremos de una línea son puntos" (p. 13). Proponer la pregunta del Problema 5 no va en contravía con la geometría de Euclides pues en su cuarta definición, en la que presenta la noción de segmento, expresa: "Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella", aunque Euclides solo ha mencionado los puntos extremos del segmento y parece que quiere presentar al segmento como un todo y no como un conjunto de puntos. Sin embargo, hay una diferencia entre nuestra definición de segmento y la de Euclides: en nuestra teoría las rectas preceden a los segmentos y estos se definen como subconjuntos de ellas; para Euclides, los segmentos generan a las rectas como lo expresa el segundo postulado de *Elementos*: "prolongar continuamente una recta finita en línea recta" (p. 21). Además, Euclides presenta para los segmentos la propiedad que nosotros expresamos para las rectas en el *P. Dos puntos - recta*, específicamente a través del primer postulado: "Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera". No incluye en este una característica que nosotros sí imponemos: la recta determinada por los dos puntos es única.

Institucionalizada la definición de segmento, los estudiantes, como respuesta a la pregunta formulada, manifiestan que un segmento tiene infinitos puntos. En la discusión que sigue para justificar esa afirmación se concluye que con la definición de segmento solo se puede asegurar que existen dos puntos en un segmento, los extremos. Para garantizar que existen más puntos en él, es necesario mostrar que el $\{X \mid A - X - B\}$ no es vacío. Ello lleva a establecer el siguiente teorema de interestancia.

Teorema Punto entre Dados dos puntos A y B existe un punto entre ellos.

La demostración de este teorema requiere el uso de las coordenadas que se les pueden asignar a los puntos A y B, la propiedad de densidad del conjunto de los números reales y el *T. Orden-interestancia*.

Problema 6: ¿ $\overline{AB} \neq \overrightarrow{AB}$?

La respuesta afirmativa de los estudiantes se basa en las percepciones que tienen de las dos figuras pero no en las definiciones de estos objetos. Se recuerda la definición de rayo.

Definición de Rayo Dados dos puntos de una recta A y B, el rayo AB (que se denota $\overrightarrow{AB}$ es la unión del $\overline{AB}$ con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X.

Es decir, en notación de conjuntos se tiene:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid A\text{-}B\text{-}X\}$$

Para demostrar que los dos conjuntos sí son diferentes, es necesario justificar que el conjunto $\{X \mid A\text{-}B\text{-}X\}$ no es vacío, lo cual da lugar a otro teorema relacionado con la interestancia.

Teorema Punto a un lado Sean A y B dos puntos. Existe un punto C tal que $A - B - C$

También en este caso, la demostración requiere el uso de las coordenadas que se le asignan a los puntos A y B el *T. Orden - interestancia* y propiedades de los números reales.

Problema 7: ¿Existe el punto medio de cada segmento?

Para dar solución al problema, antes conviene recordar la definición de punto medio de un segmento:

Definición Punto medio de un segmento M es punto medio del $\overline{AB}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

i. $A - M - B$
ii. $AM = MB$

Los estudiantes usualmente creen que las definiciones de los objetos aseguran la existencia de los mismos, creencia que no es válida y que requiere aclaración. Así que se debe demostrar la existencia de dicho punto. El respectivo teorema es:

Teorema Existencia de punto medio Todo segmento tiene un punto medio.

Para realizar la demostración de este teorema, los estudiantes usualmente proponen utilizar el *Teorema Punto entre* para garantizar la existencia de un punto M tal que $A - M - B$ y luego, de manera conveniente, asignar coordenadas a estos puntos para que cumplan la igualdad $AM = MB$. Claro, esta propuesta no es válida, pues si bien es cierto que existe el punto M, al asignarle una coordenada que cumpla dicha igualdad, se estaría obligando al punto a cumplir una propiedad que probablemente viola el *Convenio Unidad de medida.* Por ejemplo, en la Figura 7, si $c(A) = 0$, $c(B) = 2$ y $c(C) = 1$ se cumple que $AM = MB$, pero claramente esto no es válido puesto que dicho convenio no se cumple.

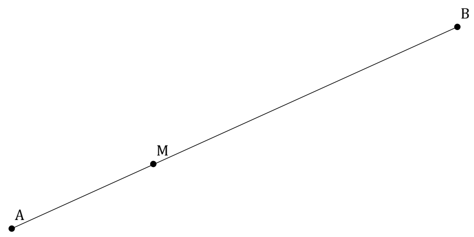


Figura 7

La justificación válida para este teorema se fundamenta en la asignación de coordenadas a los puntos A y B, a saber x e y, y luego, con base en propiedades de los números reales, se tiene que el número $\frac{x+y}{2}$ también es un número real. Hecho esto, se asigna un punto M de la AB de tal forma que c(M) = $\frac{x+y}{2}$. Para terminar, se utiliza el *T. Orden - interestancia*, la *D. Interestancia* y propiedades de los números reales para garantizar que $A - M - B$ y $AM = MB$. También puede realizarse la demostración asignando a los puntos A y B valores numéricos específicos.

El siguiente problema se debe hacer con geometría dinámica pues una de las intenciones que tenemos al proponerlo es mostrar la correspondencia entre los pasos de la construcción y los pasos de la demostración de la existencia del punto que se solicita en la pregunta. Con esto se hace evidente la organización deductiva de una demostración, es decir, la demostración de la solución a este problema se utiliza para ilustrar la necesidad de tener para justificar un paso, como pasos previos, aquellos que permiten deducir ese paso. Otra intención del problema es introducir al sistema teórico el teorema que permite justificar la construcción de dos segmentos de igual longitud. Euclides (tr. 1991) también incluye, como su segunda proposición o teorema, una afirmación que justifica lo deseado. Esta dice: "Poner en un punto dado (como extremo) una recta igual a una recta dada" (p. 27). La demostración consiste en describir y justificar la construcción de un segmento de igual longitud a la de uno dado, usando regla y compás ideal (el que se cierra al levantarlo). La demostración del teorema de nuestro sistema teórico se facilita debido a la introducción de la relación entre los puntos de una recta y los números reales.

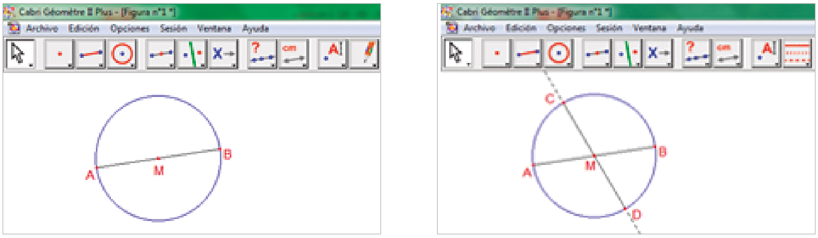
Problema 8: Dados tres puntos no colineales A, B y C. ¿Es posible construir un punto D tal que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan? Justifique su respuesta.

Para tratar el problema, se debe enunciar lo que significa bisecar.

Definición Bisección de segmento Una figura geométrica biseca a un segmento si esta contiene a su punto medio.

Generalmente, con respecto a la solución del problema, surgen tres construcciones, que se describen, a grandes rasgos, a continuación.

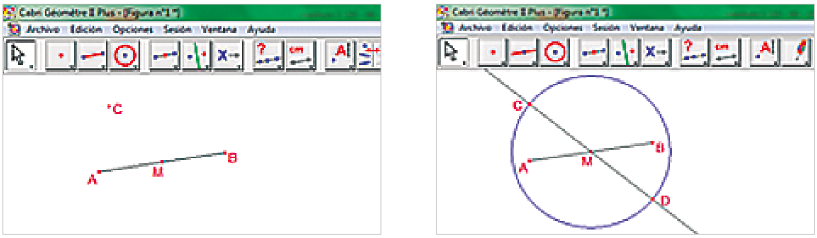
Propuesta 8.1 Los estudiantes construyen los puntos A y B, el punto medio M del $\overline{AB}$ y una circunferencia centrada en M con diámetro AB (Figura 8a). Luego construyen otro diámetro cualquiera de la circunferencia para escoger a los extremos de este como puntos C y D (Figura 8b).



(a) (b)

Figura 8

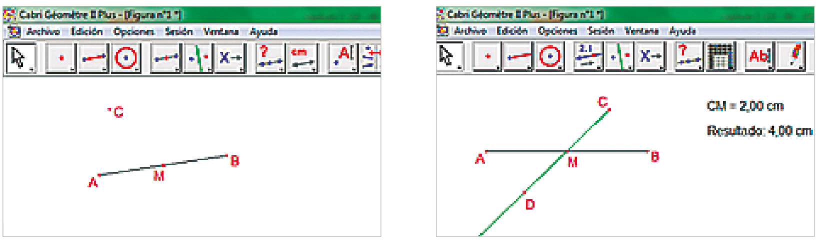
Propuesta 8.2 Los estudiantes construyen los puntos A y B, el punto medio M del $\overline{AB}$ (Figura 9a). Construyen la $\overleftrightarrow{CM}$ y una circunferencia con centro M y radio CM. D es el punto de intersección de la circunferencia y la $\overleftrightarrow{CM}$ (Figura 9b).



(a) (b)

Figura 9

Propuesta 8.3 Los estudiantes construyen los puntos A y B, el punto medio M del $\overline{AB}$ (Figura 10a). Construyen el $\overrightarrow{CM}$ y con transferencia de medidas localizan un punto tal que $DC = 2CM$ (Figura 10b).



(a) (b)

Figura 10

La discusión de la Propuesta 8.1 permite destacar que esta es incorrecta porque los estudiantes están desconociendo todas las condiciones del enunciado, específicamente el hecho de que el punto *C* está dado y no puede ser escogido como lo hicieron. Esto se corresponde con uno de los asuntos problemáticos que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a un problema: no reconocen todas las condiciones establecidas en la hipótesis ni la diferencia entre hipótesis y tesis de un enunciado condicional.

La Propuesta 8.2 es correcta; sin embargo, como lo que se busca es justificar la construcción, es importante darle respaldo teórico al uso de la circunferencia, pues este objeto geométrico se introduce al sistema teórico solo después de estudiar la semejanza de triángulos. La circunferencia se usa en la construcción para localizar en la $\overleftrightarrow{CM}$ el punto D tal que $DC = CM$. Esta acción, localizar un punto en una recta, a una distancia preestablecida de un punto de la recta, es la misma de la Propuesta 8.3 pero el proceso es diferente. Ello, porque localizan el punto en un rayo usando la herramienta *transferencia de medidas.* Esta última construcción ilustra de manera fiel el teorema que se introduce para validar estos pasos.

Teorema Localización de puntos Sean r un número real positivo y el $\overrightarrow{AC}$. Entonces existe un único punto $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD=r$.

La demostración de este teorema se basa en el *Postulado Recta – números reales*, la definición de rayo y el *T. Orden - interestancia* (ver ejercicio 12.) Es importante analizar con los estudiantes por qué son necesarios los pasos 8 a 16, pues es frecuente que ellos piensen que con el paso 7 se ha terminado la demostración.

NOTA: Cabe anotar que en este momento se introduce el diagrama-deducción de dos columnas, por cuanto las justificaciones de aquí en adelante, son algo extensas y este formato facilita la escritura de las demostraciones.

A continuación se presenta la justificación de la Propuesta 8.3.

Página siguiente →

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. *A, B y C* puntos no colineales	Dado
2. Construimos $\overline{AB}$	P. Dos puntos - recta y D. Segmento (1)
3. Construimos H punto medio $\overline{AB}$	T. Existencia de punto medio (2)
4. Construimos $\overrightarrow{CH}$	P. Dos puntos - recta y D. rayo (2)
5. $CH > 0$	P. Puntos - número (1)
6. Sea $D \in \overrightarrow{CH}$ tal que $CD= 2CH$	T. Localización de puntos (4, 5)

Con estos pasos se garantiza la existencia del punto D; faltaría demostrar que H es punto medio del $\overline{CD}$. Esta demostración implica asegurar la interestancia C - H - D; para ello es necesario introducir el siguiente teorema:

Teorema Desigualdad - interestancia Si $AB < AC$ y $C \in \overrightarrow{AB}$ entonces $A - B - C$.

Continuando con la demostración de la propuesta 8.3,

Afirmación	Garantía y datos
7. $CD > CH$	Prop. Números reales (6)
8. $C - H - D$	T. Desigualdad - interestancia (7)
9. $CH + HD = CD$	D. Interestancia (8)
10. $CH + HD = 2CH$	Pr. de sustitución (6,9)
11. $HD = CH$	Prop. Números reales (10)
12. H es punto medio de $\overline{CD}$	D. Punto medio (8, 11)
13. $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ se bisecan	D. Bisecar (12,3)

La demostración del *T. Desigualdad - interestancia* se hace por el método indirecto dando lugar al estudio de dos casos; debe usarse la *D. interestancia*.

Desde un punto de vista teórico, la Propuesta 8.2 difiere de la anterior porque en el paso 5 se construye el rayo opuesto al $\overrightarrow{CH}$ y se localiza en él el punto D tal que $HD = CH$. Ello implica introducir la definición del rayo opuesto y el teorema que garantice su existencia.

Definición Rayo opuesto $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son opuestos si A–B–C.

Teorema Existencia rayo opuesto Dado $\overrightarrow{BA}$, existe un $\overrightarrow{BC}$ opuesto al $\overrightarrow{BA}$.

Ejercicios

El tipo de tarea que introducimos en el siguiente ejercicio tiene como objetivo proveer a los estudiantes el esquema de una demostración en la que no se dan las justificaciones de cada paso. Trabajando en grupos, los estudiantes proveen lo que creen son las justificaciones. Esta actividad pretende apoyar a los estudiantes en el reconocimiento del desarrollo lógico de la demostración, afianzar la comprensión de lo que expresa cada elemento teórico, promover el aprendizaje de tanto el estatus como el nombre y el contenido de cada elemento teórico usado.

1. Complete el siguiente esquema para demostrar el *Teorema Orden -interestancia.* Los cuadros con el mismo contorno contienen la misma afirmación.

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
A, B y C son colineales $c(A) < c(B) < c(C)$ $c(A) = a$ $c(B) = b$ $c(C) = c$	D. Distancia	
$c(A) < c(B) < c(C)$	D. Menor que	
	D. Valor absoluto	$\|c(A) - c(B)\| =$ $\|c(B) - c(C)\| =$ $\|c(A) - c(C)\| =$
$AB + BC$	Pr. Sustitución	$AB + BC =$

Continúa

$AB + BC =$	Prop. de los reales	$AB + BC =$
$AB + BC =$	Pr. Sustitución	
A, B y C son colineales	D. Interestancia	A - B - C

2. Se asignan a la misma recta tres sistemas diferentes de coordenadas, con igual unidad. Así, a tres puntos fijos y de se le asignan las siguientes coordenadas:

   - En el sistema I, c(A) = - 6, c(B) = - 2.
   - En el sistema II, c(A) = - 4, c(C) = - 3.
   - En el sistema III, c(C) = 7, c(B) = 4.

   ¿Cuál punto está entre los otros dos?

3. Demuestre el *Teorema tres puntos*.

4. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   i. Si $A - B - C$ y $B - C - D$ entonces $A - B - D$ y $A - C - D$
   ii. Si $A - B - C$ y $B - D - C$ entonces $A - B - D$ y $A - D - C$

   Nota: Estas afirmaciones se pueden introducir al sistema teórico como el *Teorema Transitividad de interestancia.*

5. Demuestre el **Teorema Recta – rayo - segmento**: Existe $\overleftrightarrow{AB}$ si y solo si existe $\overline{AB}$ o $\overrightarrow{AB}$. Existe $\overrightarrow{AB}$ si y solo si existe $\overline{AB}$ o $\overleftrightarrow{AB}$.

6. Demuestre el siguiente teorema:

   Teorema Conjunto no vacío Los segmentos y los rayos son conjuntos no vacíos de puntos.

7. Realice, por completo, la demostración del **Teorema Existencia del punto medio.**

8. Demuestre el **Teorema Punto medio**: Si M es punto medio del $\overline{CD}$, entonces la mitad de la medida del $\overline{CD}$ es igual a la distancia de C o D a M.

9. Demuestre:

   a. Si $T \in \overrightarrow{BA}$ y c(B) = 0, c(A) =-2 entonces c(T) < 0.

b. Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son rayos opuestos, ¿se puede hacer la siguiente asignación: c(B) = 0, c(A) = - 2 y c(C) = 3? Explique su respuesta.

10. Se tiene que $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son rayos opuestos, $T \in \overrightarrow{BA}$ y $S \in \overrightarrow{BC}$, T y S diferente de B. Complete el siguiente esquema para demostrar que $T - B - S$.

Afirmación	Garantía y datos
1. $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son rayos opuestos	
2. $T \in \overrightarrow{BA}$ y $S \in \overrightarrow{BC}$	
3. $A - B - C$	
4. Sea $0 = \text{c}(B)$ y $c = \text{c}(C)$, $c > 0$	
5. Sea $a = \text{c}(A)$	
6. $a < 0$	
7. Sea $t = \text{c}(T)$ y $s = \text{c}(S)$	
8. $T \in \overline{BA}$ o $T \in \{Y \mid B - A - Y\}$ $S \in \overline{BC}$ o $S \in \{Y \mid B - C - S\}$	
9. $A - T - B$ o $B - A - T$, $B - S - C$ o $B - C - S$	
10. $t < 0$ y $s > 0$	
11. $T - B - S$	

11. Demuestre:

a **Teorema Existencia rayo opuesto.** Demuestre, además, que el rayo opuesto es único.

b **Teorema Desigualdad – interestancia.**

12. Demuestre el **Teorema Localización de puntos** completando las justificaciones en el siguiente esquema.

Afirmación	Garantía y datos
1. $\overrightarrow{AC}$	
2. $\overleftrightarrow{AC}$	

Continúa →

3. Sea c(A) = 0, c(C)= b, $0 < b$	
4. $r > 0$	
5. Sea $D \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que c(D)= r	
6. $AD = \|r\|$	
7. $AD = r$	
8. $0 < b < r$, $0 < r < b$ o $0 < r = b$	
9. $0 < b < r$	
10. $A - C - D$	
11. $D \in \overrightarrow{AC}$	
12. $0 < r < b$	
13. $A - D - C$	
14. $D \in \overline{AC}$	
15. $D \in \overrightarrow{AC}$	
16. $0 < r = b$	
17. $C = D$	
18. $D \in \overrightarrow{AC}$	

13. Sea m una recta y A un punto de ella. Los puntos de m diferentes de A determinan dos conjuntos, cada uno llamado semirrecta.

    a. Defina semirrecta.
    b. Si C es un punto de una semirrecta y D un punto de la otra, ¿qué puede decir del $\overline{CD}$? Justifique su respuesta.
    c. Si M y N son puntos de la misma semirrecta, ¿qué puede decir del $\overline{MN}$? Justifique su respuesta.

14. Dado un segmento, ¿existen dos puntos que lo trisecan? Justifique su respuesta.

15. Dados dos puntos F y G en la recta m, ¿existe un único punto T en m tal que $FG = 3GT$?

16. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe. Justifique su respuesta. Escriba, haciendo las modificaciones necesarias, lo que sería un teorema relacionado y demuéstrelo.

a. Está dado el $\overrightarrow{AB}$ ¿Es diferente al $\overrightarrow{BA}$?
b. A, B y C son tres puntos de la $\overleftrightarrow{AB}$. y AC = ½ AB. ¿Es C el punto medio del $\overline{AB}$?
c. Se tiene que $Q – R – S$. ¿Es $QR > QS$?
d. Dado $\overline{MN}$, ¿existen dos puntos H y J tal que $\overline{HJ} \subset \overline{MN}$?
e. Sean $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{MQ}$. ¿Se tiene $Q – M – N$?
f. Sean A, B y C tres puntos de la recta k tal que $AC > AB$. ¿Está B entre A y C?
g. ¿La intersección de $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{DC}$ es un segmento?

17. Justifique la Propuesta 8.2.

18. Demostrar la Proposición 3 del libro Elementos de Euclides (tr. 1991): "Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor" (p. 29).

    Reformulación: Dados dos segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$, de longitudes diferentes, $AB > MN$. Existe un punto $C \in \overline{AB}$ tal que $AC=MN$.

Capítulo 4:
Relaciones entre puntos, rectas y planos

Caracterización de un plano

Hasta ahora nos hemos ocupado de estudiar las relaciones entre puntos, teniendo en cuenta que ellos son elementos de rectas. Como característica principal del sistema teórico que se está conformando está la introducción de los números reales al sistema, por medio de la correspondencia que se establece entre los puntos de la recta y los números reales. Ello dio lugar a asignar medidas a distancias. Entre las preguntas que dieron origen a muchos elementos del sistema teórico, se cuentan las que indagan sobre el número de puntos en las diferentes figuras geométricas ya estudiadas. Así que es coherente con lo que hemos venido haciendo formular la siguiente pregunta:

PROBLEMA 9: ¿Cuántos puntos tiene un plano?

Los estudiantes afirman que los planos tienen infinitos puntos. Surgen, con frecuencia, las siguientes propuestas para justificar su afirmación:

Propuesta 9.1 El plano α tiene infinitos puntos porque el *Postulado Conjuntos de puntos* asegura que este es un conjunto no vacío de puntos.

Propuesta 9.2 Se tiene un plano α, hay un punto $P \in \alpha$. Hay infinitas rectas en α que contienen a P. Las rectas tienen infinitos puntos. Por tanto, α tiene infinitos puntos.

Propuesta 9.3 Se tiene la recta m y hay un plano α tal que $m \subset \alpha$. m tiene infinitos puntos. Por tanto, α tiene infinitos puntos.

Propuesta 9.4 Un plano tiene al menos dos puntos. Dos puntos determinan una recta y la recta tiene infinitos puntos. Por tanto, el plano tiene infinitos puntos.

El argumento en la primera propuesta es similar al que dieron los estudiantes cuando se indagó sobre el número de puntos en una recta. De nuevo, se destaca que la alusión a “conjuntos de puntos” en el *P. Conjuntos de puntos* no significa que el conjunto en cuestión tenga más de un elemento. Analizando diferencias entre las propuestas, se ve que la segunda y la cuarta parten de lo dado: un plano; la tercera no lo hace, razón por la cual se descarta como posible justificación para la respuesta al Problema 9. Es de notar que las tres propuestas que quedan suponen que las rectas son subconjuntos de los planos: la tercera, de manera explícita, y la segunda y cuarta, de manera implícita. Los argumentos dados anteriormente se basan en tres suposiciones que hacen los estudiantes pero que no manifiestan:

Suposición 9.1 Dada una recta m, existe un plano que la contiene.
Suposición 9.2 Un plano tiene por lo menos dos puntos.
Suposición 9.3 Hay infinitas rectas en un plano α que contienen a P.

Para justificar la primera suposición, es necesario introducir el siguiente postulado.

Postulado Puntos – plano Dados tres puntos existe un plano que los contiene y si los tres puntos no son colineales, existe un único plano que los contiene.

Para justificar la Suposición 9.3, se necesita un postulado:

Postulado Llaneza del plano Si dos puntos pertenecen a un plano, entonces la recta que los contiene está en el mismo plano.

Pero la discusión en torno a la Propuesta 9.4 y la Suposición 9.2 lleva al siguiente argumento: si solo podemos asegurar que un plano tiene dos puntos entonces no habría diferencias entre un plano y una recta. Así, se genera la necesidad de exigir que un plano tenga al menos otro punto que no sea colineal con los otros dos. Con ello se llega a establecer el siguiente postulado.

Postulado Plano – puntos Un plano tiene por lo menos tres puntos no colineales.

Ya se tienen los elementos teóricos para demostrar la siguiente afirmación, que no recibirá un nombre pues no será parte del sistema teórico que se está conformando. Este solo contendrá los elementos que se requieren para demostrar afirmaciones que serán teoremas del sistema teórico.

Suposición 9.3 Si α es un plano y P es un punto de α, entonces hay infinitas rectas del plano α que contienen a P (Figura 11).

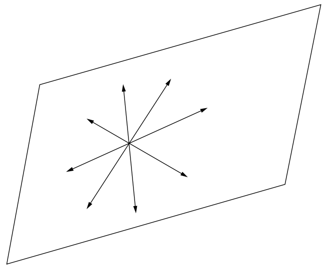


Figura 11

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $P \in \alpha$, α plano	Dado
2. Existen A y B en α tales que A, B y P no son colineales	P. Plano – puntos (1)
3. Existe $\overleftrightarrow{AB}$	P. Dos puntos – recta (2)
4. $\overleftrightarrow{AB}$ está en α	P. Llaneza del plano (2,3)
5. Existen C_1, C_2, …,C_n, … en $\overleftrightarrow{AB}$	T. Recta – infinitos puntos (3)
6. C_1, C_2, …,C_n, … $\in \alpha$	D. Subconjunto (4,5)
7. Existen $\overleftrightarrow{PC_1}$, $\overleftrightarrow{PC_2}$, ,…, $\overleftrightarrow{PC_n}$, …	P. Dos puntos – recta (2,5)
8. $\overleftrightarrow{PC_1}$, $\overleftrightarrow{PC_2}$, ,…, $\overleftrightarrow{PC_n}$, … están en α	P. Llaneza del plano (1,6)

Con la demostración de la primera suposición, usando el *P. Puntos – plano*, y habiendo ya justificado la tercera, se pueden demostrar las Propuestas 9.2 y 9.3.

En este punto, se puede sugerir a los estudiantes otra situación respecto a la relación entre puntos, rectas y planos que puede aprovecharse para ilustrar cómo pueden diferir los sistemas teóricos para una misma teoría matemática. La idea es mostrar que hay dos postulados que son equivalentes y que cualquiera de los dos se puede tomar como postulado con lo cual la otra afirmación es un teorema.

PROBLEMA 10: ¿Cuántos planos contienen a una recta dada m y a un punto $C \notin m$?

La conjetura propuesta por los estudiantes como respuesta a esta situación es:

Teorema Recta y punto – plano Si C es punto dado y m una recta tales que $C \notin m$, entonces existe un plano α que los contiene.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. m recta, C punto, $C \notin m$	Dado
2. Existen $A, B \in m$	T. Recta – infinitos puntos (1)
3. A, B, C no colineales	D. Colinealidad (1,2)
4. Existe un único plano α tal que $A, B, C \in \alpha$	P. Puntos - plano (3)
5. $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$	P. Llaneza del plano (4)
6. $m = \overleftrightarrow{AB}$	P. Dos puntos - recta (unicidad) (2)
7. $m \subset \alpha$	Pr. Sustitución (5,6)
8. $C \in \alpha$ y $m \subset \alpha$	Conjunción (4,7)

Terminada la demostración se plantea la siguiente pregunta: ¿Es posible demostrar el *P. Puntos – plano* ii. a partir del teorema anterior? La respuesta positiva lleva a la siguiente justificación:

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. A, B, C no colineales	Dado
2. Existe m recta tal que $A, B \in m$	P. Dos puntos- recta (1)
3. $C \notin m$	D. Colinealidad (1,2)
4. Existe un único plano α tal que $m \subset \alpha$ y $C \in \alpha$	T. Punto y recta-plano (2,3)
5. $A, B \in \alpha$	D. Subconjunto (2,4)
6. A, B y $C \in \alpha$	Conjunción (4,5)

En este momento, se debe decidir cuál de los dos enunciados, el relativo a la relación entre recta, punto y plano o el relativo a los puntos en el plano, se tomará como postulado y cuál como teorema. La discusión se aborda con los estudiantes con el fin de que comprendan asuntos de índole metamatemática respecto a la construcción de un sistema axiomático, que es arbitraria. En nuestro caso, optamos por dejar el segundo enunciado como *P. Puntos-plano*.

Finalmente, se tiene el siguiente teorema:

Teorema Dos rectas – plano Si m y k son dos rectas que se intersecan, entonces existe un único plano que las contiene.

Caracterización de semiplanos

De manera análoga a la forma como se introdujo el concepto de semirrecta, se introduce la definición de semiplano, y se indaga sobre las relaciones de los segmentos y los semiplanos, para puntos en diferentes posiciones.

Definición de Semiplanos Una recta m separa al plano α en dos subconjuntos H y K, llamados semiplanos (Figura 12) tales que:
1. $H \cap m = \emptyset$ y $K \cap m = \emptyset$
2. $H \cap K = \emptyset$
3. $H \cup K \cup m = \alpha$

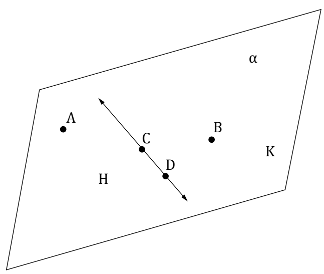


Figura 12: Semiplanos H y K

Nota El semiplano H se denota con $S_{\overleftrightarrow{CD},A}$ o $S_{m,A}$ si la recta que separa al plano se llama m (Figura 12); a su vez el semiplano K se denota con $S_{m,B}$ o $S_{\overleftrightarrow{CD},B}$, B). Si $X \notin S_{m,B}$ significa que $X \in m$ o $X \in S_{m,A}$. Cuando A y B están en distintos semiplanos determinados por una recta m en un plano α se usará la siguiente notación: $B \in S_{m,\sim A}$.

El hecho de que el plano sea la unión de los semiplanos y la recta, y que cada dos de los tres conjuntos sean disyuntos es sumamente importante, y se usará con mucha frecuencia en las demostraciones que siguen. Nos referiremos a esta propiedad específica de la definición como "unión disyunta".

Definición Unión disyunta Un conjunto K es la unión disyunta de los conjuntos A y B si: i. $K = A \cup B$ y ii. $A \cap B = \emptyset$.

PROBLEMA 11: ¿Qué puede decir sobre el $\overline{AB}$ si:

a. A y B son dos puntos cualesquiera del mismo semiplano determinado por la recta m en un plano α?
b. A y B son dos puntos cualesquiera de semiplanos distintos determinados por una recta m en un plano α?

Las respuestas a estas dos preguntas llevan a introducir una definición y un postulado, este último para posibilitar la demostración de la conjetura correspondiente a la parte (b) del problema anterior.

Definición Conjunto convexo Sea A un conjunto de puntos. A es un conjunto convexo si la siguiente afirmación es verdadera para todo par de puntos del conjunto: Si X y Y son dos puntos cualesquiera de A, entonces $\overline{XY}$ es subconjunto de A.

Esta definición es un buen ejemplo para mostrar que aceptar como verdaderas condicionales con antecedente falso permite dar definiciones generales que incluyan casos especiales. Específicamente, según esta definición tanto el conjunto vacío como el conjunto de un solo punto son conjuntos convexos. En este momento, si no se ha hecho antes, se estudia la tabla de verdad de la proposición condicional, o, de lo contrario, se trae a cuenta para explicar porque la propiedad condicional sí es verdadera cuando el conjunto es unitario.

Para ayudar a aclarar la noción de conjunto convexo, es conveniente mencionar la diferencia entre polígono convexo y conjunto de puntos convexo. Por ejemplo, un triángulo es un polígono convexo pero no es un conjunto convexo.

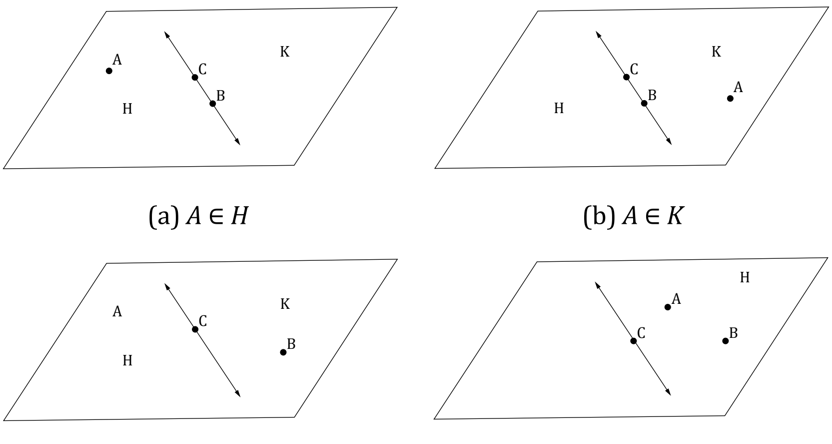
Postulado Separación del plano Sea α un plano, m una recta en el plano y H y K los semiplanos determinados por m en α.
1. H y K son conjuntos convexos.
2. Si $A \in H$ y $B \in K$ entonces $\overline{AB} \cap m \neq \emptyset$.

Con el ánimo de profundizar más en las características de los semiplanos, se propone el siguiente problema.

PROBLEMA 12:

a. ¿Podemos garantizar que los semiplanos determinados por la recta m en el plano α tienen un punto?
b. Si tienen un punto, ¿tiene infinitos puntos?
c. Sean H y K los semiplanos determinados por la recta m en el plano α. Si H tiene un punto, ¿podemos garantizar que K tiene por lo menos un punto?

No podemos responder la primera pregunta afirmativamente dado que el *P. Plano - puntos*, que es el pertinente para poder justificar la existencia de puntos en un plano, da lugar a cuatro posibles situaciones de los tres puntos no colineales (Figura 13):



(a) $A \in H$ (b) $A \in K$

(c) $A \in H$ y $B \in K$ (c) $A, B \in H$ [o $A, B \in K$]

Figura 13: Posibilidades de la existencia de puntos en un plano

Lo anterior muestra que no es suficiente el uso de ese postulado para afirmar que los dos semiplanos tienen por lo menos un punto. A lo más se puede asegurar que uno de los semiplanos tiene un punto (*T. del Semiplano*). Es por ello que las otras dos preguntas tienen sentido.

Teorema del Semiplano Uno de los semiplanos determinados por una recta en un plano tiene por lo menos un punto.

Para justificar la respuesta afirmativa a la pregunta del literal 12 (b), los estudiantes proponen tomar un punto en la recta que determina el semiplano y el punto que existe en el semiplano (cuya existencia se asegura con el *T. del Semiplano*). Aluden a que el segmento cuyos extremos son esos puntos está contenido en el semiplano y dado que el segmento tiene infinitos puntos, el semiplano también los tendrá.

Relaciones entre puntos y semiplanos

En la discusión de la propuesta que se acaba de mencionar, se aclara que el segmento no está contenido en el semiplano puesto que uno de sus extremos está en la recta. No obstante, la propuesta conduce a estudiar si los demás puntos del segmento sí están en el mismo semiplano en el que se encuentra el otro extremo. Esto conduce al siguiente teorema:

Teorema Puntos en el mismo semiplano Dado el plano α, la recta m en α y A un punto de m. Si $C - D - A$ o $D - C - A$ donde C es un punto en uno de los semiplanos determinados por m en α, entonces C y D están en el mismo semiplano.

Para el desarrollo de la demostración conviene reformular el teorema anterior en términos específicos, pues la notación facilita la comunicación.

Reformulación Teorema Puntos en el mismo semiplano Dada m una recta en un plano α, sean H y K los semiplanos determinados por m en α, y A, D y C puntos de α. Si $C \in H$, $A \in m$ y $C - D - A$ o $D - C - A$, entonces $D \in S_{m,C}$ (o de otro modo, $D \in H$) (Figura 14).

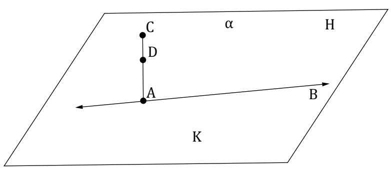


Figura 14

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. m una recta en un plano α	Dado
2. Sean H y K los semiplanos determinados por m en α	D. Semiplano (1)
3. $C \in H$	Dado
4. $A \in m$	Dado
5. $C–D–A$ o $D – C – A$	Dado
6. $D \notin S_{m,C}(H)$	Negación de la conclusión
7. $H \cup K \cup m = \alpha$, (unión disyunta)	D. Semiplano (2)
8. (i) $D \in m$ o (ii) $D \in S_{m,\sim C}\,(K)$	D. Unión disyunta (7)
9. $D \in m$	Caso (i)
10. C, D y A son colineales	D. Interestancia (5)
11. Existe recta l tal que $C, D, A \in l$	D. Colinealidad (10)
12. $A, C \in \overleftrightarrow{CA}$; $C, A \in \overleftrightarrow{CD}$	P. Dos puntos - recta (existencia) (11)
13. $\overleftrightarrow{CD} = l$; $\overleftrightarrow{CA} = l$	P. Dos puntos - recta (unicidad) (11)
14. $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CA}$	Prop. Transitiva (13)

En este momento se interrumpe la demostración que sugieren los estudiantes para comentar que los pasos 10, 11, 12, 13 y 14 que ellos proponen pueden ser modificados de la siguiente forma:

10. C, D y A son colineales	D. Interestancia (5)
11. *Sea* $\overleftrightarrow{CD}$	P. Dos puntos - recta (10)
12. $A \in \overleftrightarrow{CD}$	D. Colinealidad (11)

Hasta el momento no se ha mencionado el hecho de que dos rectas que se intersecan lo hacen en un único punto porque no había surgido la necesidad. Pero para poder llegar a una contradicción, es necesario introducirlo. Para facilitar la comprensión del desarrollo de la demostración del *T. Puntos en el mismo semiplano*, se hará la demostración del *T. Intersección de rectas* una vez finalizada la demostración del teorema que nos ocupa en este momento.

13. $A \in m$ y $A \in \overleftrightarrow{CD}$	Conjunción (4,12)
14. $D \in m$ y $D \in \overleftrightarrow{CD}$	Conjunción (9,11)
15. $A \in m \cap \overleftrightarrow{CD}$ y $D \in m \cap \overleftrightarrow{CD}$	D. Intersección (13,14)
16. $A = D$	T. Intersección de rectas (15)
17. $A = D$ y $C - D - A$ o $A = D$ y $D - C - A$	Conjunción (5,16)
18. $D \notin m$	Pr. de reducción al absurdo (17) (D. Interestancia)
19. $D \in S_{m,\sim C}$	Caso (ii)
20. $\overline{CD} \cap m \neq \emptyset$	P. Separación del plano (19)
21. Sea $\{X\} = \overline{CD} \cap m$	T. Intersección rectas (20)
22. $X \in \overline{CD}$ y $X \in m$	D. Intersección (21)
23. $\overline{CD} \subset \overleftrightarrow{CD}$	T. Recta-rayo-segmento (11)
24. $X \in \overleftrightarrow{CD}$ y $X \in m$	D. Subconjunto (22)
25. $X \in m \cap \overleftrightarrow{CD}$ y $A \in m \cap \overleftrightarrow{CD}$	D. Intersección (23)
26. $X = A$	T. Intersección de rectas (24)
27. $C - X - D$ [¿Por qué X no puede ser C ni D?]	D. Segmento (22)
28. $C - A - D$	Pr. Sustitución (25,26)
29. $C - D - A$ y $C - A - D$ *o* $D - C - A$ y $C - A - D$	Conjunción (5,27)
30. $D \notin S_{m,\sim C}$	Pr. Reducción al absurdo (28) (Contradice T. Tres puntos)
31. $D \in S_{m,C}$	Pr. Reducción al absurdo (6,8,29)

Teorema Intersección de rectas Si dos rectas distintas, m y l, se intersecan entonces su intersección es un único punto.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. Sean m y l dos rectas distintas	Dado
2. $m \cap l \neq \emptyset$	Dado
3. Sean A y B puntos tales que $A, B \in m \cap l$	Negación de la conclusión
4. $A \in l$ y $A \in$ m; $B \in l$ y $B \in m$	D. Intersección de conjuntos (3)
5. Sea $\overleftrightarrow{AB}$	P. Puntos - recta (4)
6. $\overleftrightarrow{AB} = m$ y $\overleftrightarrow{AB} = l$	P. Puntos –recta (unicidad) (5,4)
7. $m = l$	Transitividad de igualdad (6)
8. $m = l$ y $m \neq l$	Conjunción (1,7)
9. $m \cap l$ es un único punto	Pr. Reducción al absurdo(8)

Recordando que todos los elementos teóricos anteriores surgieron para justificar que todo semiplano tiene infinitos puntos, en ese esfuerzo se sigue notando que hasta ahora solo se puede asegurar que el semiplano del que podíamos aseverar que tiene un punto, tiene infinitos puntos. Así que, es pertinente preguntar lo siguiente: Toda recta que está en el plano α y que contiene a B, ¿tiene puntos en H?

Para continuar con la propuesta de los estudiantes de mostrar que el semiplano también se extiende infinitamente como el plano, es necesario introducir el siguiente teorema:

Teorema de la Semirrecta Si un punto de una semirrecta está en un semiplano determinado por una recta que contiene el extremo de la semirrecta, entonces esta está contenida en el semiplano (Figura 15).

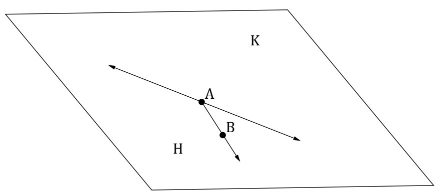


Figura 15

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. α plano, m recta, $m \subset \alpha$	Dado
2. H, K semiplanos determinados por m	Dado
3. semirrecta AB con $A \in m$	Dado
4. Sin perder generalidad, se puede decir que $B \in H$	T. Semiplano (2)
5. Sea un punto X tal que $X \in$ semirrecta AB	D. Conjunto
6. $X \neq A$ y $X \in \overrightarrow{AB}$	D. Semirrecta (5)
7. $X \in \overline{AB}$ o $X - B - A$	D. Rayo (6)
8. $A - X - B$ o $X - B - A$ [¿Por qué X no puede ser ni A ni B?]	D. Segmento (7)
9. $X \in H$	T. Puntos en el mismo semiplano (4,8)
10. semirrecta $AB \subset H$	D. subconjunto (5,9)

Teorema Puntos en distintos semiplanos Si D, E y F son puntos colineales, $D - E - F$ y m es una recta que contiene a E, $m \neq \overleftrightarrow{DF}$, entonces D y F están en distintos semiplanos determinados por m (Figura 16).

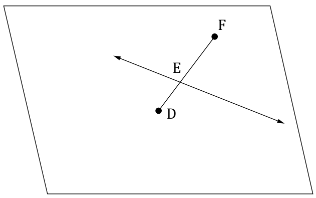


Figura 16

Para este último teorema, generalmente los estudiantes sugieren dos demostraciones: una indirecta y otra directa. Solo la primera resulta correcta pues en la segunda se cometen dos errores que hay que destacar pues suelen suceder. Primero, presentamos la demostración indirecta del teorema.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $D - E - F$	Dado
2. $E \in m$, m recta	Dado
3. $E \in \overline{DF}$	D. Segmento (1)
4. $m \neq \overleftrightarrow{DF}$	Dado
5. $\overline{DF} \cap m = \{E\}$	T. Intersección rectas (2,3)
6. Sea α el plano determinado por m y $\overleftrightarrow{DF}$	T. Dos Rectas - plano (4)
7. α es la unión disyunta de $S_{m,F}$, $S_{m,\sim F}$ y m	D. Semiplano (6)
8. *i*) $D \in m$ o *ii*) $D \in S_{m,F}$ o *iii*) $D \in S_{m,\sim F}$	D. Unión disyunta (7)
9. $D \in m$	Caso 1
10. $\overline{DF} \cap m = \{D\}$	T. Intersección de rectas (10,4)
11. $D = E$	Pr. Sustitución (11,5)
12. D, E y F son puntos distintos	D. Interestancia (1)
13. $D = E$ y D, E y F son puntos distintos	Conjunción (12,13)
14. $D \notin m$	Pr. Reducción al absurdo (14)
15. $D \in S_{m,F}$	Caso 2
16. $S_{m,F}$ es un conjunto convexo	P. Separación del plano (6)
17. $\overline{DF} \subset S_{m,F}$	D. Conjunto convexo (9)
18. $E \in S_{m,F}$	D. Subconjunto (3,18)
19. $E \in S_{m,F} \cap m$	D. Intersección de conjuntos (2,19)
20. $S_{m,F} \cap m \neq \emptyset$	D. Conjunto vacío (20)
21. $S_{m,F} \cap m = \emptyset$	D. Semiplano (unión disyunta) (7)
22. $S_{m,F} \cap m = \emptyset$ y $S_{m,F} \cap m \neq \emptyset$	Conjunción (21,22)
23. $D \notin S_{m,F}$	Pr. Reducción al absurdo (23)
24. $D \in S_{m,\sim F}$	MTP (9,15,24)

Con este teorema queda respondida de manera afirmativa la Pregunta 12 c.

La demostración directa que proponen los estudiantes para el *T. Puntos en distintos semiplanos*, y que no es correcta, es:

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $D - E - F$	Dado
2. $E \in m$, m recta, $m \subset \alpha$, α plano	Dado
3. $\overline{DF} \subset \overleftrightarrow{DF}$	T. Subconjunto de recta (1)
4. $E \in \overline{DF}$	D. Segmento (1)
5. $E \in \overleftrightarrow{DF}$	D. Subconjunto (2, 3)
6. $\overline{DF} \cap m = \{E\}$	T. Intersección rectas (2,5)
7. Existe plano α tal que $\overleftrightarrow{DF} \subset \alpha$ y $m \subset \alpha$	T. Dos Rectas - plano (2,3)
8. Sean H y K semiplanos determinados por m	D. Semiplano (7)
9. $D \in H$ y $F \in K$	P. Separación del plano (ii) (6,8)

El primero de los problemas que se evidencian en esta demostración es que el plano α ya está dado en el paso 2 como uno de los que contiene a la recta m luego no puede darse su existencia en el paso 7; tampoco puede asegurarse que ese es el que también contiene a la $\overleftrightarrow{DF}$. Por otro lado, en el paso 9 se usa la proposición recíproca de la parte ii. del *Postulado Separación del plano* como si fuese equivalente a lo establecido en ese postulado. Es decir, aquí hay un claro ejemplo de la Actuación problemática 2. La discusión acerca de la invalidez del paso 9, debido a que se está usando como garantía una afirmación que no es parte del sistema teórico, lleva a cuestionar si esa afirmación es verdadera. De ello, surgen los siguientes dos teoremas:

Teorema Segmento-extremos en un semiplano Sea α un plano que contiene al $\overline{AB}$ y a la recta n. Si $\overline{AB} \cap n = \emptyset$, entonces A y B están en el mismo semiplano determinado por n (Figura 17).

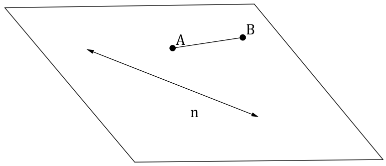


Figura 17

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. α plano, n recta, $n \subset \alpha$	Dado
2. $\overline{AB} \subset \alpha$; $\overline{AB} \cap n = \emptyset$	Dado
3. $A, B \in \overline{AB}$	D. Segmento (2)
4. $A \notin n$ y $B \notin n$	D. Conjunto vacío (2)
5. Sean H y K semiplanos determinados por n en α	D. Semiplano (1)
6. $A \in H$ y $B \in K$	Negación de la conclusión (5)
7. $\overline{AB} \cap n \neq \emptyset$	P. Separación del plano (ii) (6)
8. $\overline{AB} \cap n = \emptyset$ y $\overline{AB} \cap n \neq \emptyset$	Conjunción (2,7)
9. $A \in H$ y $B \in H$ o $A \in K$ y $B \in K$	Pr. Reducción al absurdo (4,8)

Teorema Extremos-segmento en un semiplano Dados el plano α y una recta l tales que $l \subset \alpha$, $A, B \in \alpha$, $A \notin l$ y $B \notin l$. Si A y B están en el mismo semiplano determinado por l, entonces $\overline{AB} \cap l = \emptyset$ (Figura 18).

