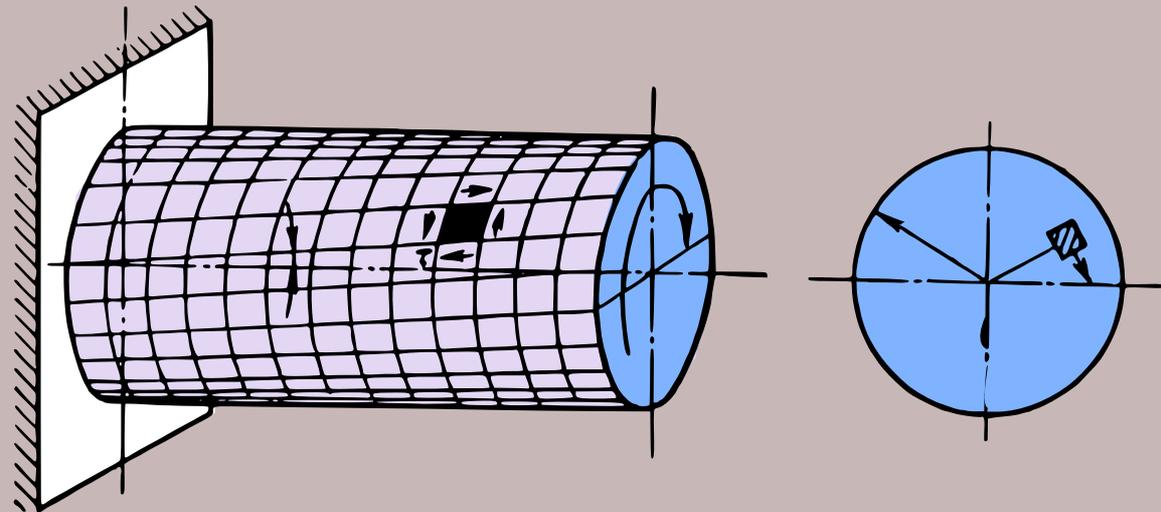


G.S. Pisarenko., A.P. Yákovlev,  
V.Y. Matvéev

# MANUAL DE RESISTENCIA DE MATERIALES



Editorial Mir Moscoú

# Справочник по сопротивлению материалов

Г. С. Писаренко,  
А. П. Яковлев,  
В. В. Матвеев

Издательство “Наукова думка” Киев

# Manual de resistencia de materiales

G. S. Pisarenko,

A. P. Yákovlev,

V. V. Matvéev

Primera reimpresión

Editorial Mir Moscú

**Traducido del ruso**

**por el ingeniero B. A. Mirchevski**

**Primera edición 1979**

**Primera reimpresión 1985**

**на испанском языке**

**Impreso en la URSS**

**© Издательство "Наукова думка". 1975.**

**© Traducción al español. Editorial Mir. 1979.**

## Capítulo I

### INTRODUCCIÓN

#### § 1. Resistencia de materiales como ciencia. Objetos estudiados

*La resistencia de materiales* es una ciencia sobre los métodos de ingeniería de cálculo a la resistencia, la rigidez y la estabilidad de los elementos de máquinas y construcciones.

*La resistencia* es la capacidad de una estructura, de sus partes y elementos de contrarrestar una carga determinada sin descomponerse.

*La rigidez* es la propiedad de una estructura o de sus elementos de oponerse a las cargas exteriores en lo que se refiere a las deformaciones (cambios de forma y dimensiones). Las deformaciones no deben exceder cuando las cargas son determinadas, de ciertos valores fijados de acuerdo con las exigencias para la estructura.

*La estabilidad* es la capacidad de una estructura o de sus elementos de conservar una forma inicial determinada de equilibrio elástico.

Con el propósito de que las estructuras correspondan, en general, a las exigencias de resistencia, rigidez y estabilidad, es necesario, dar a sus elementos una forma más racional y determinar las dimensiones correspondientes.

La resistencia de materiales resuelve problemas señalados, basándose tanto en los datos teóricos como en los experimentales que tienen en esta ciencia igual importancia.

En la parte teórica la resistencia de materiales se funda en la mecánica teórica y las matemáticas, mientras que en la experimental, en la física y la ciencia de los materiales.

La resistencia de materiales es la ciencia más general sobre la resistencia de las máquinas y construcciones. Sin conocimiento fundamental del curso de Resistencias de Materiales es inconcebible la creación de diferentes máquinas y mecanismos, construcciones civiles e industriales, puentes, líneas de transmisión de energía y antenas, hangares, barcos, aviones y helicópteros, turbomáquinas y máquinas eléctricas, equipos de la energética nuclear, técnica coheteril y de reacción, etc.

La resistencia de materiales no agota todos los problemas de la mecánica del cuerpo sólido deformado. De éstos se ocupan tales disciplinas contiguas como mecánica de construcción de los sistemas de barras, las teorías de la elasticidad y plasticidad. Sin embargo, el papel principal en la solución de los problemas de resistencia pertenece a la resistencia de materiales.

Siendo muy variados los tipos de los elementos de estructuras que se encuentran en las construcciones y las máquinas, se puede reducirlos a un número relativamente pequeño de formas fundamentales. Los cuerpos que tienen esas formas fundamentales son objeto de cálculo a la resistencia, rigidez y estabilidad. Son *barras, placas y bóvedas, cuerpos macizos*.

Por *barra o viga* se entiende un cuerpo que tiene dimensión (longitud) mucho mayor que las otras dos dimensiones (transversales) (fig. 1). En la ingeniería se encuentran barras con eje rectilíneo (fig. 1, *a*) y curvilíneo (fig. 1, *b*). Tanto las barras rectas como las curvas pueden ser de sección constante (fig. 1, *a*) o de

sección variada (fig. 1, c). Como ejemplo de barras rectas pueden citarse vigas, ejes, árboles. Los ganchos portacarga, eslabones de cadena, etc. son ejemplos de barras curvas. Las barras que tienen el perfil de la sección transversal complejo, donde el espesor de las paredes es mucho menor que el tamaño de la sección, se llaman barras de paredes delgadas (fig. 1, d).

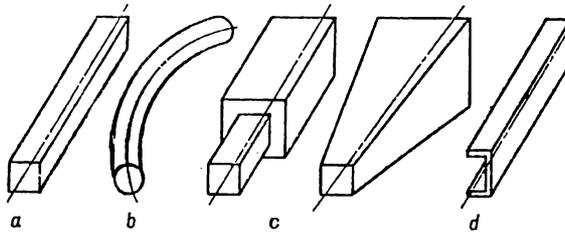


Fig. 1

La bóveda es un cuerpo limitado por dos superficies curvilíneas situadas a una distancia corta una de otra, es decir, un cuerpo, una dimensión (espesor) del cual es mucho menor que las dos demás. El lugar geométrico de los puntos equidistantes de ambas superficies de la bóveda se llama superficie media. De acuerdo con la forma de la superficie media se distinguen bóvedas cilíndricas (fig. 2, a), cónicas (fig. 2, b), esféricas (fig. 2, c), etc. A las bóvedas pertenecen depósitos de paredes delgadas, calderas, cúpulas de edificios, revestimientos de fusilajes, alas y otras partes de las aeronaves, cuerpos de los barcos, etc.

Si la superficie media de una bóveda representa un plano, tal bóveda se llama placa (fig. 2, d). Las placas pueden ser redondas, rectangulares y tener otras configuraciones. El espesor de las placas, lo mismo que de las bóvedas, puede ser constante o variable. Fondos planos y tapas de los depósitos (fig. 2, e), cubiertas de las obras de ingeniería, discos de las turbomáquinas, etc. son placas.

Se llama macizo un cuerpo que tiene todas las tres dimensiones del mismo orden. Son cimentaciones de las obras, muros de retención, etc.

En la resistencia de materiales los problemas se resuelven, por regla general, con métodos matemáticos simples, valiéndose de una serie de hipótesis simplifi-

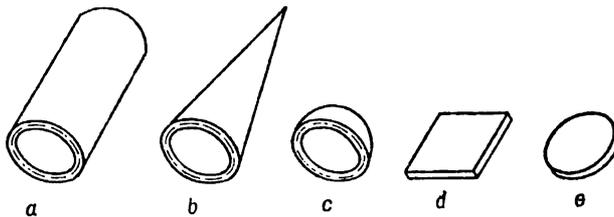


Fig. 2

cadas y resultados experimentales, llevando las soluciones hasta las fórmulas de cálculo aptas para la utilización en la práctica de ingeniería. El objeto principal examinado en la resistencia de materiales es la barra recta.

## § 2. Tipos de las deformaciones. Noción sobre el estado deformado del material

Los cuerpos reales pueden deformarse, es decir, cambiar su forma y dimensiones. Las deformaciones de los cuerpos suceden a causa de su carga con fuerzas exteriores o cambio de temperatura. Durante la deformación del cuerpo sus puntos, lo mismo que líneas o secciones trazadas mentalmente, se desplazan en el plano o en el espacio respecto a su posición inicial.

Al cargar un cuerpo sólido, dentro de él surgen fuerzas interiores de interacción entre las partículas que se oponen a las fuerzas exteriores y tienden a volver las partículas del cuerpo a la posición que han ocupado antes de la deformación.

Se distinguen *deformaciones elásticas*, que desaparecen después de haberse anulado la acción de las fuerzas, y *deformaciones plásticas* o *permanentes* que no desaparecen al quitar las cargas. En la mayoría de los casos para los valores de las deformaciones de los elementos de estructuras se fijan ciertos límites.