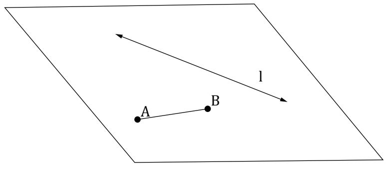


Figura 18

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. α plano, l recta, $l \subset \alpha$	Dado
2. $A, B \in \alpha$	Dado
3. Sean H y K semiplanos determinados por l en α	D. Semiplano (1)
4. $A \in H$ y $B \in H$	Dado (sin perder generalidad)
5. $A \notin K$ y $B \notin K$	D. Semiplano (3)
6. H es conjunto convexo	P. Separación del plano (i) (3)
7. $\overline{AB} \subset H$	D. Conjunto convexo (4,6)
8. $l \cap H = \emptyset$	D. Semiplano (3)
9. $\overline{AB} \cap l = \emptyset$	D. Subconjunto (7,8)

Ejercicios

1. Demuestre: Un conjunto de puntos convexo es vacío, unitario o tiene infinitos puntos.

2. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No, o No se sabe. Si la respuesta es Sí, formule el hecho geométrico correspondiente y provea la demostración. Si la respuesta es No se sabe o No, justifíquela utilizando una representación gráfica y elementos del sistema teórico.

   a. W es un conjunto de dos puntos, A y B. ¿W es un conjunto convexo?
   b. ¿La unión de dos semiplanos, de un mismo plano, es un conjunto convexo?
   c. A es un punto. ¿Es $\{A\}$ un conjunto convexo?
   d. ¿Existen dos rectas?
   e. El $\overline{MN}$ es subconjunto del conjunto de puntos E. ¿E es un conjunto convexo?
   f. Dado que H y J son semiplanos contenidos en el plano α, ¿ es $H \cup J = \alpha$?

g. ¿La unión de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo?
h. ¿La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo?
i. Dada una recta, ¿existe un plano que la contiene?

3. Si una recta m que no está en el plano α lo interseca, ¿puede la intersección tener más de un punto? Justifique su respuesta.

4. Complete las justificaciones en la demostración de la siguiente afirmación:

Un segmento es un conjunto convexo.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\overline{MN}$	
2. Sean $X, Y \in \overline{MN}$	
3. $M-X-N$ y $M-Y-N$	
4. $M-X-Y-N$ o $M-Y-X-N$	
5. $\overleftrightarrow{DF}$	
6. $\overline{XY}$	
7. Sea $Z \in \overline{XY}$	
8. $X-Z-Y$	
9. $M-Z-N$	
10. $Z \in \overline{MN}$	
11. $\overline{XY} \subset \overline{MN}$	
12. $\overline{MN}$ es un conjunto convexo	

5. Demuestre la siguiente afirmación, conocida como el Axioma de Pasch:

Teorema Axioma de Pasch Dado el plano α, A, B y C tres puntos no colineales y la recta m, tales que $A, B, C, m \subset \alpha$. Si $m \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ y m no contiene ni a A, ni a B ni a C, entonces $m \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ o $m \cap \overline{AC} \neq \emptyset$.

Es importante destacar aquí que, siendo una disyunción lo que se va a demostrar, el método consiste en negar una de las dos proposiciones de la disyunción y demostrar que la otra es válida. Para comprender la validez de este método de demostración, conviene recordarles a los estudiantes la tabla de verdad de la disyunción.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. A, B y C tres puntos no colineales y recta m; $A, B, C, m \subset \alpha$	
2. $m \cap \overline{AB} \neq \emptyset$	
3. A, B y $C \notin m$	
4. Suponga que $m \cap \overline{BC} = \emptyset$	
5. Sea $D \in m \cap \overline{AB}$	
6. $D \in \overline{AB}$ y $D \in m$	
7. $D \neq A$, $D \neq B$	
8. $A - D - B$	
9. Sean H y K los semiplanos determinados por m en α	
10. Sean $S_{m,B} = H$ y $S_{m,A} = K$ (sin perder generalidad)	
11. $C \in S_{m,B}$	
12. $C \notin S_{m,A}$	
13. $m \cap \overline{AC} \neq \emptyset$	

6. Discuta si el *T*. Puntos en el mismo semiplano es o no equivalente a la siguiente afirmación: Si A, B y C son tres puntos tales que $A - B - C$, entonces cualquier recta m que contenga al punto A, $m \neq \overleftrightarrow{AC}$, deja a B y a C en el mismo semiplano.

Capítulo 5:
Ángulos

Con el siguiente problema se pretende motivar una conversación instruccional sobre qué es un ángulo, la cual debe concluir con el establecimiento de la definición de tal objeto geométrico y su inclusión en el sistema axiomático en construcción. El Problema 13 pone en juego la noción de ángulo que tienen los estudiantes , la que no necesariamente coincide con la dada por Hilbert (1862-1943), en su libro Los Fundamentos de la Geometría: *la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y están contenidos en rectas diferentes* (Hilbert, 1899). En sus soluciones, generalmente los estudiantes proveen una noción de ángulo relacionada con la definición que al respecto dio A. Arnauld (1612-1694) , en su texto Nuevos Elementos de Geometría, Libro VIII: *parte de un plano comprendida entre dos semirrectas que tienen origen común* (Arnauld, 1683)o con la de Euclides (siglo IV a. C.): *la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta* que retoma A.C. Clairaut (1713-1765) *la inclinación de una línea sobre otra* (Clairaut, 1881) Las varias y diversas respuestas de los estudiantes dan pie para hacer explícitas las definiciones más frecuentemente usadas en el ámbito escolar, y para poner de manifiesto cuán disímiles son los respectivos objetos a los que hacen referencia: inclinación se refiere a una relación, parte de un plano se refiere a una región, y unión de dos rayos se refiere a una figura geométrica. El problema pone en juego la noción en vez de pedir directamente que se dé una definición pues es posible que un estudiante, o bien, recite de memoria un enunciado correcto sin la suficiente comprensión, o bien, pueda no tener el respectivo vocabulario para comunicar su idea aunque tenga una comprensión adecuada.

Caracterización de un ángulo

PROBLEMA 13: Dados $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Describa: $\angle ABC \cap \angle ACB$.

Se solicita a los estudiantes que escriban su definición de ángulo. Generalmente, proponen las siguientes.

Propuesta 13.1 Un ángulo es la región entre dos rayos que comparten su extremo.

Propuesta 13.2 Un ángulo es la amplitud resultante de la unión de un $\overrightarrow{AB}$ y otro $\overrightarrow{AC}$

Propuesta 13.3 Es la abertura que se da entre dos rayos que comparten su punto inicial.

Propuesta 13.4 Son dos rayos que comparten un punto en común y la región entre ellos.

Propuesta 13.5 Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ cuyo punto de origen es A, el ángulo está constituido por los dos rayos.

Presentadas estas afirmaciones, se analizan para determinar exactamente a qué se refieren. Las Propuestas 13.1 y 13.4 se refieren a una región del plano (Figura 19).

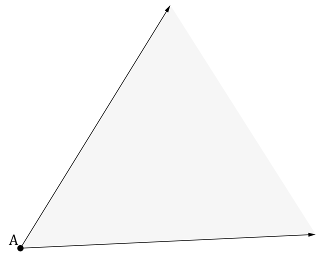


Figura 19

Las Propuestas 13.2 y 13.3 parecen traer a cuenta la medida del ángulo (Figura 20).

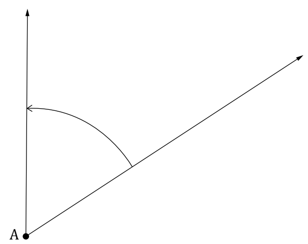


Figura 20

A la Propuesta 13.5 le faltan condiciones para que se corresponda con la definición de Hilbert, que es la que se adopta en el curso:

Definición de ángulo Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo extremo y que no son colineales (Figura 21).

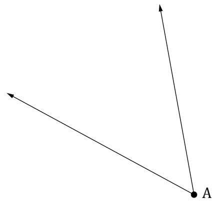


Figura 21

Una característica esencial de los ángulos y necesaria para desarrollar la teoría asociada a estos objetos, es que ellos son figuras coplanares.

Teorema Ángulo figura coplanar Un ángulo es una figura coplanar.

Caracterización de interior de ángulo

Dado que entre los estudiantes predomina la idea de ángulo como región, es indispensable establecer la diferencia entre ángulo y región angular o interior de ángulo. Para ello, se propone el siguiente problema:

PROBLEMA 14: Defina la región a la que se refieren las Propuestas 13.1 y 13.4.

Las respuestas más frecuentes al Problema 14 generan dos propuestas para definir interior de un ángulo, a saber:

Propuesta 14.1 El interior de un ángulo es la región convexa determinada por el ángulo.

Propuesta 14.2 El interior de un ángulo es el conjunto de todos los segmentos cuyos extremos son puntos, uno en cada lado del ángulo, sin incluir los extremos.

De estas, una se convierte en definición y la otra en teorema. La definición que se establece es la siguiente:

Definición de interior de un ángulo Dado el $\angle ABC$, el interior del $\angle ABC$ es la intersección del semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{BC}$ en el cual está A con el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{BA}$ en el cual está C (Figura 22).

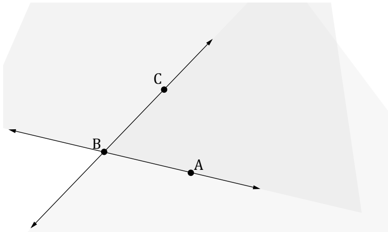


Figura 22

La definición anterior se puede simbolizar así:

$$int\angle ABC = S_{\overleftrightarrow{BC},A} \cap S_{\overleftrightarrow{BA},C}$$

Con esta definición se puede demostrar que el interior de un ángulo es un conjunto convexo. De la Propuesta 14.2, surge el siguiente teorema:

Teorema Punto en el interior de ángulo Dado el $\angle ABC$, si E un punto cualquiera en el $\overrightarrow{BA}$, F un punto cualquiera en el $\overrightarrow{BC}$ con E y F diferentes de B, y X un punto tal que $E - X - F$, entonces $X \in int\angle ABC$. (Figura 23)

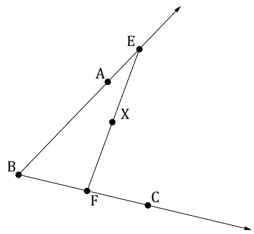


Figura 23

La introducción del concepto de paralelismo, más adelante, hace posible demostrar que la caracterización de interior de ángulo dada en el teorema anterior es equivalente a la definición que se da para el interior de un ángulo.

Ángulos congruentes

Reconocemos que el siguiente problema se puede resolver utilizando representaciones con lápiz y papel. No obstante, resolverlo con Cabri es una tarea interesante porque genera la oportunidad de emplear una herramienta del software que sustituye al transportador y discutir sobre cuáles elementos deben incluirse en el sistema teórico para que sea válido el uso de esa herramienta.

PROBLEMA 15: Dado un ángulo *A* en Cabri, describa dos procesos diferentes para construir un ángulo congruente a este. ¿Qué le permite garantizar que son congruentes?

La resolución de este problema exige definir la congruencia de ángulos y determinar la forma en que se establece la medida de un ángulo, procedimiento similar al empleado para determinar la distancia entre un par de puntos o la medida de un segmento cuyos extremos son esos puntos. Para ello, procedemos con base en un postulado, formulado por Birkhoff, que establece una correspondencia entre los rayos coplanares con un mismo extremo y los números reales módulo 2π. En Cabri, nuestra herramienta de mediación, para la correspondencia entre los ángulos y sus medidas, usa los números entre 0 y 180; esta situación se refleja en el siguiente postulado:

Postulado Ángulo - número A cada ángulo le corresponde un único número real entre 0 y 180.

Para determinar el número que le corresponde a cada ángulo, asignamos "coordenadas" a los rayos cuestión que establece el siguiente postulado:

Postulado Rayos - número Dada una $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto C tales que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Se puede establecer una correspondencia de todos los rayos con extremo en A y un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ con los números reales entre 0 y 180 tal que:

i. A cada rayo con un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ le corresponde un único número entre 0 y 180.
ii. A cada número entre 0 y 180 le corresponde un único rayo con un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$.
iii. Al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde 0.
iv. Al rayo opuesto al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde el número 180. (Figura 24)

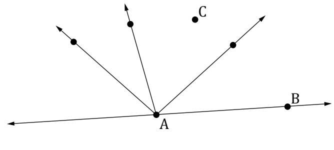


Figura 24

El postulado anterior instaura lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas para un conjunto de rayos con puntos en un mismo semiplano. El número asignado a un $\overrightarrow{AF}$, F en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$, se denotará por $r_{F,\overrightarrow{AB}}$ (se lee coordenada del $\overrightarrow{AF}$ con respecto al $\overrightarrow{AB}$) indicando que la $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta de referencia y que al $\overrightarrow{AB}$ se le asigna el 0.

Nota El *P. Rayos – número* es análogo al *P. Recta – números reales*, asunto que sugiere que los hechos geométricos relativos a la interestancia –que se demostraron, en gran medida, gracias al *P. Recta – números reales*– tienen sus respectivos hechos análogos en el marco de los ángulos, esta vez pensando en algo como “rayo *entre* rayos” relación esta que puede expresarse mejor como *punto en el interior de ángulo*. Esta analogía permite demostrar los hechos geométricos relacionados con ángulos siguiendo la misma estructura de las demostraciones hechas para los respectivos hechos de interestancia.

Definición Medida de ángulo Dado un $\angle EAD$, la medida del $\angle EAD$ es $|r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{D,\overrightarrow{AB}}|$, donde $\overleftrightarrow{AB}$ es la recta de referencia.

La medida del $\angle EAD$ se denota por m$\angle EAD$. Si el rayo de referencia es un lado del ángulo, se obtiene el siguiente teorema que es muy útil.

Teorema Medida de ángulo Si $\angle EAD$ entonces $m\,\angle EAD = r_{E,\overrightarrow{AD}}$, donde el $\overrightarrow{AD}$ es el rayo de refrencia.

Debemos hacer en este momento una observación: se adopta una unidad de medida para determinar la coordenada de cada rayo; esto garantiza que lo perceptual y lo teórico se correspondan. Sin importar el sistema de coordenadas con el cual se establece su medida, esta siempre debe ser la misma. Como se ilustra en la Figura 25, se debe tener que $m\,\angle FAB = |r_F - 0| = |r_F^* - r_B^*|$.

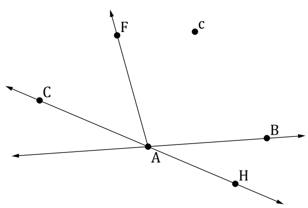


Figura 25

Además, el número asignado mediante el *P. Ángulo-número* es precisamente el número que se obtiene como medida del ángulo.

Con base en lo anterior, definimos ángulos congruentes así:

Definición de Ángulos congruentes Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

Realizadas estas precisiones, los estudiantes usualmente proponen las siguientes construcciones para obtener un ángulo congruente al dado.

Propuesta 15.1 Construir dos rectas que se intersecan determinando ángulos opuestos por el vértice.

Propuesta 15.2 Construir dos rectas paralelas y una secante.

Propuesta 15.3 Utilizando la herramienta *rotación*, construir un ángulo de igual medida que el ángulo dado, que no comparta ningún lado con el ángulo original.

Propuesta 15.4 Construir un $\angle ABC$, medirlo y, tomando el $\overrightarrow{BA}$ como uno de los lados del ángulo que se está construyendo, usar la herramienta rotación para encontrar el $\overrightarrow{BD}$ con $D \in S_{\overrightarrow{BA},\sim C}$, de tal forma que el $\angle DBA$ tenga igual medida a la del $\angle ABC$ (Figura 26).

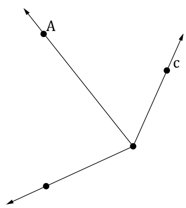


Figura 26

Propuesta 15.5 Construir un ángulo, tomar su medida y construir un rayo en el interior del ángulo para formar, con un lado del ángulo, otro ángulo con medida la mitad de la medida del ángulo original, o construir otro rayo en el mismo semiplano determinado por la recta que contiene uno de los lados del ángulo original, tal que forme con dicho lado un ángulo del doble de la medida del original, utilizando las herramientas *medida de ángulos, calculadora* y *rotación* o usar la herramienta *bisectriz* para construir la bisectriz de un ángulo.

Propuesta 15.6 Construir dos rectas perpendiculares.

Propuesta 15.7 Construir un $\angle ABC$. Reflejar el punto A respecto a la $\overleftrightarrow{AB}$ y nombrar la imagen como D.

La Propuesta 15.2 no es aceptable en este punto del desarrollo del curso, puesto que requiere usar herramientas aún no validadas a partir de la teoría e introducir un nuevo concepto, a saber, el paralelismo.

Con esta restricción emulamos la propuesta de Euclides de no introducir dicho concepto hasta que sea absolutamente necesario hacerlo.

Respecto a la Propuesta 15.1, es necesario construir cada una de las rectas que contienen un lado del ángulo dado; de esa manera $\angle BAC$ es opuesto por el vértice al $\angle DAF$. Para validar esta propuesta desde el sistema teórico se requiere utilizar, en su orden, las definiciones de ángulo y rayo, el *P. Puntos–recta*, el *T. Punto a un lado* o, en vez de estos dos elementos, usar *T. Existencia rayo opuesto* y, finalmente, la definición de ángulos opuestos por el vértice.

Definición de Á**ngulos opuestos por el vértice** Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados determinan dos pares de rayos opuestos.

En la Propuesta 15.1, los estudiantes están basándose en el siguiente teorema:

Teorema Ángulos opuestos por el vértice Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.

Su demostración se fundamenta en las definiciones de ángulos opuestos por el vértice, ángulos par lineal y ángulos suplementarios, y en el *T. Par lineal*.

Definición de Ángulos par lineal Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y C es un punto que no está en la $\overleftrightarrow{AB}$, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.
Definición de Ángulos suplementarios Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, entonces los ángulos son suplementarios.
Teorema Par lineal Si dos ángulos forman par lineal, entonces los ángulos son suplementarios.
Reformulación del T. Par lineal Si $\angle ABC$ y $\angle CBD$ son par lineal entonces son suplementarios.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\angle ABC$ y $\angle CBD$ par lineal	Dado
2. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BD}$ rayos opuestos y $C \notin \overleftrightarrow{AB}$	D. Ángulos par lineal (1)
3. C y $\overleftrightarrow{AB}$ determina un plano α	T. Recta y punto-plano (2)
4. C pertenece a un semiplano de α determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$	D. Semiplano (2,3)

Continúa →

5. $r_{A,\overrightarrow{AB}} = 0$, $r_{D,\overrightarrow{AB}} = 180$	P. Rayos-número (iii,iv) (2)
6. $0 < r_{C,\overrightarrow{AB}} < 180$	P. Rayos-número (ii) (4)
7. $m\ \angle ABC = \lvert r_{C,\overrightarrow{AB}} \rvert$ 8. $m\ \angle CBD = \lvert r_{C,\overrightarrow{AB}} - 180 \rvert$	D. Medida ángulo (5,6)
9. $m\ \angle ABC = r_{C,\overrightarrow{AB}}$ 10. $m\ \angle CBD = 180 - r_{C,\overrightarrow{AB}}$	D. Valor absoluto (6,7)
11. $m\ \angle ABC + m\ \angle CBD = 180 - r_{C,\overrightarrow{AB}} + r_{C,\overrightarrow{AB}} = 180$	Pr. Sustitución y propiedades de los números reales (8)
12. $\angle ABC$ y $\angle CBD$ suplementarios	D. Ángulos suplementarios (9)

En relación con la Propuesta 15.3, como en el sistema teórico aún no se tiene cómo sustentar que los ángulos son congruentes, se introduce el *T. de Construcción de ángulos*. Por otra parte, como Cabri no tiene una herramienta específica para construir ángulos con una medida dada, se usa la herramienta *rotación* para cumplir esa función, es decir, se usa en calidad de transportador, aprovechando que dicho teorema ofrece el sustento teórico para ello.

Teorema Construcción de ángulos Si se tienen $\overrightarrow{AB}$ en un plano α y un número real r tal que $0 < r < 180$, entonces existe un único $\overrightarrow{AD}$ tal que D está en alguno de los semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ en α y además $m\ \angle DAB = r$.

La Propuesta 15.4, en la cual acaban construyendo dos ángulos adyacentes congruentes, exige inicialmente medir el ángulo dado, es decir, se le asigna al $\overrightarrow{BA}$ el número $r_{A,\overrightarrow{BC}}$. Luego se debe encontrar el $\overrightarrow{BD}$, con $D \in S_{\overleftrightarrow{BA},\sim C}$, de tal manera que $r_{D,\overrightarrow{BA}} = r_{A,\overrightarrow{BC}}$, lo cual se justifica con el *T. Construcción de ángulos*. En este punto se introduce la definición de ángulos adyacentes.

Definición de Ángulos adyacentes Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, tienen un lado común y los lados no comunes tienen puntos en semiplanos opuestos determinados por la recta que contiene el lado común.

Bisectriz de ángulo

La Propuesta 14.5, en la que se construye lo que sería la bisectriz del ángulo, exige la introducción de varios elementos nuevos al sistema teórico. Ella es importante porque da lugar a la entrada de la bisectriz de un ángulo aunque no corresponde al problema propuesto pues no construyen un ángulo congruente al original. Si esta propuesta no resulta entre las que enuncian los estudiantes, se asigna el siguiente problema para que ello se dé.

> **PROBLEMA 15a:** Construya ángulos adyacentes congruentes. ¿Qué le permite garantizar que son congruentes?

Como propuesta de solución para este problema, los estudiantes suelen presentar tanto la Propuesta 15.5 como la Propuesta 15.6 descritas para el problema anterior. En cualquier caso, la idea es que surja el concepto de bisectriz de un ángulo y también el de rectas perpendiculares. Es usual que para este problema aparezca otra propuesta no mencionada anteriormente:

Propuesta 15a.1 Construir un $\angle ABC$, escoger un punto H y un punto K en cada lado del ángulo tales que $HB = HK$. Construir el $\overline{HK}$ y su punto medio M. Considerar los $\angle ABM$ y $\angle CBM$. (Figura 27)

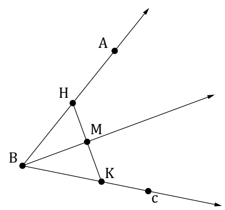


Figura 27

Esta última Propuesta no se discutirá con los alumnos en este momento porque para justificarla es necesario hablar de triángulos congruentes, cosa que no se quiere hacer hasta que se haya agotado toda la temática relacionada con ángulos.

La validación de la Propuesta 15.5 conduce a introducir, como se dijo anteriormente, la definición de bisectriz de un ángulo y demostrar su existencia. La propuesta que sugieren los estudiantes para la demostración de este teorema se basa en usar el hecho de que cualquier $\angle ABC$ está contenido en un plano α para así poder determinar semiplanos, asignar coordenada 0 al $\overrightarrow{BC}$ y r al $\overrightarrow{BA}$, buscar el $\overrightarrow{BD}$ al cual le corresponde el número real $\frac{r}{2}$, y justificar que este rayo es la bisectriz del ángulo. En síntesis, la demostración es análoga a la de la existencia del punto medio. Sin embargo, para justificar la propuesta se requiere la inclusión de otros elementos teóricos: la definición de bisectriz, el *P. Adición de medidas de ángulos* y el *T. Adición de medidas de ángulos.*

Definición Bisectriz de ángulo La bisectriz de un ángulo es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y un punto en el interior del ángulo que determina con los lados del ángulo dos ángulos adyacentes congruentes.
Postulado Adición de medida de ángulos Si $C \in int\angle DAB$, entonces $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$.

El enunciado recíproco del postulado que se acaba de mencionar expresa un teorema que es importante incluir en el sistema teórico que se está formando, razón por la cual se demuestra, pero su demostración requiere validar previamente un hecho, que se llamará Teorema A. Puesto que tanto la demostración del hecho como la del teorema son extensas, en este caso no se incluirá la primera dentro de la segunda. La demostración del teorema A se convierte en un buen ejercicio para los estudiantes pues hace uso de los teoremas y postulados desarrollados en el capítulo anterior. Para abordarla se sugiere entregar a los estudiantes una copia del diagrama B-demostración elaborada parcialmente (Anexo 1, pág. 125): la primera columna presenta la secuencia de afirmaciones que conforman la demostración, y en la segunda, para cada afirmación deben dar la garantía y los datos correspondientes. A continuación se hace la demostración del hecho:

Teorema A Si $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$, $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$ y $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$, entonces $X \in$ semirrecta AD.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$	Dado
2. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$	Dado
3. $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$	Dado
4. $X \in \overline{CB}$ y $X \in \overleftrightarrow{AD}$	D. Intersección de conjuntos (3)
5. $C - X - B$ [¿Por qué X no puede ser ni C ni B?]	D. Segmento (4)
6. $\{X\} = \{A\}$ o $X - A - D$ o $X \in$ semirrecta AD	D. Semirrecta
7. $\{X\} = \{A\}$	Caso 1
8. $C - A - B$	Pr. Sustitución (5,7)

Continúa →

10. $C \in \overleftrightarrow{AB}$	D. Colineal (9)
11. $C \in \overleftrightarrow{AB}$ y $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	Conjunción (1,10)
12. $\{X\} \neq \{A\}$	Pr. Reducción al absurdo(11)
13. $X - A - D$	Caso 2
14. $X \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	T. Puntos en distintos semiplanos (12)
15. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim X}$	T. Puntos en el mismo semiplano (5)
16. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	Sustitución (13,14)
17. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$ y $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	Conjunción (15,1)
18. X no puede satisfacer la relación $X - A - D$	Pr. Reducción al absurdo (17)
19. $X \in$ semirrecta AD	MTP (12,18)

Teniendo la validez del Teorema A se puede proceder con la demostración del siguiente teorema. De nuevo se sugiere dejar como ejercicio completar el diagrama B-demostración que corresponde a la demostración que sigue (Anexo 1, pág. 125).

Teorema Adición de medida de ángulos Si $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$ y $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$, entonces $C \in int\angle DAB$

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},B}$	Dado
2. $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$	Dado
3. a. $C \in \overrightarrow{AD}$ b. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$ c. $C \in int\angle DAB$	Casos (uso de D. Semiplano con respecto a la $\overleftrightarrow{AD}$ D. Interior del ángulo
4. $C \in \overrightarrow{AD}$	Caso 1
5. $m\angle DAB = m\angle CAB$	D. Medida de ángulo (4)
6. $m\angle DAC = 0$	Prop. Números reales (2,5)

Continúa →

7. $m\angle DAC > 0$	P. Ángulo – número (2)
8. $m\angle DAC = 0$ y $m\angle DAC > 0$	Conjunción (6,7)
9. $C \notin \overleftrightarrow{AD}$	Pr. Reducción al absurdo(Se contradice la Tricotomía) (8)
10. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$	Caso 2 (3)
11. $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$	T. Intersección de recta P. Separación del plano (10)
12. $X \in \overline{CB}$ y $X \in \overleftrightarrow{AD}$	D. Intersección (11)
13. $C - X - B$	D. Segmento (12)
14. $X \in$ *semirrecta AD*	T. A. (1,10,11)
15. $X \in int\angle CAB$	T. Punto en el interior del ángulo (13)
16. *semirrecta (AD)* $\subset int\angle CAB$	T. Semirrecta – interior del ángulo (14,15)
17. $D \in int\angle CAB$	D. Subconjunto (16)
18. $m\angle DAC + m\angle DAB = m\angle CAB$	P. Adición de medida de ángulo (17)
19. $m\angle DAC + m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle CAB$	Sustitución (18,2)
20. $m\angle DAC = 0$	Prop. Números reales (19)
21. $m\angle DAC > 0$	P. Ángulo-número (2)
22. $C \notin S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$	Pr. Reducción al absurdo(se contradice la tricotomía) (20,21)
23. $C \in int\angle DAB$	MTP(22,9,3)

Nota: El *P. Adición de medida de ángulos* y el *T. Adición de medida de ángulos*, tomados en conjunto, conforman un enunciado, análogo al utilizado para definir *punto entre* o *interestancia*, que podría ser útil para definir *punto en el interior de un ángulo*.

En lo que sigue, con el ánimo de simplificar los elementos teóricos relacionados con ángulos que se introducen , usaremos siempre como sistema de coordenadas para los ángulos uno referido a una de las rectas que contiene a uno de los rayos involucrados en la situación, escogido a conveniencia.

Teorema Orden - punto en el interior Si α plano y $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \subset \alpha$ con $D, E \in S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ y $r_{C,\overrightarrow{AB}} < r_{D,\overrightarrow{AB}} < r_{E,\overrightarrow{AB}}$, entonces $D \in int\angle CAE$.

Nota: Este teorema es análogo al *T. Orden – interestancia* y su demostración tiene la misma estructura de la demostración de tal teorema en el Capítulo 3.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. a. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} \subset \alpha$ b. $D, E \in S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ c. $r_{C,\overrightarrow{AB}} < r_{D,\overrightarrow{AB}} < r_{E,\overrightarrow{AB}}$	Dado
2. $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ no son colineales	D. Rayos-números (1b)
3. $\exists \angle DAC, \angle EAD, \angle EAC$	D. Ángulo (2)
4. $m\angle EAD = \lvert r_{D,\overrightarrow{AB}} - r_{E,\overrightarrow{AB}} \rvert$ 5. $m\angle DAC = \lvert r_{C,\overrightarrow{AB}} - r_{D,\overrightarrow{AB}} \rvert$ 6. $m\angle EAC = \lvert r_{C,\overrightarrow{AB}} - r_{E,\overrightarrow{AB}} \rvert$	D. Medida de ángulos (1c)
7. $r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{C,\overrightarrow{AB}} > 0$ $r_{D,\overrightarrow{AB}} - r_{C,\overrightarrow{AB}} > 0$ $r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{D,\overrightarrow{AB}} > 0$	D. Orden número reales (1c)
8. $m\angle EAD = r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{D,\overrightarrow{AB}}$ $m\angle DAC = r_{D,\overrightarrow{AB}} - r_{C,\overrightarrow{AB}}$ $m\angle EAC = r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{C,\overrightarrow{AB}}$	D. Valor absoluto (4,5,6,7)
9. $m\angle EAD + m\angle DAC$ $= r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{D,\overrightarrow{AB}} + r_{D,\overrightarrow{AB}} - r_{C,\overrightarrow{AB}}$ $= r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{C,\overrightarrow{AB}}$	Pr. Sustitución y Prop. Números reales (8)
10. $m\angle EAD + m\angle DAC = m\angle EAC$	Pr. Sustitución (8,9)
11. $D \in int\angle EAC$	T. Adición de medida de ángulos (10)

Los teoremas *A, Adición de medidas de ángulos* y *Orden – punto en el interior* permiten demostrar la existencia de la bisectriz:

Teorema Existencia de la bisectriz de ángulo: Dado un ángulo, existe su bisectriz y esta es única.

Rectas perpendiculares

La Propuesta 15.6 que corresponde a la construcción de dos rectas perpendiculares se refiere a la situación específica en la que se toma como dado que el ángulo dado en el problema es recto. Esta propuesta propicia el surgimiento del teorema que garantiza la existencia de una recta perpendicular a otra recta por un punto dado de esta.

Teorema Perpendicular - punto de la recta Si m recta y P un punto en m entonces existe una recta n que contiene a P tal que $m \perp n$.

Su demostración se basa en el *T. Construcción de ángulos*.

Los siguientes dos problemas abren una oportunidad para revisar el significado y recordar o establecer las definiciones de los objetos geométricos involucrados en las situaciones (e. g., rayo, rayos opuestos, semiplano, ángulos complementarios, ángulos agudo y obtuso). Por tanto, su solución juega un papel importante en la ampliación del sistema axiomático. Además, su resolución exige el uso de teoremas anteriormente establecidos.

PROBLEMA 16: Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? Justifique su respuesta.

Este problema motiva el uso de todo el potencial dinámico que ofrece un programa de geometría dinámica, e induce a la actividad demostrativa en toda su dimensión. Los estudiantes generalmente juegan, en su proceso de exploración, con lo que anticipan podría ser la respuesta al problema: piensan que el $\overrightarrow{BK}$ debe ser perpendicular al $\overrightarrow{BA}$ y al $\overrightarrow{BE}$ o estar muy cercano a uno de estos rayos. El problema induce al estudio de resultados al variar la posición del rayo (Figura 28) y ello conduce a visualizar matemáticamente la figura para percibir la propiedad invariante bajo el arrastre: el $\angle GBD$ es recto en cualquier posición del $\overrightarrow{BK}$ Se pretende que los estudiantes formulen una conjetura tal como se encontraría el enunciado en un texto de geometría, desprovista de toda alusión a la variación, lo que exige captar la esencia del hecho geométrico: el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto. Llegar a tal formulación puede requerir la intervención del profesor. El resultado obtenido, que es bastante inesperado y sorprendente para la mayoría de los estudiantes, hace que la búsqueda de la justificación adquiera un sentido ligado más a la curiosidad propia que a una exigencia externa debida a las normas de la clase.

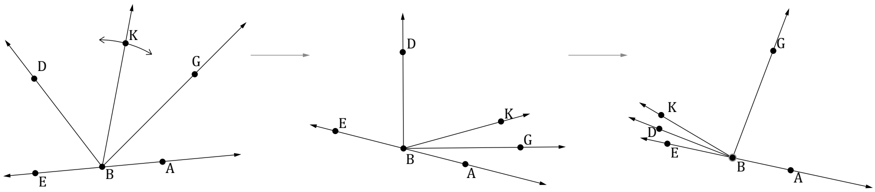


Figura 28

Las conjeturas que usualmente proponen los estudiantes son las siguientes:

Conjetura 16.1 Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las respectivas bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, entonces para cualquier posición del $\overrightarrow{BK}$ la medida del $\angle GBD$ es la misma.

Conjetura 16.2 Si $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo y $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ son las respectivas bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, entonces la medida del $\angle GBD$ es siempre 90.

Conjetura 16.3 Si dos ángulos forman par lineal, entonces las bisectrices de esos ángulos son perpendiculares.

La formulación de las Conjeturas 16.1 y 16.2 está ligada a la acción del arrastre del $\overrightarrow{BK}$; la regularidad que se establece en cada una se expresa en términos asociados al movimiento. La discusión se debe centrar en la necesidad de transformar dichos enunciados en uno "estático y general" como el que se presenta en la Conjetura 16.3 para poder usar el sistema axiomático existente en la demostración, como se muestra a continuación. Para poder abordarla es necesario contar con los siguientes teoremas:

Teorema Bisectriz Si $\overrightarrow{BC}$ es bisectriz del $\angle ABD$, entonces $m\angle ABC = m\angle CBD = \frac{1}{2}\, m\angle ABD$, o $2m\angle ABC = 2m\angle CBD = m\angle ABD$.

Teorema Punto en el interior– doble orden Si $\overleftrightarrow{AB}$ es una recta en un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$, $C, D \in S_{\overleftrightarrow{AB},E}$ y $D \in int\angle EAC$, entonces $r_{C,\overleftrightarrow{AB}} < r_{D,\overleftrightarrow{AB}} < r_{E,\overleftrightarrow{AB}}$ o $r_{C,\overleftrightarrow{AB}} > r_{D,\overleftrightarrow{AB}} > r_{E,\overleftrightarrow{AB}}$.

La demostración del *T. Punto en el interior – doble orden* se realiza de manera análoga a la demostración del *T. Interestancia – doble orden* en la cual se usa el *T. Tres puntos.* El teorema análogo de este se presenta a continuación:

Teorema Tres rayos Si $\overleftrightarrow{AB}$ es una recta en un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$ con $C, D \in S_{\overleftrightarrow{AB},E}$ entonces $D \in int\angle CAE$ o $C \in int\angle EAD$ o $E \in int\angle CAD$.

Teniendo ya todos los elementos teóricos necesarios, procedemos a demostrar la Conjetura 16.3.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\angle EBK$ y $\angle KBA$ par lineal, $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BG}$ respectivas bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle EBK$	Dado
2. $2m\angle GBK = m\angle EBK$ y $2m\angle KBD = m\angle ABK$	T. Bisectriz (1)
3. $m\angle EBK + m\angle ABK = 180$	T. Par lineal (1)
4. $2m\angle GBK + 2m\angle KBD = 180$	Pr. Sustitución (2,3)
5. $m\angle GBK + m\angle KBD = 90$	Prop. Número reales (4)
6. $D \in int\angle ABK$; $G \in int\angle EBK$	D. Bisectriz (1)
7. $r_{A,\overrightarrow{BA}} = 0$, $r_{E,\overrightarrow{BA}} = 180$	P. Rayos número (iii, iv) (1)
8. $r_{K,\overrightarrow{BA}} > r_{D,\overrightarrow{BA}} > r_{A,\overrightarrow{BA}}$	T. Punto en el interior- doble orden (6), (7)
9. $r_{E,\overrightarrow{BA}} > r_{G,\overrightarrow{BA}} > r_{K,\overrightarrow{BA}}$	T. Punto en el interior- doble orden (6), (7)
10. $r_{G,\overrightarrow{BA}} > r_{K,\overrightarrow{BA}} > r_{D,\overrightarrow{BA}}$	Pr. Sustitución (8), (9)
11. $K \in int\ \angle GBD$	T. Orden- punto en el interior (10)
12. $m\angle GBK + m\angle KBD = m\angle GBD$	P. Adición medida de ángulos (11)
13. $m\angle GBD = 90$	Pr. Sustitución (5), (12)
14. $\angle GBD$ es recto	D. Ángulo recto (13)
15. $\overrightarrow{BG} \perp \overrightarrow{BD}$	D. Perpendicularidad (14)

PROBLEMA 17: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo. ¿Es posible determinar un punto E, en el mismo semiplano en el cual está D, para que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$? Formule una conjetura y demuéstrela.

La intención que tenemos al proponer el problema va más allá de descubrir la existencia del ángulo complementario: queremos propiciar que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa plena, que vaya desde la exploración de la situación problema, pase por la formulación de una conjetura y concluya con la demostración del hecho geométrico que subyace en la situación problema. Resolver el problema exige un análisis detallado pues el estudiante debe darse cuenta de que el $\angle BAD$ debe ser agudo y que cualquier punto de la semirrecta AE construida es un punto solución (Figura 29). La geometría dinámica juega un papel protagónico, pues permite a los estudiantes identificar el lugar geométrico que es solución del problema. En el caso de que la resolución de los Problemas 15 y 15a no hubiera suscitado la necesidad de establecer la existencia de rectas perpendiculares, la resolución de este problema hace surgir necesariamente una discusión al respecto ya que al arrastrar un punto E libre, descubren que se debe construir un rayo perpendicular al $\overrightarrow{AD}$ por el punto A para obtener el ángulo complementario pedido.

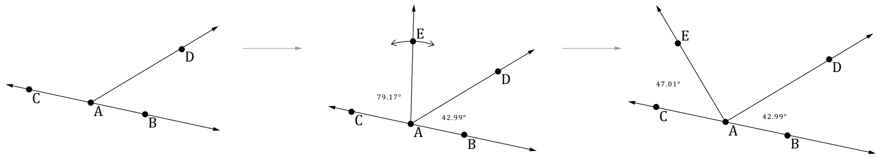


Figura 29

Al explorar la situación, algunos estudiantes hacen explícita la restricción que tiene el punto D para que exista el complemento de $\angle BAD$: este debe ser agudo. Esta circunstancia propicia la revisión de la definición de los términos ángulo agudo, ángulo obtuso y ángulos complementarios. Sin embargo, hay estudiantes que, aunque trabajan la situación tomando al $\angle BAD$ agudo, no mencionan esa condición en su conjetura.

Definición de Ángulo agudo Un ángulo es agudo si su medida es menor que 90.
Definición de Ángulo obtuso Un ángulo es obtuso si su medida es mayor que 90.
Definición de Ángulos complementarios Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90.

Las tres construcciones que surgen como solución al problema son las siguientes:

Propuesta 17.1 Construir el $\angle EAC$ de medida 90 **-** $m\angle DAB$.

Propuesta 17.2 Construir una recta que contiene al punto A, y escoger al punto una recta m que contiene al punto A, $m \perp \overleftrightarrow{AD}$ y escoger al punto E sobre la semirrecta AX con $X \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$.

Propuesta 17.3 Construir una recta $m \perp \overleftrightarrow{AB}$ y el $\angle EAY$ de igual medida al $\angle DAB$ donde $Y \in S_{\overleftrightarrow{AB},D} \cap m$.

Las conjeturas que presentamos aquí, resultado de las construcciones propuestas, no difieren mucho de las que proponen los estudiantes cada vez que hemos propuesto este problema en clase.

Conjetura 17.1 Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo tal que $m\angle DAB < 90$, entonces existe un punto $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$ tal que $m\angle DAB + m\angle CAE = 90$.

Conjetura 17.2 Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo, entonces existe un punto E en el semiplano en el cual está D tal que $m\angle EAD = 90$ y $\angle EAC$ y $\angle DAB$ son complementarios.

Conjetura 17.3 Si se tiene $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo tal que el $\angle BAD$ es agudo y sea el $\angle CAE$ con E en el mismo semiplano en el cual está D tal que $\angle BAD$ y $\angle CAE$ son complementarios, entonces el $\angle DAE$ es recto.

Conjetura 17.4 Si $\angle DAB$ y $\angle DAC$ forman par lineal y m$\angle DAB$ o m$\angle DAC < 90$, entonces existe $\angle EAC$ en el mismo semiplano tal que $\angle DAB$ y $\angle EAC$ o $\angle DAC$ y $\angle EAC$ son complementarios.

En el análisis correspondiente es posible y conveniente discutir y destacar las siguientes cuestiones:

i. El uso de términos del lenguaje geométrico; específicamente, sustituir la expresión "Si se tiene $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo" por "$\angle DAB$ y $\angle DAC$ forman par lineal" y la expresión "$m\angle DAB < 90$" por "$\angle DAB$ es agudo". Esto con la intención de presentar una afirmación compacta equivalente a las dadas.

ii. La correspondencia entre el proceso de construcción y exploración y la conjetura establecida; esto para asegurar que la hipótesis de la condicional contenga solamente las condiciones establecidas, ya sea construidas o logradas por el arrastre, y que la tesis informe sobre lo que descubrieron. Por ejemplo, es posible que el estudiante construya el $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ pero que la tesis de la conjetura sea esa condición. Enfatizar en la correspondencia mencionada es importante para que los estudiantes entiendan que los enunciados condicionales en geometría reportan relaciones de dependencia.

Finalizando el análisis de las conjeturas, usualmente quedan dos afirmaciones por demostrar:

Conjetura 17.1 Si $\angle DAB$ y $\angle DAC$ par lineal, $\angle DAB$ agudo y $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ con $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$, entonces $\angle DAB$ y $\angle CAE$ son complementarios.
Conjetura 17.2 Si $\angle DAB$ y $\angle DAC$ par lineal, ∠DAB agudo y $\angle DAB$ y $\angle CAE$, con $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$, son complementarios, entonces $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$.

En el Anexo 1, (pág. 127) se presenta el esquema de la demostración de la Conjetura 17.1. Hay varios hechos geométricos que deben surgir en el esfuerzo de demostrar las conjeturas y que son de gran utilidad. Pueden establecerse como teoremas o simplemente indicar que en los pasos correspondientes de la demostración, se está demostrando cada hecho.

Teorema Complementarios - agudo Si dos ángulos son complementarios, entonces cada uno de ellos es agudo.
Teorema Agudo – obtuso Si dos ángulos son par lineal y uno es agudo, entonces el otro es obtuso.

Con este problema se cierra el proceso de construcción del sistema axiomático relacionado con la geometría de ángulos, logrando así una organización deductiva para los conceptos, postulados y teoremas correspondientes. Hasta el momento no se ha estudiado la Propuesta 15.7 que, como se dijo anteriormente, necesita de teoría asociada a la congruencia de triángulos. En el capítulo siguiente, nos ocuparemos con detalle de esta Propuesta.

Ejercicios

1. Demuestre que existen los ángulos.

2. Demuestre que un ángulo es una figura coplanar.

3. Demuestre que no es posible la siguiente situación: $C \in int\angle EAD$ y $D \in int\angle EAC$

4. Demuestre los siguientes teoremas:

   a. Teorema Semirrecta interior de ángulo Si *D* está en el interior del $\angle CAB$, entonces la semirrecta *AD* está en el interior del $\angle CAB$.
   b. Teorema Ángulos suplementarios – congruencia Suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
   c. Teorema Ángulos complementarios – congruencia Complementos de ángulos congruentes son congruentes.
   d. Teorema Cuatro ángulos rectos Si dos rectas son perpendiculares, entonces se determinan cuatro ángulos rectos.

e. **Teorema de la Bisectriz** Si $\overrightarrow{BC}$ es bisectriz del $\angle ABD$, entonces $m\angle ABC = m\angle CBD = \frac{1}{2}\, m\angle ABD$ o $2m\angle ABC = 2m\angle CBD = m\angle ABD$.
f. **Teorema Punto en el interior – doble orden** Si $\overleftrightarrow{AB}$ es una recta en un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$, $C, D \in S_{\overleftrightarrow{AB},E}$ y $D \in int\angle EAC$, entonces $r_{C,\overrightarrow{AB}} < r_{D,\overrightarrow{AB}} < r_{E,\overrightarrow{AB}}$ o $r_{C,\overrightarrow{AB}} > r_{D,\overrightarrow{AB}} > r_{E,\overrightarrow{AB}}$.
g. **Teorema Existencia de la bisectriz de ángulo** Dado un ángulo, existe su bisectriz y esta es única.

5. Demuestre los siguientes dos teoremas:

   a. **Teorema Complementarios - agudo** Si dos ángulos son complementarios, entonces cada uno de ellos es agudo.
   b. **Teorema Agudo – obtuso** Si dos ángulos son par lineal y uno es agudo, entonces el otro es obtuso.

6. Usando las afirmaciones anteriores, demuestre la Conjetura 17.2.

7. Generalmente se define ángulo recto como un ángulo de medida 90 (D1). Considere la siguiente definición: (D2). Un ángulo es **recto** si es par lineal de un ángulo congruente a él.

   a. Demuestre que D2 es válida usando D1 como definición.
   b. Demuestre que D1 es válida usando D2 como definición.

8. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No se sabe. Si la respuesta es No se sabe, modifique las condiciones dadas para que la respuesta sea Sí y demuestre que así es. En caso contrario, demuestre su respuesta.

   a. ¿El $\angle ABC$ es un conjunto convexo?
   b. Dado $\angle GHJ$ y $\overrightarrow{HT}$,$T \notin \overleftrightarrow{HG} \cup \overleftrightarrow{HJ}$. ¿Es la semirrecta HT subconjunto del interior del $\angle GHJ$
   c. Sean $\angle A$ y $\angle B$. ¿Existe un ángulo cuya medida sea $m\angle A + m\angle B$?

9. Explique por qué el sistema teórico que tenemos hasta el momento no nos permite demostrar que

$$S_{\overrightarrow{BC},A} \cap S_{\overrightarrow{BA},C} \subset \{X \mid F\text{-}X\text{-}G \text{ donde } F \in \overrightarrow{BA};\ G \in \overrightarrow{BC};\ F, G \neq B\}$$

10. Demuestre que si $m\angle BAC > m\angle DAC$, donde $D \in S_{\overleftrightarrow{AC},B}$, entonces $D \in int\angle BAC$.

Anexo 1

Teorema A Si $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$, $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$ y $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{X\}$ entonces $X \in$ semirrecta AD.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$	
2. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$	
3. $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$	
4. $X \in \overline{CB}$ y $X \in \overleftrightarrow{AD}$	
5. $C - X - B$	
6. a) $\{X\} = \{A\}$ b) $X - A - D$ c) $X \in$ semirrecta AD	
7. $\{X\} = \{A\}$	
8. $C - A - B$	
9. C, A y B son colineales	
10. $C \in \overleftrightarrow{AB}$	
11. $C \in \overleftrightarrow{AB}$ y C $\in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	
12. $\{X\} \neq \{A\}$	
13. $X - A - D$	
14. $X \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	
15. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},X}$	
16. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$	
17. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},\sim D}$ y $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$	
18. X no puede satisfacer la relación $X - A - D$	
19. X $\in$ semirrecta AD	

Teorema de adición de medida de ángulos: Si $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$ y $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$, entonces $C \in int\angle DAB$.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$	
2. $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$	
3. a. $C \in \overrightarrow{AD}$ b. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$ c. $C \in int\angle DAB$	
4. $C \in \overrightarrow{AD}$	
5. $m\angle DAB = m\angle CAB$	
6. $m\angle DAC = 0$	
7. $m\angle DAC > 0$	
8. $m\angle DAC = 0$ y $m\angle DAC > 0$	
9. $C \notin \overleftrightarrow{AD}$	
10. $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$	
11. $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$	
12. $X \in \overline{CB}$ y $X \in \overleftrightarrow{AD}$	
13. C - X - B	
14. $X \in$ semirrecta AD	
15. $X \in int\angle CAB$	
16. semirrecta $(AD) \subset int\angle CAB$	
17. $D \in int\angle CAB$	
18.$m\angle DAC + m\angle DAB = m\angle CAB$	
19. $m\angle DAC + m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle CAB$	
20. $m\angle DAC = 0$	
21. $m\angle DAC > 0$	
22. $C \notin S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$	
23. $C \in int\angle DAB$	

Teorema 17.1 Si $\angle DAB$ y $\angle DAC$ par lineal, $\angle DAB$ agudo y $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$ con $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$, entonces $\angle DAB$ y $\angle CAE$ son complementarios.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. a. $\angle DAB$ y $\angle DAC$ par lineal b. $\angle DAB$ agudo c. $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$, $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$	
2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ opuestos y $D \notin \overleftrightarrow{AB}$	
3. Sea $r_{\overrightarrow{AB},B}=0$, $r_{\overrightarrow{AB},C}=180$	
4. Sea $r_{\overrightarrow{AB},D} = r$ y $r_{\overrightarrow{AB},E} = s$, $0 < r < 180$, $0 < s < 180$	
5. i. $r = s$ ii. $r > s$ iii. $r < s$	
6. $r = s$	
7. $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AD}$ coinciden	
8. $\angle EAD$ es recto	
9. $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AD}$ no son colineales	
10. $r \neq s$	
11. $r > s$	
12. $E \in int\angle DAB$	
13. $m\angle DAB = m\angle EAD + m\angle EAB$	
14. $m\angle DAB < 90$	
15. $m\angle EAD = 90$	
16. $m\angle DAB = 90 + m\angle EAB$	
17. $m\angle EAB > 0$	
18. $m\angle DAB > 90$	
19. $m\angle DAB < 90$ y $m\angle DAB > 90$	
20. $r \ngtr s$	

Continúa →

21. $r < s$	
22. $r < s < 180$	
23. $E \in int\angle CAD$	
24. $\angle DAB$ y $\angle DAC$ suplementarios	
25. $m\angle DAB + m\angle DAC = 180$	
26. $m\angle DAC = m\angle EAD + m\angle CAE$	
27. $m\angle DAB + m\angle EAD + m\angle CAE = 180$	
28. $m\angle DAB + 90 + m\angle CAE = 180$	
29. $m\angle DAB + m\angle CAE = 90$	
30. $\angle DAB$ y $\angle CAE$ son complementarios	

Capítulo 6:
Congruencia de triángulos

Concluida la conformación del sistema teórico local cuyo núcleo básico es el ángulo, se procede al estudio del triángulo, siendo esta la figura geométrica que sirve de base para el estudio de otras figuras geométricas. En este capítulo abordamos principalmente la relación de congruencia de triángulos y los elementos teóricos que la fundamentan. Generalmente, los estudiantes ya han sugerido el uso de triángulos para resolver algunos de los problemas que se les han propuesto. Por ello, comenzamos con la siguiente pregunta que impulsa el surgimiento de la concepción que tienen los estudiantes de triángulo y la utilización de los elementos teóricos presentados anteriormente.

Criterios de congruencia de triángulos

Tan pronto como se define triángulo y se demuestra su existencia, se introduce la relación de congruencia de triángulos. La pregunta que suscita el tema es muy directa (Problema 18).

PROBLEMA 18: ¿Existen los triángulos?

Lo primero que se debe establecer es la definición.

Definición de triángulo Dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.

Durante el análisis de esta definición y a raíz de la discusión cuyo objetivo es contestar la pregunta, surge una inquietud: si no existen tres puntos no colineales no existe un triángulo. Por ello, el camino que sugieren los estudiantes comienza por establecer la existencia de un plano, para en él encontrar los tres puntos y, por ende, el triángulo. Todo ello lleva a establecer el siguiente teorema:

Teorema Existencia de triángulos En un plano, existe un triángulo.

La demostración de este teorema exige usar el *P. Plano-puntos* y el *P. Llaneza del plano*.

Tras resolver el problema de la existencia de triángulos, se procede a introducir la relación de congruencia de triángulos abordando el siguiente problema:

PROBLEMA 19: Sean la $\overleftrightarrow{PC}$ y un punto $A \notin \overleftrightarrow{PC}$ contenidos en un plano. Proponga dos métodos para determinar un punto B en el mismo plano de tal manera que ΔACP y ΔBCP sean congruentes.

Su resolución exige, en primer lugar, aclarar que *determinar* significa dar una caracterización geométrica del proceso para encontrar el punto B es decir un proceso indicando la secuencia de pasos que permite encontrarlo o construirlo y precisando la justificación teórica de cada paso. En segundo lugar, se requiere definir la relación de congruencia de triángulos, concepto que posiblemente los estudiantes ya conocen.

> **Definición de triángulos congruentes** Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de uno de los triángulos y los del otro, de tal forma que los ángulos y lados correspondientes son congruentes.

Esto significa que ΔABC y ΔDEF son congruentes ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$) si se tiene que:

1. A corresponde a D, B corresponde a E y C corresponde a F
2. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
3. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$

Aquí establecemos como postulado de congruencia de triángulos solo uno: aquél que afirma que la congruencia de un lado de un triángulo con el correspondiente del otro triángulo y la congruencia de los ángulos que cada lado determina en los triángulos (LAL) son condiciones suficientes para que dichos triángulos sean congruentes. A diferencia de lo que sucede en el libro *Elementos* de Euclides, donde todos los criterios son proposiciones (Libro I, proposiciones 4, 8 y 26, tr. 1991), en nuestro sistema teórico solo dos de estos son teoremas (LLL y ALA) que se demostrarán más adelante. Euclides emplea para demostrar los criterios de congruencia la posibilidad de trasladar y superponer un triángulo sobre otro de tal forma que coincidan todas sus partes, idea que se ajusta perfectamente a la de correspondencia mencionada en nuestra definición y congruencia de las partes correspondientes. Él, como todos los geómetras griegos, asume un principio sin mencionarlo explícitamente, que más tarde B. Riemann (1826-1866) y H. Helmholtz (1821-1894), llaman el *Axioma de libre movilidad* (Heidelberger, 1993) el cual establece que, en espacios de curvatura uniforme, los cuerpos no se deforman cuando estos se trasladan de un lugar a otro. Usando esta idea, Euclides demuestra el Criterio LAL (Proposición 4, pág. 29) y el Criterio LLL (Proposición 8, pág. 36, tr. 1991). En 1889, Hilbert (1862-1943), en su intento de darle a la geometría euclidiana un fundamento axiomático estricto, en donde entre otras cosas no se asuma el Axioma de Libre Movilidad, presenta en su libro Fundamentos de Geometría, un sistema que incluye la congruencia como una relación no definida y cinco axiomas de congruencia (Boyer, 1989). Enunciamos entonces los criterios de congruencia a los que nos referimos anteriormente:

Postulado LAL Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y los ángulos que estos determinan también son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.
Teorema ALA Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes congruentes y el lado que estos comparten también son congruentes, entonces los triángulos son congruentes.
Teorema LLL Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Aun cuando aquí se enuncian los dos teoremas que establecen criterios de congruencia, en este momento se introduce en la clase solamente el *T. ALA* que se puede demostrar usando el *P. LAL* y los elementos teóricos que se tienen hasta el momento (Ejercicio 4, al final del capítulo). Para la demostración del *T. LLL* es necesario contar con el *T. del Triángulo isósceles*, elemento que surge en la resolución de un problema posterior. Por eso se posterga su introducción al sistema teórico.

Generalmente surgen tres propuestas para resolver el Problema 19. No es usual que los estudiantes propongan un método en el cual B esté en el mismo semiplano donde está A. Ello, porque quizá piensan que la correspondencia entre los vértices C y P tiene que ser con ellos mismos, condición que no se exige en el enunciado del problema. Vale la pena precisar que la expresión $\Delta ACP \cong \Delta BCP$ sí implica la correspondencia entre los vértices que asegura la congruencia de las partes (ángulos y lados) correspondientes, pero la expresión "ΔACP y ΔBCP sean congruentes" no necesariamente. Las propuestas usuales de solución al problema son:

Propuesta 19.1 Construir el $\overrightarrow{PC'}$ de tal forma que $m\angle CPC'=m\angle APC$ y localizar en él un punto B tal que $BP = PA$ (Figura 30).

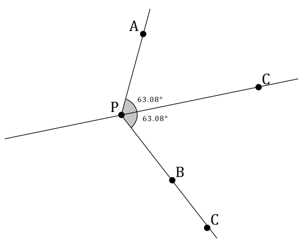


Figura 30

Propuesta 19.2 Construir la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{PC}$ por el punto A, nombrar el punto de intersección entre las dos rectas como X, y localizar un punto B en el rayo opuesto al $\overrightarrow{XA}$ tal que $AX = XB$ (Figura 31).

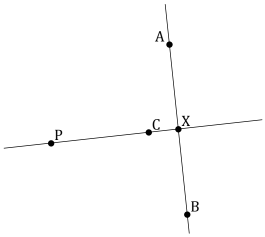


Figura 31

Propuesta 19.3 Trazar dos circunferencias; una con centro P y radio PA, y otra con centro en C y radio CA. Nombrar como B el punto de intersección de las dos circunferencias que es distinto de A (Figura 32).

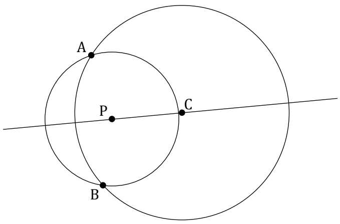


Figura 32

La Propuesta 19.1 se puede justificar sin introducir elementos nuevos al sistema teórico. Se usan para ello el *T. Construcción de ángulos* y el *T. Localización de puntos*, garantizando así las condiciones requeridas por el *P. LAL*. En cuanto a la Propuesta 19.2, es necesario justificar la existencia de una recta perpendicular a otra por un punto que no pertenece a la segunda recta.

Teorema Existencia perpendicular por punto externo Dada una recta y un punto que no pertenece a ella, existe una única recta que contiene al punto y es perpendicular a la recta dada.
Reformulación Si la $\overleftrightarrow{CX}$ y un punto A tal que $A \notin \overleftrightarrow{CX}$, entonces existe una $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $\overleftrightarrow{CX} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (Figura 33).

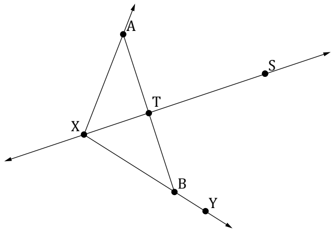


Figura 33

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\overleftrightarrow{CX}$, $A \notin \overleftrightarrow{CX}$	Dado
2. Sea $\angle AXC$	T. Existencia de ángulo (1)
3. Sea $m\angle AXC = r$; $r > 0$	P. Ángulo-número (2)
4. Sea $\overrightarrow{XY}$ tal que $Y \in S_{\overleftrightarrow{XC},\sim A}$ y $m\angle CXY = r$	T. Construcción de ángulos (1,3)
5. $XA > 0$	P. Puntos-número (1)
6. Sea $B \in \overrightarrow{XY}$ tal que $XB = XA$	T. Localización de puntos (5)
7. $B \in S_{\overleftrightarrow{XC},\sim A}$	T. Semirrecta (4,6)
8. Sea $\overleftrightarrow{AB}$	P. Dos puntos - recta (1,7)
9. Sea $\overline{AB}$	T. Recta-rayo-segmento (8)
10. $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{CX} = \{T\}$	P. Separación del plano (ii) y T. Intersección de rectas (1,7,8)
11. A, X, T no colineales; B, X, T no colineales	D. Colineal (1,7,10)
12. Sean ΔAXT y ΔBXT	D. Triángulo (11)
13. $\overline{XT} \cong \overline{XT}$	Pr. Reflexiva
14. $\angle AXT \cong \angle BXT$	D. Ángulos congruentes (3,4)
15. $\overline{AX} \cong \overline{XB}$	D. Segmentos congruentes (5)
16. $\Delta AXT \cong BXT$	P. LAL (13,14,15)
17. $\angle ATX \cong \angle BTX$	D. Triángulos congruentes (16)

Continúa →

18. $T \in \overline{BA}$	D. Intersección (10)
19. $B - T - A$	D. Segmento (18)
20. $\overrightarrow{TA}$ y $\overrightarrow{TB}$ son opuestos	D. Rayos opuestos (19)
21. $\angle ATX$ y $\angle XTB$ son par lineal	D. Par lineal (11,20)
22. $\angle ATX$ y $\angle XTB$ son rectos	D. Ángulo recto 2 (17,21)
23. $\overleftrightarrow{CX} \perp \overleftrightarrow{AB}$	D. Rectas perpendiculares (1,8,22)

En el paso 10 de la demostración anterior se supuso que los puntos A, X y B no son colineales, al suponer que el punto de intersección de $\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{CX}$ era un punto T y no B. Se debe abordar la posibilidad de que sean colineales para completar la demostración. Por otro lado, como las demostraciones se construyen colectivamente con los estudiantes, el camino seguido en clase para justificar el hecho no necesariamente coincide con el aquí propuesto. Por ejemplo, en alguna versión del curso, en lugar del paso 7 surgió la siguiente propuesta:

7a. $X - B - Y$ o $X - Y - B$ o $B = Y$	D. Rayo (6)
7b. $B \in S_{\overleftrightarrow{XC},Y}$	T. Puntos en el mismo semiplano (7a)
7c. $B \in S_{\overleftrightarrow{XC},Y}$ y $Y \in S_{\overleftrightarrow{XC},\sim A}$	Conjunción (4,7b)
7d. $B \in S_{\overleftrightarrow{XC},\sim A}$	Pr. Transitiva (7c)

La Propuesta19.3 se descarta porque no hay forma de validar que existe el otro punto de intersección de las circunferencias. Además, si se quiere aceptar la existencia del otro punto de intersección como un hecho, es necesario usar el *T. LLL* para completar la justificación, elemento que no se ha introducido aún al sistema teórico.

Mediatriz

El siguiente problema tiene como objetivo recordar la definición de mediatriz de un segmento como el lugar geométrico de los puntos coplanares que equidistan de los extremos del segmento. También se espera que los estudiantes descubran, como hecho geométrico, la propiedad que usualmente se presenta como definición de mediatriz: recta perpendicular al segmento que contiene su punto medio.

PROBLEMA 20: Dados una recta m, un punto *R* de ella y un punto *P* que no pertenece a ella. **a.** ¿Cuántos puntos del $S_{m,\sim P}$ tienen la misma distancia a *R* que la distancia de *R* a *P*? Justifique su respuesta. **b.** ¿Existe un punto *Q* tal que para todo punto *Y* de *m* se tenga que *QY* sea igual a *PY*? Si existe, describa sus características geométricas. Formule una conjetura y justifíquela.

Para encontrar el punto *Q* por lo regular, los estudiantes exploran de alguna de las siguientes tres maneras:

Propuesta 20.1 Construyen una circunferencia con centro *R* y radio *RP*. Activan la traza de dicha circunferencia y animan el punto *R*. Encuentran que la traza ilustra que todas las circunferencias se intersecan en un único punto *Q* del $S_{m,\sim P}$. Así, para dicho punto *Q*, *PR*=*QR*, siendo *R* cualquier punto de *m* (Figura 34).

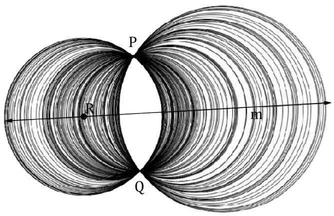


Figura 34

En una variación de la construcción descrita, construyen la circunferencia con centro *R* y radio *RP*. Luego escogen un punto $Y \in m$, y construyen la circunferencia con centro *Y* y radio *YP*. Arrastran el punto *Y* y se dan cuenta de que las circunferencias siempre se intersecan en dos puntos, *P* y un punto del $S_{m,\sim P}$. Ese es el punto *Q* (Figura 35).

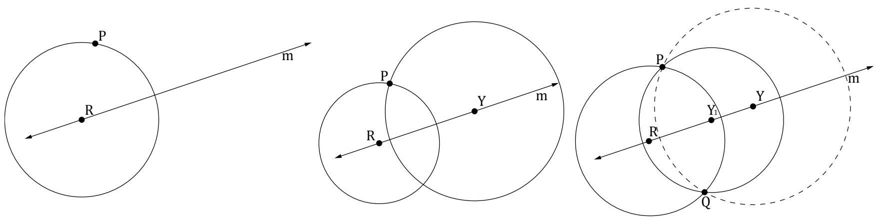


Figura 35

Propuesta 20.2 Construyen una circunferencia con centro R y radio RP. Construyen un punto Q cualquiera en la circunferencia de manera tal que $Q \in S_{m,\sim P}$, y un punto cualquiera Z en la recta. Encuentran las distancias PZ y QZ, y con el arrastre de Q obligan a que $PZ = QZ$. Enseguida arrastran el punto Z y se dan cuenta de que dicha igualdad se mantiene (Figura 36).

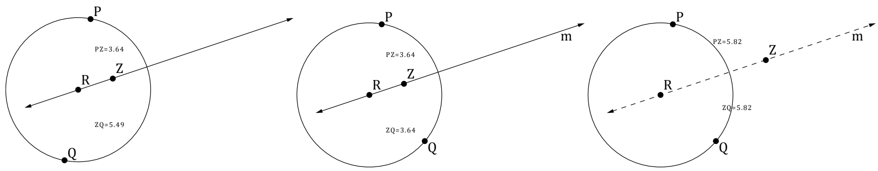


Figura 36

Propuesta 20.3 Esta construcción es principalmente por ajuste. Teniendo a $R \in m$, escogen otro punto $Y \in m$. Escogen dos puntos C y D tales que $C, D \in S_{m,\sim P}$, $CR = PR$ y $YD = PY$. Mueven a C y a D hasta que coinciden. Eventualmente, encuentran el punto Q deseado (Figura 37).

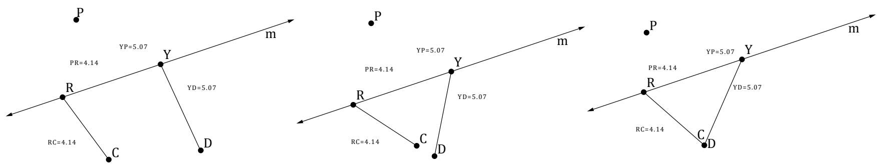


Figura 37

Sabiendo ya que dicho punto Q existe, con base en la realización de alguna de las exploraciones anteriores, los estudiantes se centran en establecer propiedades geométricas para el punto Q, que les permitan formular una conjetura. Por lo general, llegan a formular los siguientes enunciados condicionales.

Conjetura 20.1 Sean m una recta, P un punto, $P \notin m$, y R y Z puntos cualesquiera de m. Si Q es un punto del $S_{m,\sim P}$, tal que $\angle PZR \cong \angle QZR$ y $PZ \cong QZ$, entonces P y Q equidistan de R y $PQ \perp m$ (Figura 38).

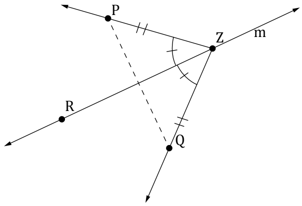


Figura 38

Conjetura 20.2 Sean m una recta, P un punto, $P \notin m$, y R cualquier punto de m. Sea l la recta perpendicular a m por P, $m \cap l = \{S\}$. Si $PS = SQ$, $Q \in S_{m,\sim P}$, entonces P y Q equidistan de R (Figura 39).

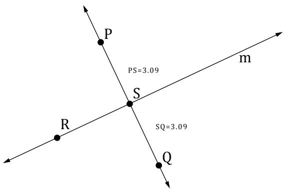


Figura 39

Conjetura 20.3 Dados una recta m, un punto $P \notin m$ y un punto $Q \in S_{m,\sim P}$ tales que $PY = QY$ para todo punto $Y \in m$, entonces $PQ \perp m$ (Figura 40).

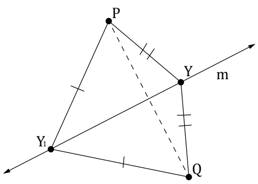


Figura 40

Surgen, en esencia, dos propiedades importantes de estas conjeturas: i. Si se tienen un $\overline{PQ}$, su punto medio S, y una recta m que contiene a S y es perpendicular a $\overline{PQ}$, entonces todo punto $R \in m$ equidista de P y Q. ii. Si se tiene un $\overline{PQ}$ y para todo punto $Y \in m$ se cumple que $PY= QY$, entonces $\overline{PQ} \perp m$ y m contiene el punto medio de $\overline{PQ}$.

Este es un buen momento para mostrar que las definiciones son arbitrarias. Específicamente, se puede definir la mediatriz de un segmento de dos formas:

> **Definición 1 de Mediatriz** Dado un $\overline{PQ}$, la mediatriz del $\overline{PQ}$, en un plano, es la recta perpendicular al segmento, que contiene el punto medio de este.
> **Definición 2 de Mediatriz** Dado un $\overline{PQ}$, la mediatriz del $\overline{PQ}$, en un plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

Si se acepta como definición el primer enunciado, entonces el segundo será el *T. de la mediatriz*; por el contrario, si el segundo enunciado se toma como la definición, el primero será el *T. de la mediatriz*. Por lo regular, este último es el camino que seguimos en clase, aun cuando el primero es el que se encuentra habitualmente en los textos.

Escogemos ese camino por varias razones. Una, en el curso Elementos de Geometría se llega a la *D. (2) de Mediatriz* a partir de la exploración, con geometría dinámica, de una situación cuyo resultado sorprende a los estudiantes: hay más de un punto que equidista de los extremos de un segmento dado. Otra, vemos mayor riqueza para ampliar el sistema teórico si usamos la *D. (2) de Mediatriz* como nuestra definición de mediatriz. El análisis de tal definición nos lleva a: demostrar la existencia de la mediatriz, demostrar que realmente es una recta n y que precisamente n es la recta perpendicular al segmento, que contiene el punto medio de este. Eso es lo recoge la *D. (1) de Mediatriz*. Para desarrollar esta propuesta, solemos nombrar con el símbolo $M_{\overline{PQ}}$ al conjunto de puntos de un plano que equidistan de los extremos del $\overline{PQ}$. El camino delineado exige mostrar que: $M_{\overline{PQ}} \neq \emptyset$ y $n = M_{\overline{PQ}}$.

Triángulo isósceles

El siguiente problema nos abre el camino para abordar las definiciones de altura de un triángulo y de triángulos isósceles, equilátero y escaleno; también, para incluir los teoremas del Triángulo isósceles, su recíproco, del Ángulo externo, y los criterios de congruencia de triángulos que aún no se han estudiado.

> **PROBLEMA 21:** Determine la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad *dos* de *sus alturas son congruentes*.

Hay dos cuestiones que se deben tratar inmediatamente: la definición y la existencia de altura de un triángulo.

Definición de altura Altura de un triángulo es el segmento perpendicular a la recta que contiene un lado del triángulo y cuyos extremos son un punto de la recta y el vértice del triángulo que no pertenece a la recta.

La demostración de la existencia de las alturas se basa en el *T. Existencia perpendicular por punto externo.*

Este problema difiere de muchos de los anteriores porque permite dos interpretaciones y, por tanto, dos formas de proceder para resolverlo: comenzar con algún triángulo especial, específicamente el isósceles, y verificar la congruencia de alturas, o comenzar con un triángulo cualquiera y arrastrar hasta que dos alturas sean congruentes. De acuerdo con las construcciones que realizan los estudiantes con geometría dinámica, se obtienen diferentes conjeturas que se pueden agrupar en las siguientes tres. Ellas dependen de lo que construyen inicialmente y de cómo exploran la situación.

1. Si un triángulo es isósceles, entonces dos alturas son congruentes.
2. Si dos alturas de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles.
3. Si el triángulo es equilátero, entonces sus alturas son congruentes.

Generalmente, los estudiantes no precisan cuáles son los lados que deben ser congruentes y cuáles las alturas a las que se refieren. Por ello, en un trabajo conjunto se establecen las siguientes afirmaciones:

Conjetura 21.1 Si ΔABC con $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ y $\overline{BY}$ y $\overline{AX}$ alturas, entonces $\overline{BY} \cong \overline{AX}$.
Conjetura 21.2 Si $\overline{BY}$ y $\overline{AX}$ son alturas y $\overline{BY} \cong \overline{AX}$, entonces el ΔABC es isósceles.
Conjetura 21.3 Si un triángulo es equilátero, entonces sus alturas son congruentes.

Además, con frecuencia, surgen conjeturas que se pueden aprovechar para estudiar aspectos de la lógica o de la teoría de conjuntos, como la determinación de la equivalencia de tales conjeturas con las que finalmente se formulan, o la inclusión de las conjeturas que proponen en las que finalmente se formulan. Un ejemplo de esta situación, son las siguientes afirmaciones:

a. Si los ángulos de un triángulo son agudos y dos de sus alturas son congruentes, entonces el triángulo es isósceles. Esta afirmación es un caso particular de la Conjetura 21.2, por lo tanto está incluida en ella.

b. Si en un triángulo todas las alturas tienen diferente medida, entonces es escaleno. Esta afirmación está relacionada con la contrarrecíproca de la Conjetura 21.1 o de la Conjetura 21.3.

Es importante precisar la definición de triángulo isósceles pues algunos estudiantes la dan en términos de la congruencia de los ángulos; otros, de la congruencia de los lados; y otros incluyen ambas condiciones. También es necesario tratar la relación entre triángulo isósceles y triángulo equilátero pues algunos estudiantes no reconocen la relación de inclusión entre ellos.

Definición Triángulo isósceles Un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.
Definición Triángulo equilátero Un triángulo es equilátero si todos sus lados son congruentes.
Definición Triángulo escaleno Un triángulo es escaleno si no tiene ningún par de lados congruentes.

Cuando los estudiantes intentan demostrar la Conjetura 21.1, el primer obstáculo que encuentran es poder concluir que los ángulos opuestos a los lados congruentes del triángulo también son congruentes. Se establece entonces como teorema y surgen varias propuestas para demostrarlo.

Teorema Triángulo isósceles Si ΔABC es isósceles, con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $\angle A \cong \angle C$.

Propuesta 21.1 Determinar el punto medio M del $\overline{AC}$ y concluir que $\Delta ABM \cong \Delta CBM$.
Propuesta 21.2 Construir la altura $\overline{BM}$ y concluir que $\Delta ABM \cong \Delta CBM$.
Propuesta 21.3 Construir la bisectriz $\overrightarrow{BM}$ del $\angle ABC$ con $M \in \overline{AC}$, y concluir que $\Delta ABM \cong \Delta CBM$.
Propuesta 21.4 Construir una recta perpendicular por el punto medio M del $\overline{AC}$ y concluir que $\Delta ABM \cong \Delta CBM$.

Ninguna de estas cuatro propuestas se puede justificar completamente usando los elementos del sistema teórico disponible. La Propuesta 21.1 requiere del *T. LLL*, cuya demostración recurre a la validez del *T. Triángulo isósceles*. En la Propuesta 21.2, es necesario garantizar, por una parte, que M cumple A - M - C y ninguna otra de las posibles interestancias y, por otra parte, que se cumple el criterio de congruencia hipotenusa–cateto (Criterio HC). La Propuesta 21.3 requiere garantizar que la bisectriz del $\angle ABC$ interseca el $\overline{AC}$.

En este momento, hay cuatro posibles caminos para seguir:

1. Usar la demostración propuesta por Pappus, en la que se justifica la congruencia del ΔABC con el ΔCBA empleando el *P. LAL*.
2. Usar la demostración basada en la propuesta de Euclides: escoger un punto E en la $\overleftrightarrow{BA}$ tal que B - A - E, localizar un punto F en la $\overleftrightarrow{BC}$ tal que B - C - F y $CF = AE$, y demostrar la congruencia del ΔBAF con el ΔBCE y del ΔAEC con el ΔCFA, usando el *P. LAL*.
3. Puesto que las justificaciones del Criterio *HC* y del *T. LLL* necesitan la validez del *T. Triángulo isósceles*, estas opciones se descartan.
4. Usar la definición de mediatriz para concluir que BM está contenido en la mediatriz del AC y luego usar el *T. Mediatriz* para concluir que $\overline{BM} \perp \overline{AC}$. De ello, se tiene que $\Delta ABM \cong \Delta CBM$ por el *P. LAL*.

En el curso, se adopta, por razones didácticas pues su demostración es compleja (ver problema 7 en Moise y Downs, 1986, p. 179), la validez de la intersección de la bisectriz del $\angle ABC$ con el $\overline{AC}$, con el siguiente postulado.

Postulado Intersección rayo segmento Si $\overrightarrow{BK}$ contiene un punto en el interior del $\angle B$ y A, C son puntos en lados diferentes del $\angle B$, entonces $\overrightarrow{BK} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$.

El problema en el que se solicitaba construir ángulos adyacentes congruentes, como se mencionó en el capítulo anterior, puede llevar a una propuesta cuya justificación requiere de la congruencia de triángulos (Propuesta 15.8). Específicamente, la propuesta consiste en construir un $\angle ABC$ y determinar, en cada uno de sus lados, sendos puntos, H y K, tales que $HB = BK$. Luego, con el punto medio M de $\overline{HK}$ se construye finalmente el $\overrightarrow{BM}$ para obtener la congruencia de los $\angle ABM$ y $\angle CBM$. En este momento se tienen todos los elementos para justificar esta propuesta.

Establecido el *T. Triángulo isósceles*, se aborda ahora el estudio del enunciado recíproco. También este se puede demostrar usando la idea propuesta por Pappus, pero se invita a los estudiantes a ingeniarse una demostración diferente. Mencionamos algunas de las propuestas y la razón por la que no se aceptan.

Teorema Recíproco del Triángulo isósceles Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos son congruentes.

Propuesta 21.5 Dado el ΔABC con $\angle ACB \cong \angle ABC$, escoger un punto D tal que B - D - A y localizar un punto E en $\overrightarrow{CA}$ tal que $DB = EC$. Demostrar que $\Delta BCD \cong \Delta CBE$. En consecuencia, se tiene que $\angle ADC \cong \angle AEB$ y $AD = AE$, lo que permite establecer que $\Delta ABE \cong \Delta ACD$.

Razón para rechazarla: ¿Cómo asegurar que A - E - C? (Figura 41).

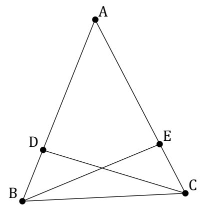


Figura 41

Propuesta 21.6 Dado ΔABC con $\angle ACB \cong \angle ABC$ escoger H, punto medio del $\overline{BC}$, y trazar una perpendicular al $\overline{BC}$ que contenga a H.

Razón para rechazarla: ¿Cómo asegurar que esa recta perpendicular contiene al punto A?

Propuesta 21.7 Dado el ΔABC con $\angle ACB \cong \angle ABC$, construir las bisectrices $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BK}$ de los ángulos congruentes. Demostrar la congruencia de ΔKBC y ΔDCB con $D \in \overline{BA}$ y $K \in \overline{AC}$. Enseguida, demostrar la congruencia de ΔKBA y ΔDCA. Esta propuesta es válida en cuanto se acepte como postulado el *P. Intersección rayo segmento* (Figura 42).

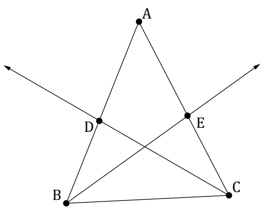


Figura 42

Se retoma la demostración de la Conjetura 21.1 en la que se plantea que las alturas relativas a los lados congruentes de un triángulo isósceles son congruentes (Figura 43).

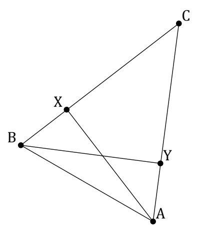


Figura 43

Aunque se sobrepasa el primer obstáculo con la introducción del *T. del Triángulo isósceles*, no se puede avanzar mucho más en la demostración de la conjetura porque tanto para los triángulos ΔXAB y ΔYBA, como para ΔAXC y ΔBYC, solo se logra demostrar la congruencia de un lado y de dos ángulos, no siendo el lado el que está determinado por los ángulos. Generalmente, los estudiantes proponen dos opciones para solventar la situación:

1. Introducir, como postulado o teorema, el enunciado que establece que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.
2. Introducir, como postulado o teorema, el enunciado que establece que una correspondencia entre dos triángulos tal que un lado y dos ángulos correspondientes son congruentes da lugar a triángulos congruentes.

Sin embargo, ninguna es aceptada y se procede entonces a proponer otros problemas que darán lugar a los criterios de congruencia que aún faltan.

Teorema del Ángulo externo

Habiendo generado la necesidad de introducir otro elemento en el sistema teórico para demostrar la conjetura, se propone otro problema a los estudiantes.

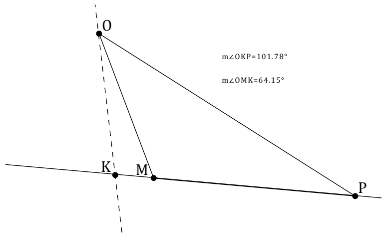
PROBLEMA 22: Construya en Cabri un ΔMOP y un punto K sobre $\overleftrightarrow{MP}$. ¿Qué condiciones se deben tener para asegurar que siempre $m\angle OKP > m\angle OMK$?

Las propuestas que surgen usualmente son las siguientes:

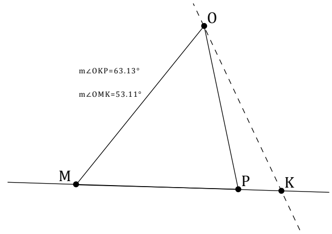
Propuesta 22.1 Si $K - M - P$, entonces $m\angle OKP < m\angle OMK$.
Propuesta 22.2 Si $M - P - K$, entonces $m\angle OKP < m\angle OMK$.
Propuesta 22.3 Si $M - P - K$, entonces $m\angle OKP > m\angle OMK$.
Propuesta 22.4 Si $m\angle OKP > m\angle OMK$, entonces $M - K - P$.
Propuesta 22.5 Si $M - K - P$, entonces $m\angle OKP > m\angle OMK$.

Se sugiere a los estudiantes que, con sus representaciones de geometría dinámica, intenten encontrar contraejemplos de cada una de las propuestas formuladas. Las siguientes representaciones gráficas ilustran por qué las Propuestas 22.1, 22.2, 22.3 y 22.4 son falsas (Figura

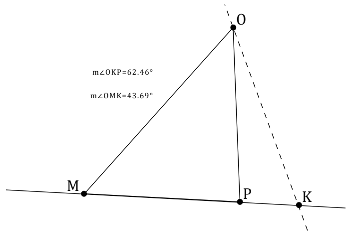
44). Es usual que se presenten estas propuestas erróneas porque los estudiantes no arrastran el punto durante el proceso de exploración.



Descarta la Propuesta 22.1



Descarta la Propuesta 22.2



Descarta la Propuesta 22.3 y 22.4

Figura 44

De la Propuesta 22.5 surge la siguiente conjetura:

Conjetura 22.1 Dados el ΔMOP y un punto K tal que $M - K - P$, entonces $m\angle OKP > m\angle OMK$.

El estudio de la conjetura permite introducir la definición de ángulo externo:

Definición de Ángulo externo Dado un ΔABC. El $\angle ACD$ es externo si $B - C - D$.

Además, la definición y la siguiente discusión son elementos para llegar a la generalización que se enuncia como el *T. Ángulo externo*.

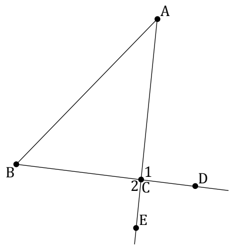


Figura 45

La Conjetura 22.1 establece que $m\angle 1 > m\angle B$ (Figura 45). Ahora bien, la configuración del $\angle 1$ con el $\angle B$ es la misma que la del $\angle 2$ con el $\angle A$ y, por lo tanto, $m\angle 2 > m\angle A$. Como $m\angle 1 = m\angle 2$, dado que los ángulos son opuestos por el vértice, se concluye que $m\angle 1 > m\angle A$. Esto lleva a establecer un teorema.

Teorema Ángulo externo I En cualquier triángulo, la medida de uno de sus ángulos externos es mayor que la medida de cualquiera de los dos ángulos no adyacentes al externo.
Reformulación del teorema Si ΔABC y el $\angle ACD$, uno de sus ángulos externos, entonces $m\angle ACD > m\angle BAC$ y $m\angle ACD > m\angle ABC$.

Al abordar la demostración del teorema, surge como primera pregunta cómo se demuestra una desigualdad. En este caso, ¿cómo se demostraría $m\angle ACD > m\angle BAC$? Para ello, se requiere justificar la existencia de un número $x > 0$ tal que $m\angle ACD = m\angle BAC + x$. Esto es producto de un análisis desde un punto de vista algebraico. Pero ¿geométricamente, cómo se puede establecer dicha expresión? Surgen dos posibilidades para encontrar el valor de x: utilizar una medida de ángulo o una medida de segmento. Para este caso, la segunda no tiene sentido.

La clave de la demostración está, entonces, en determinar el ángulo de medida x pertinente para obtener que la $m\angle ACD = m\angle BAC + x$. Las propuestas de los estudiantes para encontrar dicho ángulo son:

Propuesta 22.6 Construir una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ por el punto C.

Esta posibilidad se descarta puesto que no se determinarían ángulos que se puedan relacionar con los ángulos involucrados en el teorema.

Propuesta 22.7 Construir un $\angle ACX$ o $\angle DCX$, con $X \in S_{\overleftrightarrow{BC},A}$ de manera tal $m\angle ACX = m\angle A$ o $\angle DCX = m\angle A$.

Para justificar la construcción, algunos estudiantes hacen referencia al *T. Construcción de ángulos*; otros proponen construir una recta paralela al $\overline{BC}$ por el punto A. La primera opción de justificación tiene el inconveniente de no poder garantizar que $X \in int\angle ACD$. La segunda opción requiere introducir un nuevo concepto, rectas paralelas, al sistema teórico, asunto que no se hace porque no se quiere introducir hasta que sea absolutamente necesario para resolver un problema. La primera opción abre el panorama para advertir que no siempre una construcción auxiliar produce directamente el objeto o la relación necesaria para justificar una proposición. Esta es la segunda vez que vamos a usar una construcción que indirectamente da lugar a la relación que se necesita. En la primera ocasión, la construcción auxiliar fue útil para demostrar el *T. Existencia de perpendicular por punto externo*. Para el caso que nos ocupa, la construcción auxiliar genera triángulos congruentes que involucran los ángulos que deseamos con igual medida. Presentamos a continuación los pasos claves para la demostración del *T. Ángulo externo*.

1. Construir el punto medio M del $\overline{AC}$.
2. Construir un punto X en el rayo opuesto al $\overrightarrow{MB}$, tal que $BM = MX$.
3. Justificar que $\Delta AMB \cong \Delta CMX$.
4. Justificar que $X \in int\angle ACD$. (Ver ejercicio 12 al final del capítulo)
5. Justificar que $m\angle ACX > m\angle ACD$.
6. Justificar que $m\angle BAC > m\angle ACD$. (Figura 46)

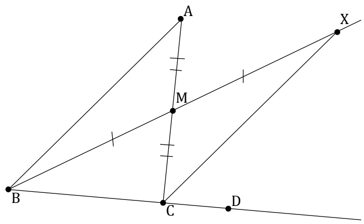


Figura 46

Una consecuencia casi inmediata del *T. Ángulo externo* es la siguiente afirmación, cuya demostración se deja como ejercicio.

Teorema Triángulo rectángulo u obtusángulo Si un triángulo es rectángulo u obtusángulo, entonces sus otros dos ángulos son agudos.

Recordemos que las conjeturas que relacionan alturas congruentes con triángulos isósceles no se han demostrado aún. Estas conjeturas son:

Conjetura 21.1 Si ΔABC con $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ y $\overline{BY}$ y $\overline{AX}$ son alturas, entonces $\overline{BY} \cong \overline{AX}$.
Conjetura 21.2 Si $\overline{BY}$ y $\overline{AX}$ son alturas de un triángulo y $\overline{BY} \cong \overline{AX}$, entonces el ΔABC es isósceles.
Conjetura 21.3 Si un triángulo es equilátero, entonces sus alturas son congruentes.

Lo que hizo falta para culminar la demostración de la Conjetura 21.1 (y realizar la correspondiente de la Conjetura 21.2) es que la correspondencia lado – ángulo – ángulo entre dos triángulos dé lugar a la congruencia de los triángulos. Precisamente para demostrar que es realmente un criterio de congruencia, se necesita el *T. Ángulo externo*.

Teorema Criterio de congruencia lado – ángulo – ángulo (LAA) Dados ΔABC y ΔDEF tales que $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

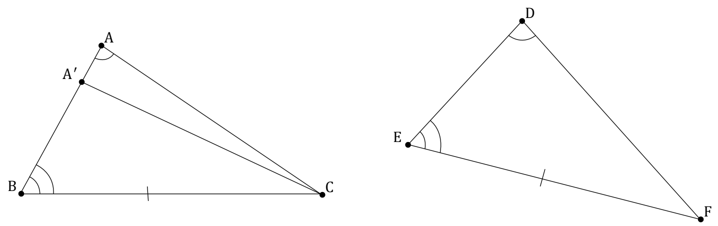


Figura 47

Se pide a los estudiantes sugerencias para demostrar este teorema. Usualmente surgen dos posibilidades: estudiar la relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ para asegurar su congruencia y así utilizar el *P. LAL*, o estudiar la relación entre $\angle ACB$ y $\angle DFE$ para asegurar su congruencia y utilizar el *T. ALA*. Generalmente es la primera opción la que se aborda. Ello implica construir en el $\overrightarrow{BA}$, un punto A' tal que $ED = BA'$ y demostrar que $\Delta BA'C \cong \Delta EDF$. Esto lleva a una contradicción del *T. Ángulo externo* (Figura 47).

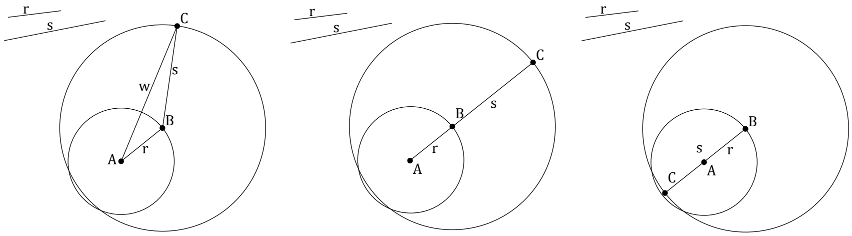
PROBLEMA 23: Dados los números positivos r y s.

a. ¿Qué condición debe tenerse en cuenta para asegurar que existe un ΔABC tal que $AB = r$ y $CB = s$?
b. ¿Es posible que en dicho triángulo, $\overline{AC}$ sea el lado de mayor longitud? Formule conjeturas y demuéstrelas.

Entre las conjeturas que usualmente surgen del análisis de este problema, no hace falta la que explicita como condición en el antecedente la no colinealidad de los puntos A, B y C. Por tanto, antes de estudiar todas las conjeturas que surgen, es pertinente abordar la relación que existe entre la propiedad de no colinealidad y los datos dados en el problema: las medidas de las longitudes de dos de los lados del triángulo. Es decir, se analizan las condiciones que debe tener la medida de la longitud del tercer segmento para que el triángulo exista.

Así, inicialmente la discusión se centra en estudiar, con geometría dinámica, las posibles posiciones del punto C en la $\overleftrightarrow{AB}$ para determinar AC en términos de r y s. Como se pueden dar tres casos de interestancia, a saber: $A - B - C$, $A - C - B$ y $B - A - C$, entonces $AC = r + s$, $AC = r - s$,

$AC = s - r$, respectivamente (Figura 48). Teniendo estos resultados, se estudia, usando la geometría dinámica, la relación de $r + s$ y $|r - s|$ con AC, cuando existe el ΔABC. Con base en el análisis mencionado, surge la primera conjetura relacionada con el problema:



A, *B* y *C* no colineales

A, *B* y *C* colineales; $AC = r + s$

A, *B* y *C* colineales; $AC = s - r$

Figura 48

Conjetura 23.1 Si r, s y w son números positivos tales que $|r - s| < w < r + s$, entonces existe un ΔABC tal que $AB = r$, $CB = s$ y $AC = w$.

Su demostración es por contradicción y se basa en suponer que el no existe. Ello implicaría que los puntos *A*, *B* y *C* son colineales. Estudiando las posibles interestancias, es evidente que se contradicen las desigualdades dadas en la hipótesis de la conjetura.

Como es usual, en este punto se cuestiona la validez del enunciado recíproco de la Conjetura 23.1; surge entonces la siguiente conjetura.

Conjetura 23.2 Dado un ΔABC tal que $AB = r$, $CB = s$ y $AC = w$, entonces $|r - s| < w < r + s$.

La demostración de esta conjetura requiere la validez del *T. Ángulos desiguales – lados desiguales* cuyo enunciado usualmente surge como una de las conjeturas producto de la exploración hecha para resolver el Problema 23. A continuación presentamos las demás conjeturas que a menudo surgen como respuesta a dicho problema.

Conjetura 23.3 Dado el ΔABC, si $m\angle ABC > m\angle ACB$ y $m\angle ABC > m\angle CAB$, entonces $AC > AB$ y $AC > BC$.

Conjetura 23.4 Dado el ΔABC, si $AC > AB$ y $AC > BC$, entonces $m\angle ABC > m\angle ACB$ y $m\angle ABC > m\angle CAB$.

Conjetura 23.5 Dado el ΔABC y $m\angle ABC \geq 90$, entonces $AC > AB$ y $AC > BC$.

Conjetura 23.6 Si $m\angle ABC < 60$ entonces $\overline{AC}$ no es el lado más largo.

De las Conjeturas 23.3 y 23.4 surgen respectivamente los siguientes teoremas:

Teorema Ángulos desiguales – lados desiguales Dado el ΔABC, si $m\angle ABC > m\angle ACB$ entonces $AC > AB$. (Figura 49)
Teorema Lados desiguales –ángulos desiguales Dado el ΔABC, si $AC > AB$, entonces $m\angle ABC > m\angle ACB$.