En la resistencia de materiales se estudian los siguientes tipos principales de las deformaciones: *tracción* y *compresión*, *deslizamiento* (o *cizallamiento*), *torsión* y *flexión*. Se examinan también las deformaciones más complejas que son resultado de conjugación de unos cuantos tipos principales de las deformaciones.

La *tracción* o la *compresión* surgen, por ejemplo, en el caso de que a una barra, a lo largo de su eje, se aplican fuerzas dirigidas en sentido contrario (fig. 3). En este caso sucede un desplazamiento de avance de las secciones a lo largo del eje de la barra que durante la tracción se alarga, y durante la compresión se acorta. El cambio de la longitud inicial de la barra  $l$ , designado  $\Delta l$ , se llama *alargamiento absoluto* (durante la tracción) o *reducción absoluta* (durante la compresión).

La relación del alargamiento (reducción) absoluto  $\Delta l$  a la longitud inicial  $l$  se llama *alargamiento* (reducción) *medio unitario* en la longitud  $l$  o *deformación media lineal unitaria* del tramo y se designa, generalmente,  $\epsilon_m$ :

$$\epsilon_m = \frac{\Delta l}{l}.$$

El verdadero *alargamiento lineal unitario* o la *deformación lineal unitaria* en un punto se determina como la deformación unitaria del tramo cuando  $l \rightarrow 0$

$$\epsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}.$$

Muchos elementos de estructuras trabajan a tracción o compresión a saber: barras de las armaduras, columnas, vástagos de las máquinas de pistón, pernos de apriete, etc.

El *deslizamiento* o *cizallamiento* surge cuando las fuerzas exteriores tienden a desplazar dos secciones planas paralelas de la barra una respecto a otra, siendo la distancia entre ellas constante (fig. 4). La magnitud del desplazamiento  $\Delta s$  se denomina *deslizamiento absoluto*. La relación del deslizamiento absoluto a la distancia entre dos planos deslizados (la tangente del ángulo  $\gamma$ ) se denomina *deslizamiento relativo*. Como el ángulo  $\gamma$  es pequeño se puede considerar que

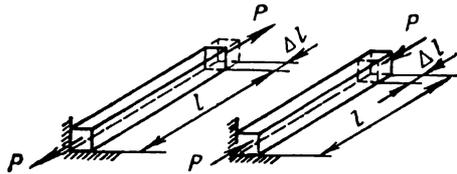


Fig. 3

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

El deslizamiento relativo es una deformación angular que caracteriza la oblicuidad del elemento.

A deslizamiento o cizallamiento trabajan, por ejemplo, remaches y pernos que unen los elementos, que las fuerzas exteriores tienden a desplazar unos respecto a otros.

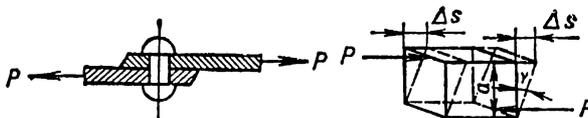


Fig. 4

La torsión surge cuando sobre una barra actúan fuerzas exteriores que forman un momento con respecto a su eje (fig. 5). La deformación de torsión va acompañada por el giro de las secciones transversales de la barra unas respecto a otras alrededor de su eje. El ángulo de giro de una sección de la barra con respecto a otra situada a una distancia  $l$  se llama ángulo de distorsión en la longitud  $l$ . La razón entre el ángulo de distorsión  $\varphi$  y la longitud  $l$  se denomina *ángulo relativo de distorsión*

$$\theta = \frac{\varphi}{l}.$$

Los árboles, los husillos de tornos y taladradoras y otras piezas trabajan a la torsión.

La flexión (fig. 6) consiste en la desviación del eje de una barra recta o en el cambio de la curvatura de una barra curva. El desplazamiento de algún punto del eje de la barra que sucede durante la flexión se expresa por un vector, cuyo origen coincide con la posición inicial del punto, y el final, con la posición del mismo punto en la barra deformada. En las barras rectas los desplazamientos de los puntos dirigidos perpendicularmente a la posición inicial del eje se denominan *flechas*. Designemos las flechas por la letra  $w$ , y la flecha máxima, por  $f$ . Durante la flexión sucede también el giro de las secciones de la barra alrededor de los ejes situados en los planos de las secciones. Designemos con la letra  $\theta$  los ángulos de giro de las secciones respecto a sus posiciones iniciales.

A la flexión trabajan vigas de pisos intermedios, de puentes, ejes de los vagones de ferrocarril, ballestas, árboles, dientes de engranajes, rayos de ruedas, palancas y muchas otras piezas.

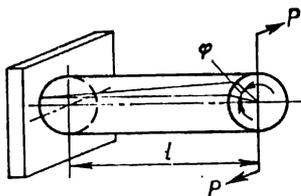


Fig. 5

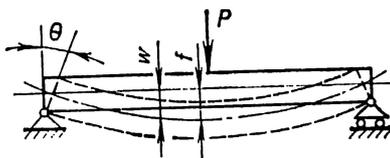


Fig. 6

Las deformaciones simples anteriormente descritas de la barra ofrecen una idea sobre los caminos de su forma y dimensiones en general, pero no dicen nada sobre el grado y carácter del *estado deformado* del material. Las investigaciones demuestran que el estado deformado de un cuerpo, hablando en general, es heterogéneo y cambia de un punto a otro. El estado deformado en un punto del

cuerpo se determina perfectamente por seis *componentes de la deformación*: tres deformaciones lineales unitarias  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  y tres deformaciones angulares unitarias  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ .

### § 3. Hipótesis principales

Para formar la teoría de la resistencia de materiales se aceptan una serie de hipótesis sobre la estructura y las propiedades de los materiales, lo mismo que sobre el carácter de las deformaciones.

1. *Hipótesis sobre la continuidad del material.* Se supone que el material llena totalmente el volumen que ocupa. La teoría atomística de la composición discreta de la materia no se toma en consideración.

2. *Hipótesis sobre la homogeneidad e isotropía.* Se supone que las propiedades del material son iguales en todos los puntos, y en cada punto, en todas las direcciones. En algunos casos la suposición sobre la isotropía es inaceptable. Por ejemplo, la madera, cuyas propiedades son esencialmente diferentes de través y a lo largo de las fibras, es anisótropa. Dicha propiedad la tienen también los materiales armados.

3. *Hipótesis sobre la pequeñez de las deformaciones* (hipótesis de la rigidez relativa del material). Se supone que las deformaciones son pequeñas en comparación con las dimensiones del cuerpo deformado. A base de esto se prescinden de los cambios en la situación de las fuerzas exteriores respecto a las partes aisladas del cuerpo durante la deformación, y se componen las ecuaciones estáticas para un cuerpo no deformado. En algunos casos nos vemos obligados a renunciar a este principio, lo que se acuerda especialmente.

4. *Hipótesis sobre la elasticidad perfecta del material.* Se suponen todos los cuerpos absolutamente elásticos. Prácticamente, los cuerpos reales pueden considerarse elásticos, solamente hasta ciertos valores de las cargas; es necesario tomarlo en consideración, utilizando fórmulas de resistencia de materiales.

5. *Hipótesis sobre la dependencia lineal entre las deformaciones y las cargas.* Se supone que para la mayoría de los materiales es válida la ley de Hooke que establece la dependencia proporcional directa entre las deformaciones y las cargas.

Como consecuencia de las hipótesis sobre la pequeñez de las deformaciones y la dependencia lineal entre las deformaciones y los esfuerzos, durante la solución de la mayoría de los problemas de resistencia de materiales es aplicable *el principio de superposición* (principio de independencia de acción y adición de las fuerzas). Por ejemplo, los esfuerzos en cualquier elemento de la estructura provocados por diferentes factores (unas cuantas fuerzas, acción de temperatura) son iguales a la suma de los esfuerzos provocados por cada uno de esos factores y no dependen del orden de su aplicación. Lo mismo es justo en lo que se refiere a las deformaciones.

6. *Hipótesis de las secciones planas.* Se supone que las secciones planas mentalmente trazadas perpendiculares al eje de la barra en el proceso de su deformación se mantienen planas y perpendiculares al eje.

Estas, igual que algunas otras, hipótesis permiten resolver gran número de problemas sobre el cálculo de resistencia, rigidez y estabilidad. Los resultados de tales cálculos concuerdan bien, como regla general, con los datos experimentales.

**CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS  
DE LAS SECCIONES PLANAS**

La resistencia que opone una barra a los diferentes tipos de la deformación depende muchas veces no sólo de su material y tamaño sino también de las configuraciones del eje, la forma de las secciones transversales y su ubicación respecto a la dirección de las cargas que actúan. Examinemos las principales características geométricas de las secciones transversales de la barra abstrayéndonos de las propiedades físicas del objeto estudiado. Estas características son las siguientes: áreas de las secciones transversales, momentos estáticos, momentos de inercia, módulos de la sección, radios de giro.