La demostración del segundo teorema se hace por contradicción y se deben utilizar el *T. Recíproco Triángulo isósceles* y el *T. Ángulos desiguales – lados desiguales*. La demostración del primero es la siguiente:

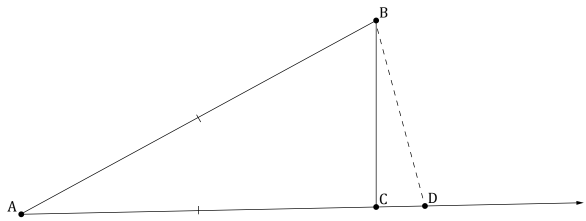


Figura 49

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC con $m\angle ABC > m\angle ACB$	Dado
2. $AB = AC$, $AB > AC$ o $AB < AC$	Tricotomía
3. $AB = AC$	Caso 1
4. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	D. Congruencia (3)
5. $\angle ABC \cong \angle ACB$	T. Triángulo isósceles (4)
6. $m\angle ABC = m\angle ACB$	D. Congruencia (5)
7. $m\angle ABC = m\angle ACB$ y $m\angle ABC > m\angle ACB$	Conjunción (6,1)
8. $AB \neq AC$	Pr. Reducción al absurdo (se contradice la Tricotomía) (7)
9. $AB > AC$	Caso 2 (2)
10. Sea $\overrightarrow{AC}$	T. Recta-rayo-segmento (1)

Continúa

11. Sea $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD = AB$	T. Localización de puntos (10)
12. $\overline{AD} \cong \overline{AB}$	D. Congruencia de segmentos (12)
13. $AD > AC$	Pr. Sustitución (9,11)
14. $A - C - D$	T. Desigualdad – interestancia (13)
15. $\angle BCA$ externo al ΔBCD	D. Ángulo externo (14)
16. $m\angle BCA > m\angle BDA$	T. Ángulo externo (15)
17. $\angle BDA \cong \angle ABD$	T. Triángulo isósceles (12)
18. $m\angle BDA = m\angle ABD$	D. Ángulos congruentes (17)
19. $m\angle BCA > m\angle ABD$	Pr. Sustitución (16,18)
20. $C \in int\angle ABD$	T. Punto en el interior de ángulo (14)
21. $m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$	P. Adición de medida de ángulos (20)
22. $m\angle CBD > 0$	P. Ángulo-número (21)
23. $m\angle ABD > m\angle ABC$	D. Mayor que (21, 22)
24. $m\angle BCA > m\angle ABC$	Prop. Transitiva (19, 22)
25. $m\angle BCA > m\angle ABC$ y $m\angle ABC > m\angle ACB$	Conjunción (23,1)
26. $AB \ngtr AC$	Pr. Reducción al absurdo (se contradice la ley de la tricotomía) (24)
27. $AB < AC$	MTP (2,8,25)

La Conjetura 23.5 da lugar a la inclusión, en el sistema teórico, de la definición de distancia de un punto a una recta y el *T. Mínima distancia*.

Definición de Distancia de un punto a una recta Dados una recta m y un punto P tales que P no pertenece a m. Sea $\overline{PQ} \perp m$, $Q \in m$. PQ es la distancia del punto P a la recta m.
Teorema Mínima distancia Si una recta m y un punto P tales que P no pertenece a m, $\overline{PQ} \perp m$, $Q \in m$, y R otro punto cualquiera de m, entonces $PQ < PR$.

En la demostración de este teorema, que se deja como ejercicio, se deben utilizar el *T. Triángulo rectángulo y obtusángulo* y *T. Ángulos desiguales – lados desiguales*. La demostración de la Conjetura 23.6 también se deja como ejercicio.

PROBLEMA 24: Con base en la situación del Problema 23, estudie dos momentos de la exploración realizada y determine la relación entre los triángulos correspondientes a cada momento.

Las conjeturas que usualmente surgen como solución al problema son:

Conjetura 24.1 Sean ΔABC y ΔDEF tales que $AB = DE$ y $AC = DF$. Si $m\angle BAC > m\angle EDF$, entonces $BC > EF$. (Figura 50)

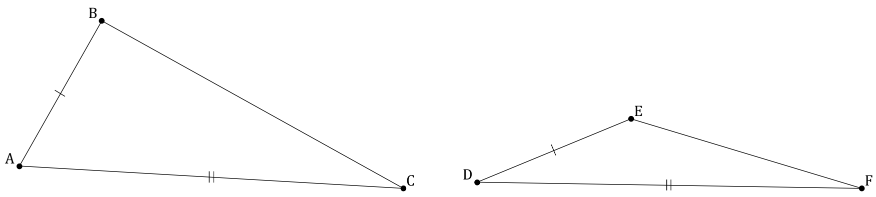


Figura 50

Conjetura 24.2 Sean ΔABC y ΔDEF tales que $AB = DE$ y $AC = DF$. Si $BC > EF$, entonces $m\angle BAC > m\angle EDF$.

La Conjetura 24.1 se convierte en el *T. de la Charnela*; la Conjetura 24.2, en el *T. Recíproco de la Charnela* cuya demostración se deja como ejercicio para el lector. Para la demostración del *T. de la Charnela* procedemos de una manera distinta a la que hemos venido presentando a lo largo del texto. Damos a los estudiantes la demostración que proveen Moise y Downs (1986) con el propósito de que la analicen de una manera crítica y la recuenten de manera comprensiva. Es decir, los estudiantes deben justificar, con elementos de nuestro sistema teórico, cada paso de la demostración que los autores proponen. La demostración que ponemos a consideración de los estudiantes es:

Paso 1: Construir el ΔAKC con $K \in int\angle BAC$ de manera que $\Delta AKC \cong \Delta DEF$. (Figura 51)

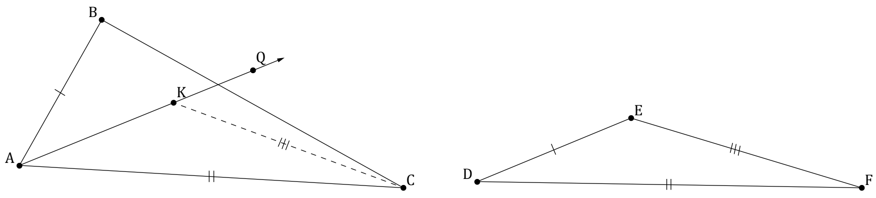


Figura 51

Paso 2: Bisecar al $\angle BAK$; sea M el punto donde la bisectriz interseca el $\overline{BC}$. (Figura 52)

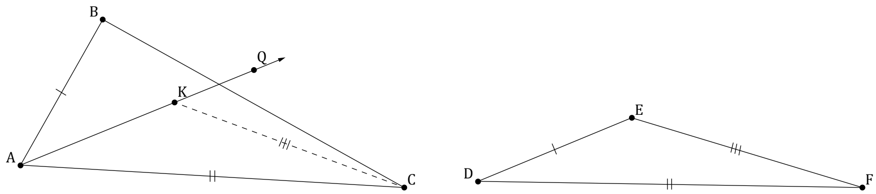


Figura 52

Paso 3: Demostrar que $\Delta AMB \cong \Delta AMK$.
Paso 4: Utilizar el *T. Desigualdad triangular* en el ΔCKM.
Paso 5: Concluir que $BC > EF$.

Generalmente, en su estudio de la demostración, los estudiantes no consideran cuatro asuntos fundamentales para la validez de ella. La demostración en cuestión es tan esquemática como lo son la mayoría de las demostraciones que se encuentran en otros textos de matemáticas. Por tanto, el ejercicio propuesto a los estudiantes es una oportunidad para que se percaten de que las demostraciones presentadas en dichos textos usualmente no proveen todo el detalle, y que descubrir todo los elementos esenciales del sistema teórico involucrados para garantizar la validez de la demostración es un ejercicio que favorece el aprendizaje. Específicamente, hacemos referencia a los siguientes asuntos:

i. ¿Cómo garantizar que K está en el $int\angle BAC$?
ii. ¿Cómo garantizar la existencia del $\angle BAK$?
iii. ¿Cómo garantizar que la bisectriz del $\angle BAK$ interseca el $\overline{BC}$?
iv. ¿Siempre existe el ΔCKM?

En cuanto a la primera pregunta, la respuesta está dada en la solución del Problema 10 del Capítulo 5. Preguntar por la existencia del $\angle BAK$ es equivalente a preguntar si los puntos B, A y K son no colineales, y la respuesta a la pregunta anterior resuelve esta. La tercera cuestión abordada la garantiza el *P. Intersección rayo segmento*. Finalmente, se debe tener en cuenta que K sí puede ser colineal con C y M. En ese caso, no hay que usar el *T. Desigualdad triangular* sino la *D. Interestancia* para demostrar la desigualdad deseada.

Ejercicios

1. ¿Es el triángulo una figura coplanar? Demuestre su respuesta.

2. (Para resolver usando Cabri) Dados tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la mediatriz del $\overline{AB}$ y n la mediatriz del $\overline{BC}$. Sea T el punto de intersección de tales mediatrices. ¿Qué característica geométrica tiene el punto T? Formule una conjetura y demuéstrela.

3. Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes cualesquiera. ¿Es posible construir ΔABE y ΔCDE tales que sean congruentes? Provea una conjetura y demuéstrela.

4. En el siguiente esquema de la demostración del criterio ALA, escriba la garantía completa de cada paso clave y los pasos y garantías que necesiten para asegurar la validez de ese paso clave para así presentar una demostración completa.

   Teorema ALA Dada la correspondencia entre ΔABC y ΔDEF tal que $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. (Figura 53)

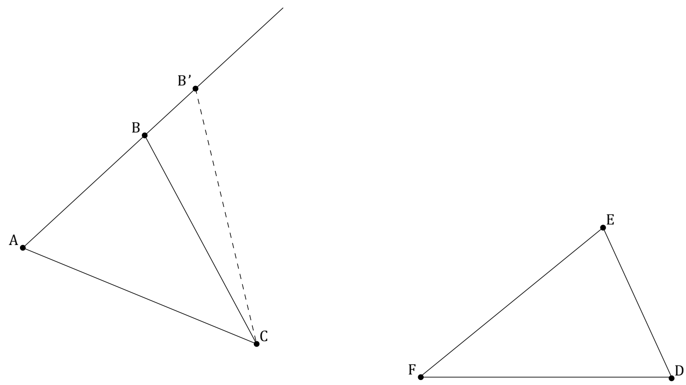


Figura 53

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	
2. $\overrightarrow{AB}$ contiene un punto B' tal que $AB' = DE$	
3. $\Delta AB'C \cong \Delta DEF$	
4. $\angle ACB' \cong \angle DFE$	
5. $\angle ACB' \cong \angle ACB$	
6. $\overrightarrow{CB'}$ y $\overrightarrow{CB}$ coinciden	
7. B' y B son el mismo punto	
8. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	

5. El *T. LLL* también se puede demostrar usando el *P. LAL*. Escriba la garantía completa de cada paso clave y los pasos y garantías que necesiten para asegurar la validez de ese paso clave para así presentar una demostración completa.

   Teorema LLL Dada la correspondencia entre ΔABC y ΔDEF tal que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, demuestre que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. (Figura 54)

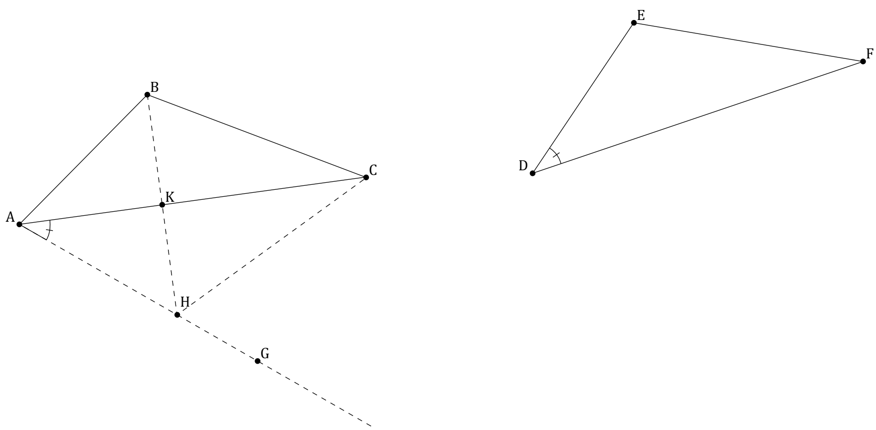


Figura 54

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	
2. Existe un punto G en el $S_{\overleftrightarrow{AC},\sim B}$ tal que $\angle CAG \cong \angle D$	
3. Existe un punto $H \in \overrightarrow{AG}$ tal que $AH = DE$	
4. $\overline{AH} \cong \overline{DE}$	
5. $\Delta AHC \cong \Delta DEF$	
6. Se supone, como lo ilustra la figura, que el $\overline{BH}$ interseca la $\overleftrightarrow{AC}$ en un punto entre A y C.	
7. $\overline{AH} \cong \overline{AB}$	
8. $\angle ABH \cong \angle AHB$	
9. $\overline{HC} \cong \overline{EF}$	
10. $\overline{HC} \cong \overline{BC}$	
11. $\angle HBC \cong \angle CHB$	
12. $\angle ABC \cong \angle AHC$	
13. $\Delta ABC \cong \Delta AHC$	
14. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	

6. a. Analice la demostración del *T. Triángulo isósceles*. ¿Qué teoremas o postulados se usaron en su demostración? ¿Es válido su uso en la demostración anterior? Explique su respuesta.

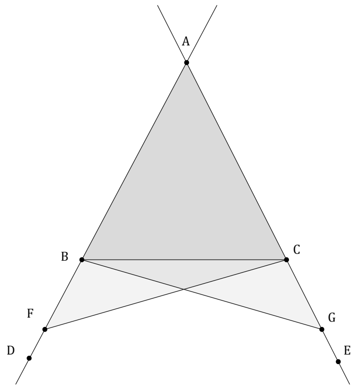
   b. En la demostración anterior, se hizo una suposición en cuanto a la ubicación del punto de intersección de $\overline{BH}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.
      i. ¿Qué otras posibilidades existen?
      ii. Analice cada una y determine si la demostración anterior cambia.

7. A continuación se transcriben las demostraciones de Euclides para el *T. Triángulo isósceles* y el *T. Recíproco del Triángulo isósceles*. Escríbalos en términos coherentes con nuestro sistema teórico y dé todos los pasos que requerimos para que sea una demostración aceptable en el curso.

a. Proposición 5, Libro 1, *Elementos* de Euclides En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí, y prolongadas los dos segmentos iguales, los ángulos situados bajo la base serían iguales entre sí.

Demostración

Sea el triángulo *ABC* que tiene el lado *AB* igual al lado *AC*, y sean *BD* y *CE* el resultado de prolongar en línea recta los segmentos *AB* y *AC*. Digo que el ángulo *ABC* es igual al (ángulo) *ACB* y el (ángulo) *CBD* es igual al (ángulo) *BCE*. Pues tómese al azar un punto *F* en *BD*. Trazar sobre *AE* un segmento *AG* tal que *AG* = *AF*. Construimos el segmento *FC*. Formamos el triángulo *AFC*. Construimos el segmento *GB*. Formamos el triángulo *AGB*. Estos triángulos son congruentes. Así mismo los triángulos *BFC* y *CGB* son congruentes. Restamos los ángulos *GBC* y *FCB* de los ángulos *GBA* y *FCA*, respectivamente y queda la demostración concluida.



b. Proposición 6, Libro I, *Elementos* de Euclides Si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.

Demostración

Sea el triángulo *ABC* que tiene el ángulo *ABC* igual al ángulo *ACB*. Digo que también el lado *AB* es igual al lado *AC*. Pues si *AB* no es igual a *AC*, uno de ellos es mayor. Sea *AB* el (lado) mayor. Y del (lado) mayor *AB* quítese *DB* igual al (lado) menor *AC*, y trácese *DC*.

Ahora bien, como *DB* es igual a *AC* y *BC* es común, también los dos lados *DB*, *BC* son iguales a los dos lados *AC* y *CB*, respectivamente, y el ángulo *DBC* es igual al ángulo *ACB*; por tanto, la base *DC* es igual a la base *AB*, y el triángulo *DBC* será igual al triángulo *ACB*, el menor al mayor; lo cual es absurdo; entonces los lados *AB* y *AC* no son desiguales; luego son iguales.

Por consiguiente, si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí. Q.E.D.

8. Una alumna propone demostrar el *T. Recíproco del Triángulo isósceles* usando las bisectrices de los ángulos congruentes. Desarrolle dicha demostración, indicando si puede completarse usando el sistema teórico hasta ahora conformado.

9. Complete la demostración del siguiente criterio de congruencia. Tenga presente que se debe utilizar el *T. Ángulo externo*.

   Teorema Hipotenusa – cateto Se dan ΔABC y ΔDEF, tales que $\angle B$ y $\angle E$ son rectos, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC, ΔDEF, $\angle B$ y $\angle E$ son rectos	
2. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	
3. $\exists \overrightarrow{BC}$	
4. $\exists \overrightarrow{BT}$ opuesto a $\overrightarrow{BC}$	
5. $\exists E'$ tal que $E' \in \overrightarrow{BT}$ y $BE' = FE$	
6. $\angle ABC$ y $\angle ABT$ son par lineal	
7. $\angle ABC$ y $\angle ABT$ son rectos	
8. $\angle ABC \cong \angle ABT$	
9. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{BE'} \cong \overline{FE}$	
10. $\Delta ABE \cong \Delta DEF$	
11. $\overline{AE'} \cong \overline{DF}$, $\angle F \cong \angle E'$	
12. $\overline{AC} \cong \overline{AE'}$	
13. $\angle C \cong \angle E'$	
14. $\angle F \cong \angle C$	
15. $\angle CBA \cong \angle E$	
16. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	

10. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a. Si X equidista de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$, entonces $\overrightarrow{BX}$ es bisectriz del $\angle ABC$.

b. Si $\overrightarrow{BX}$ es bisectriz del $\angle ABC$, entonces todos los puntos que pertenecen a $\overrightarrow{BX}$ equidistan de $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$.
c. Dado un ΔABC, entonces $m\angle A + m\angle B < 180$, $m\angle C + m\angle A < 180$ y $m\angle C + m\angle B < 180$.
d. Si ΔABC es tal que $\angle A$ es recto, entonces $\angle B$ y $\angle C$ son agudos.
e. Si ΔABC es tal que $\angle A$ es obtuso, entonces $\angle B$ y $\angle C$ son agudos.
f. Dados un ΔABC, $\angle A$ obtuso y $\overline{BY}$, $\overline{CX}$ y $\overline{AT}$ alturas del ΔABC, entonces C - A - Y, B - T - C y B - A - X.
g. Dado un ΔABC acutángulo con $\overline{AX}$, $\overline{CZ}$ y $\overline{BY}$ sus alturas, entonces C - X - B, B - Z - A y A - Y - C.

11. Dé la justificación de cada afirmación en la demostración del siguiente teorema y vaya completando la figura.

Teorema Existencia perpendicular punto externo Por un punto externo a una recta dada existe una recta perpendicular a dicha recta. (Figura 55)

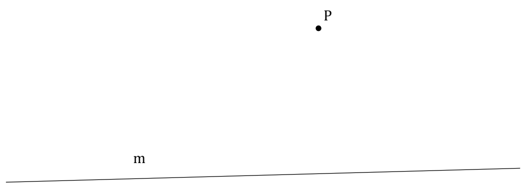


Figura 55

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. La recta m contiene dos puntos Q y R.	
2. $m\angle PQR = r$	
3. Existe un punto S, en el semiplano determinado por la recta m en el cual no está P, tal que $m\angle RQS = r$.	
4. $\angle PQR \cong \angle RQS$	
5. $QP = t$	
6. Existe un punto T en $\overrightarrow{QS}$ tal que $TQ = d$	

Continúa

7. T y P están en lados opuestos de la recta m	
8. $\overline{TP}$ interseca la recta m en un punto U	
9. $\overline{QU} \cong \overline{QU}$	
10. $\Delta PQU \cong \Delta TQU$	
11. $\overrightarrow{UP}$ y $\overrightarrow{UT}$ son rayos opuestos	
12. Q no está en $\overleftrightarrow{TP}$	
13. $\angle QUP$ y $\angle QUT$ forman par lineal	
14. $\angle QUP \cong \angle QUT$	
15. $\angle QUP$ es recto	
16. $\overleftrightarrow{PT}$ es perpendicular a la recta m	

12. Los siguientes pasos conforman la demostración del paso 4 del plan para demostrar el *T. Ángulo externo* (página 120). Escriba la garantía correspondiente en cada paso (Figura 56).

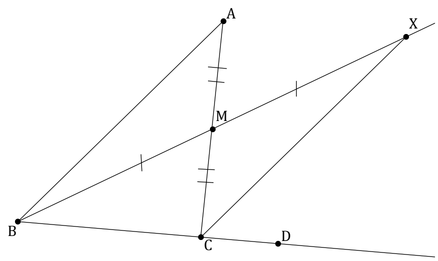


Figura 56

Demostración

Afirmación: $X \in int\angle ACD$.

Afirmación	Garantía y datos
1. B - M - X	
2. A - M - C	

Continúa →

3. B - C - D	
4. $X \in S_{\overleftrightarrow{AC},\sim B}$	
5. $D \in S_{\overleftrightarrow{AC},\sim B}$	
6. $X \in S_{\overleftrightarrow{AC},D}$	
7. $X \in S_{\overleftrightarrow{CD},M}$	
8. $M \in S_{\overleftrightarrow{CD},A}$	
9. $X \in S_{\overleftrightarrow{CD},A}$	
10. $X \in int\angle ACD$	

13. Demuestre la Conjetura 23.6.

14. Dado el ΔMNO. Demuestre que:

   a. Las mediatrices de dos de sus lados se intersecan.
   b. Las mediatrices concurren.

15. En el ΔABC, A - F - C y A - D - B, de manera que $FC = DB$. Si $AB>AC$, demuestre que $FB>CD$.

16. Dada la Figura 56, demostrar que $m\angle ADB > m\angle C$

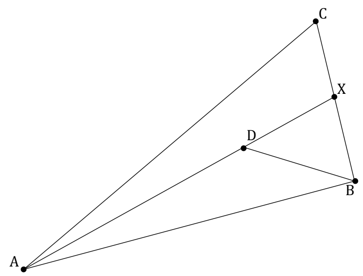


Figura 57

17. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto en el interior de un triángulo a los extremos de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados; es decir, $a + b > c + d$. (Figura 58)

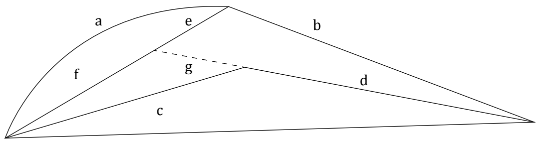


Figura 58

18. Resolver usando geometría dinámica:

   a. Sean m una recta y P y Q dos puntos en el mismo semiplano determinado por la recta m en un plano α dado. Determine el punto R en m para el cual la distancia $PR + RQ$ sea la menor posible. Escriba una conjetura y justifíquela. (Determinar significa hacer una descripción geométrica de cómo encontrar el punto.)
   b. Dado un ΔABC, construya los triángulos equiláteros ΔABZ, ΔACY y ΔBCX. Determine el tipo de triángulo ABC tal que AX sea menor que BY y CZ. Justifique su respuesta.
   c. Se dan y un punto M. Determine geométricamente el punto C tal que M sea el punto de corte de las alturas del ΔABC. Valide el procedimiento realizado.

19. Para cada problema de construcción debe:

   i. realizarla con la calculadora,
   ii. escribir el procedimiento usado,
   iii. si no se puede construir el triángulo, explique qué cambios le haría a las condiciones iniciales.

   a. Dados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, construya un triángulo de forma que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean dos lados y $\overline{EF}$ sea la mediana sobre el lado $\overline{AB}$.
   b. Dados $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$, construya un triángulo rectángulo de forma que $\overline{PQ}$ sea la hipotenusa y $\overline{AB}$ sea un cateto.
   c. Dado $\overline{AB}$, construya el triángulo equilátero cuya altura sea $\overline{AB}$.
   d. Dados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{PQ}$, construya un triángulo de forma que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sean los lados y $\overline{PQ}$ sea la altura sobre el lado $\overline{AB}$.
   e. Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construya un triángulo isósceles de forma que $\overline{AB}$ sea la base del triángulo y CD sea su perímetro.
   f. Dados $\overline{AB}$ y dos rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$, halle un punto C tal que $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BE}$ sean bisectrices del ΔABC.
   g. Dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construya un triángulo isósceles tal que $\overline{AB}$ sea uno de los lados congruentes y $\overline{CD}$ sea la altura correspondiente.
   h. Dados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$y $\overline{PQ}$, construya un triángulo tal que $\overline{AB}$ sea un lado, y $\overline{CD}$ y $\overline{PQ}$ sean, respectivamente, la altura y la mediana sobre ese lado.

Capítulo 7:
Cuadriláteros

Habiendo estudiado el triángulo y algunas de sus propiedades, el siguiente paso es estudiar otra figura geométrica de igual riqueza teórica que el triángulo: el cuadrilátero. En el marco de este estudio se aborda el *paralelismo*, una relación que hasta ahora no había sido necesario introducir pero que permite, entre otras cosas, hacer una clasificación de este tipo de polígonos.

Relaciones entre rectas

El primer problema que se propone para esta sección, basado en el cuadrilátero de Saccheri, busca motivar las ideas que darán lugar al sistema teórico local cuyo núcleo será el paralelismo de rectas. El cuadrilátero de Saccheri es un cuadrilátero con dos ángulos consecutivos rectos y dos lados opuestos congruentes cada uno de los cuales tiene un extremo en el vértice de uno de los ángulos rectos. Tras representar la figura con geometría dinámica, los estudiantes advierten que visualmente parece ser un rectángulo, y con la exploración dinámica constatan que tiene todas las propiedades de un rectángulo; esto motiva sus ganas de demostrarlo y, así, emprenden el camino para ello. Como solo es posible hacer la demostración aceptando como postulado la unicidad de la recta paralela a una dada por un punto externo a ella (V Postulado de Euclides), el problema en cuestión ofrece el escenario perfecto para introducir dos elementos al sistema: la definición de la relación de paralelismo entre rectas y dicho postulado. Nuestra expectativa no difiere mucho de lo que experimentó Girolamo Saccheri (1667 - 1733), matemático italiano, cuando estudió ese cuadrilátero con la intención de llegar a una contradicción que permitiera demostrar, por reducción al absurdo, el V Postulado a partir de los postulados restantes (Boyer, 1991). Al aceptar como verdaderas las primeras 28 proposiciones expuestas en *Elementos* de Euclides, las cuales no requieren del V Postulado, la configuración propuesta para el cuadrilátero es construible. Saccheri logra demostrar que los otros dos ángulos del cuadrilátero son congruentes pero no rectos. Él plantea tres hipótesis: son rectos, son obtusos o son agudos, y las estudia con el fin de descartar las últimas dos. Saccheri no logra su objetivo, pero a cambio establece varias propiedades geométricas relacionadas con dichas hipótesis. No es nuestro fin estudiar lo que hizo Saccheri sino usar la situación para la intención anteriormente expuesta.

PROBLEMA 25: Dado el $\square ABCD$ tal que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. ¿Qué puede decir del $\square ABCD$?

Lo primero que se debe hacer al abordar el problema es formular la definición de cuadrilátero:

Definición de cuadrilátero Se dan cuatro puntos coplanares, cada tres de ellos no colineales. Un cuadrilátero es la unión de segmentos, cuyos extremos son esos puntos dados de tal manera que: cada punto es extremo de exactamente dos segmentos, si los segmentos se intersecan, su punto de intersección es extremo de los segmentos.

Los segmentos se denominan lados del cuadrilátero y los puntos vértices del cuadrilátero.

La representación gráfica luego de abordar el problema se presenta en la Figura 59.

Figura 59

Como solución al problema los estudiantes establecen diferentes conjeturas. Estas se exponen a continuación, organizadas según la cronología en la que se estudiarán para construir las respectivas justificaciones:

Conjetura 25.1 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
Conjetura 25.2 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\angle BAD \cong \angle CDA$.
Conjetura 25.3 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
Conjetura 25.4 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\square ABCD$ es rectángulo.
Conjetura 25.5 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.
Conjetura 25.6 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
Conjetura 25.7 Si en el $\square ABCD$, $\angle ABC$ y $\angle DCB$ son rectos, y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.

A continuación se presenta un bosquejo de las justificaciones que generalmente proponen los estudiantes:

Justificación Conjetura 25.1 Se demuestra la congruencia entre ΔABC y ΔDCB, utilizando el *P. LAL*.

Justificación Conjetura 25.2 Se demuestra la congruencia entre ΔBAD y ΔCDA, haciendo uso de la validez de la Conjetura 25.1 y del *T. LLL*.

Justificación Conjetura 25.3 Para realizar la demostración de esta conjetura, los estudiantes manifiestan la necesidad de introducir nuevos elementos al sistema teórico, a saber, la relación de paralelismo entre rectas y criterios para poder establecer dicha relación. Ellos parten de su idea intuitiva: dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas. La afirmación abre paso al *Teorema Perpendicularidad-paralelismo,* una vez que se incluye en el enunciado la precisión de que las rectas deben ser coplanares, condición de la que no son conscientes la mayoría de los estudiantes.

Definición de Paralelismo Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan (no tienen puntos en común).
Definición de Segmentos paralelos/Rayos paralelos Dos segmentos (o rayos) son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas.
Teorema Perpendicularidad-paralelismo Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta y son coplanares, entonces estas dos rectas son paralelas entre sí.

Una de las demostraciones de este teorema es la siguiente (Figura 60):

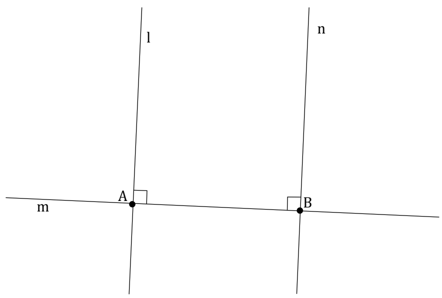


Figura 60

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $l \perp m$ por A, $n \perp m$ por B 2. $A, B \in m$, $\{A\} \neq \{B\}$ 3. $l, n, m \subset \alpha$, α un plano	Dado
4. Suponemos $l \nparallel n$	Negación de tesis
5. l y n no son coplanares o $l \cap n \neq \emptyset$	D. Paralelismo (2)
6. l y n no son coplanares	Caso 1 (5)
7. l y n no son coplanares y $l, n \subset \alpha$, α un plano	Conjunción (1,3)
8. l y n son coplanares	Pr. de reducción al absurdo (7)
9. $l \cap n \neq \emptyset$	Caso 2 (5)
10. $l \cap n = \{P\}$	D. Conjunto no vacío, T. Intersección de rectas (9)
11. Existe ΔPAB	D. Triángulo (1,10)
12. $\angle B$ y $\angle A$ son rectos	D. Perpendicularidad (1)
13. $m\angle B = 90$, $m\angle A = 90$	D. Ángulo recto (12)
14. $m\angle A + m\angle B = 180$	Pr. Reales (11)
15. $m\angle A + m\angle B < 180$	Problema 16, Capítulo 6 (11)
16. $m\angle A + m\angle B = 180$ y $m\angle A + m\angle B < 180$	Conjunción (14,15)
17. $l \cap n = \emptyset$	Pr. de reducción al absurdo (contradice Tricotomía) (16)
18. $l \parallel n$	Pr. de reducción al absurdo (4,8,17)

Otras demostraciones que sugieren los estudiantes se basan, una, en el *T. Existencia perpendicular por punto externo* y, otra, en el *T. Ángulo Externo.*

Habiendo introducido los elementos teóricos anteriores, los estudiantes usualmente consideran que pueden abordar la justificación de la Conjetura 25.4.

Justificación Conjetura 25.4 La propuesta de los estudiantes para justificar que el $\square ABCD$ es rectángulo se fundamenta en la congruencia del ΔBAC y el ΔDCA. Empiezan, entonces, a desarrollar su demostración:

Afirmación	Garantía y datos
1. $\square ABCD$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Dado
2. A, B y C no colineales; A, C y D no colineales	D. Cuadrilátero (1)
3. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	T. Perpendicularidad-paralelismo (1)
4. Existen ΔBAC y ΔDCA	D. Triángulo (2)
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	Pr. Reflexiva

Los estudiantes no pueden continuar con la demostración pues se percatan de que no tienen como justificar o que $\angle BAC \cong \angle ACD$ o que $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ para poder aplicar los Criterios de congruencia LAL o LLL, respectivamente. Queda clara la necesidad de introducir nuevos elementos al sistema que permitan garantizar una cosa u otra. Hecho un análisis de esta situación y dado que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, se concluye que es conveniente tratar de justificar, en primera instancia, que $\angle BAC \cong \angle ACD$. Específicamente, los elementos que se deben introducir son:

Definición de Secante (o Transversal) Dadas dos o más rectas coplanares, una recta es secante a ellas si las interseca en sendos puntos.

Definición Ángulos alternos internos Dadas dos rectas y una secante a ellas, dos ángulos son alternos internos si y solo si:

1. Sus vértices son las intersecciones de las dos rectas con la secante.
2. Su intersección es un segmento, cuyos extremos son dichos vértices.
3. Cada lado que los conforma está contenido en alguna de las rectas.
4. No tienen puntos interiores en común. (Figura 61)

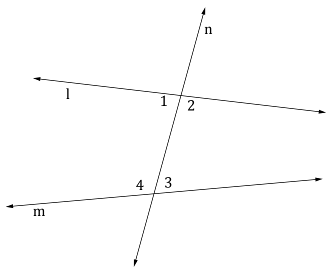


Figura 61: $\angle 1$ y $\angle 3$ son alternos internos; $\angle 2$ y $\angle 4$ son alternos internos

Pero antes de proceder a enunciar y demostrar los hechos geométricos que podrían requerirse para demostrar las conjeturas formuladas respecto al cuadrilátero de Saccheri, se pregunta:

PROBLEMA 26: ¿Existen las rectas paralelas?

Pueden surgir tres propuestas de demostración, todas ellas usando el *T. Perpendicularidad-paralelismo.*

Propuesta 26.1 Construir una recta y dos rectas coplanares perpendiculares a la primera recta.
Propuesta 26.2 Construir una recta perpendicular a una dada por un punto de ésta, escoger un punto de la recta construida, y construir una perpendicular a ella por ese punto.
Propuesta 26.3 Dados una recta y un punto que no está contenido en ella, construir una recta perpendicular a la recta por ese punto, y luego una recta perpendicular a la recta construida por el mismo punto dado.

Se muestra que las tres propuestas responden la pregunta pero dan lugar a tres teoremas diferentes, que respectivamente son:

Teorema 26.1 Existen rectas paralelas.
Teorema 26.2 Dada una recta existe una recta paralela a la dada.
Teorema Existencia paralela Dada una recta y un punto externo a ella, existe una recta paralela a la dada que contiene el punto dado.

Los dos primeros teoremas no tienen nombre dado que no es usual que hagan parte del sistema teórico que se está construyendo.

Volviendo al problema del cuadrilátero de Saccheri, la demostración de la congruencia de $\angle BAC$ y $\angle ACD$ se logra cuando se introduce el siguiente teorema:

Teorema PAI (Paralelas-ángulos alternos internos congruentes) Dadas dos rectas y una secante a ellas. Si las dos rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son congruentes. (Figura 62)

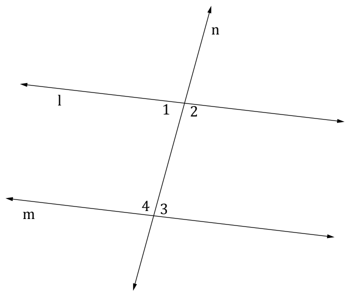


Figura 62: $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$

Como es usual, se pregunta si el recíproco del *T. PAI* tiene la posbilidad de ser válido. Se enuncia para poder hacer el análisis respectivo:

> **Teorema AIP (Ángulos alternos internos congruentes-paralelas**) Dadas las rectas m, n y una recta k secante a ellas. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces $m \parallel n$. (Figura 63a)

Al considerar la situación, los estudiantes creen que dicho enunciado también es válido. Se les pregunta cuál de las dos afirmaciones se puede justificar primero. Es frecuente que el análisis de los estudiantes no los conduzca a ideas útiles para justificar el primer teorema. Sin embargo, suele suceder que, después de escuchar y analizar varias sugerencias, alguno propone hacer una demostración indirecta del segundo teorema. (Figura 63b)

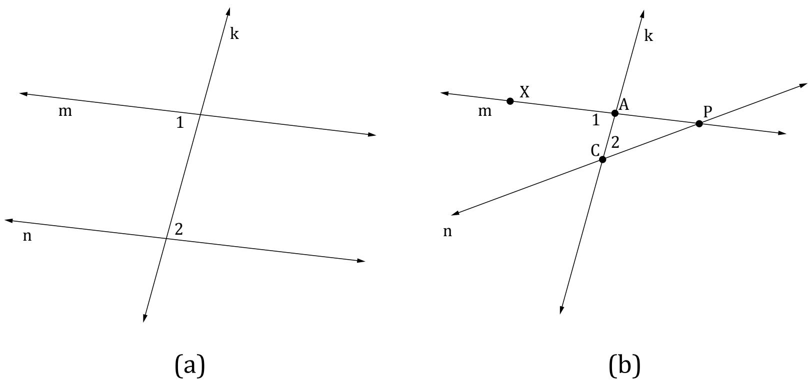


Figura 63

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. Rectas $m, n, k \subset \alpha$, α un plano; k es secante a m, n 2. $\angle 1$ y $\angle 2$ son alternos internos 3. $\angle 1 \cong \angle 2$	Dado
4. Suponemos $m \nparallel n$	Negación de la tesis
5. m y n no son coplanares o $n \cap m \neq \emptyset$	D. Paralelismo (2)
6. m y n no son coplanares	Caso 1 (5)
7. m y n no son coplanares y $m, n \subset \alpha$, α un plano	Conjunción (1,4,6)
8. m y n son coplanares	Pr. de Reducción al absurdo (7)
9. $n \cap m \neq \emptyset$	Caso 2 (5)
10. $n \cap m = \{P\}$	D. Conjunto no vacío T. Intersección de rectas (9)
11. $k \cap m = \{A\}$, $n \cap k = \{C\}$	D. Secante (1)
12. Existe X tal que $P - A - X$	T. Punto a un lado (11,10)
13. $\angle XAC$ es externo del ΔPAC	D. Ángulo Externo (12)
14. $m\angle XAC > m\angle ACP$	T. del Ángulo externo (13)
15. $m\angle XAC = m\angle ACP$	D. Ángulos congruentes (1)
16. $m\angle XAC > m\angle ACP$ y $m\angle XAC = m\angle ACP$	Conjunción (14,15)
17. $n \cap m = \emptyset$	Pr. de Reducción al absurdo (16)
18. $m \parallel n$	Pr. de reducción al absurdo (8,17)

La dificultad para realizar la demostración del *T. PAI* radica en que no se ha introducido al sistema teórico el postulado que garantiza la unicidad de la recta paralela a una recta dada por un punto que no pertenece a esta. Comenzamos por reescribir el *Teorema Existencia de paralela* y lo demostramos.

Teorema Existencia de paralela Dados una recta l y un punto P tal que $P \notin l$. Entonces existe una recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$. (Figura 63)

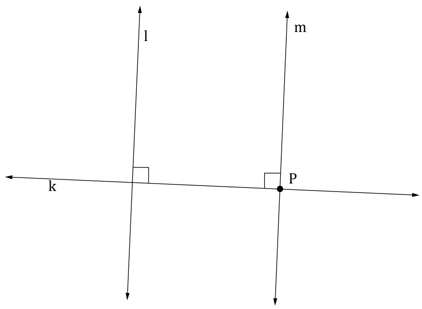


Figura 64

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. Recta l, P un punto, $P \notin l$	Dado
2. Existe un único α tal que $P, l \subset \alpha$, α un plano	T. Recta-punto-plano (1)
3. Existe una recta k tal que $k \subset \alpha$, $P \in k$ y $k \perp l$.	T. Existencia de la perpendicular por punto externo (1,2)
4. Existe una única recta m tal que $m \subset \alpha$, $P \in m$ y $m \perp k$	T. Existencia de la perpendicular por punto en recta (1,3)
5. $l \perp k$ y $m \perp k$	Conjunción (3,4)
6. $m \parallel l$	T. Perpendicularidad-paralelismo (5)

Postulado de las Paralelas Dados una recta l y un punto P, tal que $P \notin l$. Entonces existe una única recta m tal que $P \in m$ y $m \parallel l$.

En este punto es posible demostrar el *T. PAI*, usando el método indirecto. Al suponer que los $\angle 1$ y $\angle 2$ no son congruentes, se tiene que $m\angle 1 \neq m\angle 2$, siendo estos alternos internos. La idea, ahora, consiste en construir un ángulo $\angle SPX$ tal que su medida sea igual a la $m\angle 2$ y $S \in S_{\overleftrightarrow{PX}, \sim T}$, situación que se ilustra en la Figura 64, en la que $m \parallel n$. Se justifica que $\overleftrightarrow{SP} \parallel m$ (*T. AIP*). En consecuencia: $\overleftrightarrow{SP} = n$, gracias al *P. de las Paralelas*, lo que lleva a que $\angle SPX$ sea el mismo $\angle 1$. Por tanto, $m\angle 1 = m\angle 2$, y esto lleva a la contradicción esperada.

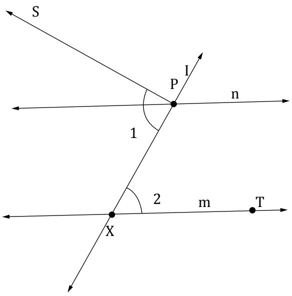


Figura 65

En ocasiones, es útil considerar ángulos correspondientes cuando se tienen dos rectas y una secante a ellas, en vez de referirse a los ángulos alternos internos. Por ello, se propone demostrar los siguientes teoremas, tarea que se deja como ejercicio.

Teorema CP (Ángulos correspondientes congruentes-paralelas) Dadas las rectas m, n y una recta k, secante a ellas. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces $m \parallel n$.
Teorema PC (Paralelas-ángulos correspondientes congruentes) Dadas dos rectas y una secante a ellas. Si las dos rectas son paralelas, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Cuadriláteros especiales

Introducido el *T. PAI* al sistema teórico, gracias a que se ha demostrado, se pueden justificar las Conjeturas 25.4, 25.5, 25.6 y 25.7. Sin embargo, para la Conjetura 25.4 es necesaro introducir al sistema teórico la definición de rectángulo:

Definición Rectángulo Un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos es un rectángulo.
Teorema Cuadrilátero Saccheri Si en un $\square ABCD$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces el $\square ABCD$ es rectángulo.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $\square ABCD$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Dado
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$	T. Perpendicularidad-paralelismo (1)
3. Entre los puntos A, B, C y D, no hay tres de ellos que sean colineales	D. Cuadrilátero (1)
4. Existen ΔBAC, ΔDCA	D. Triángulo (3)
5. Existe $\overline{AC}$	D. Triángulo (4)
6. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	P. Reflexiva
7. $\angle BAC$ y $\angle ACD$ son alternos internos	D. Ángulos alternos internos (1)
8. $\angle BAC \cong \angle ACD$	T. PAI (2,7)
9. $\Delta BAC \cong \Delta DCA$	P. LAL (1,6,8)
10. $\angle ABC \cong \angle CDA$	D. Triángulos congruentes (9)
11. $\angle ABC$ es recto, $\angle BCD$ es recto	D. Perpendicularidad (1)
12. $\angle CDA$ es recto	Pr. de Sustitución (10,11)

Con el propósito de enriquecer el estudio de los cuadriláteros, se propone el siguiente problema:

PROBLEMA 27: Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad una diagonal biseca a la otra.

Sin necesidad de explicitar los diferentes tipos de cuadriláteros existentes, los estudiantes proceden a explorar el problema propuesto. Sin embargo, en el momento de analizar las conjeturas es necesario escribir las definiciones de los cuadriláteros que mencionan, para así incorporarlas al sistema teórico. Es de notar que las definiciones de cuadrado y rombo no se dan como paralelogramos especiales, sino que se adoptan aquellas que los estudiantes ya conocen. Se demuestran que son paralelogramos en el momento oportuno.

Definición Rombo Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes.

Definición Cuadrado Un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.

Definición Paralelogramo Un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.

Definición Cometa Una cometa es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes.

Definición Trapecio Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos.

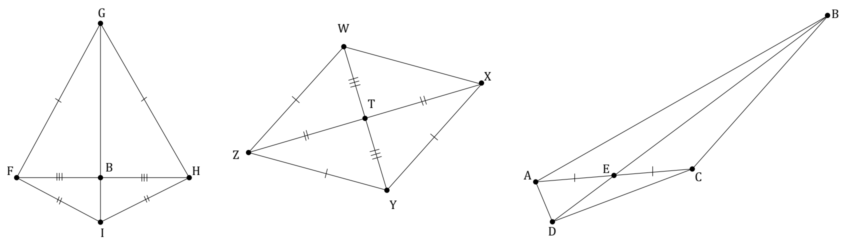
Definición Diagonal Una diagonal de un polígono es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono.

Es importante notar que la definición de trapecio difiere de la que se presenta en varios textos de geometría, pues la que aquí consignamos no incluye al paralelogramo.

Las conjeturas de los estudiantes son variadas y no todas son correctas. A continuación, se consignan algunas de las que surgen y se comenta acerca de su veracidad.

Conjetura 27.1 Si una diagonal biseca a la otra, entonces el cuadrilátero es cometa.

Con la presentación de contraejemplos construidos con geometría dinámica, se muestra que los estudiantes generalizan a partir de un ejemplo y que en su formulación de la conjetura no incluyen otra propiedad de las diagonales que posiblemente asegure lo que reportan: las diagonales son perpendiculares. (Figura 66)

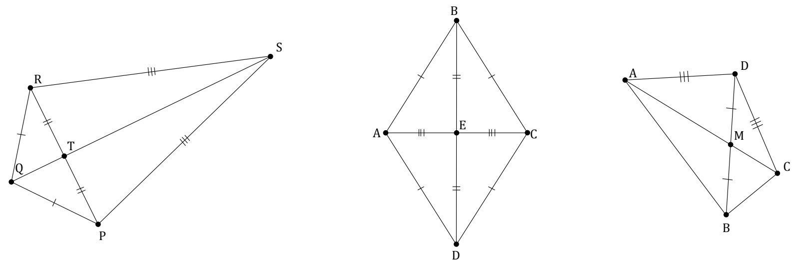


Ejemplo: cometa Contraejemplos: rombo y cuadrilátero no especial

Figura 66

Conjetura 27.2 Si en un cuadrilátero que tiene un par de lados adyacentes congruentes, una diagonal biseca a la otra, entonces el otro par de lados adyacentes son congruentes.

Como en la conjetura no se precisa cuál de las dos diagonales es la bisecada, el consecuente de la respectiva proposición condicional no es necesariamente resultado de las condiciones dadas en el antecedente, como se ilustra en la Figura 67. Si la diagonal bisecada y los dos lados congruentes comparten un extremo, entonces la conjetura no es verdadera.



Ejemplo: cometa y rombo

Cuadrilátero no especial

Figura 67

En lo que sigue se presentan algunas de las conjeturas que usualmente surgen y que son verdaderas. Se han organizado, como suele hacerse cuando los estudiantes entregan su conjetura, para presentarlas ante el grupo, según algún criterio. En este caso, se han agrupado las que tienen como consecuente la condición que deben cumplir las diagonales, con el propósito de analizar primero las relativas a los cuadriláteros especiales. Consideramos cuadriláteros especiales a los siguientes: paralelogramo, cuadrado, rombo, rectángulo, trapecio y cometa.

Conjetura 27.3 Si una diagonal biseca a la otra, entonces el cuadrilátero no es necesariamente un cuadrilátero especial.

Conjetura 27.4 Si el cuadrilátero es rombo, entonces las diagonales se bisecan.

Conjetura 27.5 Si el cuadrilátero es cuadrado, entonces las diagonales se bisecan.

Conjetura 27.6 Si el cuadrilátero es rectángulo, entonces las diagonales se bisecan.

Conjetura 27.7 Si el cuadrilátero es paralelogramo, entonces las diagonales se bisecan.

El estudio de la veracidad de las Conjeturas 27.4 a la 27.7, desde un punto de vista teórico, conduce a realizar un análisis con los estudiantes sobre el orden en que se debería abordar la demostración de estas conjeturas con el fin de economizar esfuerzos. Por lo regular, en ese momento los estudiantes manifiestan la siguiente idea que, con su demostración, se incorpora al sistema teórico como teorema.

Teorema Rectángulo, rombo – paralelogramo Los rectángulos y los rombos son paralelogramos.

La demostración de este teorema tiene dos partes: la primera, todo rectángulo es un paralelogramo, se justifica utilizando el *T. Perpendicularidad-paralelismo*; por ende, se deduce que todo cuadrado es paralelogramo. La segunda, requiere demostrar que los triángulos determinados por una diagonal del rombo son congruentes, y a partir del *T. Triángulo Isósceles*, demostrar que los ángulos alternos internos son congruentes; con ello se justifica, además, que las diagonales de un rombo bisecan sus ángulos.

A partir de lo anterior, queda claro que demostrar la Conjetura 27.7 es suficiente para deducir las Conjeturas 27.4, 27.5 y 27.6.

Propiedad 27.1 Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Al abordar la justificación de esta propiedad, se reconoce la necesidad de demostrar que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Con base en esta demostración queda claro que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. Así, se establece otra propiedad de los paralelogramos.

Propiedad 27.2 Los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Así como se formulan conjeturas en las que en el antecedente se hace referencia a un tipo especial de cuadrilátero, surgen algunas en las que los estudiantes mencionan en el consecuente esos cuadriláteros. Basados en los resultados anteriores, se llega al acuerdo de que todos se pueden agrupar en una sola conjetura.

Conjetura 27.8 Si las diagonales se bisecan, el cuadrilátero es un paralelogramo.

Su demostración conduce a la determinación de una propiedad que asegura la conformación de un paralelogramo.

Propiedad 27.3 Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Terminado el análisis de las conjeturas relativas al paralelogramo, se discuten las que mencionan a otros tipos de cuadriláteros.

Conjetura 27.9 Si el cuadrilátero es cometa, entonces una diagonal biseca a la otra.
Conjetura 27.10 Si el cuadrilátero es trapecio, entonces ninguna diagonal biseca a la otra.

La Conjetura 27.9 requiere una modificación, pues si la cometa no es convexa, entonces no es cierto que una diagonal biseca a la otra. Se demuestra utilizando el hecho de que la recta que contiene a una de las diagonales del cuadrilátero es mediatriz de la otra diagonal dado que la cometa tiene dos pares de lados congruentes *D. (2) de Mediatriz*. Se recuerda también la *D. (1) de Mediatriz,* lo cual lleva a transformar la Conjetura 27.9.

Teorema Cometa Si un cuadrilátero es cometa, entonces la recta que contiene a una de sus diagonales es mediatriz de la otra diagonal.

La Conjetura 27.10 se justifica por el método indirecto, ya que suponer que una diagonal biseca a la otra en el trapecio dado implica la congruencia de dos triángulos gracias al criterio *LAA* y, por ende, la congruencia de los lados paralelos. Usando geometría dinámica, se ve que un cuadrilátero con esas características tiene que ser un paralelogramo. (Figura 68)

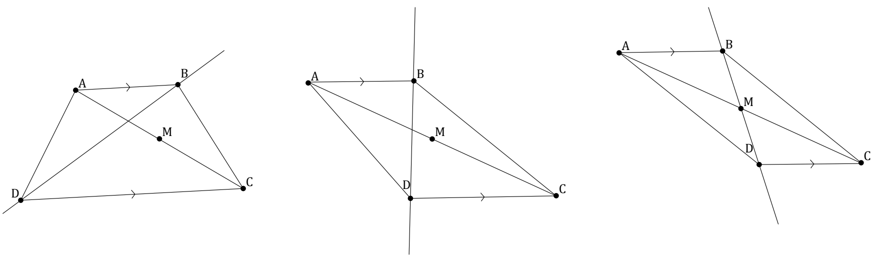


Figura 68

Este análisis conduce a introducir las siguientes propiedades:

Propiedad 27.4 Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
Propiedad 27.5 Si en un paralelogramo la recta que contiene una diagonal es mediatriz de la otra diagonal, entonces es rombo.

Después de un análisis detallado de la demostración propuesta por los estudiantes, ellos se dan cuenta de que la formulación de esta propiedad se puede modificar aun más pues al ser paralelogramo las diagonales se bisecan (Propiedad 27.1) y, por tanto, se está colocando la misma exigencia dos veces. Por ello, se establece el siguiente teorema:

Teorema Rombo Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces es un rombo.

Para finalizar, la justificación de la Conjetura 27.3 se hace por método indirecto y con base en lo establecido anteriormente.

Recogemos todas las propiedades de un paralelogramo en un solo teorema.

Teorema Paralelogramo Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces
1. ambos pares de lados opuestos son congruentes,
2. ambos pares de ángulos opuestos son congruentes,
3. las diagonales se bisecan, y
4. los ángulos adyacentes son suplementarios.

Así mismo, se quiere recopilar en otro teorema todas las propiedades que permiten asegurar que un cuadrilátero es un paralelogramo, pero antes de esto se requiere analizar una propiedad más. Dado que en un paralelogramo los ángulos opuestos son congruentes, se pregunta por la validez de su recíproca a través del siguiente problema:

PROBLEMA 28: Estudie la relación entre tipo de cuadrilátero y la propiedad *ambos pares de ángulos opuestos son congruentes.*

Surge la conjetura esperada:

Conjetura 28.1 Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces es paralelogramo. (Figura 69)

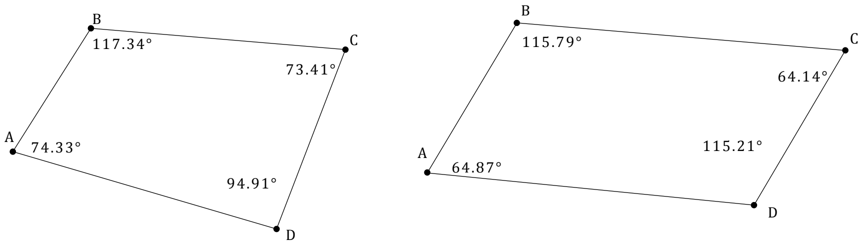


Figura 69

La dificultad del problema reside en poder justificar la conjetura. Los estudiantes suelen sugerir construcciones auxiliares, que se analizan conjuntamente para decidir si son útiles. A continuación, incluimos cada propuesta y el análisis realizado.

Propuesta 28.1 Construir las bisectrices de un par de ángulos opuestos. (Figura 70)

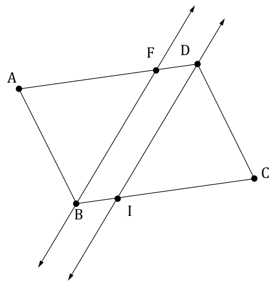


Figura 70

No es posible asegurar que las bisectrices coinciden o que $\overleftrightarrow{DI} \parallel \overleftrightarrow{BF}$. Entonces queda descartada.

Propuesta 28.2 Construir una de las diagonales para mostrar que es bisectriz de los ángulos. (Figura 71)

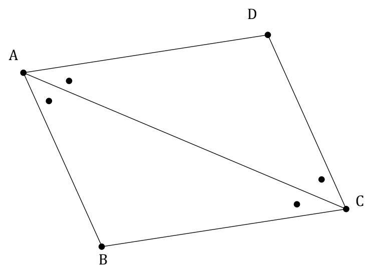


Figura 71

No es posible asegurar que $\angle ACD \cong \angle ACB \cong \angle BAC \cong \angle DAC$. Por tanto, se descarta.

Construcción 28.3 Construir una de las diagonales para demostrar congruencia entre los triángulos determinados. (Figura 72)

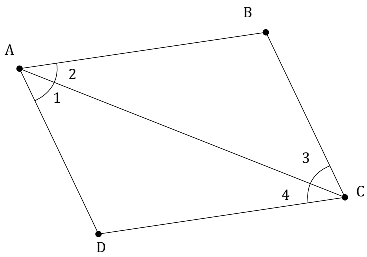


Figura 72

A pesar de que $\angle DAB \cong \angle BCD$, no hay forma de asegurar que $\angle 1 \cong \angle 3$ y que $\angle 2 \cong \angle 4$. De nuevo resulta inoperante la propuesta.

En este momento se puede introducir el teorema que los estudiantes han querido usar anteriormente en varias ocasiones, como por ejemplo para demostrar el *T. Ángulo externo* y la Conjetura 21.1, pues ahora es indispensable. Específicamente nos referimos al siguiente teorema:

Teorema Suma medidas de ángulos en triángulo Para todo triángulo se tiene que la suma de las medidas de los ángulos es 180.

Este teorema se demuestra construyendo una recta paralela a un lado del triángulo por el vértice opuesto, y usando el *T. PAI.* Algunos de los pasos de la demostración de la Conjetura 28.1 son:

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. $m\angle 1 + m\angle 4 + m\angle D = 180$ 2. $m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle B = 180$	T. Suma medida de ángulos en triángulos
3. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle A$, $m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle C$	P. Adición de medidas de ángulos
4. $m\angle A + m\angle C + m\angle D + m\angle B = 360$	Pr. Reales (1,2)
5. $\angle A \cong \angle C$, $B \cong \angle D$	Dado
6. $m\angle A = m\angle C$, $m\angle B = m\angle D$	D. Congruencia (4)
7. $2m\angle C + 2m\angle B = 360$	Principio de Sustitución (3,5)
8. $m\angle C + m\angle B = 180$	Pr. Reales (6)

Continúa

9. Sea E tal que D - C - E	T. Punto a un lado
10. $\angle BCD$ y $\angle BCE$ son par lineal	D. par lineal
11. $\angle BCD$ y $\angle BCE$ son suplementarios	T. Par lineal
12. $\angle BCD$ y $\angle B$ son suplementarios.	D. Ángulos suplementarios
13. $\angle BCE \cong \angle B$	T. Suplementos de ángulos congruentes
14. $\angle BCE$ y $\angle B$ son alternos internos	D. Ángulos alternos internos
15. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$	T. AIP

De esta demostración se desprenden varios hechos geométricos sobre propiedades de figuras geométricas:

Teorema Cuadrilátero-ángulos Si en un cuadrilátero ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, entonces los ángulos adyacentes son suplementarios.
Teorema Paralelogramo-ángulos Si □ABCD es paralelogramo, entonces los ángulos adyacentes son suplementarios.
Teorema Ángulos suplementarios-paralelas Si dos rectas cortadas por una secante determinan ángulos internos no alternos suplementarios, entonces son paralelas.

En este momento, se recogen en un solo teorema todas las condiciones que aseguran que un cuadrilátero es un paralelogramo. La demostración del cuarto ítem queda como ejercicio.

Teorema Condiciones para paralelogramo Si en un cuadrilátero
1. ambos pares de lados opuestos son congruentes, o
2. ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, o
3. las diagonales se bisecan, o
4. un par de lados son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Para terminar, se sugiere el siguiente problema:

PROBLEMA 29: Dado el □$ABCD$, sean P, Q, R y S los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Estudie la relación entre el tipo de cuadrilátero $ABCD$ y el tipo de cuadrilátero $PQRS$. Justifique su respuesta.

El análisis de cualquiera de las conjeturas que pueden surgir lleva a la necesidad de introducir el siguiente teorema al sistema teórico, pues toda relación propuesta menciona que el □$PQRS$ es algún paralelogramo especial.

Teorema Triángulo - segmento paralelo El segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de la longitud de dicho lado.

Si se tiene ΔABC con D y E puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, para demostrar el teorema es necesario localizar en el rayo opuesto al $\overrightarrow{ED}$ un punto F tal que $EF = DE$. A partir de esta construcción auxiliar, se puede demostrar que el $\square ADFC$ es un paralelogramo, de donde se desprenden las dos propiedades que se quieren demostrar.

Ejercicios

1. En el tablero de un salón estaba escrita la siguiente oración incompleta:

   Si ________________ entonces las rectas son paralelas.

   Encuentre las condiciones que podrían ocupar el espacio indicado si se quiere que el enunciado condicional resultante sea verdadero.

2. Demuestre que: Si dos rectas intersecadas por una secante forman ángulos internos suplementarios con puntos a un mismo lado de la secante, entonces las rectas son paralelas.

3. Demuestre el siguiente Teorema:

   Teorema Ángulo externo II La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos del triángulo no adyacentes a dicho ángulo externo.

4. Demuestre los siguientes teoremas:

   a. Teorema Condiciones para paralelogramo.
   b. Teorema Rectángulo, rombo – paralelogramo
   c. Teorema Paralelogramo
   d. Teorema Cometa
   e. Teorema Rombo

5. Demuestre que:

   a. Si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas y es coplanar con estas, entonces es perpendicular a la otra.
   b. Si el $\square ABCD$ es paralelogramo, entonces $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{X\}$, $X \in \text{int}\square ABCD$.

6. (Para realizar con geometría dinámica) Dado el triángulo isósceles ΔABC, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, determine la ubicación del punto P, en la base del triángulo, para el cual la suma de las distancias de P a los lados congruentes del triángulo sea mínima. Escriba una conjetura y justifique su respuesta.

7. (Para realizar con geometría dinámica) Compruebe si se cumple o no el siguiente enunciado. En caso de que sea válido, demuéstrelo; en caso contrario, justifique a través de un contraejemplo.

   Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo se intersecan en un punto que equidista de un par de lados opuestos.

8. En cada ítem se presentan condiciones para construir un cuadrilátero especial. En cada caso, explique cómo procede a construir el cuadrilátero y cuál es el sustento teórico de cada paso de construcción.

   a. Construya un paralelogramo:
      i. Dados un ángulo, la longitud de un lado y de la altura correspondiente a ese lado.
      ii. Dadas las longitudes de un lado y de las dos diagonales.
      iii. Dadas las diagonales y el ángulo que forman.
   b. Construya un rectángulo:
      i. Dada la longitud de un lado y de una diagonal.
      ii. Dada la diagonal y el ángulo que forma con uno de los lados.
   c. Construya un rombo:
      i. Dados uno de sus lados y un ángulo.
      ii. Dadas las longitudes de sus diagonales.
   d. Construya un cuadrado, dada la longitud de una de sus diagonales.
   e. Construya un trapecio, dadas las longitudes de sus lados.
   f. Construya un trapecio isósceles:
      i. Dadas las longitudes de sus bases y la de una diagonal.
      ii. Dadas las longitudes de sus bases y la medida de uno de sus ángulos.

9. Para cada uno de los siguientes enunciados, determine si es verdadero o falso. En caso de que sea verdadero, demuéstrelo; en caso contrario, justifique a través de un contraejemplo.

   a. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes de un paralelogramo son perpendiculares.
   b. Las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo determinan un rectángulo.

c. En todo rectángulo, las bisectrices de sus ángulos determinan un cuadrado.
d. Si una diagonal de un paralelogramo es bisectriz de uno de los ángulos con vértices en la diagonal, el paralelogramo es un rombo.
e. Si las diagonales de un trapecio son congruentes, entonces el trapecio es isósceles.
f. En todo cuadrilátero la suma de las longitudes de los lados es mayor que la suma de las longitudes de las diagonales.
g. Si se unen, consecutivamente con segmentos, los puntos medios de un cuadrilátero cualquiera, resulta un paralelogramo cuyos lados tienen medida igual a la mitad de la longitud de alguna de las diagonales.

10. En el Capítulo 5 se mencionó que, una vez introducido el concepto de paralelismo, es posible demostrar que la Propuesta 14.1 y la Propuesta 14.2 son enunciados equivalentes (ver Problema 9 de ese capítulo). Demuestre que ello es cierto; es decir, demuestre que para todo punto $X \in \text{int}\angle ABC$ existe un segmento, $\overline{EF}$, tal que $X \in \overline{EF}$, $E \in \overrightarrow{BA}$ y $F \in \overrightarrow{BC}$.

11. A continuación se presentan pasos de la demostración del *T. Triángulo - segmento paralelo*. Debe incluir los pasos que hacen falta y las garantías correspondientes para completar toda la demostración.

    a. D y E son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
    b. Existe F en el rayo opuesto a $\overrightarrow{ED}$ tal que $DE = EF$.
    c. $\Delta EFC \cong \Delta EDB$.
    d. $\square ADFC$ es paralelogramo.
    e. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $DE = \frac{1}{2} AC$.

12. Demuestre que si dos segmentos tienen la misma mediatriz entonces son paralelos o son colineales. ¿La recíproca es verdadera? Justifique su respuesta.

Capítulo 8:

Proyección paralela y semejanza de triángulos

Proyección paralela

Este capítulo estudia temáticas relativas a la semejanza de triángulos. Para ello, nos basamos en la propuesta de Moise (1964) que introduce el estudio de esta relación a partir del concepto de proyección paralela. En este sentido, para comenzar, proveemos la definición de proyección paralela teniendo como precedente que en el capítulo anterior se hizo un tratamiento cuidadoso de la relación de paralelismo.

> **Definición de Proyección paralela** Dadas dos rectas no paralelas, t y m, en un plano β. La proyección paralela de un punto P, que no pertenece a t ni a m, respecto a la recta t es un punto $Q \in m$ que satisface $\overleftrightarrow{PQ} \parallel t$. La recta t se llama la directriz de la proyección y la recta m, la recta de proyección. La proyección paralela de un punto P cualquiera que pertenezca a la recta t es el punto de intersección entre dicha recta y la recta m. La proyección paralela de un punto P que pertenezca a la recta m es él mismo.

Es importante destacar que cualquier recta paralela a la directriz puede ser directriz de la misma proyección. Para que los estudiantes comprendan mejor la definición anterior se les propone el siguiente problema.

PROBLEMA 30:

a. ¿Qué sucedería si la definición de proyección paralela no incluyera la condición: *la recta directriz y la recta de proyección no son paralelas*?
b. ¿Considera que la definición de proyección paralela permite definir una función? Explique.

Este problema, cuyo pretexto es estudiar la posibilidad de definir una función, permite cuestionar **i.** la existencia y unicidad de la proyección paralela de un punto dado en un plano, **ii.** sobre la cantidad de puntos que tienen la misma proyección paralela (un mismo punto en la recta), y **iii.** si todos los puntos de la recta de proyección son proyección paralela de algún punto del plano. Por otro lado, el problema da lugar a la ampliación del espacio de ejemplos de funciones al estudiar una en un contexto diferente al numérico. En ese marco, los estudiantes tienen la posibilidad de poner a prueba sus conocimientos relativos a hechos geométricos asociados con paralelismo: transitividad entre rectas paralelas, existencia y unicidad de una recta paralela por un punto externo a una recta y la imposibilidad, de acuerdo con la definición dada, de que una recta sea paralela a sí misma.

Como respuesta al ítem **a.** del problema es usual que los estudiantes manifiesten que si las rectas directriz y de proyección fueran paralelas, no siempre existiría la proyección de un punto dado. Los estudiantes justifican correctamente esa respuesta mencionando las siguientes dos situaciones:

Propuesta 30.1 Si P perteneciera a la recta directriz t, entonces no existiría un punto que sea su proyección, pues la recta de proyección m y la recta t no se intersecan.

Propuesta 30.2 Si P no perteneciera a ninguna de las dos rectas, t y m, entonces la recta n que contiene a P y es paralela a la recta directriz t sería paralela a la recta de proyección m. No existiría entonces punto de proyección para P pues las rectas m y n no se intersecarían.

Específicamente, en la justificación que se presenta de la Propuesta 30.2, los estudiantes utilizan la propiedad transitiva de la relación de paralelismo entre rectas. Es usual que no enuncien de manera explícita dicha propiedad aunque, en efecto, la utilizan. Es esta la oportunidad para introducir al sistema teórico dicha propiedad:

Teorema Transitividad paralelismo Si la recta l es paralela a la recta m y la recta m es paralela a la recta n, entonces la recta l es paralela a la recta n.

La demostración de este teorema se hace por el método indirecto. Al suponer que las rectas l y n se intersecan, se contradice el postulado de las paralelas pues existirían dos rectas (l y n) paralelas a una recta (m) por un mismo punto, el de intersección.

Con respecto al ítem **b.** del Problema 30, por lo regular, los estudiantes no explicitan una estrategia de solución. Puede deberse a que no es usual preguntar sobre la posibilidad de definir una función en un contexto netamente geométrico. Se indaga sobre lo que se requiere para definir una función: la existencia de una relación y de los conjuntos cuyos elementos se van a relacionar. Para el caso particular de la definición de proyección paralela, los estudiantes proponen los puntos del plano como dominio y los puntos de la recta m de proyección como codominio. Pero difícilmente sugieren una relación, cuestión que requiere de la intervención del profesor. Esta es:

Sea A el conjunto de los puntos del plano y m una recta. Se define la relación R de proyección paralela como sigue:

$$\begin{array}{l} R: A \longrightarrow m \\ \quad P \longmapsto R(P) \end{array} \quad = \begin{cases} S \text{ donde } t \cap m = \{S\} & \text{si } P \in t \\ \qquad P & \text{si } P \in m \\ Q \text{ donde } \overleftrightarrow{PQ} \parallel t \text{ y } Q \in m & \text{si } P \notin t \text{ y } P \notin m \end{cases}$$

Para garantizar que dicha relación es una función, se debe asegurar que la imagen para cada punto P del plano, por medio de la relación definida, es única. Ello implica hacer un análisis de los casos determinados en la definición para el punto P. No es difícil para los estudiantes aceptar que en los casos donde $P \in t$ o $P \in m$, la imagen es única. Es un poco más complejo el análisis del caso restante ($P \notin t$ y $P \notin m$). Para ello, usualmente se cuestiona a los estudiantes sobre la existencia del punto Q para cada punto P pues, con frecuencia, ellos no se preguntan eso.

Para explicar la existencia del punto Q, es necesario el siguiente teorema:

Teorema Rectas paralelas-intersección Si la recta m y la recta t se intersecan y l es una recta tal que $l \parallel t$, con m, t y l coplanares, entonces l y m se intersecan.

Para demostrar el teorema, se supone que l y m no se intersecan; ello implicaría que $l \parallel m$. Así, se tendría que $l \parallel m$ y $l \parallel t$, lo que significaría que $m \parallel t$, producto de la transitividad de la relación de paralelismo. Ahora, si $m \parallel t$, se llegaría a una contradicción pues dichas rectas se intersecan.

La unicidad del punto Q se desprende del *T. Intersección de rectas*. Con esto, finalmente, se logra justificar que la relación proyección paralela anteriormente definida es una función de los puntos del plano en una recta de dicha plano. Dicha función es sobreyectiva pero no es inyectiva. La justificación de esto último se deja como ejercicio.

Hecho el anterior análisis, los estudiantes están preparados para demostrar el siguiente teorema, que es muy importante para lo que sigue:

Teorema Existencia de proyección paralela Si la recta m y la recta t se intersecan, P es un punto, y $m, t, \subset \alpha$, $P \in \alpha$ un plano, entonces existe un punto Q en m tal que Q es la proyección paralela de P sobre m, con respecto a t.

Con el siguiente problema se pretende que los estudiantes amplíen el conjunto de propiedades de la proyección paralela. Genera la necesidad de formular la definición de proyección paralela de segmentos, y la inclusión al sistema axiomático de los teoremas que aluden a que la proyección paralela conserva la relación de interestancia y la congruencia de segmentos.

PROBLEMA 31: Se tienen las rectas coplanares m, l y n tales que l y n se intersecan en el punto K, y los puntos $A, B, C \in m$. Sean los puntos D, E y F las respectivas proyecciones paralelas de tales puntos sobre n, respecto a l. ¿Cuándo es $AD + CF$ el doble de BE? Formule una conjetura y provea su demostración.

Las conjeturas que usualmente proponen los estudiantes son:

Conjetura 30.1 Dado un $\overline{AC}$, su punto medio B y una recta n tal que n y $\overline{AC}$ están en un mismo plano α. Sean D, E y F las respectivas proyecciones paralelas de los puntos A, B y C sobre n, respecto a una recta l. Entonces $AD + CF$ es el doble de BE.

Conjetura 30.2 Se tienen las rectas m, l y n tales que l y n se intersecan en el punto K, y los puntos $A, B, C \in m$. Sean los puntos D, E y F las respectivas proyecciones paralelas de tales puntos sobre n, respecto a l. Si B es punto medio de $\overline{AC}$, entonces $AD + CF$ es el doble de BE.

Al proponer un análisis de las conjeturas, los estudiantes concluyen que ambas dicen, en esencia, lo mismo. Prefieren la primera por cuanto es mucho más sencilla o económica en su escritura. Sin embargo, no se percatan de que para que las conjeturas sean susceptibles de ser demostradas como válidas, a estas les hace falta una condición importante: los puntos A, B y C deben estar en el mismo semiplano respecto de la recta n. Una vez se llama la atención sobre la condición faltante en el antecedente de las conjeturas, se procede a formular el enunciado condicional que finalmente se demuestra.

Dados un $\overline{AC}$, su punto medio B, una recta n tal que A, B y C estén en el mismo semiplano determinado por n, y una recta coplanar l diferente a $\overleftrightarrow{AC}$ que interseca la recta n. Sean D, E y F las respectivas proyecciones paralelas de los puntos A, B y C sobre n, respecto a l. Entonces $AD + CF$ es el doble de BE.

Los estudiantes sugieren dos posibles construcciones auxiliares para la demostración de la conjetura:

Propuesta 31.1 Construir dos recta paralelas a n, una por A y otra por B. (Figura 73)

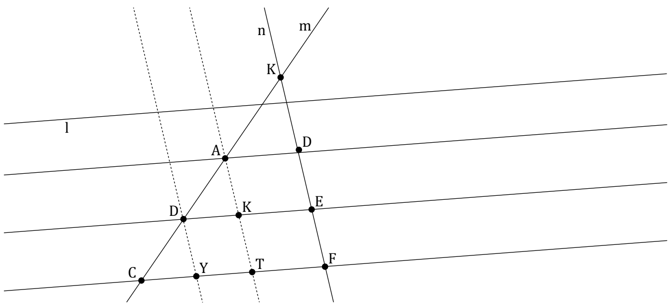


Figura 73

Propuesta 31.2 Construir $\overline{AF}$. (Figura 74)

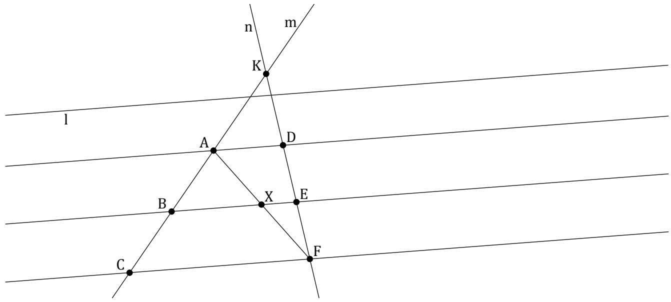


Figura 74

La Propuesta 30.1 requiere poder garantizar la congruencia de ΔABX y ΔBCY. Para ello se usa el criterio de congruencia *ALA* puesto que $\angle ABX \cong \angle BCY$ y $\angle CBY \cong \angle BAX$, gracias al *T. PC*, y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, por la definición de punto medio. A partir de la congruencia de tales triángulos se infiere que $\overline{XB} \cong \overline{CY}$. Producto de la definición de proyección, de las rectas paralelas construidas y de la definición de paralelogramo se infiere que $\square ADEX$, $\square XEFT$, $\square BXTY$ y $\square BEFY$ son paralelogramos; así $\overline{AD} \cong \overline{XE}$, $\overline{BX} \cong \overline{YT}$ y $\overline{BE} \cong \overline{YF}$. Los estudiantes suponen, usualmente sin justificación, que $C - Y - T - F$ y $B - X - E$, y con base en la última congruencia de segmentos establecida, deducen que:

$$\begin{aligned} AD + CF &= AD + CY + YT + TF = XE + BX + BX + XE \\ &= 2(BX + XE), \end{aligned}$$

Luego

$$AD + CF = 2BE$$

En términos generales, esta propuesta de justificación es correcta. Solo habría un asunto por tratar en ella: ¿cómo garantizar las interestancias que se suponen como válidas? Por otro lado, esta justificación provee la posibilidad de justificar que E es punto medio del $\overline{DF}$. Claro, cuando los estudiantes suponen que $\Delta ABX \cong \Delta BCY$ y la existencia de los paralelogramos $\square ADEX$ y $\square BEFY$, logran inferir que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Solo falta garantizar la interestancia $D - E - F$.

Por su lado, la Propuesta 30.2 se fundamenta en garantizar las igualdades $BX = \frac{1}{2}\,CF$ y $XE = \frac{1}{2}\,AD$. Así, $BE = \frac{1}{2}\,(CF + AD)$ lo que es equivalente a $2BE = CF + AD$.

Para ello, los estudiantes dan por sentada la interestancia $B - X - E$ y evocan el *T. Triángulo- segmento paralelo*. Usan este teorema puesto que suponen que X es punto medio de $\overline{EF}$ y E es punto medio de $\overline{DF}$.

Sin embargo, ninguna de estas dos propiedades se ha justificado. Producto del estudio de la Propuesta 30.1, pueden garantizar que $\overline{DE} \cong \overline{EF}$. Además, con una construcción similar a la realizada en ese método (construir tres rectas paralelas a n, una por A, una por B y otra por X), logran justificar que $\overline{AX} \cong \overline{XF}$. La dificultad se presenta, de nuevo, en garantizar las interestancias $D - E - F$ y $A - X - F$.

Dado que en ambas propuestas se ha presentado la misma dificultad: garantizar que la relación de interestancia se mantiene bajo la proyección paralela, vale la pena tratar el asunto. Por ejemplo, en la Propuesta 31.1 los puntos Y y T son las respectivas proyecciones paralelas de B y A con respecto a n en $\overleftrightarrow{CF}$, donde $A - B - C$. Así mismo, tanto en la Propuesta 31.1 como en la 31.2, los puntos D, E y F son las respectivas proyecciones paralelas de A, B y C sobre n, respecto a l.

Esta situación conduce, entonces, a una propiedad importante de la proyección paralela:

Teorema Proyección paralela - interestancia Se tienen las rectas coplanares m, l y n tales que l y n se intersecan en el punto K, y los puntos A, B, $C \in m$. Sean los puntos D, E y F las respectivas proyecciones paralelas de tales puntos sobre n, respecto a l. Si $A - B - C$ entonces $D - E - F$. (Figura 75)

Demostrar este teorema requiere haber validado antes el siguiente teorema, cuya demostración se deja como ejercicio.

Teorema Proyección paralela – semiplano Sean m una recta y α un plano que la contiene. Sean A y P puntos de α tales que $A \notin m$ y $P \notin m$. Sean $Q \in m$ y B la proyección paralela de A sobre m, respecto a la $\overleftrightarrow{CF}$. Entonces $B \in S_{\overleftrightarrow{PQ},A}$.

Se procede ahora a presentar la demostración del *T. Proyección paralela – interestancia.*

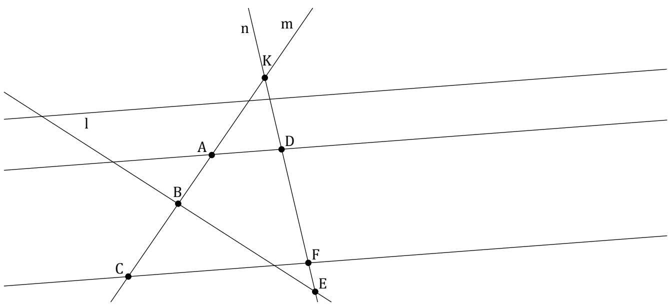


Figura 75

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. A,B y C puntos, $A-B-C$ y $A, B, C \in m$, m una recta	Dado
2. D, E y F son respectivas proyecciones paralelas de A, B y C, sobre n, respecto a l	Dado
3. m, l y n coplanares	Dado
4. $D-F-E$ o $E-D-F$ o $D-E-F$	T. Tres puntos (2)
5. $D-F-E$	Caso 1
6. $\overline{AD} \parallel l$, $\overline{BE} \parallel l$, $\overline{CF} \parallel l$	D. Proyección paralela (2,3)
7. $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$	T. Transitividad paralelismo (6)
8. Sean $S_{\overleftrightarrow{CF},A}$, $S_{\overleftrightarrow{CF},\sim A}$	D. Semiplano (3)
9. $D \in S_{\overleftrightarrow{CF},A}$	T. Proyección paralela – semiplano (2)
10. $B \in S_{\overleftrightarrow{CF},A}$	T. Puntos en el mismo semiplano (1)
11. $B \in S_{\overleftrightarrow{CF},D}$	Conjunción (9, 10)
12. $E \in S_{\overleftrightarrow{CF},\sim D}$	T. Puntos en distintos semiplanos (5)
13. $E \in S_{\overleftrightarrow{CF},\sim B}$	Conjunción (11,12)
14. $\overline{BE} \cap \overleftrightarrow{CF} \neq \emptyset$	P. Separación del plano ii (13)
15. $\overline{BE} \cap \overleftrightarrow{CF} = \{X\}$, X un punto	D. Conjunto no vacío y T. Intersección de rectas (14)
16. $\overline{BE} \cap \overleftrightarrow{CF} = \{X\}$ y $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$	Conjunción (6,15)
17. No se tiene $D-F-E$	Pr. de reducción al absurdo (16)
18. No se tiene $E-D-F$	Sin perder generalidad (5-17)
19. $D-E-F$	M.T.P. (17,18)

Este teorema permite inferir inmediatamente que la proyección paralela de un segmento es también un segmento.

Teorema Proyección paralela – segmento Se tienen las rectas m, l y n coplanares tales que l y n se intersecan en el punto K, y los puntos $A, B \in m$. Sean los puntos D y E las respectivas proyecciones paralelas de tales puntos sobre n, respecto a l. Entonces la proyección paralela de $\overline{AB}$ es $\overline{DE}$.

Teniendo estos dos últimos teoremas en el sistema teórico, y fijando la atención en la forma como se establecieron las congruencias en las justificaciones de las Propuestas 31.1 y 31.2 (específicamente el caso $\overline{DE} \cong \overline{EF}$), se tienen los recursos necesarios para justificar el siguiente teorema:

Teorema Proyección paralela – congruencia Dados $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ contenidos en una recta m. Sean W, X, Y, Z las respectivas proyecciones paralelas de A, B, C y D en la recta m con respecto a una recta l, entonces $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$.

En cuanto a los últimos teoremas relativos a la proyección paralela, vale la pena aclarar que la recta directriz l puede contener alguno de los puntos de la recta m y su respectiva proyección paralela. Este caso solo sería una situación muy particular de aquellas generales que describen dichos teoremas. Se resalta esto porque, en el estudio de situaciones posteriores, suele presentarse con frecuencia ese caso.

Una consecuencia importante de las propiedades de la proyección paralela es el *T. de Thales*. Este teorema será, en nuestro sistema teórico, punto de partida para el estudio de la semejanza triangular. Con el siguiente problema, se pretende introducir dicho teorema:

PROBLEMA 32: Dados los puntos A, B y C que pertenecen a una recta l, sean D,E y F puntos de la recta m, tales que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$. ¿Es posible que $AB \times EF = BC \times DE$? Formule una conjetura y demuéstrela.

Formular la pregunta en términos de encontrar condiciones para determinar si existe la igualdad entre productos y no una proporción, tiene como propósito que los estudiantes no evoquen el *T. de Thales*, si ya lo conocen, y, así, abrir el espacio para mayor posibilidad de exploración; es decir, se busca que el enunciado sea un verdadero problema para ellos. Las conjeturas que, por lo regular, presentan los estudiantes son las siguientes:

Conjetura 32.1 Dadas tres rectas paralelas y dos rectas l y m secantes a ellas tales que A, B y C son los puntos de intersección con l y D, E y F los puntos de intersección con m; entonces $AB \times EF = BC \times DE$.

Conjetura 32.2 Sean A, B, C puntos que pertenecen a la recta l, y E y F las respectivas proyecciones paralelas de B y C con respecto a $\overleftrightarrow{AD}$, entonces $AB \times EF = BC \times DE$.

Conjetura 32.3 Sean A, B, C puntos de una recta l y D, E y F puntos de otra recta m tales que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$. Entonces siempre $AB \times EF = BC \times DE$ si $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, sin importar la posición de B.

Estas conjeturas, en esencia, parecen decir lo mismo. Sin embargo, las Conjeturas 32.1 y 32.2 tienen imprecisiones de las cuales los estudiantes proponentes no se percatan. Durante el proceso de análisis, suelen identificar las falencias en dichas conjeturas. En la primera no es claro cuáles son las rectas paralelas; al parecer los proponentes suponen que estas son $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ pero no lo hacen explícito en el enunciado. En la Conjetura 32.2, aunque implícitamente se especifica cuáles son las rectas paralelas al aludir a la proyección paralela de los puntos B y C, no se explicita en qué recta están los puntos D, E y F. Estas imprecisiones conducen a descartar tales conjeturas.

En cuanto a la Conjetura 32.3, aunque en ella no se mencionan proyecciones paralelas, las condiciones que se exigen corresponden a esta situación. Por otro lado, el uso de la palabra "siempre" muestra que los estudiantes no han logrado desprenderse de la experiencia con la geometría dinámica para formular un teorema de la geometría euclidiana. Sin embargo, se menciona algo que las otras dos conjeturas no tienen en cuenta: no importa la relación de interestancia entre los puntos A, B y C.

El análisis anterior lleva a combinar lo que cada conjetura aporta para formular el *T. de Thales*. Para ello, es necesario introducir la definición de proporción:

Definición de Proporcionalidad Dadas dos sucesiones $a, b, c, \ldots$ y $a', b', c' \ldots$ de números positivos. Dichas sucesiones son proporcionales si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots = k$. El número constante k, $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots$ es llamado la constante o razón de proporcionalidad de las sucesiones.

En estos términos, la conjetura que recoge todas las ideas pertinentes se convierte en:

Teorema de Thales Dadas dos rectas m y l y los puntos A, B y C que pertenecen a l tales que $A - B - C$, y D un punto que pertenece a m. Sean E y F las respectivas proyecciones paralelas de B y C sobre m, con respecto a $\overleftrightarrow{AD}$. Entonces las sucesiones AB, DE y BC, EF son proporcionales; esto es $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

La interestancia de la que se informaen el antecedente y la proporción en lugar de la igualdad de productos en el consecuente se incluyen, por lo regular, en el enunciado del teorema que se encuentra en los libros de texto. Además, la interestancia, aunque es condición prescindible, se incluye en el enunciado porque facilita la construcción de su justificación. La demostración de este teorema no es evidente utilizando solo elementos relacionados con la proyección paralela. La misma se deja como ejercicio proveyendo, claro está, los pasos claves para realizarla.

Una consecuencia inmediata de este teorema es la siguiente:

Corolario Teorema de Thales Dadas dos rectas m y l, y dados puntos A, B y C que pertenecen a l tales que $A - B - C$, y D un punto que pertenece a m. Sean E y F las respectivas proyecciones paralelas de B y C , sobre m, con respecto a $\overleftrightarrow{AD}$. Entonces $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$ y $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$.

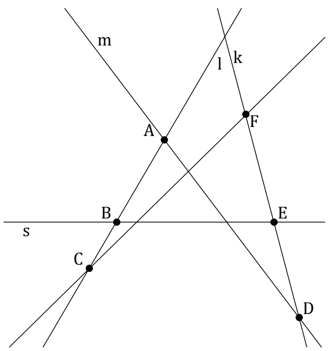
Se aprovecha este momento para indagar, como es usual en nuestra propuesta, por la validez de la recíproca del *T. de Thales*. Para ello, se propone a los estudiantes el siguiente problema:

PROBLEMA 33: Responda Sí, No o No se sabe a la siguiente pregunta. Si la respuesta es Sí formule el correspondiente teorema y provea la respectiva demostración. Si la respuesta es No se sabe, provea las condiciones para que la respuesta sea Sí, formule el correspondiente teorema y demuéstrelo. Si la respuesta es No, justifique su respuesta.

Dadas las rectas coplanares m, l, k, s y q tales que: **i.** k interseca las rectas m, s y q en A, B y C, respectivamente; **ii.** l interseca las rectas m, s y q en D, E y F, respectivamente; **iii.** $D - E - F$ y $A - B - C$; y **iv.** $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. ¿Es $s \parallel q$?

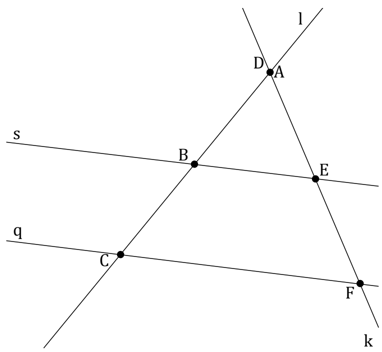
Los estudiantes rápidamente encuentran ejemplos en los que las rectas s y q son paralelas y en los que no lo son. La respuesta por tanto es No se sabe. A continuación se presentan representaciones gráficas que ilustran los dos casos:

$q \nparallel s$ en las figuras 76 (a y b), y $q \parallel s$ en las figuras 76 (c y d).



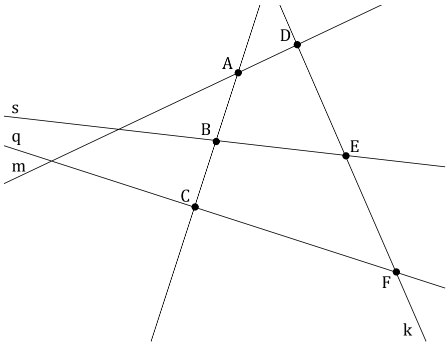
AB= 2.11 cm, BC = 2.34 cm,
EF = 2.54 cm, DE = 2.29 cm,
$\frac{AB}{BC}$ = 0.90, $\frac{DE}{EF}$ = 0.90

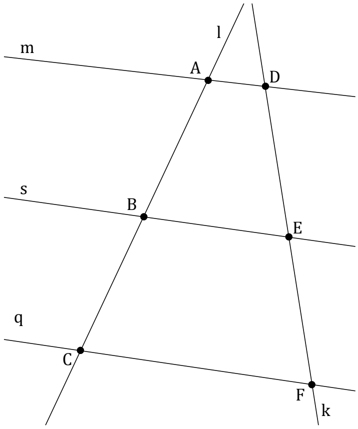
(a)



A y D son el mismo punto

(b)





B punto medio de $\overline{AC}$, *E* punto medio de $\overline{DF}$ $m \parallel s$

(c) (d)

$\boldsymbol{q \nparallel s}$ $\boldsymbol{q \parallel s}$

Figura 76

Al solicitar el enunciado condicional que incluya en el antecedente las condiciones que obligan a que las rectas q y s sean paralelas, los estudiantes proponen lo siguiente:

Conjetura 33.1 Dadas las rectas coplanares m, l, k, s y q tales que: **i.** k interseca las rectas m, s y q en A, B y C, respectivamente; **ii.** l interseca las rectas m, s y q en D, E y F, respectivamente; **iii.** $D-E-F$ y $A-B-C$; **iv.** $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$; y **v.** $m \parallel s$, entonces $q \parallel s$.

Conjetura 33.2 Dadas las rectas coplanares l, k, m, s y q tales que: **i.** l y k se intersecan en el punto A; **ii.** l interseca las rectas m, s y q en A, B y C, respectivamente; **iii.** k interseca las rectas m, s y q en D, E y F, respectivamente; **iv.** $D-E-F$ y $A-B-C$; **v.** $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$, entonces $q \parallel s$.

El hecho geométrico que subyace a la Conjetura 33.2 es el que conviene introducir en nuestro sistema teórico como teorema porque será de mucha utilidad para justificar algunas propiedades de la semejanza triangular. Así, este momento se aprovecha para cuestionar a los estudiantes sobre una reformulación del enunciado de dicha conjetura, de manera tal que esta, sin perder su esencia, sea mucho más económica y comprensible. La discusión que suscita este cuestionamiento tiene como propósito no solo proveer una reformulación de la Conjetura 33.2 en términos de triángulos sino también particularizar el *T. de Thales* y su corolario para este tipo de polígonos. Como consecuencia de esta actividad, se espera el establecimiento de los siguientes teoremas:

Teorema Recíproco de Thales Dado el ΔAEF con $A - B - E$, $A - C - F$ y $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$.
Teorema de Thales en triángulo Dado el ΔAEF con $A - B - E$ y $A - C - F$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, entonces $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$, $\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$, y $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$.

Nótese que una de las proporciones del consecuente del último teorema involucra tres razones. Lo interesante y novedoso de esta es que en ella se relacionan los segmentos que son paralelos, algo que no sucedió en el *T. de Thales*. La demostración del *T. de Thales en triángulo* está hecha casi por completo puesto que es solo un caso particular del *T. de Thales* y sus corolarios; solo faltaría justificar que $\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$ y $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$. Esta parte de la demostración se deja como ejercicio.

La demostración del recíproco del *T. de Thales* es un poco más elaborada. La presentamos a continuación: (Figura 77)

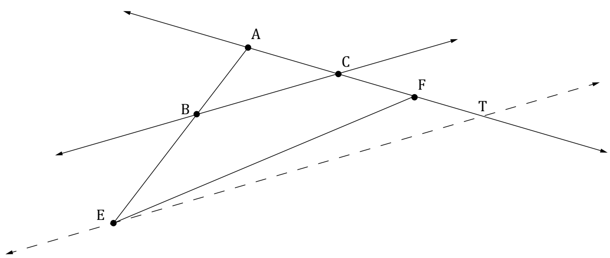


Figura 77

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔAEF, $A - B - E$, $A - C - F$ y $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$	Dado
2. Sea T la proyección paralela de E con respecto a $\overleftrightarrow{BC}$ en $\overleftrightarrow{AF}$	T. Existencia de la proyección paralela (1)
3. $\overline{BC} \parallel \overline{ET}$	D. Proyección paralela (2)

4. $A - C - T$	T. Proyección paralela - interestancia (1,2)
5. $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AT}$	T. Thales en triángulo (1,3,4)
6. $\frac{BE}{AB}+1= \frac{CF}{AC}+1$	Pr. Reales (1)
7. $\frac{BE+AB}{AB} = \frac{CF+AC}{AC}$	Pr. Reales (6)
8. $AB + BE = AE, AC + CF = AF$	D. Interestancia (1)
9. $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$	Pr. de Sustitución (7,8)
10. $\frac{AC}{AF} = \frac{AC}{AT}$	Pr. Transitiva y Pr. Reales (5,9)
11. $AF = AT$	Pr. Reales (10)
12. $F \in \overrightarrow{AC}$ y $T \in \overrightarrow{AC}$	D. Rayo (1,4)
13. F y T son el mismo punto	T. Localización de puntos (11,12)
14. $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$	Pr. de Sustitución (3, 13)

Introducido el *T. de Thales* y algunas de sus consecuencias, se propone el siguiente problema con el propósito de tener un ejemplo de su uso en la demostración de algún hecho geométrico.