**§ 4. Momento estático de área. Centro de gravedad de área**

Examinando una figura arbitraria (sección transversal de la barra) referida al sistema de coordenadas  $xOy$  (fig. 7), se puede componer una expresión, por analogía con la expresión para el momento de fuerza respecto a algún eje, para el momento de área que se denomina *momento estático*. Así, el producto de un elemento de área  $dF$  por la distancia  $y$  desde el eje  $Ox$

$$dS_x = ydF$$

se llama momento estático del elemento de área respecto al eje  $Ox$ . Por analogía,  $dS_y = xdF$  es el momento estático del elemento de área respecto al eje  $Oy$ . Sumando estos productos por toda el área, obtenemos *momentos estáticos de área* respecto a los ejes  $x$  e  $y$ :

$$S_x = \int_F ydF; \quad S_y = \int_F xdF. \quad (2.1)$$

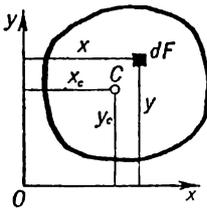


Fig. 7

La dimensión del momento estático es una unidad de longitud en cubo (por ejemplo,  $\text{cm}^3$ ).

Supongamos que  $x_C$  e  $y_C$  son las coordenadas del centro de gravedad de la figura. Siguiendo la analogía con los momentos de fuerza, a base del teorema sobre el momento de la resultante se puede poner las siguientes expresiones:

$$S_x = Fy_C; \quad S_y = Fx_C; \quad (2.2)$$

donde  $F$  es el área de la figura.

Las coordenadas del centro de gravedad son

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}. \quad (2.3)$$

Para calcular momentos estáticos de una figura compuesta, ésta se divide en partes simples (fig. 8), cada una de las cuales tiene bien determinada el área ( $F_i$ ) y la posición del centro de gravedad ( $x_i, y_i$ ). Los momentos estáticos de toda la figura respecto a los ejes  $Ox$  y  $Oy$  serán, respectivamente, iguales a:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= F_1 y_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i y_i, \\ S_y &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i x_i. \end{aligned} \right\} (2.4)$$

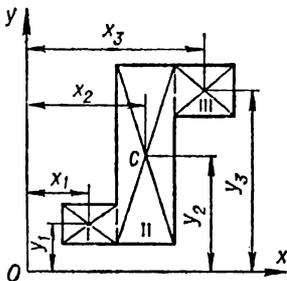


Fig. 8

A partir de las fórmulas (2.3) y (2.4) determinamos las coordenadas del centro de gravedad de la figura compuesta

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}. \quad (2.5)$$

### § 5. Momentos de inercia de figuras planas

Se llama **MOMENTO DE INERCIA AXIAL O ECUATORIAL del área de una figura** la integral de los productos de los planos elementales por los cuadrados de su distancia al eje examinado. Así, los momentos de inercia de una figura arbitraria (fig. 9) respecto a los ejes  $x$  e  $y$  son iguales, respectivamente, a

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (2.6)$$

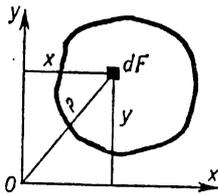


Fig. 9

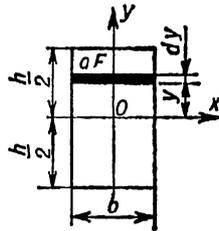


Fig. 10

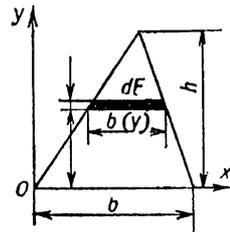


Fig. 11

Haciendo uso de estas fórmulas, calculemos los momentos de inercia para figuras elementales.

**RECTÁNGULO** (fig. 10). Teniendo en cuenta que el plano elemental  $dF = bdy$ , hallamos

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Es obvio que

$$J_y = \frac{hb^3}{12}.$$

TRIÁNGULO (fig. 11). Teniendo en cuenta que  $b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$ ,  $dF = \frac{b}{h}(h-y)dy$ , expresamos el momento de inercia respecto al eje  $x$  como

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{b}{h} \int_0^h y^2(h-y)dy = \frac{bh^3}{12}.$$

SECTOR CIRCULAR (fig. 12). Teniendo en cuenta que  $dF = \rho d\varphi d\rho$  e  $y = \rho \sin \varphi$ , determinemos el momento de inercia respecto al eje  $x$ :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_0^\beta \int_0^r \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\varphi d\rho = \frac{r^4}{8} \left[ (\beta - \alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2} \right].$$

Se llama **MOMENTO POLAR DE INERCIA de área de una figura respecto al punto dado (el polo  $O$ )** la integral del producto de los planos elementales por los cuadrados de sus distancias  $\rho$  desde el polo (fig. 9):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (2.7)$$

Si a través del polo está trazado un sistema de ejes  $x, y$  mutuamente perpendiculares, entonces  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . De (2.6) y (2.7) se desprende que

$$J_p = J_x + J_y. \quad (2.8)$$

CÍRCULO (fig. 13). Teniendo en cuenta que  $dF = 2\pi\rho d\rho$ , el momento polar de inercia será

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2},$$

o bien

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Es evidente de (2.8) que para el círculo

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Hay que señalar que los valores de los momentos de inercia axiales y polares siempre son positivos.

Se denomina **MOMENTO DE INERCIA CENTRÍFUGO** la integral de los productos de los planos elementales por su distancia desde los ejes de coordenadas  $x, y$ :

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.9)$$

El momento de inercia centrífugo puede ser, según sea la posición de los ejes, positivo o negativo o igual a cero. Los ejes respecto a los cuales el momento

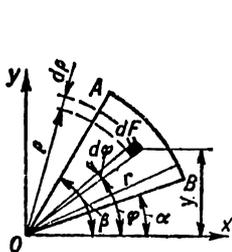


Fig. 12

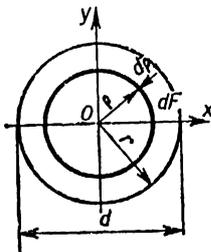


Fig. 13

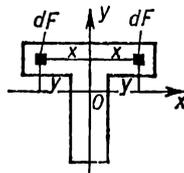


Fig. 14

de inercia centrífugo es igual a cero se denominan *ejes de inercia principales*. Dos ejes mutuamente perpendiculares, de los cuales por lo menos uno es el eje de simetría de la figura, serán sus ejes principales. Este hecho se deduce de lo siguiente: a cada valor positivo de  $xy dF$  le corresponde igual valor negativo al otro lado del eje de simetría (fig. 14) y su suma por toda el área de la figura es igual a cero. Los ejes principales que pasan a través del centro de gravedad de la sección se denominan *ejes principales centrales*. La dimensión de los momentos de inercia es una unidad de longitud elevada a cuarta potencia (por ejemplo,  $\text{cm}^4$ ).

## § 6. Momentos de inercia de secciones compuestas

Al calcular momentos de inercia de secciones compuestas, estas últimas se dividen, generalmente, en partes aisladas simples, cuyos momentos de inercia son conocidos. De la propiedad principal de la integral de la suma se deduce que el momento de inercia de la figura compuesta es igual a la suma de los momentos de inercia de sus partes integrantes. Determinemos el momento de inercia de una figura compuesta (fig. 15) respecto al *eje x* dividiéndola en las partes simples I, II, III que tienen respectivamente las áreas  $F_I, F_{II}, F_{III}$ :

$$J_x = \int_{F_I} y^2 dF + \int_{F_{II}} y^2 dF + \int_{F_{III}} y^2 dF;$$

o bien

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III}. \quad (2.10)$$

Hay que señalar que en el caso de que la sección tiene un orificio, es muy cómodo considerar éste una parte de la figura con área negativa. Así pues, el momento de inercia de la sección mostrada en la fig. 16 respecto al *eje x*, será

$$J_x = J_x^I - J_x^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

## § 7. Momentos de inercia respecto a los ejes paralelos

Supongamos que son conocidos los momentos de inercia de la figura respecto a los ejes centrales  $x, y$

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.11)$$

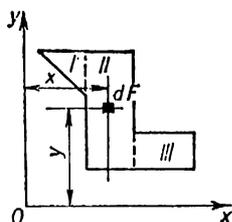


Fig. 15

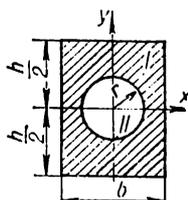


Fig. 16

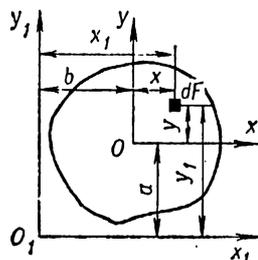


Fig. 17

Se necesita determinar los momentos de inercia respecto a los ejes  $x_1, y_1$  que son paralelos a los centrales (fig. 17):

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (2.12)$$

Se puede expresar las coordenadas de cualquier punto en el sistema nuevo  $x_1 O_1 y_1$  por medio de las coordenadas en el sistema anterior  $x O y$  del modo siguiente:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \quad (2.13)$$

Como los momentos estáticos de área respecto a los ejes centrales son iguales a cero, las fórmulas (2.12), tomando en consideración (2.13), pueden ser representadas definitivamente en la forma de

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2 F; \\ J_{y_1} &= J_y + b^2 F; \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF. \quad (2.15)$$

Por consiguiente: 1) el momento de inercia respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia respecto al eje central, paralelo al dado, más el producto del área de la figura por el cuadrado de la distancia entre los ejes; 2) el momento de inercia centrífugo respecto a cualquier sistema de ejes rectangulares es igual al momento de inercia centrífugo respecto al sistema de ejes centrales, paralelos a los dados, más el producto del área de la figura por las coordenadas de su centro de gravedad referido a los ejes nuevos. Es necesario señalar que las coordenadas  $a, b$  que forman parte de la fórmula (2.15) se introducen tomando en consideración su signo.