PROBLEMA 34: En el ΔABC, determine, si es posible, un punto D que pertenezca a la $\overleftrightarrow{BC}$ de tal forma que $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$. Formule una conjetura y demuéstrela.

Es usual que los estudiantes hagan una exploración con geometría dinámica, construyendo un ΔABC, colocando un punto D sobre $\overleftrightarrow{BC}$, calculando $\frac{BD}{CD}$ y $\frac{BA}{CA}$ y arrastrando el punto D hasta obtener $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$. Con esto, logran encontrar, por lo general, un solo punto D de los dos que existen; el que pertenece al $\overline{BC}$. Sin embargo, no es evidente para ellos cómo describir la posición del punto D ni cómo proveer un procedimiento para hacer una construcción robusta que les permita determinar dicho punto. Ante este panorama, siempre hay algún estudiante que explora construyendo líneas notables del triángulo (medianas, alturas, bisectrices de sus ángulos y mediatrices de sus lados). Es así como descubren que D es un punto de la bisectriz del $\angle A$. Así, la conjetura que plantean, y por ende, la que es susceptible de justificación, es la siguiente:

Conjetura 33.1 Dados un ΔABC, $\overrightarrow{AX}$ la bisectriz del $\angle A$ y $\overrightarrow{AX} \cap \overline{BC} = \{D\}$. Entonces $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Se sugiere proponer como tarea para los estudiantes, encontrar el otro punto de la $\overleftrightarrow{BC}$ que cumple la condición $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$. La solución de este ejercicio permite establecer una conjetura mucho más general que incluye a la anterior. Se formula entonces el siguiente teorema:

Teorema Bisectriz – proporcionalidad Dado un ΔABC, sea el $\overrightarrow{AX}$ la bisectriz del $\angle A$ o del ángulo con vértice en A, que es externo del ΔABC, y $\overrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{D\}$. Entonces $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

A continuación se presenta la demostración del teorema para el caso en el que $\overrightarrow{AB}$ es bisectriz del $\angle A$ (Figura 78). La demostración para el caso restante se deja como ejercicio.

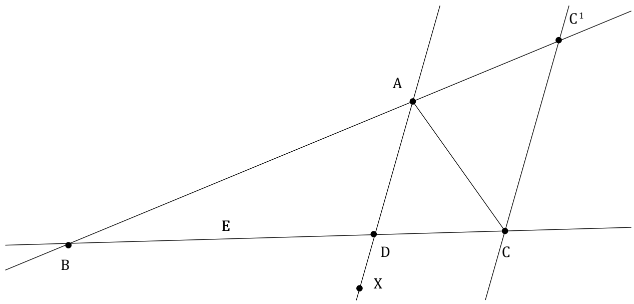


Figura 78

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC	Dado
2. Existe $\angle BAC$	D. Ángulo (1)
3. Sea $\overrightarrow{AX}$ la bisectriz del $\angle BAC$, $\overrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{D\}$	Dado
4. Sean $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AX}$	T. Recta-rayo-segmento (1)
5. Sea C' la proyección paralela de C sobre $\overleftrightarrow{AB}$, con respecto a $\overleftrightarrow{AX}$	T. Existencia proyección paralela (1)
6. $\{D\} = \overrightarrow{AX} \cap \overline{BC}$	D. Bisectriz ángulo y P. Intersección rayo segmento (3)
7. $\overline{CC'} \parallel \overleftrightarrow{AX}$	D. Proyección paralela (5)

Continúa

8. $\angle BAD$ y $\angle AC'C$ ángulos correspondientes	D. Ángulos correspondientes (4,5)
9. $\angle BAD \cong \angle AC'C$	T. PC (7,8)
10. $\angle BAD \cong \angle DAC$	D. Bisectriz (3)
11. $\angle DAC$ y $\angle ACC'$ ángulos alternos internos	D. Ángulos alternos internos (4,5,6)
12. $\angle DAC \cong \angle ACC'$	T. PAI (7,11)
13. $\angle BAD \cong \angle ACC'$	Pr. de Sustitución (12,10)
14. $\angle AC'C \cong \angle ACC'$	Pr. Sustitución (9,13)
15. A, C y C' no colineales, $\Delta AC'C$	D. Triángulo (1,5)
16. $\overline{AC} \cong \overline{AC'}$	T. Recíproco del triángulo isósceles (14,15)
17. $D \in \overline{BC}$	D. Intersección (6)
18. $B - D - C$	D. Segmento (17)
19. $B - A - C'$	T. Proyección paralela – interestancia (5,18)
20. $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC'}$	T. Thales (7,15,18,19)
21. $AC = AC'$	D. congruencia (16)
22. $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$	Pr. Sustitución (20,21)

Semejanza y criterios de semejanza

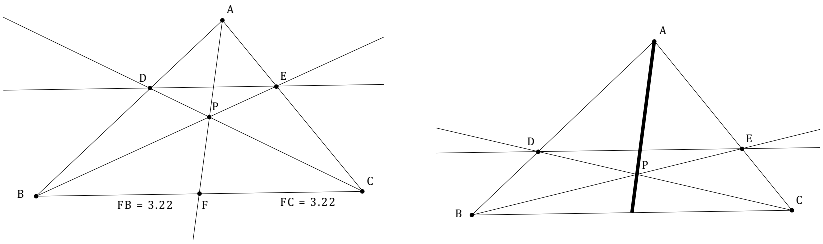
El siguiente problema tiene como propósito generar la necesidad de introducir al sistema teórico, hasta el momento conformado, la definición de semejanza triangular y los criterios para determinarla. Estos serán consecuencia de los teoremas anteriormente construidos, en particular los relativos a la proyección paralela, el *T. de Thales en triángulo* y el *T. recíproco de Thales*.

PROBLEMA 35: En el ΔABC, se tiene que $P \in int\ \Delta ABC$, $\{E\} = \overrightarrow{BP} \cap \overline{AC}$, $\{D\} = \overrightarrow{CP} \cap \overline{BA}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ¿Qué propiedad tiene el punto P?

Al involucrarse en la resolución de este problema, los estudiantes se enfrentan a dos tareas muy específicas. Una, se refiere a la realización de una construcción robusta que modele la situación que plantea el problema; la intención de expresar el problema como está expresado es que ellos se den cuenta de que no siempre las condiciones incluidas en el enunciado están dadas en el orden en que se deben construir. La otra, tiene que ver con el establecimiento de la propiedad del punto P y la formulación del enunciado en forma de conjetura que enuncie la propiedad establecida y que sea la más afortunada para realizar su demostración.

En cuanto al primer asunto, el referido a la construcción, es usual que los estudiantes hagan la modelación siguiendo un proceso en el cual el orden de los pasos se corresponde con el orden en el que se presentan las condiciones en el enunciado. Así, lo primero que hacen es poner un punto P en el interior del triángulo dado, lo cual no es del todo correcto pues precisamente se está preguntado sobre las propiedades de P y, por ende, P debería depender de todas las demás condiciones expuestas en el enunciado. Una vez colocado el punto P, intentan hacer cumplir las demás propiedades con el arrastre lo cual lleva a una construcción que no es robusta. Con este panorama, los estudiantes, en general, se percatan de que es necesario hacer un análisis previo que permita determinar las dependencias entre las propiedades para realizar así un procedimiento de construcción adecuado. No tardan mucho en adevertir que lo primero que deben construir es el punto E en el $\overline{AC}$ o D en el $\overline{AB}$ y la recta paralela a $\overline{BC}$ para encontrar el otro punto. Luego de construido $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, construyen a P como el punto de intersección de $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BE}$. De esta manera, P depende del punto E.

Con relación al segundo asunto, el referido a la propiedad del punto P y la formulación del enunciado en forma de conjetura, los estudiantes usualmente utilizan dos formas de exploración y formulan su conjetura de varias maneras. La primera forma de explorar consiste en trazar el $\overrightarrow{AP}$, determinar el punto F como intersección de tal rayo con el $\overline{BC}$ y determinar BF y FC. Arrastran el punto E y se percatan de que $BF = FC$ (Figura 79 (a)). La segunda forma consiste en activar la traza del punto P, arrastrar el punto E y fijarse en el rastro de tal punto (Figura 79 (b)).



(a) (b)

Figura 79

Como consecuencia de las exploraciones, es usual que los estudiantes formulen las siguientes conjeturas:

Conjetura 35.1 Dados el ΔABC, $\overrightarrow{CE}$ y $\overrightarrow{BD}$, $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, existe un punto $\{P\} = \overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{BD}$. Entonces $P \in \overline{AF}$, $\overline{AF}$ es mediana de ΔABC.

Conjetura 35.2 Dado el ΔABC tal que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ donde $\{E\} = \overrightarrow{CP} \cap \overline{AB}$, $\{D\} = \overrightarrow{BP} \cap \overline{AB}$ tal que $P \in int\ \Delta ABC$. Entonces P pertenece a una mediana del ΔABC.

Conjetura 35.3 Sean el $\Delta\ ABC$, $E \in \overline{AB}$, $l \parallel \overline{CB}$ por E, $l \cap \overline{AC} = \{D\}$. Dados $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ y $\{P\} = \overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AP} \cap \overline{BC} = \{F\}$, entonces F es el punto medio de $\overline{CB}$.

Conjetura 35.4 Sea el ΔABC, $P \in int\ \Delta ABC$ de tal forma que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ donde $\{E\} = \overrightarrow{CP} \cap \overline{AB}$, $\{D\} = \overrightarrow{BP} \cap \overline{AC}$ y $\overrightarrow{AP} \cap \overline{BC} = \{F\}$; entonces F es el punto medio del $\overline{CB}$.

Conjetura 35.5 Sea el $\Delta\ ABC$, $P \in int\ \Delta ABC$, de tal forma que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ donde $\{E\} = \overrightarrow{CP} \cap \overline{AB}$, $\{D\} = \overrightarrow{BP} \cap \overline{AC}$, y $\overline{AF}$ mediana del ΔABC, entonces $P \in \overline{AF}$.

La Conjetura 35.1 es falsa puesto que en las condiciones le falta determinar dónde se encuentran los puntos D y E, quedando el antecedente incompleto. Con respecto a la Conjetura 35.2, el antecedente está completo, pero en el consecuente no se determina en cuál mediana del ΔABC está P. Esta conjetura tampoco se acepta. La Conjetura 35.3 no adolece de los problemas expuestos anteriormente, pero en ella se está reportando el proceso de construcción como tal, lo que exige poner condiciones que se podrían escribir de una manera mucho más clara. Las Conjeturas 35.4 y 35.5 son correctas; sin embargo, la última es la que se esperaba. En el análisis de la Conjetura 35.4, en la cual aluden al $\overrightarrow{AP}$ y al punto medio F del $\overline{CB}$, en lugar de mencionar una mediana del triángulo, los estudiantes expresan que dicha formulación facilita la demostración.

Para la construcción de la demostración de la Conjetura 35.5, los estudiantes se basan tanto en la representación gráfica como en la teoría que hasta el momento conocen y proponen establecer relaciones de proporcionalidad que involucren a BF y CF. (Figura 80)

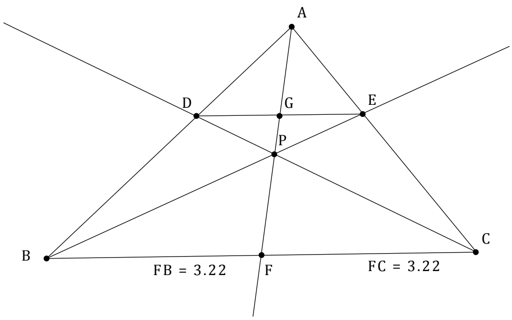


Figura 80

Sugieren usar el *T. de Thales en triángulo* en el ΔABF y el ΔAFC, dado que $\overline{DG} \parallel \overline{BF}$ y $\overline{GE} \parallel \overline{FC}$. Se determina, así, que $\frac{AG}{AF} = \frac{DG}{BF}$ y $\frac{AG}{AF} = \frac{EG}{CF}$ y, por ende, que $\frac{EG}{CF} = \frac{DG}{BF}$. En este punto, los estudiantes no encuentran cómo relacionar elementos del sistema teórico que tienen a su disposición con lo que han logrado deducir hasta el momento. No obstante, es usual que alguno de ellos evoque sus conocimientos sobre la relación de semejanza triangular. Ello posiblemente porque visualizan en la figura dos parejas de triángulos semejantes, a saber: $\Delta DGP \sim \Delta CFP$ y $\Delta EGP \sim \Delta BFP$ (el símbolo $\sim$ indica semejanza). Para sustentar tales semejanzas, los estudiantes aluden a la congruencia de los ángulos: $\angle DPG \cong \angle CPF$ y $\angle DGP \cong \angle CFP$ para la primera semejanza, y $\angle EPG \cong \angle BPF$ y $\angle EGP \cong \angle BFP$ para la segunda. Las congruencias de tales ángulos se justifican a partir del *T. Ángulos opuestos por el vértice* y *T. PAI.* Específicamente, utilizan el *Criterio de semejanza triangular Ángulo – Ángulo* para establecer la semejanza. Al suponer como válido dicho criterio y usar la definición de triángulos semejantes, surgen las proporciones $\frac{PG}{PF} = \frac{DG}{CF}$ y $\frac{PG}{PF} = \frac{EG}{BF}$, y con ellas, $\frac{DG}{CF} = \frac{EG}{BF}$. Con esta proporción y la que se obtuvo anteriormente, $\frac{EG}{CF} = \frac{DG}{BF}$, se deduce que $BF = FC$. Como $B – F – C$, F es punto medio del $\overline{CB}$ y $\overline{AF}$ es mediana del ΔABC. Además, P pertenece al $\overline{AF}$, dado que desde el principio se supuso que $\overrightarrow{AP} \cap \overline{BC} = \{F\}$.

La justificación anterior requiere que se introduzca a nuestro sistema teórico tanto la definición de triángulos semejantes como los criterios de semejanza de triángulos. A diferencia de la congruencia triangular para la cual uno de sus criterios se estableció como postulado y los demás como teoremas, en el caso de la semejanza triangular, todos los criterios son teoremas.

Definición de Triángulos semejantes Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

Esto significa que ΔABC y ΔDEF son congruentes si se tiene que:

i. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$ y
ii. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

Teorema Criterio de semejanza Ángulo – Ángulo (AA) Dos triángulos son semejantes si tienen dos parejas de ángulos correspondientes congruentes.
Teorema Criterio de semejanza Lado – Ángulo – Lado (LAL) Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y los ángulos que estos determinan son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. Esto es: Dados ΔABC y ΔDEF, si $\angle B \cong \angle E$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.
Teorema Criterio de semejanza Lado – Lado – Lado (LLL) Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes. Esto es: Dados ΔABC y ΔDEF, si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Usualmente, los textos de geometría euclidiana establecen como primer criterio de semejanza el *Criterio Ángulo – Ángulo – Ángulo*, el cual reza: Si en dos triángulos sus tres ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. Al respecto, nosotros preferimos establecer solo el *Criterio AA*, dado que exige una condición menos y fácilmente se establece como válido usando el *T. Suma medidas de ángulos*. Desde un punto de vista meramente teórico, introducir uno o el otro es lo mismo. A continuación se presenta la demostración del *Criterio AA*. La demostración de los *Criterios de semejanza LAL* y *LLL* se deja como ejercicio (ver ejercicio 6, 7).

Demostración

Para realizar la demostración, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $AC > DF$. (¿Qué sucede si $AC = DF$?)

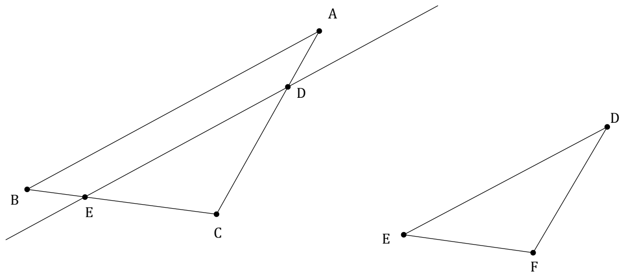


Figura 81

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC y ΔDEF, $AC > DF$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$	Dado
2. $DF > 0$, $FE > 0$	P. Puntos - número (1)
3. Sean $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$	T. Recta-rayo-segmento (1)
4. Sea $D' \in \overrightarrow{CA}$ tal que $CD' = DF$ (Figura 80)	T. Localización de puntos (2,3)
5. Sea E' tal que E' es la proyección paralela de D' sobre $\overleftrightarrow{BC}$ con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$	T. Existencia proyección paralela (3,4)
6. $AC > CD'$	Principio de sustitución (1,4)
7. $C - D' - A$	T. Desigualdad – interestancia (6,4)
8. $C - E' - B$	T. Proyección paralela – interestancia (5,7)
9. $\overline{D'E'} \parallel \overline{AB}$	D. Proyección paralela (5)
10. $\angle CAB$ y $\angle CD'E'$ son ángulos correspondientes 11. $\angle CBA$ y $\angle CE'D'$ son ángulos correspondientes	D. ángulos correspondientes (3)
12. $\angle CAB \cong \angle CD'E'$ 13. $\angle CAB \cong \angle CE'D'$	T. PC (9,10)
14. $\angle EDF \cong \angle CD'E'$ $\angle DEF \cong \angle CE'D'$	Pr. Reales (1,11)
15. $\overline{CD'} \cong \overline{DF}$	D. Congruencia (4)

Continúa →

16. $\Delta DEF \cong \Delta D'E'C$	Criterio de congruencia LAA (12,13,15)
17. $\overline{E'D'} \cong \overline{ED}$, $\overline{E'C} \cong \overline{EF}$	D. Triángulos congruentes (14)
18. $\frac{CD'}{AC} = \frac{CE'}{CB} = \frac{D'E'}{AB}$	T. Thales en triángulos (9)
19. $E'D' = ED$ y $E'C = EF$; $m\angle A = m\angle D$ y $m\angle B = m\angle E$	D. Congruencia (1, 17)
20. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$	Pr. de Sustitución y Prop. Reales (4,18,19)
21. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$; $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180$	T. Suma medidas de ángulos (1)
22. $\angle C \cong \angle F$	Pr. Sustitución, Prop. Reales y D. Congruencia de ángulos (19,21)
23. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	D. Semejanza de triángulos (1,20,22)

Algunas consecuencias de la semejanza de triángulos: tres teoremas importantes

En este apartado presentamos tres teoremas en cuya demostración juega un papel importante la semejanza de triángulos, dos de los cuales, por lo regular, no se estudian en los textos de geometría: *T. de Pitágoras*, *T. de Menelao y T. de Ceva*. El primero de tales teoremas se aborda de la misma forma como se ha venido haciendo con los elementos del sistema teórico que se han estudiado hasta el momento; es decir, se presenta el problema cuya solución conduce directa o indirectamente al elemento, se consignan algunas de las conjeturas que formulan los estudiantes, se indica cómo se analizan estas, y finalmente se formula el teorema correspondiente con su demostración. Como el *T. de Menelao* y el *T. de Ceva* no son esenciales para el sistema teórico que se propone en este libro, solo indicamos el problema que se propone, el teorema mismo y damos unas indicaciones para la demostración. No presentamos enunciados propuestos por los estudiantes.

Teorema de Pitágoras

Es usual que las demostraciones del *T. de Pitágoras* se enmarquen en la teoría de áreas de polígonos. De hecho, Euclides, a quien se le atribuye la primera demostración formal de este teorema, la desarrolla aludiendo a propiedades de áreas de paralelogramos y triángulos. oPuesto que ese no es un tema que se aborda en este libro, la demostración que presentamos está relacionada con la semejanza de triángulos, siguiendo la idea de Millman y Parker (1981), y Alfonso (1997). Así aseguramos continuidad en la conformación del sistema teórico propuesto. Para suscitar el estudio de dicho teorema se propone el siguiente problema:

> **PROBLEMA 36:** En el ΔABC, sea $\overline{BD}$ una de sus alturas. ¿Qué tipo de triángulo debe ser el ΔABC para que AB sea media geométrica de AC y AD?

Se diseñó este problema de manera tal que no se hace alusión explícita al *T. de Pitágoras*. Así, los estudiantes no tienen una respuesta inmediata al problema sino que se enfrentan a una situación que exige la exploración con geometría dinámica para resolverlo. Es claro también que la conjetura esperada como solución al problema no se corresponde con el enunciado de dicho teorema; sin embargo, incluye las condiciones que posibilitan hacer la demostración de este en el contexto de la semejanza de triángulos.

Antes de que los estudiantes se involucren en la resolución del problema, es necesario precisar la definición de media geométrica.

Definición de Media geométrica Sean a, b y c número reales positivos. a es media geométrica de b y c si y solo si $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$.

Después de la exploración realizada por los estudiantes, es usual que formulen las siguientes conjeturas:

Conjetura 36.1 Si ΔABC es rectángulo y $\overline{BD}$ una de sus alturas, entonces AB es media geométrica de AC y AD.

Conjetura 36.2 Si ΔABC con $\angle B$ recto y $\overline{BD}$ una de sus alturas, entonces AB es media geométrica de AC y AD.

Aunque ambas conjeturas, en esencia, dicen lo mismo, la Conjetura 36.2 es mucho más precisa pues explicita cuál es el ángulo recto del ΔABC. La demostración de dicha conjetura se fundamenta en establecer la semejanza entre ΔABD y ΔACB, y con ella, la proporción $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

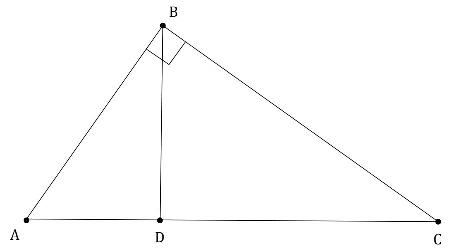


Figura 82

Con el propósito de construir una demostración para el *T. de Pitágoras*, el cual aún no se ha hecho presente, se cuestiona a los estudiantes sobre la posibilidad de que las medidas de otros segmentos de la figura sean media geométrica de algún par de medidas de segmentos. Los estudiantes no se demoran en determinar otros triángulos semejantes y con ello las proporciones $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$ y $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD}$. (Figura 81). En este punto, se sugiere a los estudiantes relacionar el cuadrado de AC con la suma de los cuadrados de AB y BC a partir de las medias geométricas establecidas hasta el momento. Con algunos procedimientos algebraicos y usando la interestancia $A - D - C$, se logra deducir que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Se ha demostrado entonces el Teorema de Pitágoras, cuyo enunciado finalmente se formula de la siguiente manera:

Teorema de Pitágoras Si ΔABC con $\angle B$ recto, entonces $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Introducido este teorema al sistema teórico, se cuestiona a los estudiantes sobre la validez de su recíproco. Explorando en un entorno de geometría dinámica, los estudiantes se percatan de que tal hecho geométrico es verdadero. Su enunciado es:

Teorema Recíproco de Pitágoras Si en un ΔABC se tiene que $AC^2 = AB^2 + BC^2$, entonces ΔABC es rectángulo con $\angle B$ recto.

La demostración de este teorema se deja como ejercicio para el lector.

Teoremas de Menelao y de Ceva

Los teoremas de Menelao y Ceva son hechos geométricos interesantes por cuanto proveen criterios para determinar colinealidad de puntos y concurrencia de segmentos, respectivamente, a través del valor del producto de tres razones.

PROBLEMA 37: Dados el ΔABC, la $\overleftrightarrow{AC}$ y puntos X, Y y Z tales que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{CB}$ y $Z \in \overleftrightarrow{AC}$.

a. ¿Cuál debe ser la posición del punto Z para que $\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{AZ} = 1$? Escriba una conjetura.
b. ¿Qué propiedad destacable se evidencia entre $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$ y $\overline{CX}$ cuando $\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{AZ} = 1$? Escriba una conjetura.

Se espera que después de modelar la situación en un entorno de geometría dinámica y realizar la respectiva exploración, para el ítem **a.** los estudiantes establezcan que hay dos casos posibles para el punto Z: una en la que $Z \in \overline{AC}$; otra en la que z $\in \overleftrightarrow{AC}$ pero no al $\overline{AC}$. Para el ítem **b.** las condiciones sobre las que informan dependen de los casos antes mencionados; específicamente, para el primer caso $\overline{AY}$, $\overline{BZ}$ y $\overline{CX}$ son concurrentes y para el segundo los puntos X, Y y Z son colineales. Como suele suceder con estos problemas, las conjeturas que establecen los estudiantes pueden indicar el producto igual a 1 como condición en el antecedente y la propiedad especial como consecuente o al contrario, dando lugar a las recíprocas correspondientes. Lo anterior lleva al establecimiento de los siguientes teoremas:

Teorema de Menelao Dados el ΔABC, la $\overleftrightarrow{AC}$ y puntos X, Y y Z tales que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{CB}$ y $Z \in \overleftrightarrow{AC}$,

i. Si X, Y y Z son colineales, entonces $\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{AZ} = 1$.
i. Si $\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{AZ} = 1$, entonces X, Y y Z son colineales.

Teorema de Ceva Dados el ΔABC y puntos X, Y y Z tales que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{CA}$ y $Z \in \overline{BC}$,

i. Si $\overline{AZ}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CX}$ son concurrentes, entonces $\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{AY} = 1$.
i. Si $\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{AY} = 1$, entonces $\overline{AZ}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CX}$ son concurrentes.

La demostración del ítem i del *T. de Menelao* se basa en la construcción de rectas perpendiculares a $\overleftrightarrow{XZ}$ por los puntos A, B y C pues de esa forma se pueden determinar parejas convenientes de triángulos rectángulos semejantes. La demostración del ítem ii de dicho teorema se hace construyendo la $\overleftrightarrow{XY}$, nombrando con Z' la intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ con dicha recta, aplicando el primer ítem del *T. de Menelao* y mostrando que Z y Z' son el mismo punto. (Figura 83)

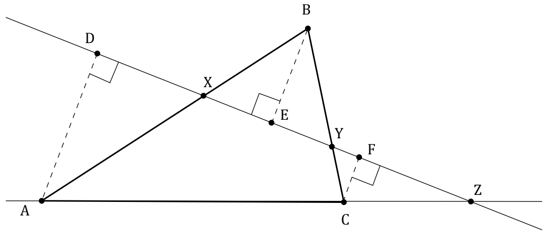


Figura 83

Por su parte, la demostración del primer ítem del *Teorema de Ceva* se logra aplicando el *T. de Menelao* en el ΔABZ con los puntos X, D y C y en el ΔBCZ con los puntos Y, D y B. El ítem 2 del teorema se demuestra de manera similar a como se demuestra el ítem 2 del *T. de Menelao*. (Figura 84)

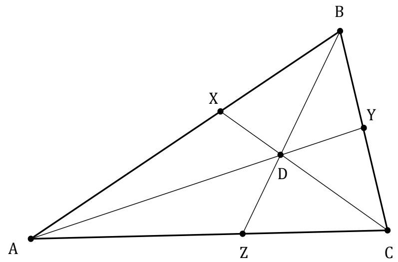


Figura 84

Otras consecuencias de la semejanza de triángulos y algunas implicaciones de los teoremas anteriores serán estudiadas posteriormente, en particular para justificar propiedades relativas a circunferencias y líneas notables de triángulos.

Ejercicios

1. Demuestre los siguientes teoremas:

   a. T. Transitividad paralelismo
   b. T. Existencia proyección paralela
   c. T. proyección paralela – semiplano

2. Para este ejercicio se debe usar un software de geometría dinámica: Dados el ΔABC y una recta m que no lo interseca*,* m y ΔABC coplanares. Determine la relación entre la suma de las distancias desde los vértices del triángulo a la recta m, y la suma de las distan-

cias desde los puntos medios de los lados del triángulo a tal recta. Formule una conjetura y demuéstrela.

3.

a. Con base en la Figura 85 y a partir de los pasos claves dados a continuación, demuestre el *T. de Thales*. Si estipulamos que $x = \frac{AB}{BC}$, $y = \frac{DE}{EF}$, ¿qué debemos demostrar? (Moise, 1964, p. 139)

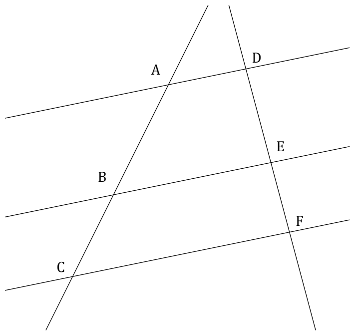


Figura 85

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ puntos de $\overline{AB}$ tales que $A_1 - A_2 - A_3 - \ldots - A_{n-1} - B$ y $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}B$, n siendo cualquier número natural	
2. Sean $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{n-1}$ las respectivas proyecciones paralelas de A_1, $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ sobre $\overline{DE}$ respecto a $\overleftrightarrow{AD}$, tales que $D - D_2 - D_3 - \ldots - D_{n-1} - E$	
3. $DD_1 = D_1 D_2 = \ldots = D_{n-1} E$	
4. Sean $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ puntos de $\overrightarrow{BC}$ tales que $B_1 - B - B_3 - \ldots - B_m$ y $BB_1 = B_1 B_2 = \ldots = B_{m-1} B_m = AA_1$, m siendo cualquier número natural	
5. Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m$, las respectivas proyecciones paralelas de B_1, $B_2, B_3, \ldots, B_m$ sobre $\overline{EF}$, respecto a $\overleftrightarrow{AD}$ tales que $E_1 - E_2 - E_3 - \ldots - E_m$	

Continúa

6. $EE_1 = E_1 E_2 = \ldots = E_{m\text{-}1} E_m$	
7. $\frac{AB}{BB_m} = \frac{n}{m} = \frac{DE}{EE_m}$	
8. Suponga que $\frac{n}{m} > x$	
9. $B - B_m - C$	
10. $E - E_m - F$	
11. $\frac{n}{m} > y$	
12. Suponga que $\frac{n}{m} < x$	
13. $\frac{n}{m} < y$	
14. $x = y$	

b. Para justificar los pasos 12 y 14 de la demostración del *Teorema de Thales* se debe usar el *T. de Comparación*. Complete los pasos de la demostración.

Teorema de Comparación Sean x y y dos números reales. Si **i.** todo número racional menor que x es también menor que y, y **ii.** todo número racional menor que y es también menor que x, entonces $x = y$.

Demostración

Afirmación	Garantía y datos
1. x y y números reales	
2. Si $a < x$ entonces $a < y$, $a \in \mathbb{Q}$	
3. Si $a < y$ entonces $a < x$, $a \in \mathbb{Q}$	
4. $x \neq y$	
5. $x < y$ o $y < x$	
6. $x < y$	
7. Sea ⠀ $\in \mathbb{Q}$ tal que $x < \frac{p}{q} < y$	
8. ⠀ $< x$	

Continúa

9. $x < \frac{p}{q}$ y $\frac{p}{q} < x$	
10. $y < x$	
11. $y < \frac{p}{q}$ y $\quad < y$	
12. $x = y$	

4. Demuestre:

   a. El Corolario del *T. de Thales.*
   b. Demostrar la Conjetura 32.1.

5. Respecto al *T. de Thales* en triángulo, demuestre que: $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$ y $\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$.

6.
   a. Complete la demostración del *Criterio de semejanza LAL*, siguiendo las ideas que se presentan a continuación y completando la tabla:

Criterio de semejanza LAL Dados ΔABC y ΔDEF tal que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demostración

En primera instancia, suponga, sin pérdida de generalidad, que $AB > DE$. ¿Qué sucede si $AB = DE$?

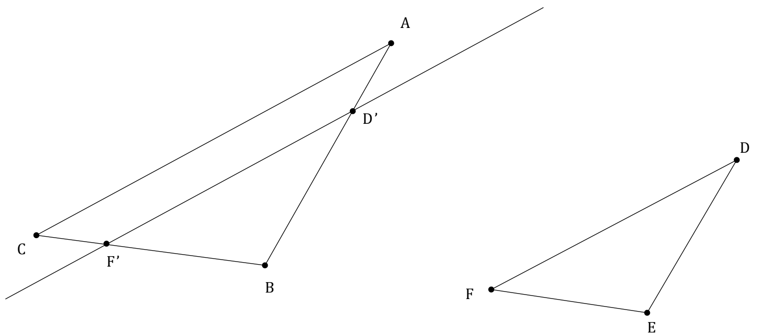


Figura 86

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC y ΔDEF, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, $\angle B \cong \angle E$, $AB > DE$	
2. Sea $\overrightarrow{BA}$	
3. $DE > 0$	
4. Sea D' tal que $D' \in \overrightarrow{BA}$ y $BD' = ED$ (Figura 85)	
5. Sea F' tal que F'es la proyección paralela de D' sobre $\overleftrightarrow{BC}$, con respecto a $\overleftrightarrow{AC}$	
6. $BD' < AB$	
7. $B - D' - A$	
8. $C - F' - B$	
9. $\overline{BD'} \cong \overline{ED}$	
10. $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overline{D'F'}$	
11. $\frac{BD'}{BA} = \frac{BF'}{BC}$	
12. $\frac{ED}{BA} = \frac{BF'}{BC}$	
13. $\frac{BA}{ED} = \frac{BC}{BF'}$	
14. $\frac{BC'}{EF} = \frac{BC}{BF'}$	
15. $EF = BF'$	
16. $\overline{EF} \cong \overline{BF'}$	
17. $\Delta D'BF' \cong \Delta DEF$	
18. $\angle BD'F' \cong \angle D$	
19. $\angle A \cong \angle BD'F'$	
20. $\angle A \cong \angle D$	
21. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	

b. Explique cómo cambia la demostración anterior si en el paso 5, en lugar de construir el punto F'con base en la proyección paralela de D' sobre $\overleftrightarrow{BC}$, con respecto a $\overleftrightarrow{AC}$, F' se construye a partir del *T. Localización de puntos* en el $\overrightarrow{ED}$ tal que $BF'=EF$.

7. Complete la demostración del *Criterio de semejanza LLL*, siguiendo las ideas que se presentan a continuación y completando el esquema-demostración:

Criterio de semejanza LLL Dados ΔABC y ΔDEF tales que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demostración

En primera instancia, vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $AB > DE$. ¿Qué sucede si $AB = DE$? (Figura 87)

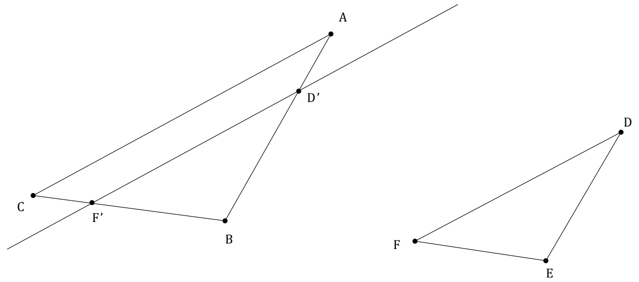


Figura 87

Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC, ΔDEF, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$	
2. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{DF}$	
3. Sea $\overrightarrow{BA}$	
4. $DE > 0$	
5. Sea D' tal que $D' \in \overrightarrow{BA}$ y $BD' = DE$ (Figura 86)	
6. Sea F' tal que F' es la proyección paralela de F' sobre $\overleftrightarrow{BC}$, con respecto a $\overleftrightarrow{AC}$	
7. $BD' < AB$	
8. $B - D' - A$	
9. $C - F' - B$	

Continúa →

10. $\overline{ED} \cong \overline{BD'}$	
11. $\overline{AC} \parallel \overline{F'D'}$	
12. $\frac{BA}{BE'} = \frac{AC}{D'F}$	
13. $\frac{BA}{BE'} = \frac{AC}{DF}$	
14. $\frac{AC}{D'F'} = \frac{AC}{DF}$	
15. $D'F' = DF$	
16. $\frac{BA'}{BE'} = \frac{BC}{BF'}$	
17. $\frac{BA'}{DE} = \frac{BC'}{BF'}$	
18. $\frac{BC'}{BF'} = \frac{BC'}{EF}$	
19. $BF' = EF$	
20. $\overline{D'F'} \cong \overline{DF}$, $\overline{BF'} \cong \overline{EF}$, $\overline{BE'} \cong \overline{ED}$	
21. $\Delta D'BF' \cong \Delta DEF$	
22. $\angle BD'F' \cong \angle EDF$, $\angle BF'D' \cong \angle DFE$	
23. $\angle BD'F' \cong \angle BAC$, $\angle BF'D' \cong \angle BCA$	
24. $\angle BCA \cong \angle EFD$, $\angle BAC \cong \angle EDF$	
25. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$	

8. Demuestre el *T. recíproco del Teorema de Pitágoras*. Sugerencia: construya un triángulo rectángulo con segmentos congruentes al triángulo dado.

9. Dado el ΔABC con $AB >$ AC. La bisectriz del $\angle BAC$ interseca la $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto D y la bisectriz de un ángulo externo con vértice A interseca la $\overleftrightarrow{BC}$ en el punto E. Demuestre que $\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2$.

10. Dado el ΔABC con $A - D - E - B$, D punto medio del $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ altura del triángulo. Demuestre que $CB^2 - AC^2 = 2\,(DE)\,(AB)$.

11. Complete la demostración del *T. de Menelao*.

12. Complete la demostración del *T. de Ceva*.

13. Demuestre que las medianas de un triángulo concurren.

14. Demuestre que las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren.

15. ¿Es posible aplicar el *T. de Ceva* para demostrar la concurrencia de las mediatrices los lados de un triángulo? Explique su respuesta. ¿Cómo demostraría dicha concurrencia?

Capítulo 9:
Circunferencia

Hasta ahora, en el trabajo con geometría dinámica hemos permitido el uso de la circunferencia solo para construir segmentos congruentes, uso sustentado por el *T. Localización de puntos*. Es decir, este objeto no ha tenido un tratamiento formal como figura geométrica, dentro del sistema teórico hasta el momento consolidado. En este capítulo, se presentan problemas cuyo propósito es estudiar propiedades de la circunferencia o hechos geométricos en los que este objeto está involucrado.

Circunferencia circunscrita a un triángulo

Iniciamos el capítulo con un problema cuyos dos propósitos específicos son: **i.** que los estudiantes recuerden las definiciones de circunferencia, cuerda, radio y diámetro, y **ii.** que establezcan propiedades relativas a las mediatrices de cuerdas de una circunferencia.

> **PROBLEMA 38:** Dados tres puntos no colineales A, B y C, ¿es posible construir una circunferencia que contenga los tres puntos? Si es el caso, establezca un procedimiento para construir dicha circunferencia.

Para abordar el problema, los estudiantes se cuestionan sobre la definición de circunferencia. La misma se formula de la siguiente manera:

Definición Circunferencia Dado un punto P en un plano β. El conjunto de todos los puntos X del plano β que equidistan del punto P una distancia r recibe el nombre de circunferencia. El punto P es el centro de la circunferencia. Para referirnos a la circunferencia con centro P se usará la notación $\odot P$.

Se aprovecha esta definición para formular las definiciones de radio, diámetro, cuerda, interior y exterior de circunferencia.

Definición Radio de circunferencia Dados $\odot P$ y X un punto cualquiera que pertenece a ella. La medida PX o los segmentos $\overline{PX}$ reciben el nombre, respectivamente, de radio o radios de la circunferencia. La notación para una circunferencia de centro P y radio PX es $\odot P_{PX}$. Así mismo, la notación para una circunferencia de centro P y radio r es $\odot P_r$.
Definición Diámetro de circunferencia Dados $\odot P$ y, X e Y dos puntos cualesquiera que pertenecen a ella tales que $\overline{XY}$ contiene a P. La medida XY o los segmentos $\overline{XY}$ reciben el nombre, respectivamente, de diámetro o diámetros de $\odot P$.
Definición de Cuerda de circunferencia Dados $\odot P$, y X e Y dos puntos cualesquiera que pertenecen a ella. Cada uno de los segmentos $\overline{XY}$ recibe el nombre de cuerda de $\odot P$.

Definición exterior e interior de circunferencia Dados $\odot P_r$ y Q un punto que pertenece al plano en el que está contenida la circunferencia. Si $PQ > r$ entonces Q está en el exterior de la circunferencia. Si $PQ < r$ entonces Q está en el interior de la circunferencia. El exterior de una $\odot P_r$ se denotará $ext\odot P_r$. El interior de una $\odot P_r$ se denotará $int\odot P_r$.

Formuladas las definiciones anteriores, como es usual en esta propuesta, se cuestiona a los estudiantes sobre cómo garantizar, teóricamente, la existencia de una circunferencia de radio r y centro P en un plano α dado. Además, se pregunta sobre la unicidad del centro de una circunferencia, hecho que se da por sentado en la definición, y pasa inadvertido por los estudiantes.

Con relación a la existencia, los estudiantes, por lo regular, proponen determinar un punto P en el plano α y construir infinidad de rayos, con extremo en P, todos contenidos en dicho plano. Luego, en cada rayo, localizar un único punto X de forma tal que $PX = r$. Así, construyen la $\odot P_r$ en α. El método anterior garantiza la existencia de este objeto y su unicidad, ya que cada paso se justifica con elementos del sistema teórico, respectivamente: *T. Punto-infinitas rectas* y *T. Localización de puntos*. Lo anterior permite la introducción de los siguientes teoremas al sistema teórico:

Teorema Existencia de las circunferencias Dado un número positivo r, un plano α y un punto P en α, existe una única circunferencia de radio r en dicho plano.
Teorema Circunferencia – infinitos puntos Toda circunferencia tiene infinitos puntos.

Con respecto al segundo asunto, la unicidad del centro de una circunferencia dada con radio r, los estudiantes generalmente abordan la situación de manera correcta, suponiendo que existen dos centros, A y B, para una misma circunferencia. No obstante, difícilmente logran establecer una contradicción. Se sugiere, entonces, determinar una cuerda $\overline{CD}$ cualquiera de la circunferencia y estudiar, de nuevo, la situación. La Figura 88 ilustra dicha situación:

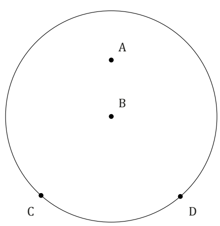


Figura 88

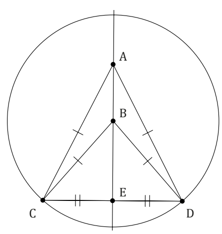


Figura 89

Dado que los puntos A y B son centros de la circunferencia, y los puntos C y D puntos de ella, entonces $CB = BD$ y $AC = AD$. Como el radio de la circunferencia es r, se tiene que $CB = BD = AC = AD = r$. Con este panorama, los estudiantes exponen la siguiente argumentación, a partir de la representación gráfica de la Figura 88. Inicialmente escogen al punto medio, E, del $\overline{CD}$. Como el ΔACB y el ΔADB son isósceles, los puntos A, B y E están en la mediatriz m del $\overline{CD}$, por la *D. Mediatriz*. Por tanto, el $\angle AEC$ es recto (*T. Mediatriz*), y de ello se deduce que el $\angle CBE$ es agudo. Por ende, el $\angle CBA$ es obtuso. Allí hay una contradicción ya que los ángulos congruentes de un triángulo isósceles son agudos. Lo anterior implica que los puntos A y B deben ser el mismo.

La argumentación anteriormente expuesta permite introducir al sistema teórico no solo el hecho de que una circunferencia tiene un único centro, sino también que la mediatriz de una cuerda cualquiera de la circunferencia lo contiene. Estos hechos los formulamos en los siguientes teoremas:

Teorema Circunferencia – unicidad del centro Una circunferencia de radio r, tiene un único centro.
Teorema Mediatriz de cuerda – centro La mediatriz de una cuerda cualquiera de una circunferencia dada contiene el centro de la circunferencia.

Establecidos los hechos geométricos y las definiciones anteriores, los estudiantes estudian la situación propuesta en el Problema 38, usando geometría dinámica. Es usual que ellos propongan los siguientes métodos de exploración para determinar la existencia o no de la circunferencia que contiene los puntos A, B y C:

Propuesta 38.1 Construir las medianas del ΔABC y el punto de intersección de estas, X. Construir la circunferencia de centro X y radio de extremos X y el vértice A del triángulo. Arrastrar algún vértice del triángulo hasta que la circunferencia contenga los puntos B y C. Los estudiantes que realizan este procedimiento determinan que el triángulo debe ser equilátero.

Propuesta 38.2 Construir una circunferencia que contiene alguno de los puntos dados, por ejemplo A, y cuyo centro es un punto X cualquiera. Arrastrar el punto X hasta que la circunferencia construida contenga los puntos B y C. Estudiar la condición geométrica del punto X. Para ello, construyen las líneas notables de un triángulo, es decir, las medianas, las bisectrices, las alturas del ΔABC, o las mediatrices de los lados de tal triángulo hasta determinar cuál de los respectivos puntos de concurrencia coincide con X. Los estudiantes que realizan este procedimiento determinan que el punto X debe ser la intersección de las mediatrices construidas.

Propuesta 38.3 Construir las medianas, las bisectrices, las alturas del ΔABC, o las mediatrices de los lados de tal triángulo y los respectivos puntos de concurrencia. Construir circunferencias con centros en dichos puntos de concurrencia y radios con extremos en dichos puntos y un vértice del triángulo. Después de arrastrar alguno de los puntos dados, los estudiantes que realizan este procedimiento se percatan de que la circunferencia que cumple la condición solicitada en el problema es la construida con base en el punto de concurrencia de las mediatrices. A partir de los procedimientos anteriores, los estudiantes formulan las siguientes conjeturas.

Para el primer procedimiento:

Conjetura 38.1 Dado un ΔABC, sea X la intersección de sus medianas. Si $\odot X$ contiene los puntos A, B y C, entonces ΔABC es equilátero.

Para el segundo procedimiento:

Conjetura 38.2 Dado un ΔABC cualquiera. Si $\odot X$ contiene los puntos A, B y C, entonces X es el punto de intersección de las mediatrices.

Para el tercer procedimiento:

Conjetura 38.3 Dado un ΔABC, y sea X la intersección de sus mediatrices. Entonces $\odot X_{XA}$ contiene los puntos A, B y C.

Hacer un análisis de las dos últimas conjeturas conduce a establecer que una es la recíproca de la otra. Ahora bien, para que estas tengan validez en nuestra marco teórico, es necesario justificar, de antemano, que las mediatrices de un triángulo concurren (problema 11 de la sección de ejercicios del Capítulo 6). Dado que todas las conjeturas son empíricamente ciertas, se procede a su demostración en el marco de nuestro sistema teórico.

Demostrar la Conjetura 38.1 requiere, en primera instancia, recordar que las medianas de un triángulo concurren (problema 13 de la sección de ejercicios del Capítulo 8). Se demuestra que las rectas determinadas por el punto de concurrencia, X, y algún par de puntos medios de dos lados del ΔABC, D y E, por ejemplo, son perpendiculares a los lados (Figura 89). Por ello, $\overleftrightarrow{DX}$ y $\overleftrightarrow{EX}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente (*T. Mediatriz*). Como $C \in \overleftrightarrow{DX}$ y $A \in \overleftrightarrow{EX}$, se tiene que $AC = CB$ y $AB = AC$ (*D. Mediatriz*). Por tanto, ΔABC es equilátero.

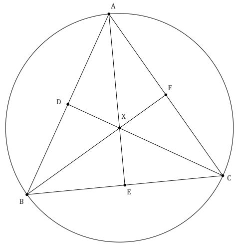


Figura 90

Justificar la Conjetura 38.2, en general, no presenta dificultad para los estudiantes. Dado que A, B y C pertenecen a la $\odot X$, tales puntos equidistan de X. Ello significa que el punto X pertenece a las mediatrices de los lados del triángulo.

La demostración de la Conjetura 38.3 presenta mayor dificultad. A continuación se expone la demostración formal de tal enunciado.

Demostración

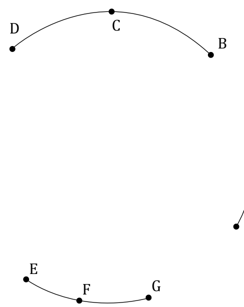
Afirmación	Garantía y datos
1. ΔABC	Dado
2. A,B y C puntos	D. Triángulo (1)
3. l, m y n mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente	Dado
4. l, m y n se intersecan en X	Problema 14, Capítulo 6
5. $\Delta ABC \subset \alpha$, α un plano	T. Triángulo figura coplanar (1)
6. $XA = XB = XC$	D. Mediatriz (3)
7. $XA > 0$	P. Puntos – número (2,4)
8. Existe $\odot X_{XA}$ en α	T. Existencia de la circunferencia (4,5,7)
9. A, B y C pertenecen a $\odot X_{XA}$	D. Circunferencia (6,8)

A partir del estudio de la justificación de las Conjeturas 38.2 y 38.3, se formulan los siguientes elementos teóricos:

Definición Circunferencia circunscrita a un triángulo La circunferencia circunscrita a un triángulo es la que contiene los vértices de dicho triángulo.
Definición Circuncentro de un triángulo El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo dado.
Teorema Circunferencia circunscrita a triángulo Dado un ΔABC,
i. Si la $\odot X$ contiene los puntos A, B y C, entonces X es el circuncentro del triángulo.
ii. Si X es el circuncentro del triángulo, entonces $\odot X_{XA}$ contiene los puntos A, B y C.

Con lo anterior, se garantiza que dado un triángulo siempre se puede determinar una circunferencia que lo circunscribe. No obstante, se ha ido un poco más allá, porque con la primera proposición del *T. Circunferencia circunscrita a triángulo*, se ha dado, tácitamente, un mecanismo para establecer el centro de una circunferencia. Para impulsar la explicitación de dicho mecanismo, se propone el siguiente problema:

PROBLEMA 39: Dados los siguientes arcos de una circunferencia, establezca un procedimiento para determinar su centro. Demuestre su procedimiento.



Son tres los procedimientos que, por lo general, proponen los estudiantes, todos ellos válidos.

Propuesta 39.1 Construir un triángulo cualquiera cuyos vértices pertenezcan a los arcos dados. Construir las mediatrices de dicho triángulo. El punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia que contiene los arcos dados.
Propuesta 39.2 Construir dos cuerdas cualesquiera de los arcos, que no sean paralelas. Construir las respectivas mediatrices. El punto de intersección de tales mediatrices es el centro de la circunferencia que contiene los arcos dados.

Propuesta 39.3 Construir una cuerda cualquiera de la circunferencia. Construir su mediatriz. Determinar el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos de intersección de tal mediatriz con alguno(s) arco(s). Tal punto medio es el centro de la circunferencia que contiene los arcos dados.

La justificación de la Propuesta 39.1 no conlleva mayor dificultad pues los estudiantes aluden al segundo ítem del *T. Circunferencia circunscrita a triángulo*. No obstante, es usual que no se percaten de dos asuntos importantes para la validez de su argumentación: **i.** garantizar que el triángulo existe (mejor, que los tres puntos no son colineales) y **ii.** determinar como única la circunferencia provista en el segundo ítem de dicho teorema. El primer asunto da lugar al establecimiento del siguiente hecho geométrico:

Teorema Circunferencia – puntos no colineales Tres puntos A, B y C cualesquiera que pertenecen a una circunferencia $\odot X_{XA}$ son no colineales.

El segundo asunto, demostrar la unicidad, implica considerar dos circunferencias que contengan los puntos A, B y C. Estas circunferencias no pueden tener el mismo centro, pues si así fuera existirían dos circunferencias con el mismo radio (XA) y el mismo centro (X) en el plano que contiene al triángulo. Esto contradice el *Teorema Existencia de las circunferencias*. Con este panorama, tales circunferencias deberían tener centros diferentes; sean estos los puntos X y X'. Así, $A, B, C \in \odot X_{XA}$ y $A, B, C \in \odot X'_{X'A}$, lo que significaría que $AX = BX = CX$ y $AX' = BX' = CX'$; es decir, X y X' pertenecerían a la mediatriz de cada uno de los lados del ΔABC. Ello implicaría que la mediatriz de todos los lados del triángulo es $\overleftrightarrow{X'X}$. Sin embargo, esto es imposible puesto que significaría que los lados del triángulo son paralelos o están contenidos en la misma recta (problema 12 de la sección de ejercicios del Capítulo 7). Resueltos los dos asuntos antes descritos, la Propuesta 39.1 es correcta.

En relación con la Propuesta 39.2, vale la pena resaltar que la condición de no paralelismo dada para las dos cuerdas es muy importante, puesto que si ello no sucediera, sus respectivas mediatrices coincidirían. Ahora bien, justificar dicho método no es una tarea fácil para los estudiantes. En un principio no saben cómo abordarla. Para desentramar el proceso, es usual que el profesor sugiera ajustar a las características de la Propuesta 39.1, las ideas que van explicitando los estudiantes. Esa sugerencia, por lo general, es efectiva. Los estudiantes construyen uno o varios triángulos cuyos vértices son los extremos de las cuerdas. Se dan cuenta de que los triángulos tienen un lado común. Trazan entonces la mediatriz de dicho lado. En la Figura 91, los triángulos construidos son ΔCDE y ΔCEF, y el lado común a dichos triángulos es $\overline{EC}$ cuya mediatriz es p.

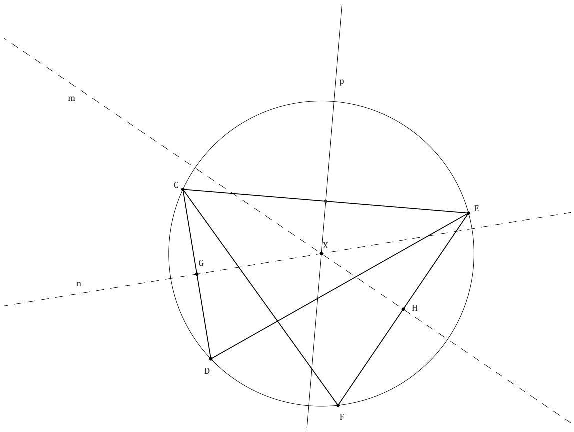


Figura 91

Al usar el primer método con el ΔCDE, la intersección X' de las rectas p y n determina el centro de la circunferencia que contiene los vértices de dicho triángulo. Al aplicar el mismo método al ΔCEF, la intersección X de las rectas p y m determinaría determina el centro de la circunferencia que contiene los vértices de tal triángulo. Ahora bien, dichas circunferencias son la misma ya que las cuerdas $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ se han construido en la misma circunferencia. Así que X y X' son el mismo punto puesto que el centro de una circunferencia es único. Luego X pertenece tanto a m como a n, y es el centro de la circunferencia. El estudio de este método lleva a la formulación del siguiente teorema:

Teorema Mediatrices de cuerdas – centro La intersección de las mediatrices de dos cuerdas no paralelas cualesquiera de una circunferencia es el centro de dicha circunferencia.

Para finalizar el estudio de los métodos que surgen en la resolución del Problema 39, falta justificar la Propuesta 39.3. En esencia, esta enuncia que:

Teorema Mediatriz de cuerda – diámetro Los puntos de intersección de una circunferencia y la mediatriz de una cuerda cualquiera de tal circunferencia son los extremos de uno de sus diámetros.

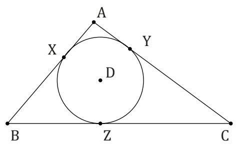
Justificar este teorema se reduce a mostrar que el centro de la circunferencia está en el segmento de la mediatriz determinado por la circunferencia, hecho que se tiene a partir de la justificación de la Propuesta 39.1. Sin embargo, algunos estudiantes no se percatan de ello. Si ese es el caso, es posible postergar la demostración de este método hasta que para abordarla se cuente con otros elementos teóricos asociados a circunferencias como los relativos a la potencia de un punto, ángulos inscritos en una circunferencia y/o circunferencias circunscritas a triángulos rectángulos. Más adelante se propondrán situaciones problema que permiten introducir los elementos antes mencionados.

Circunferencia inscrita en un triángulo

En la sección anterior se presentaron métodos para construir la circunferencia circunscrita a un triángulo dado, con base en la idea de que las mediatrices de cuerdas de una circunferencia contienen el centro de la misma. Finalizado ese estudio, surge una pregunta apenas natural: ¿Es posible construir una circunferencia inscrita en un triángulo dado? Pensando en la respuesta a dicha pregunta, se formula el Problema 40 cuyos propósitos específicos son: **i.** evocar la definición de recta tangente a una circunferencia y **ii.** formular propiedades necesarias y suficientes para construir rectas tangentes a una circunferencia.

> **PROBLEMA 40:** Dado un ΔABC. ¿Es posible construir una circunferencia que interseque a dicho triángulo en exactamente tres puntos X, Y y Z tales que $A-X-B$, $A-Y-C$ y $B-Z-C$? Si es el caso, formule una conjetura y demuéstrela.

Para resolver este problema, por lo general, los estudiantes se imaginan que para cada triángulo existe una única circunferencia con las características exigidas: la inscrita (Figura 91). Son pocos los que se imaginan casos como los que se ilustran en la Figura 92.



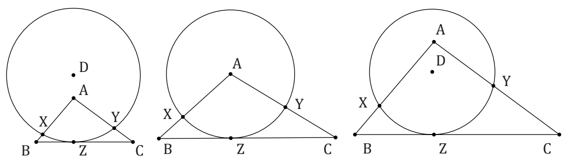


Figura 92 Figura 93

Vale la pena precisar que, aunque ambos casos permiten introducir hechos relativos a rectas tangentes a una circunferencia (dado que hay por lo menos un lado del triángulo tangente a la circunferencia), involucran hechos geométricos diferentes. A continuación, se presentan las producciones usuales de los estudiantes con relación al problema.

En el marco de la configuración dada por la Figura 91 y, quizá, producto de la experiencia vivida con el Problema 38, algunos estudiantes construyen un triángulo y sus líneas notables, salvo las mediatrices y las medianas. No construyen las mediatrices, quizá, porque consideran que no se va a proponer otro problema cuya solución se basa de nuevo, en dicho objeto. No construyen medianas, tal vez porque anteriormente, ellas dieron lugar sólo a un caso particular como solución al Problema 39 y no a la generalidad que se esperaba.

Dado que los estudiantes no usan mediatrices ni medianas, cosntruyen las alturas y las bisectrices del triángulo. Rápidamente, descartan las alturas del triángulo, dado que estas no necesariamente se intersecan. Queda entonces la opción de las bisectrices. En este contexto, es usual que se demoren en determinar los puntos *X*, *Y* y *Z* solicitados. Una primera hipótesis que surge como solución es que tales puntos son la intersección de cada bisectriz con el lado opuesto al vértice del ángulo correspondiente. Sin embargo, al hacer el arrastre para verificar la validez de su hipótesis se dan cuenta de que no es correcta (Figura 94).

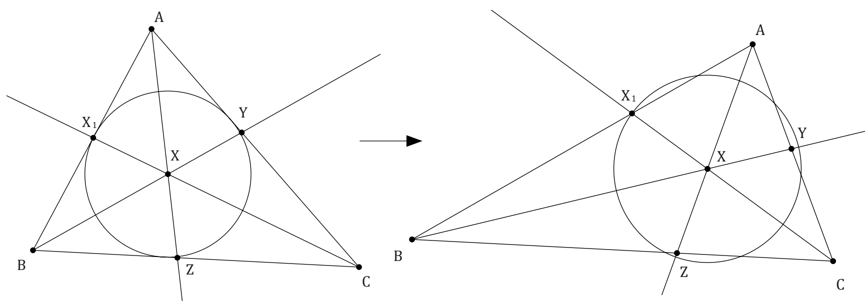


Figura 94

Otros estudiantes hacen una construcción blanda en la cual ajustan una circunferencia para que cumpla con las condiciones dadas. En el caso de que los estudiantes también construyan las bisectrices del triángulo, se percatan de que el centro *T* de la circunferencia debe ser el punto de intersección de tales bisectrices. De lo contrario, es usual que los estudiantes no logren caracterizar geométricamente el centro o la medida del radio de la circunferencia. Si ningún estudiante piensa en las bisectrices, el profesor puede sugerir que investiguen los puntos notables.

Una vez descubren que el centro de la circunferencia es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo, la exploración se centra en determinar el radio de tal circunferencia. En el marco de la construcción blanda que se tiene, los estudiantes construyen los supuestos puntos X, Y y Z, toman las medidas TX, TY y TZ, se percatan que son iguales y construyen los $\overline{TX}$, $\overline{TY}$ y $\overline{TZ}$. Generalmente, determinan visualmente la característica especial que les hace falta: esos segmentos son perpendiculares a los lados del triángulo. En síntesis, el procedimiento que finalmente proponen los estudiantes consiste en:

1. Construir las bisectrices de los ángulos que determina el triángulo. Sea T el punto de intersección de tales bisectrices.
2. Construir las rectas perpendiculares a los lados del triángulo por el punto T. Sean X, Y y Z los puntos de intersección de dichas rectas con los lados del triángulo.
3. Construir la $\odot T_{TX}$. Esta circunferencia contiene los puntos Y y Z, y cumple con las condiciones que exige el problema.

Con base en este procedimiento, la conjetura que se produce es:

Conjetura 40.1 Dado un ΔABC cualquiera. Si T es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo, y X, Y y Z son los respectivos puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$, $T \in l, m, n$, entonces $\odot T_{TX} \cap \Delta ABC = \{X, Y, Z\}$.

Ahora bien, si se sigue rigurosamente el proceso de exploración, la conjetura que debe surgir es la siguiente:

Conjetura 40.2 Dado un ΔABC cualquiera. Si $\odot T_{TX} \cap \Delta ABC = \{X, Y, Z\}$ con $A - X - B$, $A - Y - C$ y $B - Z - C$, entonces T es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo y X, Y y Z son los respectivos puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$.

Para sintetizar la escritura de las conjeturas anteriores, es necesario introducir las siguientes definiciones:

Definición Recta tangente a una circunferencia Una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un solo punto, y la recta y la circunferencia son coplanares. Si un rayo o un segmento se intersecan con una circunferencia y tales objetos están contenidos en una recta tangente a dicha circunferencia, entonces el rayo o el segmento son tangentes a la circunferencia en el punto de intersección.

Definición Circunferencia inscrita a un triángulo La circunferencia inscrita en un triángulo dado es tangente a los tres lados del triángulo.

Definición Incentro El incentro es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo.

Con base en las definiciones anteriores, las Conjeturas 40.1 y 40.2 se pueden reformular como se ilustra en el siguiente teorema:

Teorema Circunferencia inscrita en triángulo Dado un ΔABC.

i. Si T es el incentro de ΔABC, y X, Y y Z son los respectivos puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$, $T \in l, m, n$, entonces los lados de ΔABC son tangentes a $\odot T_{TX}$ en los puntos X, Y y Z.

ii. Si lados de ΔABC son tangentes a $\odot T_{TX}$ en los puntos X, Y y Z, entonces T es el incentro de ΔABC, y X, Y y Z son los respectivos puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$, $T \in l, m, n$.

A continuación, se ilustra la demostración del primer ítem del teorema. Lo primero que se determina es la igualdad entre las medidas TX, TY y TZ; de esa forma $Y, Z \in \odot T_{TX}$. Más adelante, se justificará la tangencia entre los lados del triángulo y $\odot T_{TX}$. Cabe resaltar que el incentro existe dado que las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto T (Problema 14 de la sección de ejercicios del Capítulo 8). Para demostrar que $TX = TY = TZ$, se utiliza el hecho de que cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de este (Problema 10b de la sección de ejercicios del Capítulo 6). Dado que X, Y y Z son los respectivos puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$, $T \in l, m, n$, entonces TX, TY y TZ son las distancias del punto T a los lados de cada ángulo del triángulo. Así, $TX = TY$ y $TY = TZ$; por ende, $Y, Z \in \odot T_{TX}$ (Figura 95)

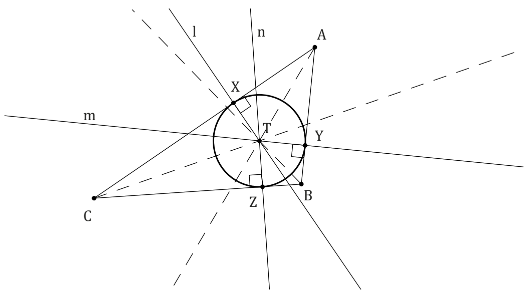


Figura 95

Falta demostrar que los lados del triángulo son tangentes a la circunferencia. Es necesario mostrar que la perpendicularidad dada como condición en el ítem **i.** del teorema es suficiente para deducir dicha relación. Se introduce entonces, al sistema teórico, el siguiente teorema:

Teorema Circunferencia – recta tangente Dada la $\odot T$.

i. Si una recta m se interseca con $\odot T$ en un punto X, m y $\odot T$ coplanares, y $\overline{XT} \perp m$ en X, entonces m es tangente a $\odot T$ en X.
i. Si m es una recta tangente a $\odot T$ en X, entonces $\overline{XT} \perp m$ en X.

Para demostrar el primer ítem de este teorema se toma cualquier punto S, diferente a X, de la recta m. Por el *T. Mínima distancia*, se tiene que $ST > XT$. Así, cualquier punto S de m, salvo X, está en el exterior de $\odot T$. Luego la recta m es tangente a $\odot T$ en X. Para demostrar el segundo ítem del teorema, se supone que $\overline{XT}$ no es perpendicular a m. Si ello ocurre, existe $\overleftrightarrow{ST}$ tal que $\overleftrightarrow{ST} \perp m$, $S \in m$. Así, $ST < XT$ (¿por qué?). En este punto de la justificación, se tiene una situación como la que se muestra en la Figura 95, en la que se evidencia lo que podría ser la contradicción que se requiere: la recta m se interseca con $\odot T$ en un punto diferente a X.

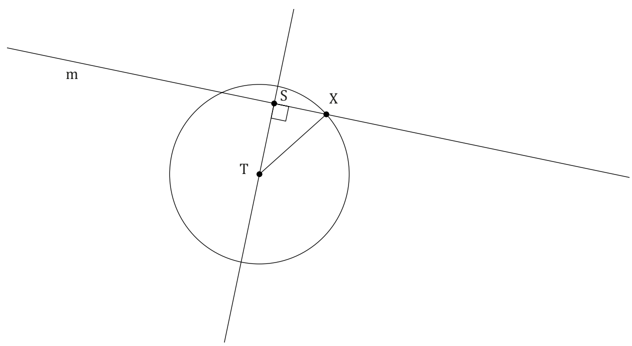


Figura 96

La pregunta ahora es cómo garantizar teóricamente la existencia del punto de intersección diferente a X. Generalmente, los estudiantes sugieren construir un punto R en el rayo opuesto al $\overrightarrow{SX}$ tal que $SR = SX$. Con ello, se justifica que $\Delta SXT \cong \Delta SRT$. Así, $\overline{TX} \cong \overline{TR}$ y, por ende, $R \in \odot T$ (Figura 97).

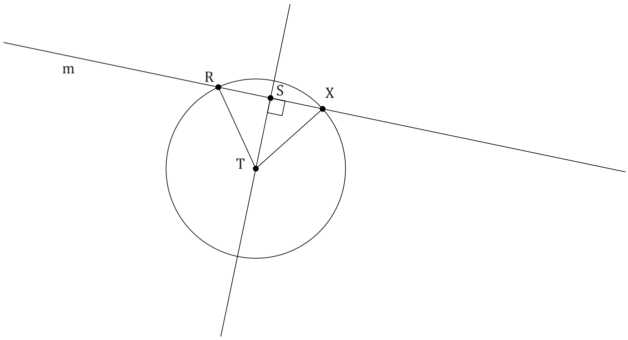


Figura 97

El estudio realizado para demostrar el segundo ítem del *T. Circunferencia – recta tangente* sugiere introducir, al sistema teórico, un hecho geométrico mucho más general:

Definición Recta secante a una circunferencia Una recta (un rayo o un segmento) es secante a una circunferencia si la interseca en más de un punto.
Teorema Punto interior de una circunferencia – recta secante Dados $\odot T_r$, un punto S tal que $S \in int\odot T_r$ y una recta m en el mismo plano que contiene a $\odot T_r$, con $S \in m$. Entonces m es una recta secante a $\odot T_r$.

Con el ingreso del *T. Circunferencia – recta tangente* al sistema teórico es posible culminar la demostración del primer ítem del *T. Circunferencia inscrita en triángulo*. Como $\overline{TX}$, $\overline{TY}$ y $\overline{TZ}$ son radios de la $\odot T_{TX}$ y son perpendiculares a $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, entonces los $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son tangentes a $\odot T_{TX}$ en los puntos X, Y y Z (Figura 94.)

Abordado el caso que, por lo regular, exponen los estudiantes para resolver el Problema 40, vale la pena considerar los casos de las otras configuraciones que se presentan en la Figura 92, ya que se cuenta con los elementos teóricos antes descritos. Los estudiantes formulan varios métodos para la construcción de circunferencias, diferentes a la inscrita, que cumplan con las condiciones solicitadas en el problema. Estos son:

Propuesta 40.1 Dado el ΔABC, construir una altura del triángulo que garantice que el pie de la misma pertenezca a un lado del triángulo (i.e., ninguno de los extremos de tal lado sea vértice de un ángulo recto u obtuso del triángulo). Sea esa altura $\overline{AZ}$. Construir $\odot A_{AZ}$. Esta circunferencia cumple con las condiciones solicitadas.

Propuesta 40.2 Dado el ΔABC, construir una altura del triángulo que garantice que el pie de la misma pertenezca a un lado del triángulo. Sea esa altura $\overline{AZ}$. Construir el $\overrightarrow{ZA}$ y el punto medio M del $\overline{AZ}$. Construir un punto D en la semirrecta MA y construir $\odot D_{DZ}$. Esta circunferencia cumple con las condiciones solicitadas.

Como se puede observar, el segundo método es más general e incluye al primero. El Ejercicio 5 de este capítulo propone realizar su demostración. Así mismo, en el Ejercicio 6 se sugiere otro método, más general aun, que proporciona una circunferencia con las condiciones solicitadas.

Establecidos criterios básicos para **a.** construir el centro de una circunferencia, **b.** determinar la tangencia de una recta a una circunferencia, y **c.** construir circunferencias inscritas o circunscritas a un triángulo, en la siguiente sección se establecen propiedades que permiten construir una justificación teórica para la Propuesta 39.3 (la cual posibilita construir el centro de una circunferencia dada). Estas propiedades, específicamente, involucran ángulos inscritos en una circunferencia.

Ángulos relacionados con circunferencias

En esta sección se proponen dos problemas cuyo propósito es determinar propiedades geométricas de los ángulos inscritos en una circunferencia. Específicamente, se tratan aquellas propiedades relativas a los ángulos rectos y a los ángulos que subtienden un mismo arco de circunferencia.

> **PROBLEMA 41:** Dada una circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo, ¿qué característica especial existe entre dicho triángulo y la circunferencia dada?

Es usual que los estudiantes propongan tres métodos de exploración para resolver el problema.

Propuesta 41.1 Construir una $\odot P$ y un ΔABC cualquiera con $A, B, C \in \odot P$. Tomar la medida de los ángulos que determina el triángulo y arrastrar uno de sus vértices hasta que uno de tales ángulos sea recto. En ese momento, los estudiantes se percatan de que la hipotenusa del triángulo contiene el punto P.

Propuesta 41.2 Construir una $\odot P$ y una cuerda $\overline{AB}$ cualquiera de la circunferencia. Construir una recta k perpendicular a $\overline{AB}$ por alguno de sus extremos, por ejemplo B. Determinar a C como el punto de intersección entre k y $\odot P$. Construir $\overline{AC}$. Arrastrar el punto A o B. En ese momento, los estudiantes se percatan que $\overline{AC}$ contiene al punto P.

Propuesta 41.3 Construir un ΔABC con un ángulo recto, por ejemplo el $\angle B$, y construir su circuncentro P. Construir la $\odot P$ circunscrita al triángulo. Arrastrar alguno de los vértices de triángulo. Los estudiantes se percatan de que la hipotenusa del triángulo contiene el punto P.

Los tres métodos son correctos. La diferencia entre ellos radica en que el primero parte de una construcción blanda mientras que los otros dos, de construcciones robustas para los triángulos rectángulos. No obstante lo anterior, los estudiantes generan la misma conjetura:

Conjetura 41 Dados un ΔABC rectángulo con el $\angle C$ recto y la $\odot P$ que lo circunscribe, entonces el $\overline{AC}$ es diámetro de la $\odot P$. (Figura 98)

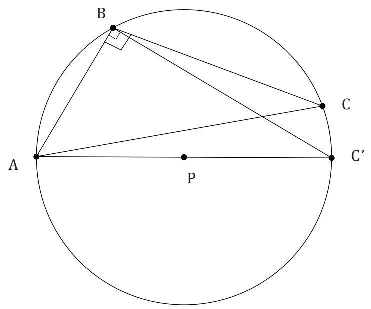


Figura 98

Para demostrar esta conjetura, los estudiantes, por lo regular, evocan el hecho geométrico recíproco de dicha conjetura. Es decir, recuerdan que si una $\odot P$ circunscribe un ΔABC y $\overline{AC}$ es diámetro de $\odot P$, entonces dicho triángulo es rectángulo con el $\angle B$ recto (tal hecho es uno de los que descubrieron en el curso Elementos de Geometría). Al aceptar, provisionalmente, la validez de esta afirmación , los estudiantes sugieren hacer una demostración por contradicción para la Conjetura 41. Así, suponen que el $\overline{AC}$ no es diámetro de $\odot P$, lo que significa que $\overline{AC}$ no contiene a P. Proponen, entonces, construir el diámetro $\overline{AC'}$. De esa manera, $\Delta ABC'$ es rectángulo con el $\angle ABC'$ recto. Con lo realizado, se tendrían dos rectas, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{BC'}$, perpendiculares al $\overline{AB}$ por B, lo cual contradice el *T. Perpendicular - punto de la recta*.

La Conjetura 41 quedaría justificada siempre y cuando el hecho geométrico evocado se pudiera demostrar. Dicha justificación se basa en el estudio de los triángulos isósceles ΔABP y ΔBPC (Figura 99) y la utilización del *T. Suma medidas de ángulos*.

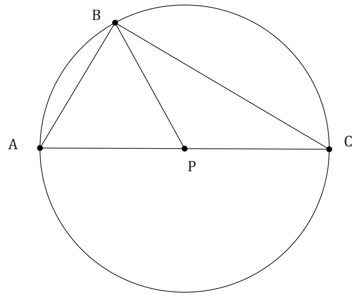


Figura 99

Hecho el análisis de la Conjetura 41 y su condicional recíproca, estas se pueden condensar en el siguiente teorema:

Teorema Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo Dado un ΔABC y una $\odot P$ que lo circunscribe:
i. Si $\overline{AC}$ es diámetro de $\odot P$, entonces ΔABC es rectángulo con $\angle B$ recto.
ii. Si ΔABC es rectángulo con $\angle B$ recto, entonces $\overline{AC}$ es diámetro de $\odot P$.

El ítem **ii.** de este teorema provee un criterio para determinar bajo qué condiciones una cuerda de circunferencia es un diámetro de la misma. El criterio podría ser útil para demostrar el *T. Mediatriz de cuerda – diámetro*. Bastaría demostrar que el segmento determinado por los puntos de intersección de la mediatriz con la circunferencia es hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por vértice a uno de los extremos de la cuerda dada. Sin embargo, aún no se tienen las herramientas teóricas para justificar esto último.

Precisamente, el siguiente problema tiene como propósito establecer el hecho geométrico faltante para completar la demostración del teorema antes mencionado. Este hecho geométrico enuncia la relación entre los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden el mismo arco.

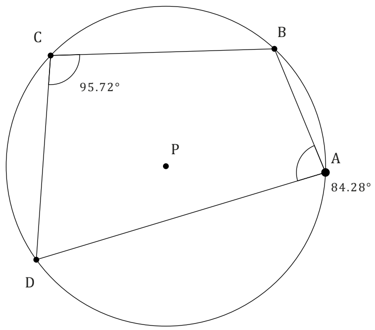
PROBLEMA 42: Dados cuatro puntos $A, B, C, D \in \odot P$, ¿qué relación existe entre los ángulos determinados por esos puntos? Formule una conjetura.

La exploración que hacen los estudiantes con geometría dinámica conduce, por lo regular, al establecimiento de dos conjeturas:

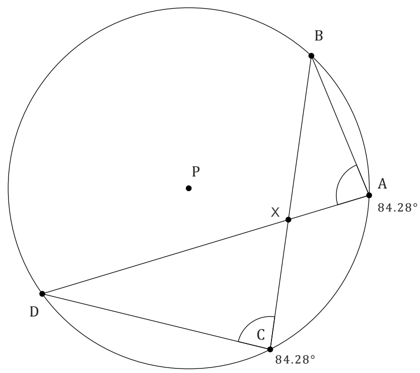
Conjetura 42.1 Si los vértices de un cuadrilátero pertenecen a una misma circunferencia, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios.

Conjetura 42.2 Dados una $\odot P$ y $A, B, C, D \in \odot P$ tales que $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \{X\}$, entonces $\angle DAB \cong \angle DCB$ y $\angle ADC \cong \angle ABC$.

La Conjetura 42.1 es producto de una exploración que corresponde al caso en que los cuatro puntos están colocados en orden en la circunferencia y determinan un $\square ABCD$ (Figura 99). Por otro lado, la Conjetura 42.2 estudia los ángulos que se generan cuando $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se intersecan en un punto X (Figura 100). El hecho de imaginarse esta situación no es un obstáculo; por el contrario se convierte en una posibilidad para introducir al sistema importantes elementos teóricos. Además, el hecho de que varios estudiantes propongan una tal conjetura se corresponde con la posibilidad, que desde el principio plantea la aproximación metodológica utilizada para el curso, de explorar al máximo una situación planteada con el propósito de inducir propiedades interesantes.



En el $\square ABCD$, $m\angle A + m\angle B = 180$



Si $\overline{BC} \cap \overline{AD} = \{X\}$, $\angle A \cong \angle C$

Figura 100

Figura 101

Siendo plausibles las dos conjeturas propuestas, se inicia, como es usual, la demotración de cada una de ellas. Para demostrar la Conjetura 42.1 se construyen los radios de la circunferencia que tienen por extremo los vértices del cuadrilátero, se utilizan el *T. Triángulo isósceles* en los triángulos que se determinan con dichos radios y el hecho de que la suma de las medidas de los ángulos de un cudrilátero convexo es 360. Además, hay que tener en cuenta varios casos para la posición del punto P en relación con el $\square ABCD$; esto es, si $P \in int\square ABCD$, o $P \in \square ABCD$ o $P \in ext\square ABCD$. Vale la pena precisar que un cuadrilátero con sus vértices en una circunferencia se denomina cuadrilátero cíclico. Realizado este estudio, se formulan la siguiente definición y el teorema:

Definición Cuadrilátero cíclico Un cuadrilátero es cíclico si sus vértices pertenecen a una misma circunferencia.
Teorema Cuadrilátero cíclico Si un cuadrilátero es cíclico, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios.

Para justificar la Conjetura 42.2, es usual pedirle a los estudiantes que establezcan una característica especial, en relación con la circunferencia, que presentan los ángulos que resultan ser congruentes, (e.g., $\angle DAB \cong \angle DCB$.) Los estudiantes, después de hacer una exploración en un entorno de geometría dinámica, no tardan mucho en determinar dicha característica especial: el conjunto de puntos de la circunferencia que están en el interior de los dos ángulos es el mismo para ambos ángulos. Poder referirse a estos descubrimientos en términos reconocidos por la comunidad académica, implica introducir nuevos elementos al sistema teórico:

Definición Ángulo central de una circunferencia Un ángulo central de una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y cuyos lados se intersecan con dicha circunferencia.
Definición Ángulo inscrito en una circunferencia Un ángulo inscrito en una circunferencia es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados se intersecan con la circunferencia en puntos diferentes al vértice.
Definición Ángulo seminscrito en una circunferencia Un ángulo semiinscrito en una circunferencia es un ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados se interseca con la circunferencia en un punto diferente al vértice y el otro lado es tangente a la circunferencia en el vértice del ángulo.
Definición Arco menor Dado un ángulo central de una circunferencia, el arco menor está constituido por los puntos de la circunferencia que pertenecen al interior del ángulo central junto con los puntos de intersección de la circunferencia con los lados de dicho ángulo. Estos puntos de intersección se denominan extremos del arco.
Definición Arco mayor Dado un ángulo central de una circunferencia, el arco mayor está constituido por los puntos de la circunferencia que están en el exterior del ángulo central junto con los puntos de intersección de la circunferencia con los lados de dicho ángulo. Estos puntos de intersección se denominan extremos del arco.

Definición Arco subtendido Los arcos de circunferencia en los que todos sus puntos, salvo sus extremos, están en el interior de un ángulo coplanar con la circunferencia, y sus extremos son puntos de intersección del ángulo con la circunferencia, se denomina arco subtendido por el ángulo. Dado un ángulo coplanar con una circunferencia cuyos lados la interesecan, el arco subtendido por tal ángulo está constituido por los puntos de la circunferencia que pertenecen al interior de dicho ángulo.

Con estos elementos, la Conjetura 42.2 se puede reformular en el siguiente teorema:

Teorema Ángulos inscritos – congruencia Si dos ángulos inscritos en una misma circunferencia subtienden un mismo arco entonces los ángulos son congruentes.

No obstante haber introducido los elementos anteriores al sistema teórico, todavía no se cuenta con el hecho geométrico necesario para justifcar el *T. Ángulos inscritos – congruencia*. Para llegar a incluirlo, se propone el siguiente problema:

PROBLEMA 43: Dados una $\odot P$ y los puntos A, B y C que pertenecen a la $\odot P$. Establezca la relación entre $m\angle APB$ y $m\angle ACB$. Formule una conjetura y demuéstrela.

Tras explorar la situación planteada, los estudiantes proponen dos conjeturas plausibles cuyos enunciados prefiguran los siguientes teoremas:

Teorema Ángulo inscrito – Ángulo central Dados una circunferencia y, con respecto a ella, un ángulo central y un ángulo inscrito que subtienden el mismo arco.

i. Si el vértice del ángulo inscrito está en el exterior del ángulo central, entonces la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central.
ii. Si el vértice del ángulo inscrito pertenece al interior del ángulo central, entonces la medida del ángulo inscrito es igual a 180 menos la mitad de la medida del ángulo central.

Demostrar el primer ítem del *T. Ángulo inscrito – ángulo central* implica tener en cuenta tres casos. Siendo $\angle APB$, el ángulo central, y $\angle ACB$, el ángulo inscrito en la misma circunferencia, los posibles casos son: **i.** $C - P - B$ o $C - P - A$; **ii.** $P \in int\angle ACB$; o **iii.** $P \in ext\angle ACB$ (Figura 102).

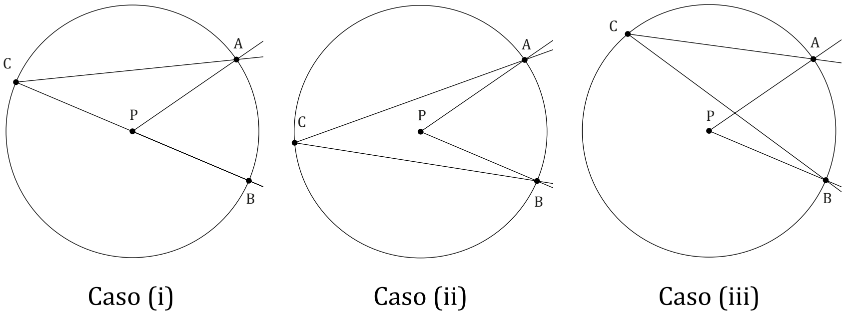


Figura 102

Para demostrar el Caso **i.**, basta con aplicar el *T. Ángulo externo* **ii.** al $\angle APB$ en relación con el ΔAPC. Los demás casos se pueden justificar con base en el Caso **iii.** Para demostrar la segunda parte del *T. Ángulo inscrito – ángulo central*, basta considerar los triángulos isósceles ΔAPC y ΔBPC. (Figura 103)

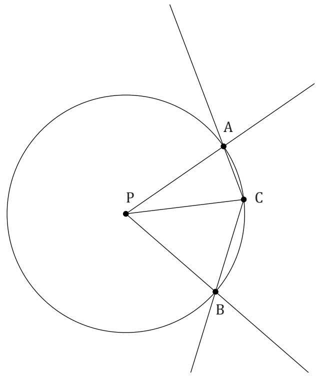


Figura 103

Introducido este teorema, los estudiantes tienen herramientas para justificar el *T. Ángulos inscritos – congruencia* pues a los dos ángulos inscritos dados les corresponde el mismo ángulo central, aquel que subtiende el arco común a los ángulos. Así, los dos ángulos inscritos miden la mitad de la medida del ángulo central, o miden 180 menos la mitad de la medida del ángulo central. Es decir, son congruentes.

Demostración del Teorema Mediatriz de cuerda – diámetro

Introducidos el *T. Cuadrilátero cíclico* y el *T. Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo* al sistema teórico, se cuenta ahora con elementos útiles para justificar de otra forma el *T. Mediatriz de cuerda – diámetro*. La idea es garantizar que los puntos de intersección, X y Y, de la mediatriz de la cuerda $\overline{AB}$ con la circunferencia sean extremos de un diámetro de esta. Basta mostrar que $\overline{XY}$ es hipotenusa de un triángulo rectángulo con el vértice del ángulo recto en la circunferencia. Los estudiantes no dudan en tomar alguno de los puntos A o B como dicho vértice. Así, el problema se centra en garantizar que ΔXAY o ΔXBY son triángulos rectángulos con $\angle A$ y $\angle B$ rectos. (Figura 104)

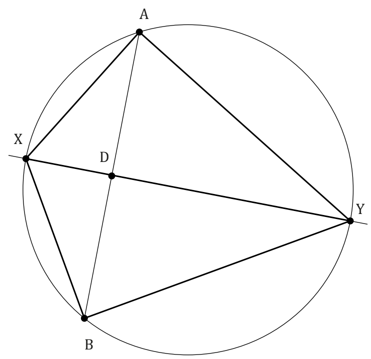


Figura 104

Como $\square XAYB$ es un cuadrilátero cíclico, por el *T. Cuadrilátero cíclico* se tiene que $\angle XAY$ y $\angle XBY$ son ángulos suplementarios. X y Y equidistante de A y B porque pertenecen a la mediatriz del $\overline{AB}$. Así, $\overline{XA} \cong \overline{XB}$ y $\overline{YA} \cong \overline{YB}$, luego $\Delta XAY \cong \Delta XBY$. Por lo tanto, $\angle XAY$ y $\angle XBY$ son rectos, lo cual conduce a que $\overline{XY}$ es diámetro de la circunferencia gracias al *T. Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo*, ítem **ii.**

Potencia de un punto

La semejanza de triángulos y las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia producen un marco de referencia propicio para justificar un hecho geométrico interesante relacionado con las cuerdas de una circunferencia que se intersecan. El siguiente problema tiene por objetivo que los estudiantes establezcan dicho hecho geométrico.

PROBLEMA 44: Usando geometría dinámica, construya una $\odot C_r$ y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia. ¿Para qué cuerda $\overline{AB}$ de la circunferencia dada se tiene que el producto $AP \times BP$ es máximo?

Cuando los estudiantes abordan el problema, es usual que en principio no hagan una interpretación adecuada del mismo. Construyen una circunferencia, una cuerda cualquiera $\overline{AB}$ y luego un punto P de dicha cuerda. Arrastran el punto P, con la intención de maximizar el producto, algunos porque han anticipado que la respuesta es que $\overline{AB}$ debe ser un diámetro o que P debe estar cerca al centro. Mover el punto P nos indica que no tienen en cuenta la condición, impuesta en el enunciado del problema, de que este es un punto fijo. Por lo general, es necesario aclarar este asunto. Una vez comprenden apropiadamente la situación, la dificultad que se les presenta es cómo modelar la situación con geometría dinámica. Eventualmente, después de varios intentos, el método que muchos sugieren es el siguiente: Construir $\odot C_r$, un punto $P \in int \odot C_r$, un punto $A \in \odot C_r$ y la $\overleftrightarrow{AP}$ (o el $\overrightarrow{AP}$) nombrando como B el punto de intersección de la $\odot C_r$ con $\overleftrightarrow{AP}$ (o $\overrightarrow{AP}$). Con este método, $\overline{AB}$ representa todas las cuerdas de la $\odot C_r$ que contienen al punto P. En este momento, predominan dos formas de exploración para resolver el problema.

Propuesta 44.1 Tomar las medidas AP y BP, hallar el producto de estas medidas y arrastrar el punto A.

Propuesta 44.2 Hacer otra cuerda $\overline{DE}$ de la misma forma como se construyó el $\overline{AB}$, tomar las medidas AP, BP, DP y EP, determinar los productos $AP \times BP$ y $DP \times EP$. Comparar los productos.

El invariante detectado por los estudiantes es que para toda cuerda que contiene el punto P, el producto de las medidas de los segmentos que determina P en ellas es siempre el mismo. No obstante, la forma de explorar influye la manera en que se formula la conjetura.

La Propuesta 44.1 da lugar a la Conjetura 44.1 y la Propuesta 44.2 a la Conjetura 44.2.

Conjetura 44.1 Dada una $\odot C_r$ y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia. Si $\overline{AB}$ es una cuerda de la misma circunferencia que contiene a dicho punto P, entonces se tiene que el producto $AP \times BP$ es constante.

Conjetura 44.2 Dada una $\odot C_r$ y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia. Si $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ son cuerdas de la misma circunferencia que contienen dicho punto P, entonces se tiene que $AP \times BP = DP \times EP$.

Las dos conjeturas carecen de una condición importante para estar apropiadamente enunciadas: el carácter de universalidad que debe tener la cuerda $\overline{AB}$ en la Conjetura 44.1 y las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ en la Conjetura 44.2. Al corregir esta falencia, se debe escoger cuál de las dos conjeturas será establecida como teorema. Para tomar la decisión, los estudiantes tienen en cuenta dos asuntos: cuál facilita la iniciación del proceso de demostración y qué significa demostrar que un producto es constante. Por ello, escogen la Conjetura 44.2. La resolución de este problema destaca un aspecto muy importante relacionado con el aprendizaje de la demostración: entender que para poder establecer teóricamente el hecho de que el valor es constante es necesario comparar las relaciones determinadas por dos cuerdas que contienen el punto P.

Los estudiantes reconocen que para demostrar lo que quieren deben encontrar triángulos semejantes. (Figura 105)

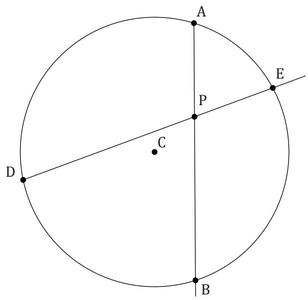
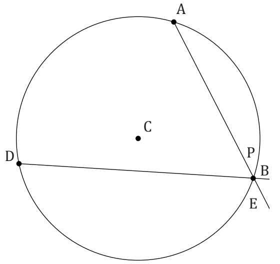


Figura 105

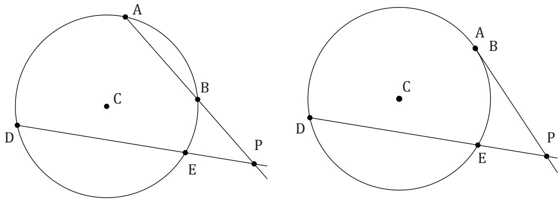
Con el siguiente problema se exploran situaciones relacionadas con otros segmentos determinados por puntos de una circunferencia.

PROBLEMA 45: Sean $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ cuerdas de una $\odot C_r$ y P un punto fijo tal que $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{ED}$. ¿Qué relación se puede establecer entre $AP \times BP$ y $DP \times EP$?

Para responder la pregunta, los estudiantes consideran los dos casos restantes para la posición de P, $P \in \odot C_r$ y $P \in ext\odot C_r$. Al arrastrar el punto P para que sea un punto de la circunferencia, se percatan de que coinciden un trío de puntos: un extremo de cada cuerda y P (por ejemplo B, P y E). Aunque el producto que obtienen, en este caso, con el artefacto posiblemente no sea cero, teóricamente ese es el valor (Figura 106). Cuando $P \in ext\odot C_r$, la exploración presenta mayor riqueza. Los estudiantes mencionan dos sub-casos: **i.** $D - E - P$ y $B - A - P$ o **ii.** A y B o D y E coinciden (Figura 107).



Caso i: $P \in \odot C_r$



$D - E - P$ y $B - A - P$ $\quad$ A y B o D y E coinciden

Caso ii: $P \in ext\odot C_r$.

Figura 106 Figura 107

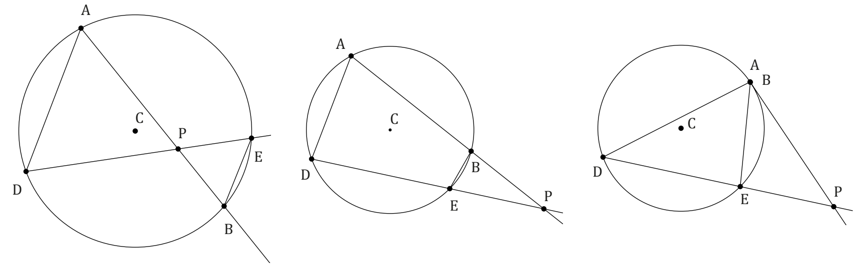
Sin embargo, el valor del producto sigue siendo constante en todos los casos pero es necesario interpretar lo que significa que los puntos coincidan para expresar la generalidad.

El siguiente teorema recoge los resultados de los Problemas 44 y 45, el cual se formula conjuntamente con los estudiantes.

Teorema Circunferencia – producto constante Dados una $\odot C_r$, $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ cualquier par de cuerdas de la $\odot C_r$, un punto fijo P tal que $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{ED}$.

i. Si $P \in int\odot C_r$ y $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ contienen a P, entonces $AP \times BP = DP \times EP$.
ii. Si $P \in ext\odot C_r$, $D - E - P$ y $A - B - P$, entonces $AP \times BP = DP \times EP$.
iii. Si $P \in ext\odot C_r$, $D - E - P$ y A y B coinciden (i.e., $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a $\odot C_r$), entonces $AP^2 = DP \times EP$.
iv. Si $P \in \odot C_r$ y $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ contienen a P, entonces $AP \times BP = DP \times EP = 0$.

Como los estudiantes ya se han dado cuenta, para el primer caso, de que la invariancia del producto está relacionada con la semejanza de dos triángulos determinados por las cuerdas, es natural buscar triángulos semejantes (ΔADP y ΔEBP) en las dos situaciones generadas cuando $P \in ext\odot C_r$. Por ende, se tiene que $\frac{AP}{EP} = \frac{DP}{BP}$, lo que significa que $AP \times BP = DP \times EP$. (Figura 108).