### § 8. Dependencia entre los momentos de inercia durante el giro de los ejes de coordenadas

Supongamos que son conocidos los momentos de inercia de una figura arbitraria respecto a los ejes de coordenadas  $x, y$  (fig. 18):

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.16)$$

Se necesita determinar los momentos de inercia respecto a los ejes  $x_1, y_1$  virados respecto a los ejes  $x$  e  $y$  a un ángulo  $\alpha$  contra el sentido de las manecillas del reloj, considerando positivo el ángulo:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF. \quad (2.17)$$

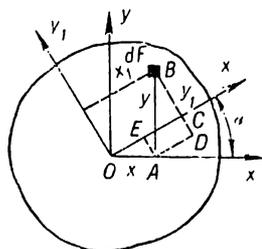


Fig. 18

Las coordenadas de un plano elemental arbitrario en el sistema nuevo ( $x_1 O y_1$ ) pueden representarse por medio de las coordenadas del sistema anterior ( $x O y$ ) del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= OC = OE + AD = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha; \\ y_1 &= BC = BD - EA = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Hallamos definitivamente:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \operatorname{sen}^2 \alpha - J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_y \cos^2 \alpha + J_x \operatorname{sen}^2 \alpha + J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_x) \operatorname{sen} 2\alpha. \quad (2.20)$$

Señalemos que las fórmulas (2.19) y (2.20) obtenidas durante el giro de cualquier sistema de ejes rectangulares son válidas, naturalmente, para los ejes centrales. Sumando (2.19) término a término, hallamos

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p.$$

Es decir, durante el giro de los ejes rectangulares la suma de los momentos de inercia axiales no varía y es igual al momento de inercia polar respecto al origen de coordenadas.

Durante el giro del sistema de ejes a un ángulo  $\alpha = 90^\circ$  obtenemos lo siguiente:

$$J_{x_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_x; \quad J_{x_1 y_1} = -J_{xy}.$$

### § 9. Determinación de la dirección de los ejes de inercia principales. Momentos de inercia principales

El mayor interés práctico lo representan los ejes principales centrales, respecto a los cuales los momentos de inercia centrífugos son iguales a cero. Deno-

temos los ejes principales centrales por las letras  $u, v$ . Es obvio que

$$J_{uv} = 0.$$

Para determinar la posición de los ejes principales centrales de una figura asimétrica arbitraria es necesario hacer girar los ejes centrales  $x, y$  a tal ángulo  $\alpha_0$  (fig. 19), para el cual el momento de inercia centrífugo respecto a la posición nueva de los ejes será igual a cero

$$J_{x_1y_1} = J_{uv} = 0.$$

De la fórmula (2.20) obtenemos

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha_0 = 0,$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.21)$$

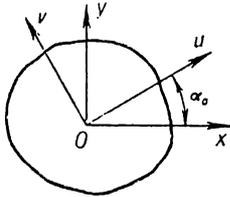


Fig. 19

Los dos valores del ángulo  $\alpha_0$ , obtenidos de la fórmula (2.21), difieren  $90^\circ$  uno de otro y determinan la posición de los ejes principales. Como se ve fácilmente, el menor de estos ángulos por el

valor absoluto no sobrepasa de  $\frac{\pi}{4}$ . Generalmente se utiliza el ángulo menor. El eje principal, trazado bajo este ángulo (positivo o negativo), se designa, generalmente, con la letra  $u$ . Hagamos recordar que el ángulo negativo  $\alpha_0$  se coloca a partir del eje  $x$  en el sentido de las manecillas del reloj.

En la fig. 20 pueden verse algunos ejemplos de la denotación de los ejes principales de acuerdo con la regla señalada. Los ejes iniciales están designados

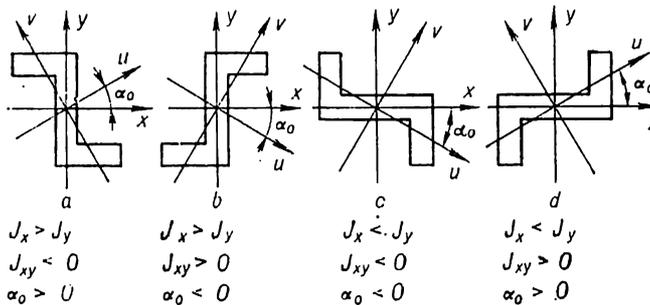


Fig. 20

con las letras  $x$  e  $y$ . Los valores de los momentos de inercia principales pueden obtenerse de las fórmulas generales (2.19), tomando  $\alpha = \alpha_0$ :

$$\left. \begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha_0 + J_y \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_y \cos^2 \alpha_0 + J_x \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Sumemos y restemos las últimas expresiones. Considerando (2.21) tenemos lo siguiente:

$$J_u + J_v = J_x + J_y;$$

$$J_u - J_v = (J_x - J_y) \cos 2\alpha_0 - 2J_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha_0 = (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0}.$$

Solucionando las últimas ecuaciones juntas respecto a  $J_u$  y  $J_v$ , obtenemos

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) + (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) - (J_x - J_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Está claro que cuando  $J_x > J_y$ ,  $J_u > J_v$ .  
Tomando en consideración, de acuerdo con (2.21), que

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}},$$

las expresiones (2.23) para los momentos principales pueden escribirse en la forma de

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right]; \\ J_v &= \frac{1}{2} \left[ (J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

además los signos superiores deben tomarse cuando  $J_x > J_y$ , y los inferiores, cuando  $J_x < J_y$ .

De esta manera, las fórmulas (2.21), (2.23) y (2.24) permiten determinar la posición de los ejes principales y el valor de los momentos de inercia principales centrales.

Ahora, si en vez del sistema inicial arbitrario de ejes centrales  $xOy$  se toma el sistema de ejes principales, las fórmulas de transición a los ejes virados (2.19) y (2.20) se simplifican:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_u \cos^2 \alpha + J_v \operatorname{sen}^2 \alpha; \\ J_{y_1} &= J_v \cos^2 \alpha + J_u \operatorname{sen}^2 \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{1}{2} (J_u - J_v) \operatorname{sen} 2\alpha. \quad (2.26)$$

Hagamos notar que los momentos de inercia principales tienen la propiedad de extremalidad. Es fácil convencerse de ello, diferenciando la expresión (2.19) por la variable  $\alpha$ .

Los planos trazados a través del eje de la barra y los ejes de inercia principales de su sección transversal se llaman *planos principales*.

## § 10. Representación gráfica de los momentos de inercia.

### Noción sobre el radio y elipse de inercia

El cálculo de los momentos de inercia según las expresiones (2.23)–(2.26) puede reemplazarse por su determinación gráfica. En este caso se suelen distinguir dos problemas: directo e inverso.

Durante la solución del problema directo se determinan los momentos de inercia respecto al sistema central arbitrario de ejes  $x, y$ , siendo conocidos los momentos de inercia principales  $J_u$  y  $J_v$ . El problema inverso consiste en hallar los momentos de inercia principales respecto al sistema central arbitrario de ejes  $x, y$  cuando son conocidos los momentos de inercia  $J_x, J_y$  y  $J_{xy}$ .

**PROBLEMA DIRECTO.** Se necesita determinar los momentos de inercia  $J_x, J_y, J_{xy}$  respecto a los ejes  $x$  e  $y$  (fig. 21, a), utilizando  $J_u$  y  $J_v$  respecto a los ejes principales, cuya dirección es conocida. Para más precisión consideramos  $J_u > J_v$ .

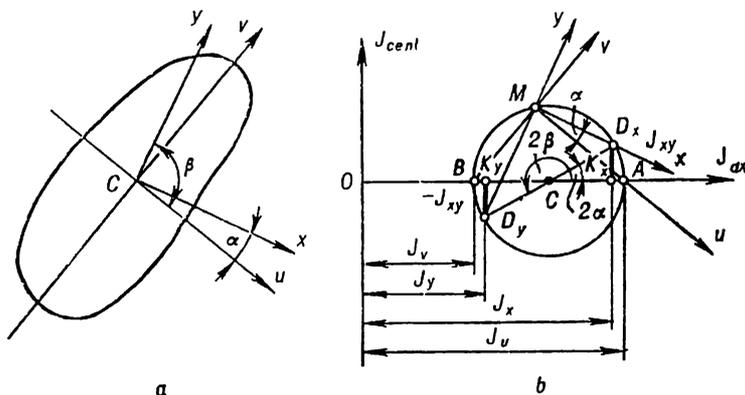


Fig. 21

Elijamos un sistema rectangular de coordenadas en cierto plano geométrico (fig. 21, b). Colocaremos sobre el eje de las abscisas los momentos de inercia axiales  $J_{ux}(J_u, J_v, J_x, J_y, \text{etc.})$ , y sobre el eje de ordenadas, los centrífugos  $J_{cent}(J_{xy}, \text{etc.})$ .

Colocamos a lo largo del eje de abscisas en escala correspondiente, los segmentos  $OA$  y  $OB$  que son iguales a los momentos de inercia principales. Dividimos el segmento  $AB$  en dos partes iguales, siendo  $BC = AC = \frac{1}{2}(J_u - J_v)$ .