$P \in int \odot C_r$ | $P \in ext \odot C_r$, $D - E - P$ y $A - B - P$ | $P \in ext \odot C_r$, $D - E - P$ y A y B coinciden

Figura 108

Podría pensarse que con la justificación de este teorema termina el análisis de las respuestas a los Problemas 44 y 45, pero no es así. Vale la pena preguntarse si se puede caracterizar el producto con base en r (radio de la circunferencia), los puntos P y el centro de la circunferencia C. Para dar respuesta a esta pregunta se analiza con los estudiantes el caso en el que una de las cuerdas, por ejemplo $\overline{AB}$, contiene el punto C y las dos posibles posiciones del punto P: $A - B - P$ o $A - P - B$. El propósito de tal análisis es que los estudiantes relacionen cada una de las medidas AP y BP con PC y r. Se concluye que $AP \times BP = CP^2 - r^2$. Por tanto, el producto constante depende solo de CP y de r. El análisis realizado conduce a la formulación de la siguiente definición:

Definición Potencia de un punto La potencia de un punto P con respecto a la $\odot C_r$, siendo P un punto del mismo plano de la circunferencia, es el número real $CP^2 - r^2$.

El siguiente problema tiene como propósito proveer un método, basado en la potencia de un punto con respecto a una circunferencia, para construir una circunferencia tangente a una recta dada.

PROBLEMA 46: Sean una recta m y dos puntos A y B que no pertenecen a dicha recta. ¿Cómo construir una circunferencia que sea tangente a m y contenga los puntos A y B, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel m$ o $\overleftrightarrow{AB} \nparallel m$?

Los estudiantes no tienen mayor dificultad para proponer un método correcto de construcción cuando $\overleftrightarrow{AB} \parallel m$.

Propuesta 46.1 Construir la mediatriz l del $\overline{AB}$. Nombrar con D la intersección de la rectas m y l, y construir la mediatriz n del $\overline{DB}$. Nombrar con C el punto de intersección de las mediatrices. Como C es el circuncentro del ΔABD, construir la $\odot C_{AC}$ (Figura 109)

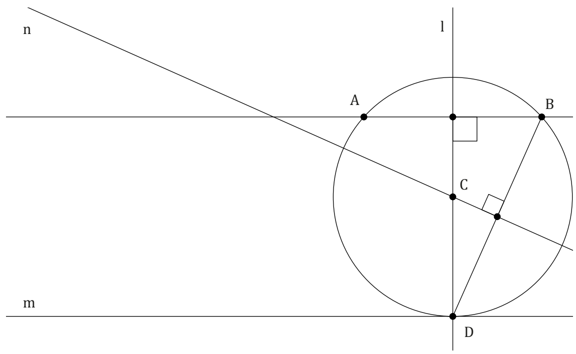


Figura 109

Para validar este método de construcción, se debe utilizar el *T. Circunferencia circunscrita a triángulo* y el *T. Circunferencia – recta tangente*. Es menos usual que los estudiantes propongan un método para el caso en el que $\overleftrightarrow{AB} \nparallel m$. Generalmente, ellos hacen primero una construcción blanda similar a la siguiente.

Propuesta 46.2 Construir la mediatriz l del $\overline{AB}$. Nombrar con D la intersección de la rectas m y l. Colocar un punto C en la recta l y construir la $\odot C_{AC}$. Arrastrar el punto C hasta que la recta m sea perceptualmente tangente a la circunferencia (Figura 110).

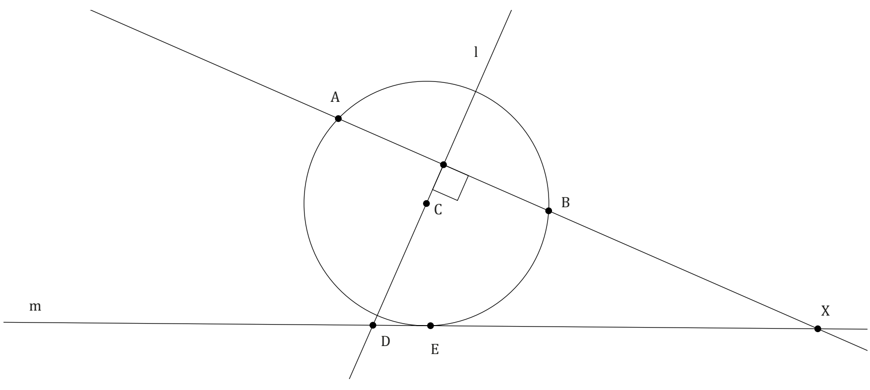


Figura 110

Con base en esta construcción blanda, algunos estudiantes evocan los resultados del Problema 45, específicamente, el caso **iii.** del *T. circunferencia – producto constante*. Algunos estudiantes notan que, para resolver el problema, necesitarían que el recíproco de este caso fuera verdadero. Es decir, si $\{X\} = m \cap \overleftrightarrow{AB}$, $E \in m$, y se tiene que $EX^2 = AX \times BX$ entonces $\overleftrightarrow{EX}$ (que para este caso es la misma recta m) es tangente a $\odot C$. Así, surge el siguiente método de construcción robusta:

Propuesta 46.3 Nombrar como X el punto de intersección de las rectas m y $\overleftrightarrow{AB}$. Determinar la potencia del punto X con respecto a la circunferencia que se construirá. En el $\overrightarrow{XD}$ y en el rayo opuesto a este, usando la herramienta transferencia de medidas, localizar puntos E y E' tales que $EX = E'X = \sqrt{AX \times BX}$. Con los puntos E y E' y los puntos A y B, construir dos circunferencias, teniendo en cuenta el ítem **ii.** del *T. Circunferencia circunscrita a triángulo*. Efectivamente, las dos circunferencias son tangentes a la recta m. (Figura 111)

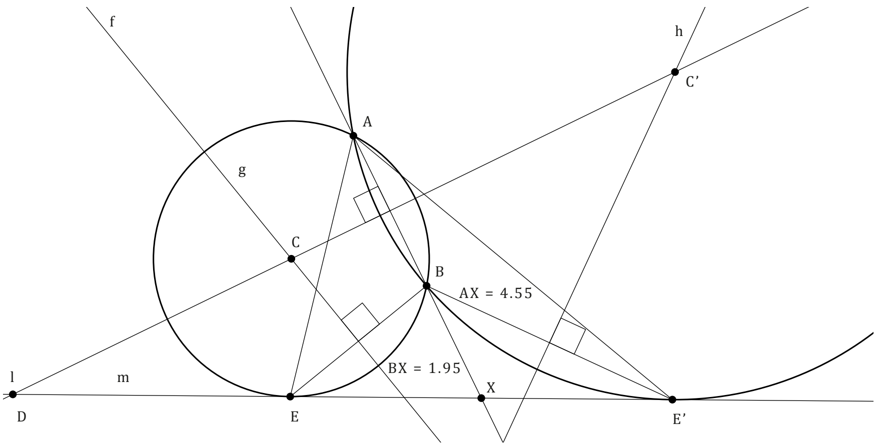


Figura 111

Para validar el método de construcción anterior, primero se debe justificar el siguiente hecho geométrico:

Teorema potencia de un punto – tangencia Sean la $\odot C_r$, $\overline{ED}$ una cuerda cualquiera de la circunferencia, A un punto en $\odot C_r$ y P un punto tal que $D - E - P$. Si $AP^2 = DP \times EP$, entonces $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la $\odot C_r$ en el punto A.

Para demostrar este teorema, se supone que $\overleftrightarrow{AP}$ no es tangente a la $\odot C_r$. En ese caso, $\overleftrightarrow{AP}$ es secante a la circunferencia. Por ende, existe un punto B que pertenece a $\overleftrightarrow{AP} \cap \odot C_r$. Supongamos que $A - B - P$. Así, $AP \times BP = DP \times EP$ por el ítem **ii.** del *T. Circunferencia – producto cons-*

tante. Como $AP^2 = DP \times EP$ entonces $BP = AP$. Esto es absurdo dado que $A - B - P$, lo que significa que $AP > BP$. Por tanto, $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la $\odot C_r$.

Ejercicios

1. Demostrar los siguientes enunciados, estableciendo todas las afirmaciones, garantías y datos:

   a. Conjetura 36.1.
   b. Primer ítem del *T. Circunferencia circunscrita a triángulo*.
   c. T. Circunferencia – puntos no colineales.
   d. La validez de la Propuesta 38.2.

2. Dado un ΔABC, se quiere construir una circunferencia que lo interseque en exactamente tres puntos X, Y y Z tales que $A - X - B$, $A - Y - C$ y $B - Z - C$. Alguien propone lo siguiente: Escoger un punto Z tal que $B - Z - C$. Construir una recta m perpendicular al $\overline{BC}$ por Z. Colocar un punto D en la recta m que pertenezca al $S_{\overleftrightarrow{BC},A}$. Construir $\odot D_{DZ}$. Esta circunferencia cumple con las condiciones solicitadas.

   ¿Considera usted que este método es válido? Si lo es, provea la respectiva demostración. Si no lo es, provea la(s) condición(es) que hace(n) falta para que el método sea válido y demuéstrelo.

3. Demostrar el *T. Punto interior de una circunferencia – recta secante*. (Sugerencia: Construir la recta perpendicular a m por el punto T, y utilizar r y TW para encontrar un número positivo conveniente que permita construir sendos puntos en cada uno de los rayos de m determinados por W. Luego, seguir un razonamiento análogo al realizado para justificar el ítem **ii.** del *T. circunferencia – recta tangente*. (Figura 112)

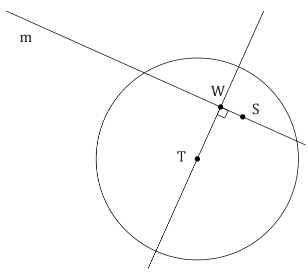


Figura 112

4. Demostrar:

   a. El segundo ítem del *T. Circunferencia inscrita a triángulo*.
   b. El primer ítem del *T. Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo*.
   c. El *T. Cuadrilátero cíclico*.

5. ¿Qué condiciones debe tener un cuadrilátero dado para que se pueda inscribir en una circunferencia? Formule una conjetura y realice su respectiva demostración.

6. Demostrar:

   a. El *T. Ángulo inscrito – ángulo central* **i**.
   b. El *T. Ángulo inscrito – ángulo central* **ii**.

7. Demostrar el siguiente teorema:

   Teorema Ángulo inscrito, semiinscrito – congruencia Si un ángulo inscrito y un ángulo semiinscrito de la misma circunferencia subtienden el mismo arco, entonces dichos ángulos son congruentes.

8. Complementar la demostración del *T. Circunferencia – producto constante*. ¿Qué sucede si en la demostración se utilizan ΔAPE y ΔDPB en lugar de ΔADP y ΔEBP? (Figura 105).

9. Con base en el *T. Circunferencia – producto constante*, demuestre que $AP \times BP = PC^2 - r^2$.

10. Demostrar:

    a. El *T. Mediatriz de cuerda – diámetro* utilizando el *T. circunferencia – producto constante* en lugar del *T. del cuadrilátero cíclico*.
    b. La validez de la Propuesta 46.1.

11. Dada una $\odot P$ y un punto $T \in ext\odot P$. Para construir las rectas tangentes a la $\odot P$ que contienen el punto T, se propone el siguiente procedimiento: construir el punto medio M de $\overline{TP}$ y construir la $\odot M_{MP}$. Los puntos de intersección de la $\odot M_{MP}$ con $\odot P$ son los puntos de tangencia de las rectas buscadas. Justifique que el método es válido.

12. En la página web http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/reglaycompas/node3.html, se muestra el siguiente procedimiento para construir las rectas tangentes comunes externas a dos circunferencias dadas.

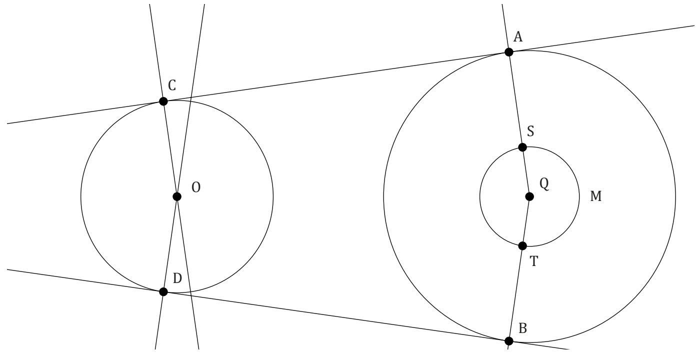


Figura 113

Construcción de las rectas tangentes comunes externas a dos circunferencias dadas: Sean K y L dos circunferencias con respectivos centros O y Q, y radios k y l. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $k < l$. Describa [Construya] la circunferencia M de radio $l - k$ y centro Q. Construya las tangentes OS y OT desde O a M. Prolongue los radios QS y QT de M hasta cortar a L en los puntos A y B, respectivamente. Construya el radio OC de K paralelo a QA y al mismo lado de la recta OQ. Construya el radio OD de K paralelo a QB y al mismo lado de OQ. Conecte AC, BD. Estas últimas son las tangentes comunes externas a K y L. (Figura 113).

a. Escriba el método usando nuestros términos.
b. Utilice regla y compás o un software de geometría dinámica para realizar la respectiva construcción.
c. Justifique por qué las rectas resultantes son tangentes a las circunferencias.

13. Dadas $\odot O_m$ y $\odot Q_r$ externas entre sí y no congruentes.

a. Provea los pasos para construir las rectas tangentes comunes internas a dichas circunferencias (Figura 114). (Sugerencia: Construir $\odot O_{m+r}$ y seguir un método análogo al de la construcción de las rectas tangentes comunes externas a dos circunferencias.)

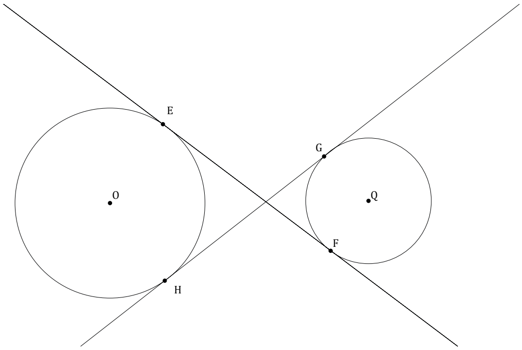


Figura 114

Demuestre que las rectas resultantes son efectivamente las tangentes comunes internas a $\odot O_m$ y $\odot Q_r$.

Glosario alfabético de teoremas, postulados y definiciones

Definiciones

Altura Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular a la recta que contiene un lado del triángulo y cuyos extremos son un punto de la recta y el vértice del triángulo que no pertenece a la recta.
Ángulo agudo Un ángulo es agudo si su medida es menor que 90.
Ángulo central de una circunferencia Un ángulo central es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y cuyos lados intersecan a dicha circunferencia.
Ángulo externo Dado un ΔABC. El $\angle ACD$ es externo si $B - C - D$.
Ángulo inscrito Un ángulo inscrito es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados intersecan a la circunferencia en puntos diferentes al vértice.
Ángulo obtuso Un ángulo es obtuso si su medida es mayor que 90.
Ángulo semiinscrito Un ángulo semiinscrito es unángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados intersecan a la circunferencia en un punto diferente al vértice y el otro lado es tangente a la circunferencia en el vértice del ángulo.
Ángulos adyacentes Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, tienen un lado común y los lados no comunes tienen puntos en semiplanos opuestos determinados por la recta que contiene el lado común.
Ángulos Alternos Internos Dadas dos rectas y una secante a ellas, dos ángulos son alternos internos si y solo si:
ii. Sus vértices son las intersección de las dos rectas y la secante.
iii. Su intersección es un segmento, cuyos extremos son dichos vértices.
iv. Cada lado que los conforma está contenido en alguna de las rectas.
v. No tienen puntos interiores en común.

Ángulos complementarios Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90.
Ángulos congruentes Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.
Ángulos opuestos por el vértice: Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados determinan dos pares de rayos opuestos.
Ángulos par lineal Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y C es punto que no está en la $\overleftrightarrow{AB}$, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un par lineal.
Ángulos suplementarios Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, los ángulos son suplementarios.
Arco mayor Dado un ángulo central de una circunferencia, el arco mayor son los puntos de la circunferencia que están en el exterior del ángulo central junto con los puntos de intersección de la circunferencia con los lados de dicho ángulo. Estos puntos de intersección se denominan extremos del arco.
Arco menor Dado un ángulo central de una circunferencia, el arco menor son los puntos de la circunferencia que pertenecen al interior del ángulo central, junto con los puntos de intersección de la circunferencia con los lados de dicho ángulo. Estos puntos de intersección se denominan extremos del arco.
Arco subtendido Los arcos de circunferencia tales que todos sus puntos, salvo sus extremos, están en el interior de un ángulo coplanar a la circunferencia, y sus extremos son puntos de intersección del ángulo con la circunferencia, se denomina arco subtendido por el ángulo.
Bisección de segmento Una figura geométrica biseca a un segmento si contiene su punto medio.
Bisectriz de ángulo La bisectriz de un ángulo es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y un punto en el interior del ángulo que determina con los lados del ángulo dos ángulos adyacentes congruentes.
Circuncentro El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo.
Circunferencia circunscrita al triángulo La circunferencia circunscrita al triángulo es la circunferencia que contiene los vértices de un triángulo.
Circunferencia Dado un punto P en un plano β. El conjunto de todos los puntos X del plano β que equidistan del punto P una distancia r recibe el nombre de circunferencia. El punto P es el centro de la circunferencia. Para referirnos a la circunferencia con centro P se usará la notación $\odot P$.
Circunferencia inscrita a triángulo La circunferencia inscrita en un triángulo dado es aquella tangente a los tres lados de éste.
Cometa Una cometa es un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes.
Conjunto convexo Sea A un conjunto de puntos. A es un conjunto convexo si la siguiente afirmación es verdadera para todo par de puntos del conjunto: Si X y Y son cualquier par de puntos de A entonces $\overline{XY}$ es subconjunto de A.
Coordenada de un Punto El número real que le corresponde a cada punto de la recta se denomina la coordenada del punto. La coordenada x del punto A se denotará $c(A) = x$, donde x es un número real.

Cuadrado Un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.
Cuadrilátero cíclico Un cuadrilátero es cíclico si sus vértices pertenecen a una misma circunferencia.
Cuadrilátero Dados cuatro puntos coplanares cada terna de ellos no colineales. Un cuadrilátero es la unión de segmentos, cuyos extremos son esos puntos dados, tales que:
i. Cada punto es extremo de exactamente dos segmentos.
ii. Si se intersecan, su punto de intersección es extremo de los segmentos.
Cuerda de circunferencia Dada $\odot P$ y X e Y dos puntos cualesquiera que pertenecen a ella. Los segmentos $\overline{XY}$ reciben el nombre de cuerda de $\odot P$.
Diagonal Una diagonal de un polígono es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono.
Diámetro de circunferencia Dada $\odot P$ y, X e Y dos puntos cualesquiera que pertenecen a ella tales que $\overline{XY}$ contiene a P. La medida XY o los segmentos $\overline{XY}$ reciben el nombre, respectivamente, de diámetro o diámetros de $\odot P$.
Distancia de un punto a una recta Dada una recta m y un punto P tal que P no pertenece a m. Sea $\overline{PQ} \perp m$, $Q \in m$. PQ es la distancia del punto P a la recta m.
Distancia El número real asignado a dos puntos se llama la distancia entre los puntos.
Exterior e interior de circunferencia Dada $\odot P_r$ y Q un punto que pertenece al plano en el que está contenida la circunferencia. Si $PQ > r$ entonces Q está en el exterior de la circunferencia. Si $PQ < r$ entonces Q está en el interior de la circunferencia. El exterior de una $\odot P_r$ se denotará $ext\odot P_r$. El interior de una $\odot P_r$ se denotará $\mathrm{int}\odot P_r$.
Incentro El incentro es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo.
Interestancia El punto B está entre los puntos A y C si
i. A, B y C son colineales, y
ii. $AB + BC = AC$ (AB es la notación que se usa para indicar la distancia entre A y B.)
Interior de un ángulo Dado el $\angle ABC$, el interior del $\angle ABC$ es la intersección del semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{BC}$ en el cual está A con el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{BA}$ en el cual está C.
Media Geométrica Sean a, b y c número reales positivos. a es media geométrica de b y c si y solo si $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$.
Mediatriz 1 Dado $\overline{PQ}$. En un plano, la mediatriz del $\overline{PQ}$ es la recta perpendicular al segmento que contiene su punto medio.
Mediatriz 2 Dado $\overline{PQ}$. En un plano, la mediatriz del $\overline{PQ}$ es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.
Medida de ángulo Dado un $\angle EAD$, entonces la medida del $\angle EAD$ ángulo es $|r_{E,\overrightarrow{AB}} - r_{D,\overrightarrow{AB}}|$
Métrica La distancia entre dos puntos A y B es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas. La distancia entre un punto consigo mismo es cero.
Paralelismo Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan (no tienen puntos en común)

Paralelogramo Un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.
Potencia de un punto La potencia de un punto P con respecto a la $\odot C_r$, siendo P un punto del mismo plano de la circunferencia, es el número real $CP^2 - r^2$.
Proporcionalidad Dadas dos sucesiones $a, b, c,\ldots$ y $a', b', c' \ldots$ de números positivos. Dichas sucesiones son proporcionales si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots = k$. El número constante k, $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots$ es llamado la constante o razón de proporcionalidad de las sucesiones.
Punto medio de un segmento M es punto medio del $\overline{AB}$ si se cumplen las siguientes condiciones:
i. $A - M - B$
ii. $AM = MB$
Radio de circunferencia Dada $\odot P$ y X un punto cualquiera que pertenece a ella. La medida PX o los segmentos $\overline{PX}$ reciben el nombre, respectivamente, de radio o radios de la circunferencia. La notación para una circunferencia de centro P y radio PX es $\odot P_{PX}$. Así mismo, la notación para una circunferencia de centro P y radio r es $\odot P_r$.
Rayo Dados dos puntos de una recta A y B, el rayo AB (que se denota $\overrightarrow{AB}$) es la unión del $\overline{AB}$ con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X.
Rayo opuesto $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son opuestos si $A - B - C$.
Recta secante a una circunferencia Una recta (un rayo o un segmento) es secante a una circunferencia si interseca a la circunferencia en más de un punto.
Recta tangente a una circunferencia Una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un solo punto, y la recta y la circunferencia con coplanares. Si un rayo o un segmento intersecan a una circunferencia y tales objetos están contenidos en una recta tangente a dicha circunferencia, entonces dicho rayo o segmento son tangentes a la circunferencia en el punto de intersección.
Rectángulo Un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos es un rectángulo.
Rombo Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes.
Secante (o Transversal) Dadas dos o más rectas coplanares, una recta es secante a ellas si interseca a cada una en un punto diferente.
Segmento Dados dos puntos A y B, el segmento AB (que se denota $\overline{AB}$) es la unión de los puntos A y B con todos los puntos que están entre A y B.
Segmentos o Rayos Paralelos Dos segmentos (o rayos) son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas.
Semiplanos Una recta m separa al plano α en dos subconjuntos H y K, llamados semiplanos tal que:
i. $H \cap m = \emptyset$ y $K \cap m = \emptyset$
ii. $H \cap K = \emptyset$
iii. $H \cup K \cup m = \alpha$
Trapecio Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos.

Triángulo Dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.
Triángulo equilátero Un triángulo es equilátero si todos sus lados son congruentes.
Triángulo escaleno Un triángulo es escaleno si no tiene ningún par de lados congruentes.
Triángulo isósceles Un triángulo es isósceles si tiene dos lados congruentes.
Triángulos congruentes Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos y lados correspondientes son congruentes.
Triángulos semejantes Dos triángulos son semejantes si existe una correspondencia entre los vértices de tal forma que los ángulos correspondientes son congruentes y lados correspondientes son proporcionales.
Unión Disyunta Un conjunto K es la unión disyunta de los conjuntos A y B si **i.** $K = A \cup B$ y **ii.** $A \cap B = \emptyset$.

Postulados

Adición de medida de ángulos Si $C \in \text{int}\angle DAB$ entonces $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$.
Ángulo - número A cada ángulo le corresponde un único número real entre 0 y 180.
Conjuntos de puntos Las rectas y los planos son conjuntos no vacíos de puntos.
Dos puntos - recta Si A y B son dos puntos entonces existe una única recta m que los contiene.
Existencia: Los puntos, las rectas y los planos existen.
Intersección Rayo Segmento Si $\overrightarrow{BK}$ contiene un punto en el interior del $\angle B$ y A, C son puntos en lados diferentes del $\angle B$, entonces $\overrightarrow{BK} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$.
LAL Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes congruentes y los ángulos que éstos determinan también, entonces los triángulos son congruentes.
Llaneza del plano Si dos puntos pertenecen a un plano entonces la recta que los contiene está en el mismo plano.
Paralelas Dada una recta l y un punto P, tal que $P \notin l$. Entonces existe una única recta m tal que $P \in m$ y $m \parallel l$.
Plano – puntos Un plano tiene por lo menos tres puntos no colineales.
Puntos - número A cada par de puntos diferentes le corresponde un número real positivo único.
Puntos – plano Dados tres puntos existe un plano que los contiene y si los tres puntos no son colineales, existe un único plano que los contiene.
Rayos -número Dada una $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto C talque $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Se puede establecer una correspondencia entre todos los rayos con extremo en A y un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ con los números reales entre 0 y 180 tal que:

i. A cada rayo con un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ le corresponde un único número entre 0 y 180.

ii. A cada número entre 0 y 180 le corresponde un único rayo con un punto en $S_{\overleftrightarrow{AB},C}$.
iii. Al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde 0.
iv. Al rayo opuesto al $\overrightarrow{AB}$ le corresponde el número 180.

Recta - números reales Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales talque:
i. a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real;
ii. a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.

Separación del plano Sea α un plano, m una recta en el plano y H y K los semiplanos determinados por m en α.
i. H y K son conjuntos convexos.
ii. Si $A \in H$ y $B \in K$ entonces $\overline{AB} \cap m \neq \emptyset$.

Teoremas

A Si $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$, $C \in S_{\overleftrightarrow{AD},\sim B}$ y $\overline{CB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \{X\}$ entonces X pertenece a la semirrecta AD.

Adición de medida de ángulos Si $C \in S_{\overleftrightarrow{AB},D}$ y $m\angle DAC + m\angle CAB = m\angle DAB$ entonces $C \in int\angle DAB$.

AIP (Ángulos Alternos Internos Congruentes-Paralelas) Dadas las rectas m, n y una recta k secante a ellas. Si dos ángulos alternos internos son congruentes, entonces $m \parallel n$.

ALA Si dos triángulos tienen dos ángulos correspondientes congruentes y el lado que éstos comparten también, entonces los triángulos son congruentes.

Ángulo externo II La medida de un ángulo externo a un triángulo es igual a la suma de la medida los ángulos del triángulo no adyacentes con dicho ángulo externo.

Ángulo externo La medida de un ángulo externo a un triángulo es mayor que la medida de un ángulo del triángulo no adyacente.

Ángulo figura coplanar Un ángulo es una figura coplanar.

Ángulo Inscrito – Ángulo Central Dada una circunferencia, y un ángulo central y un ángulo inscrito en ella que subtienden el mismo arco.
i. Si el vértice del ángulo inscrito está en el exterior del ángulo central, entonces la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central.
ii. Si el vértice del ángulo inscrito pertenece al interior del ángulo central entonces la medida del ángulo inscrito es igual a 180 menos la mitad de la medida del ángulo central.

Ángulos complementarios – congruencia Complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Ángulos desiguales – lados desiguales Dado el ΔABC, si $m\angle ABC > m\angle ACB$ entonces $AC > AB$.

Ángulos inscritos – congruencia Si dos ángulos inscritos en una misma circunferencia subtienden un mismo arco (sea menor o mayor) entonces los ángulos son congruentes.

Ángulos opuestos por el vértice Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes.

Ángulos suplementarios – congruencia Suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

Ángulos suplementarios-paralelas Si dos rectas cortadas por una transversal determinan ángulos internos no alternos suplementarios entonces son paralelas.

Axioma de Pasch Dado el plano α, A, B y C, tres puntos no colineales y la recta m, A, B, C, $m \subset \alpha$. Si $m \cap \overline{AB} \neq \emptyset$ y m no contiene ni a A, ni a B ni a C entonces $m \cap \overline{BC} \neq \emptyset$ o $m \cap \overline{AC} \neq \emptyset$.

Bisectriz – Proporcionalidad Dado un ΔABC, sea el $\overrightarrow{AX}$ la bisectriz del $\angle A$ o del ángulo externo del ΔABC con vértice en A, y $\overleftrightarrow{AX} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{D\}$. Entonces $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Bisectriz: Dado que $\overrightarrow{BC}$ es bisectriz del $\angle ABD$ entonces $m\angle ABC = m\angle CBD = \frac{1}{2}$ $m\angle ABD$, o $2m\angle ABC = 2m\angle CBD = m\angle ABD$

Ceva Dados el ΔABC y puntos X, Y y Z tales que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{CA}$ y $Z \in \overline{BC}$.

i. Si $\overline{AZ}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CX}$ son concurrentes, entonces $\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{AY} = 1$.

ii. Si $\frac{AX}{XB} \times \frac{BZ}{ZC} \times \frac{CY}{AY} = 1$, entonces $\overline{AZ}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CX}$ son concurrentes

Circunferencia – infinitos puntos Toda circunferencia tiene infinitos puntos.

Circunferencia – producto constante Dados una $\odot C_r$, $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ cualquier par de cuerdas de la $\odot C_r$, un punto fijo P tal que $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{ED}$.

i. Si $P \in int\odot C_r$ y $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ contienen a P entonces $AP \times BP = DP \times EP$.

ii. Si $P \in ext\odot C_r$, $D - E - P$ y $A - B - P$, entonces $AP \times BP = DP \times EP$.

iii. Si $P \in ext\odot C_r$, $D - E - P$ y A y B coinciden (i.e., $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a $\odot C_r$), entonces $AP^2 = DP \times EP$.

iv. Si $P \in \odot C_r$ y $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ contienen a P, entonces $AP \times BP = DP \times EP = 0$.

Circunferencia – recta tangente Dada la $\odot T$.

i. Si una recta m interseca a $\odot T$ en un punto X, m y $\odot T$ coplanares y $\overline{XT} \perp m$ en X, entonces m es tangente a $\odot T$ en X.

ii. Si m es una recta tangente a $\odot T$ en X, entonces $\overline{XT} \perp m$ en X.

Circunferencia – unicidad del centro Una circunferencia de radio r, tiene un único centro.

Circunferencia circunscrita a triángulo Dado un ΔABC,

i. Si la $\odot X$ contiene a los puntos A, B y C, entonces X es el circuncentro del triángulo.

ii. Si X es el circuncentro del triángulo, entonces $\odot X_{XA}$ contiene a los puntos A, B y C.

Circunferencia circunscrita a triángulo rectángulo Dado un ΔABC y una $\odot P$ que lo circunscribe:

i. Si el $\overline{AC}$ es diámetro de $\odot P$, entonces el ΔABC es rectángulo con el $\angle B$ recto.

ii. Si el ΔABC es rectángulo con el $\angle B$ recto, entonces el $\overline{AC}$ es diámetro de $\odot P$.

Circunferencia inscrita en triángulo Dado un ΔABC.

i. Si T es el incentro del triángulo ΔABC y X, Y y Z son los puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, respectivamente donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$, $T \in l, m, n$, entonces los lados del ΔABC son tangentes a $\odot T_{\mathrm{TX}}$ en los puntos X, Y y Z.

ii. Si lados del ΔABC son tangentes a $\odot T_{TX}$ en los puntos X, Y y Z,entonces T es el incentro del triángulo ΔABC y X, Y y Z son los puntos de intersección de las rectas l, m y n con $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, donde $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{CB}$, $T \in l, m, n$.

Cometa Si un cuadrilátero es cometa, entonces la recta que contiene a una de sus diagonales es mediatriz de la otra diagonal.

Comparación Sean x y y dos números reales. Si **i.** todo número racional menor que x es también menor que y, y **ii.** todo número racional menor que y es también menor que x. Entonces $x = y$.

Complementarios - agudo Si dos ángulos son complementarios, cada uno de ellos es agudo.

Condiciones para paralelogramo Si en un cuadrilátero

i. ambos pares de lados opuestos son congruentes, o
ii. ambos pares de ángulos opuestos son congruentes, o
iii. las diagonales se bisecan, o
iv. un par de lados son paralelos y congruentes,

entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Conjunto no vacío Los segmentos y los rayos son conjuntos no vacíos de puntos.

Construcción de Ángulos: Sean un $\overrightarrow{AB}$ en un plano α y un número real r tal que, $0 < r < 180$. Entonces existe un único $\overrightarrow{AD}$ tal que D está en alguno de los semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{AB}$ en α y $m\angle DAB = r$.

Corolario de Thales Dadas dos rectas m y l, puntos A, B y C que pertenecen a l, $A - B - C$, y D un punto que pertenece a m. Sean E y F proyecciones paralela de B y C, respectivamente, con respecto a $\overleftrightarrow{AD}$ en m. Entonces $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$ y $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$ CP.

Ángulos Correspondientes Congruentes-Paralelas Dadas las rectas m,n y una recta k secante a ellas. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces $m \parallel n$.

Criterio Ángulo – Ángulo (AA) Dos triángulos son semejantes si tienen dos parejas de ángulos correspondientes congruentes.

Criterio de Congruencia lado – ángulo – ángulo (LAA) Dados los ΔABC y ΔDEF tales que $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Criterio de semejanza Lado – Ángulo – Lado (LAL) Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y los ángulos que estos determinan son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.Esto es:dados ΔABC y ΔDEF, si $\angle B \cong \angle E$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Criterio de semejanza Lado – Lado – Lado (LLL) Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes. Esto es: dados ΔABC y ΔDEF, si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Cuadrilátero cíclico Si un cuadrilátero es cíclico, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios.

Cuadrilátero Saccheri Si en un $\square ABCD$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, entonces el $\square ABCD$ es rectángulo.

Cuadrilátero-ángulos Si en un cuadrilátero ambos pares de ángulos opuestos son congruentes entonces los ángulos adyacentes son suplementarios.

Cuatro ángulos rectos: Si dos rectas son perpendiculares, entonces se determinan cuatro ángulos rectos.
Desigualdad-interestancia Si $AB < AC$ y $C \in \overrightarrow{AB}$ entonces $A - B - C$.
Dos rectas – plano Si m y k son dos rectas que se intersecan, entonces existe un único plano que las contiene.
Existencia de la bisectriz de ángulo: Dado un ángulo, existe su bisectriz y esta es única.
Existencia de las circunferencias Dado un número positivo r, un plano α y un punto P en α, existe una única circunferencia de radio r en dicho plano.
Existencia de Paralela Dada una recta l y un punto P tal que $P \notin l$. Entonces existe una recta m tal que $m \parallel l$ y $P \in m$.
Existencia de Proyección Paralela Si la recta m y la recta t se intersecan y P es un punto, tal que m, t, $\subset \alpha$, $P \in \alpha$ un plano, entonces existe un punto Q en m tal que Q es la proyección paralela de P con respecto a t en m.
Existencia de punto medio Todo segmento tiene un punto medio.
Existencia de triángulos En un plano, existe un triángulo.
Existencia perpendicular por punto externo Dada una recta y un punto que no pertenece a ella, existe una única recta que contiene al punto y es perpendicular a la recta dada.
Existencia perpendicular punto externo Por un punto externo a una recta dada existe una recta perpendicular a dicha recta.
Existencia rayo opuesto Dado $\overrightarrow{BA}$, existe un $\overrightarrow{BC}$ opuesto al $\overrightarrow{BA}$.
Extremos-segmento en un semiplano Dados el plano α y una recta l tal que $l \subset \alpha$, A, $B \in \alpha$, $A \notin l$ y $B \notin l$. Si A y B están en el mismo semiplano determinado por l entonces $\overline{AB} \cap l = \emptyset$.
Hipotenusa – Cateto Se dan los ΔABC y ΔDEF, tales que $\angle B$ y $\angle E$ son rectos, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
Interestancia – doble orden Si $A - B - C$ entonces $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(C) < c(B) < c(A)$.
Intersección de Rectas Si dos rectas distintas, m y l, se intersecan entonces su intersección es un único punto.
Lados desiguales –ángulos desiguales Dado el ΔABC, si $AC > AB$, entonces $m\angle ABC > m\angle ACB$.
LLL Si dos triángulos tienen sus tres lados correspondientes congruentes, entonces los triángulos son congruentes.
Localización de puntos Sea r un número real positivo y el $\overrightarrow{AC}$. Entonces existe un único punto $D \in \overrightarrow{AC}$ tal que $AD = r$.
Mediatrices de cuerdas – centro La intersección de las mediatrices de dos cuerdas cualesquiera no paralelas de una circunferencia es el centro de dicha circunferencia.
Mediatriz de cuerda – centro La mediatriz de una cuerda cualquiera de una circunferencia dada, contiene al centro de la circunferencia.
Mediatriz de cuerda – diámetro Los puntos de intersección de la mediatriz de una cuerda cualquiera de una circunferencia con ésta, son extremos de uno de sus diámetros.
Medida de ángulo: Dado $\angle EAD$. Entonces $m\angle EAD = r_{E,\overrightarrow{AD}}$.

Menelao Dados el ΔABC, la $\overleftrightarrow{AC}$ y puntos X, Y y Z tales que $X \in \overline{AB}$, $Y \in \overline{CB}$ y $Z \in \overleftrightarrow{AC}$.

i. Si X, Y y Z son colineales, entonces $\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{AZ} = 1$.

ii. Si $\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{AZ} = 1$, entonces X, Y y Z son colineales.

Mínima distancia Dada una recta m y un punto P tal que P no pertenece a m. Sea $\overline{PQ} \perp m$, $Q \in m$ y R otro punto cualquiera de m. Entonces $PQ < PR$.

Obtuso – agudo Si dos ángulos son par lineal y uno es agudo el otro es obtuso.

Orden – interestancia Dados tres puntos A, B y C de la recta m, si c(A) < c(B) < c(C) entonces $A - B - C$.

Orden-punto en el interior:Dados un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} \subset \alpha$ con D, $E \in S_{\overleftrightarrow{AB},C}$ y $r_{C,\overrightarrow{AB}} < r_{D,\overrightarrow{AB}} < r_{E,\overrightarrow{AB}}$. Entonces $D \in int\ \angle CAE$.

PAI (Paralelas-Ángulos Alternos Internos Congruentes) Dadas dos rectas y una secante a ellas. Si las dos rectas son paralelas, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Par lineal Si dos ángulos forman par lineal, entonces los ángulos son suplementarios.

Paralelogramo Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces

Paralelogramo-ángulos Si $\square ABCD$ es paralelogramo entonces los ángulos adyacentes son suplementarios.

PC (Paralelas-Ángulos Correspondientes Congruentes) Dadas dos rectas y una secante a ellas. Si las dos rectas son paralelas, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Perpendicular - punto de la recta Dada una recta m y un punto P en m. Existe una recta n que contiene a P tal que $m \perp n$.

Perpendicularidad-Paralelismo Si dos rectas son perpendiculares a una misma recta y son coplanares, entonces estas dos rectas son paralelas entre sí.

Pitágoras Si ΔABC con $\angle B$ recto, entonces $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Potencia de un punto – tangencia Sean la $\odot C_r$, $\overline{ED}$ una cuerda cualquiera de la circunferencia, A un punto en $\odot C_r$ y P un punto tal que $D - E - P$. Si $AP^2 = DP \times EP$, entonces $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la $\odot C_r$ en el punto A.

Proyección paralela – congruencia Dados $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ contenidos en una recta m. Sean W, X, Y, Z las respectivas proyecciones paralelas de A, B, C y D en la recta m con respecto a una recta l, entonces $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$.

Proyección paralela - interestancia Se tienen las rectas coplanares m, l y n tales que l y n se intersecan en el punto K, y los puntos A, B, $C \in m$. Sean los puntos D, E y F las respectivas proyecciones paralelas respecto a l de tales puntos sobre n. Si $A - B - C$ entonces $D - E - F$.

Proyección paralela – segmento Se tienen las rectas m, l y n coplanares tales que l y n se intersecan en el punto K, y los puntos A, $B \in m$. Sean los puntos D y E las respectivas proyecciones paralelas de tales puntos sobre n, respecto a l. Entonces la proyección paralela de $\overline{AB}$ es $\overline{DE}$.

Proyección Paralela – Semiplano Sea m una recta y α un plano que la contiene. Sean A y P puntos de α tal que $A \notin m$ y $P \notin m$. Sea $Q \in m$ y B la proyección paralela de A con respecto a la $\overleftrightarrow{PQ}$ sobre m. Entonces $B \in S_{\overleftrightarrow{PQ},A}$.

Punto a un lado Sean A y B dos puntos. Existe un punto C tal que $A - B - C$.

Punto en el interior de ángulo Dado el $\angle ABC$, E un punto cualquiera en el $\overrightarrow{BA}$, F un punto cualquiera en el $\overrightarrow{BC}$ con E y F diferentes de B y X un punto tal que $E - X - F$, entonces $X \in int\angle ABC$.
Punto en el interior –doble orden Dados $\overleftrightarrow{AB}$ una recta en un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{AE}$, C, $D \in S_{\overleftrightarrow{AB},E}$ y $D \in int\angle EAC$ entonces $r_{C,\overleftrightarrow{AB}} < r_{D,\overleftrightarrow{AB}} < r_{E,\overleftrightarrow{AB}}$ o $r_{C,\overleftrightarrow{AB}} > r_{D,\overleftrightarrow{AB}} > r_{E,\overleftrightarrow{AB}}$.
Punto en el interior –doble orden Dados l una recta en un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{AB}$, $A \in l$, C, $D \in S_{l,B}$ y $C \in int\angle BAD$ entonces $r_{B,l} < r_{C,l} < r_{D,l}$ o $r_{B,l} > r_{C,l} > r_{D,l}$.
Punto entre Dados dos puntos A y B existe un punto C entre ellos.
Punto interior de una circunferencia – recta secante Dados la $\odot T_r$, un punto S tal que $S \in int\odot T_r$ y una recta m en el mismo plano que contiene a $\odot T_r$ con $S \in m$. Entonces m es una recta secante a $\odot T_r$.
Punto Medio Si M es punto medio de $\overline{CD}$, entonces la mitad de la medida del $\overline{CD}$ es igual a la distancia de C o D a M.
Puntos en distintos semiplanos Si D, E y F son puntos colineales, $D - E - F$ y m es una recta que contiene a E, $m \neq \overleftrightarrow{DF}$ entonces D y F están en distintos semiplanos determinados por m.
Puntos en el mismo semiplano Dado el plano α, la recta m en α y A un punto de m. Si $C - D - A$ ó $D - C - A$ donde C es un punto en uno de los semiplanos determinados por m en α entonces C y D están en el mismo semiplano.
Recíproco de Pitágoras Si en un ΔABC se tiene que $AC^2 = AB^2 + BC^2$, entonces ΔABC es rectángulo con $\angle B$ recto.
Recíproco de Thales Dado el ΔAEF con $A - B - E$, A – C – F y $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF}$, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$.
Recíproco del Triángulo Isósceles Si dos ángulos de un triángulo son congruentes entonces los lados opuestos a ellos son congruentes.
Recta - infinitos puntos Si m es una recta entonces existen infinitos puntos en m.
Recta y punto – plano Si C es punto dado y m una recta, tal que $C \notin m$ entonces existe un plano α que los contiene.
Rectángulo, rombo – paralelogramo Los rectángulos y los rombos son paralelogramos.
Recta-punto Si m es una recta, entonces existe por lo menos un punto en m.
Recta-punto Toda recta tiene por lo menos un punto.
Recta-rayo-segmento Existe $\overleftrightarrow{AB}$ si y solo si existe $\overline{AB}$ o $\overrightarrow{AB}$. Existe $\overrightarrow{AB}$ si y solo si existe $\overline{AB}$ o $\overleftrightarrow{AB}$.
Rectas paralelas-intersección Si la recta m y la recta t se intersecan y l es una recta tal que $l \parallel t$, m, t y l coplanares, entonces l y m se intersecan.
Rombo Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, entonces es un rombo.
Segmento-extremos en un semiplano Sea α un plano que contiene al $\overline{AB}$ y a la recta n. Si $\overline{AB} \cap$ n = $\emptyset$ entonces A y B están en el mismo semiplano determinado por n.
Semiplano Uno de los semiplanos determinados por una recta en un plano tiene por lo menos un punto.
Semirrecta interior de ángulo Si D está en el interior del $\angle CAB$ entonces la semirrecta AD está en el interior del $\angle CAB$.

Semirrecta Si un punto de una semirrecta está en un semiplano determinado por una recta que contiene su extremo entonces la semirrecta está en el semiplano.
Suma medidas de ángulos en triángulo Para todo triángulo se tiene que la suma de las medidas de los ángulos es 180.
Thales Dadas dos rectas m y l y los puntos A, B y C que pertenecen a l tal que $A-B-C$, y D un punto que pertenece a m. Sean E y F proyecciones paralela de B y C con respecto a $\overleftrightarrow{AD}$ en m. Entonces las sucesiones AB, DE y BC, EF son proporcionales; esto es $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$.
Thales en triángulo Dado el ΔAEF con $A-B-E$ y $A-C-F$ y $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, entonces $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CF}=\frac{BE}{AE}$, y $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}$.
Transitividad de interestancia Si A, B, C y D son puntos colineales tal que $A-B-C$ y $B-C-D$ entonces $A-B-D$ y $A-C-D$.
Transitividad paralelismo Si la recta l es paralela a la recta m y la recta m es paralela a la recta n, entonces la recta l es paralela a la recta n.
Tres puntos Si A, B y C son puntos colineales entonces uno de esos puntos está entre los otros dos.
Tres rayos Si $\overleftrightarrow{AB}$ es una recta en un plano α, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$ con C, $D \in S_{\overleftrightarrow{AB},E}$ entonces $D \in int\angle CAE$, ó $C \in int\angle EAD$ ó $E \in int\angle CAD$.
Triángulo - segmento paralelo El segmento con extremos los puntos medio de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de la longitud de dicho lado.
Triángulo Isósceles Si ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle A \cong \angle C$.
Triángulo rectángulo o obtusángulo Si un triángulo es rectángulo u obtusángulo, entonces los otros dos ángulos son agudos.

Referencias Bibliográficas

Alfonso, H. (1997). *Geometría plana y del espacio.* Bogotá, Colombia: Autor.

Arnauld, A. (1683). *Nouveaux Elemens de Geometrie.* París, Francia. Guillaume Desprez.

Boyer, C. (1989). *History of Mathematics.* New York, Estados Unidos. John Wiley & Sons, Inc.

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en http://www.jstor.org/stable/1968336

Caicedo, X. (1990). *Elementos de lógica y calculabilidad.* Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Clairaut, A. C. (1881, trad.). *Elements of Geometry* (Kaines, J.,Tr.) Londrés, Inglaterra: C. Kegan Paul & Co.

Euclides (1991, trad.). *Elementos. Libros I-IV* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

Heidelberger, M. (1993). Empiricist Philosophy of Mathematics en *Hermann von Helmholz and the Foundations of Nineteenth- Century Science* Cahan, D. Editor. Berkley, Estados Unidos. University of California Press.

Hilbert, D. (1950, trad.). *The Foundations of Geometry* (Townsend, E.J, Tr.) La Salle, Illinois, Estados Unidos: The Open Court Publishing Co.

Moise, E. (1964). *Elementary geometry from an advanced standpoint.* EUA: Addison – Wesley Publishing Company.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría moderna.* Traducido por: García, M. (1964). Wilmington, Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.