A partir del punto  $C$  circunscribimos con el radio  $CA$  una circunferencia llamada *círculo de inercia*. Entonces, para determinar el momento de inercia respecto al eje  $x$  trazado bajo un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje principal  $u$ , trazamos desde el centro del círculo bajo un ángulo  $2\alpha$  el rayo  $CD_x$ . Colocamos los ángulos positivos contra el sentido de las manecillas del reloj. Resulta que la ordenada del punto  $D_x$  es igual al momento de inercia centrífugo  $J_{xy}$ , y la abscisa, al momento

de inercia axial  $J_x$  respecto al eje  $x$ . Para obtener el valor del momento de inercia  $J_y$  respecto al eje  $y$ , perpendicular al eje  $x$  y, por consiguiente, trazado bajo un ángulo positivo  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$  con respecto al eje principal  $u$ , trazamos desde

el centro del círculo el rayo  $CD_y$ , formando un ángulo  $2\beta = 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ . Se ve fácilmente que éste es una prolongación del rayo  $CD_x$ . La abscisa del punto  $D_y$  es igual al momento de inercia  $J_y$ , mientras que la ordenada  $K_y D_y$ , al momento de inercia centrífugo con signo inverso ( $-J_{xy}$ ), lo que corresponde al momento de inercia centrífugo respecto a los ejes virados  $90^\circ$ . Señalemos que a los dos ejes mutuamente perpendiculares les corresponden dos puntos del círculo ( $D_x$  y  $D_y$ ) situados sobre el mismo diámetro.

Tracemos desde el punto  $D_x$  el eje  $x$  paralelo al eje correspondiente en la fig. 21,  $a$ . El punto  $M$  de su intersección con el círculo se llama *polo del círculo de inercia* (punto principal o foco del círculo de inercia). Es fácil demostrar que la línea que une el polo con cualquier otro punto del círculo da la dirección del eje, representado en el gráfico por el punto dado. En particular, la línea  $MA$  da la dirección del eje principal  $u$ . La línea  $MB$  es paralela al eje principal  $v$ .

**PROBLEMA INVERSO.** Son conocidos los momentos de inercia  $J_x, J_y, J_{xy}$  del área de la sección de la barra respecto al sistema de ejes centrales  $x, y$  (fig. 22,  $a$ ). Determinar la posición de los ejes de inercia principales y el valor de los momentos de inercia principales. Para que la construcción sea más determinada, consideremos  $J_x > J_y$  y  $J_{xy} > 0$ .

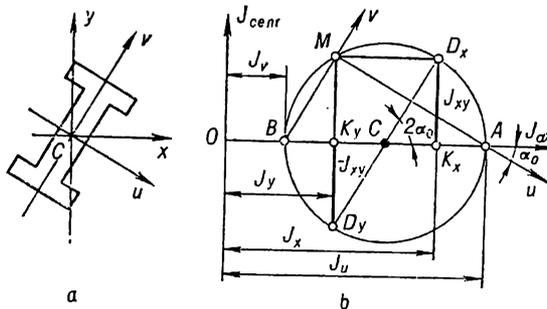


Fig. 22

Construimos en el plano geométrico (fig. 22,  $b$ ) los puntos  $D_x$  y  $D_y$  que corresponden a los momentos de inercia respecto a los ejes  $x$  y  $y$ . Las abscisas de estos puntos son momentos de inercia axiales, a saber:  $OK_x = J_x$ ;  $OK_y = J_y$ ; las ordenadas, momentos de inercia centrífugos  $J_{xy}$ , siendo  $K_x D_x = J_{xy}$ ;  $K_y D_y = -J_{xy}$ . Como ambos puntos pertenecen a un diámetro, obtendremos, uniéndolos, el centro del círculo de inercia  $C$ , a partir del cual circunscribimos una circunferencia de radio

$$CD_x = CD_y = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

que interseca el eje de abscisas en los puntos  $A$  y  $B$ . Es evidente que las abscisas de estos puntos ( $OA$  y  $OB$ ) son los momentos de inercia principales buscados  $J_u$  y  $J_v$ .

Con el fin de determinar la dirección de los ejes principales construimos el foco del círculo de inercia. Con este propósito trazamos, a partir de los puntos  $D_x$  y  $D_y$ , líneas paralelas respectivamente a los ejes señalados hasta la intersección con el círculo en el punto  $M$ . Uniendo después el foco con los puntos  $A$  y  $B$  del círculo, obtendremos la dirección de los ejes principales  $u$  y  $v$  (fig. 22, *b*). La solución gráfica del problema inverso para los cuatro casos presentados en la fig. 20, puede verse respectivamente en la fig. 23, *a, b, c, d*.

El momento de inercia de la figura respecto a algún eje puede representarse en forma de producto del área de la figura por el cuadrado de cierta magnitud llamada *radio de giro*:

$$J_x = \int_F y^2 dF = F i_x^2, \quad (2.27)$$

donde  $i_x$  es el radio de giro respecto al eje  $x$ .

De (2.27) se desprende que

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}. \quad (2.28)$$

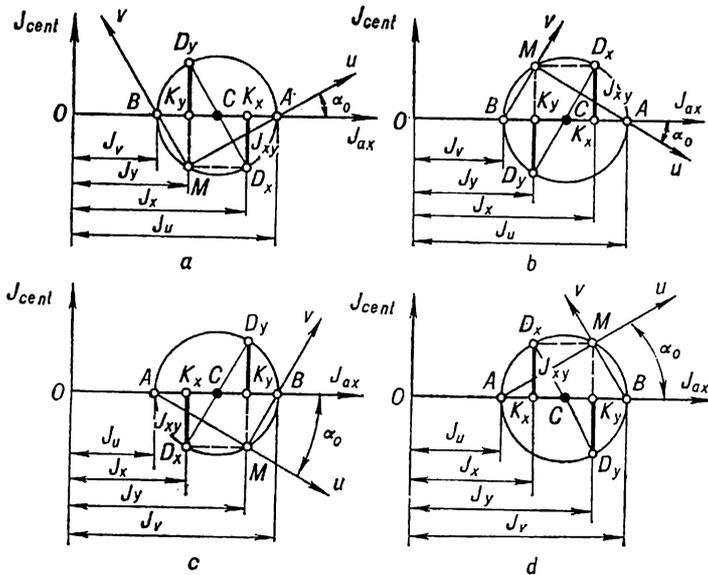


Fig. 23

Por analogía el radio de giro respecto al eje  $y$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (2.29)$$

A los ejes de inercia principales centrales les corresponden los radios de giro principales,

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}. \quad (2.30)$$

Construyamos sobre los ejes de inercia principales centrales de una figura plana una elipse con semiejes iguales a los radios de giro principales, colocando a lo largo del eje  $u$  los segmentos iguales a  $i_v$ , y a lo largo del eje  $v$ , segmentos iguales a  $i_u$  (fig. 24). Tal elipse, llamada elipse de inercia, tiene una propiedad notable de que el radio de giro respecto a cualquier eje central  $x$  se determina como la perpendicular  $OA$  bajada del centro de la elipse  $O$  sobre la tangente a ésta, paralela al eje  $x$ . Para obtener el punto de tangencia basta con trazar cualquier cuerda paralelamente al eje dado  $x$ . El punto de intersección de la elipse con la línea que une el centro  $O$  y el punto central de la cuerda es el punto de tangencia. Midiendo el segmento  $OA = i_x$ , hallamos el momento de inercia por la fórmula

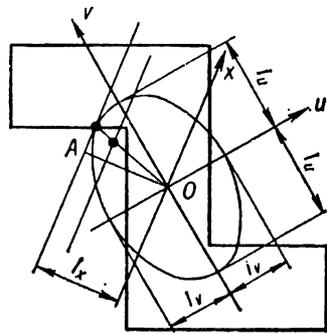


Fig. 24

$$J_x = Fi_x^2.$$

### § 11. Módulos de la sección

Se llama **MÓDULO AXIAL DE LA SECCIÓN** la relación del momento de inercia respecto al eje dado a la distancia hasta el punto más alejado de la sección transversal:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\text{máx}}}. \quad (2.31)$$

Los módulos de la sección se miden en unidades de longitud elevadas al cubo ( $\text{mm}^3$ ,  $\text{cm}^3$  o  $\text{m}^3$ ).

La importancia práctica la tienen los módulos de la sección respecto a los ejes principales centrales que se llaman, por regla general, simplemente *módulos de la sección*.

1. Para un rectángulo (fig. 10):

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad (2.32)$$

$$W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{hb^2}{6}. \quad (2.33)$$

2. Para un círculo (fig. 13):

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (2.34)$$

3. Para una sección tubular con diámetro interior  $d$  y exterior  $D$ :

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4), \quad (2.35)$$

siendo

$$\alpha = \frac{d}{D}. \quad (2.36)$$

Se llama **MÓDULO POLAR DE LA SECCIÓN** la relación del momento de inercia polar a la distancia desde el polo hasta el punto más alejado de la sección:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\text{máx}}}. \quad (2.37)$$

Se toma por polo el centro de gravedad de la sección de la barra.

1. Para un círculo (fig. 13):

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (2.38)$$

2. Para una sección tubular

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4). \quad (2.39)$$

## § 12. Orden del cálculo

Al hacer el análisis de las características geométricas de figuras planas de cualquier complejidad el problema más importante consiste en determinar la posición de los ejes principales y los valores de los momentos de inercia principales. Puede recomendarse el siguiente orden de determinación de la posición de los ejes principales y de los valores de los momentos de inercia principales centrales de un perfil complejo, compuesto de partes simples, cuyas características son fáciles de determinar.

1. Trazamos un sistema de ejes rectangulares arbitrario. Dividimos la figura en partes simples y determinamos según (2.5) la posición de su centro de gravedad.

2. Trazamos el sistema inicial de ejes centrales  $x$ ,  $y$  de tal manera que se pueda calcular con mayor facilidad los momentos de inercia de las partes de la figura respecto a estos ejes. Con este propósito determinamos los momentos de inercia de las partes de la figura respecto a sus propios ejes centrales trazados paralelamente a los ejes  $x$ ,  $y$ , utilizando las fórmulas (2.14) y (2.15) de transición a los ejes paralelos. De tal manera obtenemos los valores de  $J_x$ ,  $J_y$  y  $J_{xy}$ .

3. Determinamos por (2.21) el ángulo de inclinación de los ejes principales centrales, designando con la letra  $u$  el eje trazado bajo el ángulo menor (positivo o negativo), y con la letra  $v$ , el eje perpendicular a éste.

4. Por las fórmulas (2.24) determinamos los valores de los momentos de inercia principales centrales  $J_u$  y  $J_v$ .

**EJEMPLO.** Determinar la posición de los ejes principales centrales y calcular los momentos de inercia principales para una sección transversal (fig. 25, a) compuesta de un angular de alas desiguales N° 14/9 (GOST 8510 — 72) y un canal N° 24 (GOST 8240—72).

**SOLUCIÓN.** A través de los centros de gravedad  $C_1$  y  $C_2$  del angular y canal trazamos, paralelamente a sus lados, los ejes centrales  $x_1, y_1$  y  $x_2, y_2$ . Como  $x_2$

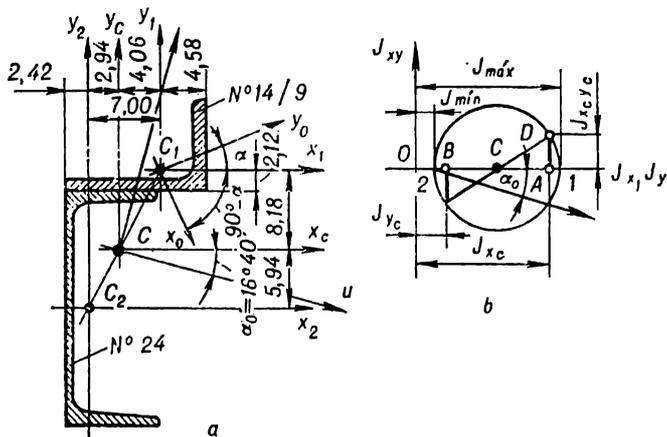


Fig. 25

es el eje de simetría del canal, éste y el eje  $y_2$  son sus ejes principales centrales. El eje principal central  $y_0$  del angular forma con su eje central  $x_1$  un ángulo  $\alpha$ .

Para el angular  $F_1 = 22,2 \text{ cm}^2$ ;  $J_{x_1} = 146 \text{ cm}^4$ ;  $J_{y_1} = 444 \text{ cm}^4$ ;  $J_{y_0} = J_{\min} = 85,5 \text{ cm}^4$ ;  $\text{tg } \alpha = 0,409$ ;  $\alpha = 22^\circ 15'$ ; las coordenadas del centro de gravedad son  $x_C = 4,58 \text{ cm}$ ,  $y_C = 2,12 \text{ cm}$ .

Para el canal  $F_2 = 30,6 \text{ cm}^2$ ;  $J_{x_2} = 2900 \text{ cm}^4$ ;  $J_{y_2} = 208 \text{ cm}^4$ ;  $J_{x_2 y_2} = 0$ ; las coordenadas del centro de gravedad son  $x_C = 2,42 \text{ cm}$ ;  $y_C = 12 \text{ cm}$ .

Hallemos el momento de inercia principal  $J_{x_0}$  y centrífugo  $J_{x_1 y_1}$  del angular:

$$J_{x_0} = J_{\max} = 444 + 146 - 85,5 = 504,5 \text{ cm}^4;$$

$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \text{sen} 2(90^\circ - \alpha) = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \text{sen } 2\alpha = \\ &= \frac{504,5 - 85,5}{2} \cdot 0,701 = 146,7 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Las distancias entre los ejes centrales del angular y el canal son las siguientes: entre los ejes  $x_1$  y  $x_2$

$$12,00 + 2,12 = 14,12 \text{ cm};$$

entre los ejes  $y_1$  e  $y_2$

$$14,00 - 2,42 - 4,58 = 7,00 \text{ cm}.$$

Determinemos las coordenadas del centro de gravedad  $C$  de toda la figura referida al sistema de ejes  $x_2, y_2$ :

$$x_C = \frac{22,2 \cdot 7,00}{22,2 + 30,6} = 2,94 \text{ cm}; \quad y_C = \frac{22,2 \cdot 14,12}{22,2 + 30,6} = 5,94 \text{ cm}.$$

El centro de gravedad  $C$  tiene que encontrarse sobre la recta  $C_1C_2$ , lo que es necesario comprobar en la figura. Trazamos a través del centro de gravedad  $C$  los ejes centrales  $x_C$  e  $y_C$  paralelos a los ejes centrales trazados anteriormente del angular y canal. En el sistema de ejes centrales  $x_C, y_C$  las coordenadas de los centros de gravedad del angular y canal son las siguientes:

$$x_{C_1} = 7,00 - 2,94 = 4,06 \text{ cm}; \quad y_{C_1} = 14,12 - 5,94 = 8,18 \text{ cm};$$

$$x_{C_2} = -2,94 \text{ cm}; \quad y_{C_2} = -5,94 \text{ cm}.$$

Calculemos los momentos de inercia axiales y centrífugos de toda la sección referida al sistema de ejes centrales arbitrarios  $x_C, y_C$ :

$$J_{x_C} = 146,0 + 22,2 \cdot 8,18^2 + 2900 + 30,6 \cdot 5,94^2 = 5607,6 \text{ cm}^4;$$

$$J_{y_C} = 444,0 + 22,2 \cdot 4,06^2 + 208,0 + 30,6 \cdot 2,94^2 = 1282,4 \text{ cm}^4;$$

$$J_{x_C y_C} = 146,7 + 22,2 \cdot 4,06 \cdot 8,18 + 30,6 \cdot (-2,94) \cdot (-5,94) = 1417,3 \text{ cm}^4.$$

Hallamos, según la fórmula (2.21), el ángulo  $\alpha_0$  de inclinación de los ejes principales centrales  $x$  e  $y$  respecto a los ejes centrales arbitrarios  $x_C$  e  $y_C$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_C y_C}}{J_{y_C} - J_{x_C}} = \frac{2 \cdot 1417,3}{1282,4 - 5607,6} = -0,66;$$

$$2\alpha_0 = -33^\circ 20'; \quad \alpha_0 = -16^\circ 40'.$$

Como el ángulo  $\alpha_0$  es negativo, el eje principal central  $u$  se coloca con respecto al eje central arbitrario  $x_C$  en el sentido de las manecillas del reloj, y como  $J_{x_C} > J_{y_C}$ , el eje  $u$  es un eje, respecto al cual el momento de inercia será el máximo. Determinamos los momentos de inercia principales por la fórmula (2.24):

$$J_{u,v} = \frac{5607,6 + 1282,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5607,6 - 1282,4}{2}\right)^2 + 1417,3^2} =$$

$$= 3445,0 \pm 2585,6 \text{ cm}^4;$$

$$J_u = J_{\text{máx}} = 6030,6 \text{ cm}^4 = 6030,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4;$$

$$J_v = J_{\text{mín}} = 859,4 \text{ cm}^4 = 859,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4.$$

COMPROBACIÓN. Tienen que satisfacerse las siguientes condiciones:

$$J_{x_C} + J_{y_C} = J_u + J_v \quad \text{y} \quad J_{uv} = 0.$$

Para el caso dado tenemos

$$\begin{aligned} J_{x_C} + J_{y_C} &= 5607,6 + 1282,4 = 6890,0 = J_u + J_v = \\ &= 6030,6 + 859,4 = 6890,0 \text{ cm}^4; \\ J_{uv} &= \frac{J_{x_C} - J_{y_C}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{x_C y_C} \cos 2\alpha_0 = \\ &= \frac{5607,6 - 1282,4}{2} \cdot (-0,55) + 1417,3 \cdot 0,836 = -1189,4 + \\ &\quad + 1184,9 = -4,5 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

El error relativo es  $\frac{4,5}{1184,9} \cdot 100 = 0,4\%$ , lo que es aceptable.

En la fig. 25, *b* puede verse la construcción del círculo de inercia para la solución gráfica del mismo problema.

Las características geométricas de diferentes secciones planas al igual que de las secciones de perfiles laminados pueden verse en las tablas 1–6.

**Características geométricas de secciones planas**

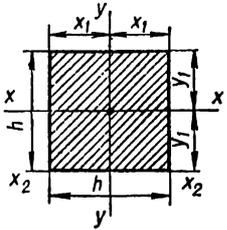
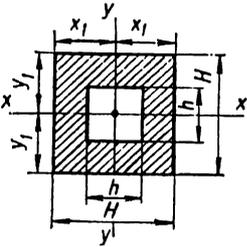
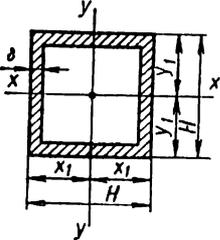
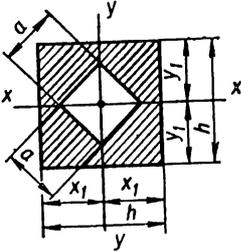
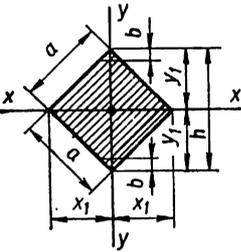
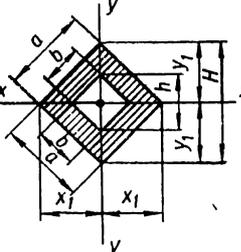
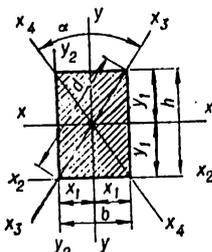
Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Cuadrado</p>  <p>Cualquier eje central es principal</p>	$F = h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Cuadrado hueco</p>  <p>Cualquier eje central es principal</p>	$F = H^2 - h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Cuadrado hueco de paredes delgadas</p>  <p>Cualquier eje central es principal</p>	$F = 4H\delta$ $\delta < \frac{H}{15}$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$

Tabla 1

Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{h^4}{12} = \frac{h^2 F}{12},$ $J_{x_2} = \frac{h^4}{3} = \frac{h^2 F}{3},$ $J_t = 0,1406h^4$	$W_x = W_y = \frac{h^3}{6},$ $W_t = 0,208h^3$	$i_x = i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,289h$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>
$J_x = J_y = \frac{H^4 - h^4}{12} =$ $= \frac{H^2 + h^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}} =$ $= 0,289/\sqrt{H^2 + h^2}$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>
$J_x = J_y = \frac{2}{3} H^2 \delta = \frac{FH}{6}$	$W_x = W_y = \frac{4}{3} H^2 \delta$	$i_x = i_y = \frac{H}{\sqrt{6}} \approx 0,408H$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>

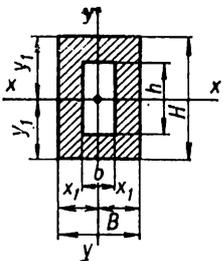
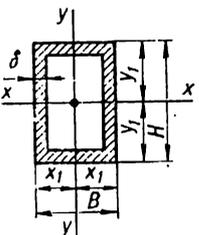
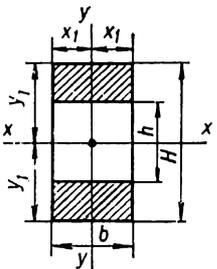
Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="127 294 303 319"><b>Cuadrado hueco</b></p>  <p data-bbox="127 613 352 663">Cualquier eje central es principal</p>	$F = h^2 - a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$
<p data-bbox="127 688 423 714"><b>Cuadrado puesto de canto</b></p>  <p data-bbox="127 999 352 1050">Cualquier eje central es principal</p>	$F = a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0,71a$
<p data-bbox="127 1083 329 1134"><b>Cuadrado hueco puesto de canto</b></p>  <p data-bbox="127 1419 370 1470">Cualquier eje central es principal</p>	$F = a^2 - b^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2} =$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0,71a$

<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = J_y = \frac{h^4 - a^4}{12} =$ $= \frac{h^2 + a^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{h^4 - a^4}{6h}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{12}} =$ $= 0,289\sqrt{h^2 + a^2}$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>
$J_x = J_y = \frac{a^4}{12} =$ $= \frac{a^2 F}{12} = \frac{h^4}{48}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 =$ $= \frac{h^3}{24} = 0,118a^3 = 0,042h^3$ <p>Al cortar el ángulo superior e inferior en <math>b = \frac{1}{18} h</math>, <math>W_x</math> alcanza el máximo <math>W_{xcor} = 0,124a^3 = 0,044h^3</math></p>	$i_x = i_y = 0,289a$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>
$J_x = J_y = \frac{a^4 - b^4}{12} =$ $= \frac{H^4 - h^4}{48} = \frac{a^2 + b^2}{12} F$	$W_x = W_y =$ $= \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^4 - b^4}{a} =$ $= 0,118 \frac{a^4 - b^4}{a} =$ $= \frac{H^4 - h^4}{24H} =$ $= 0,042 \frac{H^4 - h^4}{H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}} =$ $= 0,289\sqrt{a^2 + b^2}$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>

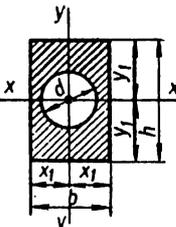
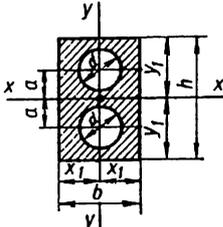
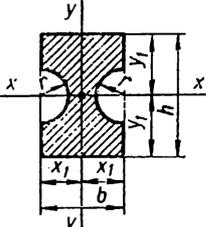
Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p><b>Rectángulo</b></p>  <p>Los ejes <math>x - x'</math> e <math>y - y'</math> son principales centrales</p>	$F = bh$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

$n$	1	1,5	2	3	4	6	8	10
$\xi$	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123
$\eta$	0,1404	0,2936	0,4572	0,7899	0,1232	1,789	2,456	3,123
$\zeta$	1,0	0,8588	0,7952	0,7533	0,7447	0,7426	0,7425	0,7425

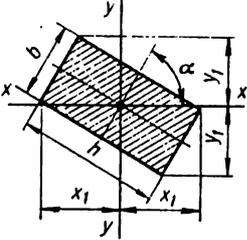
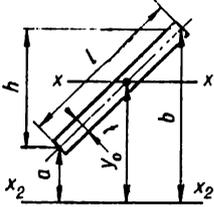
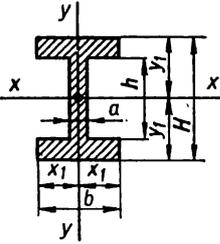
Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ , $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{Fb^2}{12}$ $J_{x_1} = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{3}$ $J_{y_1} = \frac{hb^3}{3} = \frac{Fb^2}{3}$ $J_{x_2, y_2} = \frac{b^2h^2}{4}$ $J_{x_3} = J_{x_4} =$ $= \frac{b^3h^3}{6d^2} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)} =$ $= \frac{d^4 \text{sen}^3 \alpha}{48} = \frac{Fd^2 \text{sen}^2 \alpha}{24}$ $J_p = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$	$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{Fh}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{Fb}{6}$	$i_x = 0,289h$ $i_y = 0,289E$
$\frac{h}{b} = n > 1$	$J_t = \eta b^4$ $W_t = \xi b^3$ <p>En medio de los lados largos la tensión tangencial máxima <math>\tau_{\text{máx}} = M_t/W_t</math>; en medio de los cortos <math>\tau = \zeta \tau_{\text{máx}}</math>, en los ángulos <math>\tau = 0</math></p>	
$\frac{h}{b} = n > 4$	$J_t = \frac{1}{3} (n - 0,63)b^4$ $W_t = \frac{1}{3} (n - 0,63)b^3 = \frac{J_t}{b}$ <p>En medio de los lados cortos <math>\tau = 0,7425\tau_{\text{máx}}</math></p>	

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Rectángulo hueco</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = BH - bh$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Rectángulo hueco de paredes delgadas</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = 2\delta(B + H)$ $\delta \ll \frac{H}{15}$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Rectángulo con recorte</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = b(H - h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$

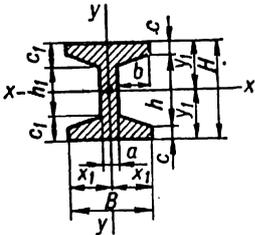
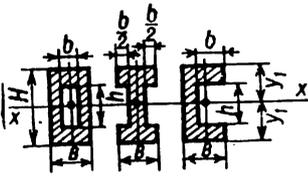
Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ $W_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$
$J_x = \frac{\delta H^3}{6} \left( 3 \frac{B}{H} + 1 \right)$ $J_y = \frac{\delta B^3}{6} \left( 3 \frac{H}{B} + 1 \right)$	$W_x = \frac{\delta H^2}{3} \left( 3 \frac{B}{H} + 1 \right)$ $W_y = \frac{\delta B^2}{3} \left( 3 \frac{H}{B} + 1 \right)$	$i_x = 0,289H \sqrt{\frac{3B + H}{B + H}}$ $i_y = 0,289B \sqrt{\frac{3H + B}{H + B}}$
$J_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$ $J_y = \frac{b^3}{12} (H - h)$	$W_x = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3)$ $W_y = \frac{b^2}{6} (H - h)$	$i_x = \sqrt{\frac{H^2 + Hh + h^2}{12}} =$ $= 0,289\sqrt{H^2 + Hh + h^2}$ $i_y = 0,289b$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Rectángulo con agujero redondo</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = bh - \frac{\pi d^2}{4} =$ $= bh \left( 1 - 0,785 \frac{d^2}{bh} \right)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Rectángulo con dos agujeros</p> 	$F = bh - \frac{\pi d^2}{2} =$ $= bh \left( 1 - 1,57 \frac{d^2}{bh} \right)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Rectángulo con recortes semirredondos</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = bh - \pi r^2$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

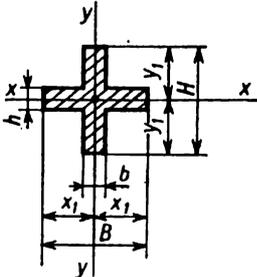
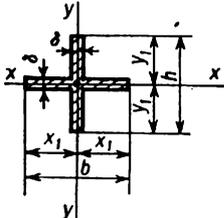
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math>; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{1}{4} \left( \frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{bh^3}{12} \left( 1 - 0,59 \frac{d^4}{bh^3} \right)$ $J_y = \frac{1}{4} \left( \frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{hb^3}{12} \left( 1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$W_x = \frac{1}{2h} \left( \frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{bh^2}{6} \left( 1 - 0,59 \frac{d^4}{bh^3} \right)$ $W_y = \frac{1}{2b} \left( \frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right) =$ $= \frac{hb^2}{6} \left( 1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$i_x = 0,289h \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 0,59 \frac{d^4}{bh^3}}{1 - 0,785 \frac{d^4}{bh}}}$ $i_y = 0,289b \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3}}{1 - 0,785 \frac{d^2}{bh}}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} \left[ 1 - \right.$ $\left. - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left( 1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right) \right]$ $J_y = \frac{hb^3}{12} \left( 1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$W_x = \frac{bh^2}{6} \left[ 1 - \right.$ $\left. - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left( 1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right) \right]$ $W_y = \frac{hb^2}{6} \left( 1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$i_x = 0,289h \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left( 1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right)}{1 - 1,57 \frac{d^2}{bh}}}$ $i_y = 0,289b \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3}}{1 - 1,57 \frac{d^2}{bh}}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} - 2 \left[ 0,11r^4 + \right.$ $\left. + \frac{\pi r^2}{2} \left( \frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right]$	$W_x = \frac{bh^2}{6} - \frac{\pi r^4}{2h}$ $W_y = \frac{hb^2}{6} - \frac{4}{b} \left[ 0,11r^4 + \right.$ $\left. + \frac{\pi r^2}{2} \left( \frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="130 312 357 337">Rectángulo inclinado</p> 	$F = bh$	$y_1 = \frac{1}{2} (h \cos \alpha + b \operatorname{sen} \alpha)$ $x_1 = \frac{1}{2} (b \cos \alpha - h \operatorname{sen} \alpha)$
<p data-bbox="130 698 353 749">Banda estrecha rectangular</p> 	$F = lt$	$y_0 = \frac{a + b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
<p data-bbox="124 1085 404 1135">Doble T simétrico formado de rectángulos</p>  <p data-bbox="124 1429 410 1480">Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = ah + b(H - h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$

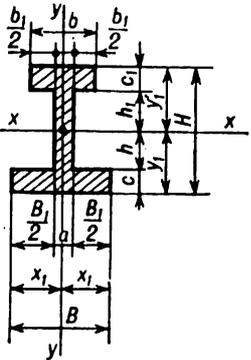
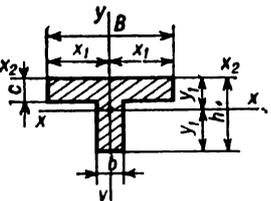
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{bh}{12} (h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$ $J_y = \frac{bh}{12} (h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$ $J_{xy} = \frac{bh}{24} (b^2 - h^2) \operatorname{sen} 2\alpha$	$W_x = \frac{bh}{6} \frac{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{h \cos \alpha + b \operatorname{sen} \alpha}$ $W_y = \frac{bh}{6} \frac{h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{b \cos \alpha - h \operatorname{sen} \alpha}$	$i_x = \sqrt{\frac{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{12}} = 0,289 \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$ $i_y = 0,289 \sqrt{h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$
$J_x = \frac{lh^2}{12} = \frac{Fh^2}{12}$ $J_{x_1} = \frac{lt}{3} (a^2 + ab + b^2)$	$W_x = \frac{lh}{6}$ $W_{x_1} = \frac{lt}{3b} (a^2 + ab + b^2)$	$i_x = 0,289h$
$J_x = \frac{ah^3}{12} + \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$ $J_y = \frac{a^2h}{12} + \frac{b^3}{12} (H - h)$	$W_x = \frac{ah^2}{6H} + \frac{b}{6H} (H^3 - h^3)$ $W_y = \frac{a^2h}{6b} + \frac{b^2}{6} (H - h)$	$i_x = \sqrt{\frac{ah^3 + b(H^3 - h^3)}{12[ah + b(H - h)]}}$ $i_y = \sqrt{\frac{a^2h + b^2(H - h)}{12[ah + b(H - h)]}}$

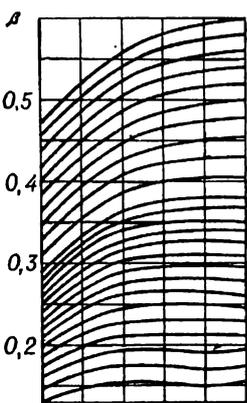
Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Doble T</p>  <p>Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son principales centrales</p>	$F = aH + 2b(c + c_1)$ $b = \frac{1}{2}(B - a)$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Sección simétrica formada de rectángulos</p>  <p>El eje <math>x-x</math> es principal central</p>	$F = BH - bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$
<p>Sección simétrica formada de rectángulos</p>  <p>El eje <math>x-x</math> es principal central</p>	$F = BH + bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$

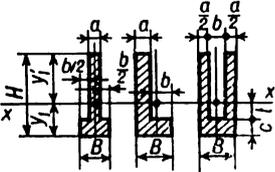
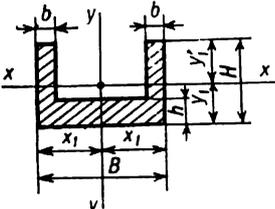
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{1}{12} \left[ BH^3 - \frac{1}{4\alpha} (h^4 - h_1^4) \right]$ $J_y = \frac{1}{12} \left[ B^3(H - h) + h_1 a^3 + \frac{\alpha}{4} (B^4 - a^4) \right]$ $\alpha = \frac{h - h_1}{2b}$ <p>Para los doble <math>T</math> estándar <math>\alpha \approx \frac{1}{6}</math></p>	$W_x = \frac{1}{6H} \left[ BH^3 - \frac{1}{4\alpha} (h^4 - h_1^4) \right]$ $W_y = \frac{1}{6B} \left[ B^3(H - h) + h_1 a^3 + \frac{\alpha}{4} (B^4 - a^4) \right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$
$J_x = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{12(BH + bh)}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="122 346 201 371"><b>Cruceta</b></p>  <p data-bbox="122 732 353 808">Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = Hb + (B - b)h$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
<p data-bbox="122 925 333 976"><b>Cruceta de paredes delgadas</b></p>  <p data-bbox="122 1303 353 1379">Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = h\delta + (b - \delta)\delta$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

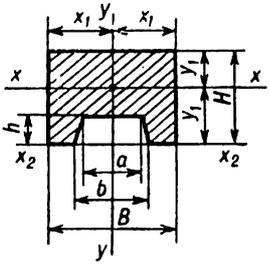
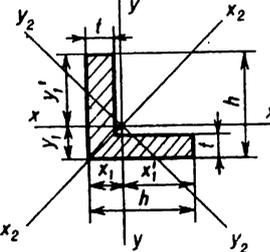
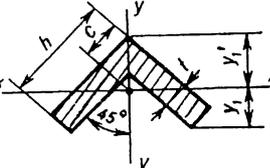
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión, libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{bH^3 + (B - b)h^3}{12}$ $J_y = \frac{hB^3 + (H - h)b^3}{12}$	$W_x = \frac{bH^3 + (B - b)h^3}{6H}$ $W_y = \frac{hB^3 + (H - h)b^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{12} [h^3\delta + \delta^3(b - \delta)]$ $J_y = \frac{1}{12} [b^3\delta + \delta^3(h - \delta)]$	$W_x = \frac{h^3\delta + \delta^3(b - \delta)}{6h}$ $W_y = \frac{b^3\delta + \delta^3(h - \delta)}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Doble T no simétrico formado de rectángulos</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = bc_1 + a(h + h_1) + Bc_2$	$b_1 = b - a$ $B_1 = B - a$ $x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{1}{2} \times$ $\times \frac{aH^2 + B_1c_2 + b_1c_1(2H_1 - c_1)}{aH + B_1c + b_1c_1}$ $y'_1 = H - y_1$ $h = y_1 - c$ $h_1 = y'_1 - c_1$
<p>Perfil en T simétrico formado de rectángulos</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = (B - b)c + bh$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y'_1 = \frac{1}{2} \frac{(B - b)c^2 + bh^2}{(B - b)c + bh}$ $y_1 = h - y'_1$

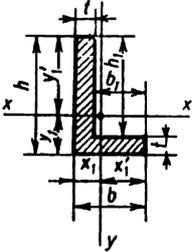
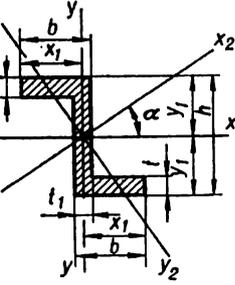
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{1}{3} (By_1^3 - B_1h^3 + by_1^3 - b_1h_1^3)$ $J_y = \frac{1}{12} [B^3c + b^3c_1 + a^3(h + h_1)]$	$W_{xs} = \frac{J_x}{y'_1}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1}$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y = \frac{1}{6B} [B^3c + b^3c_1 + a^3(h + h_1)]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_{x_2} - y_1'^2 F$ $J_{x_2} = \frac{1}{3} [(B - b)c^3 + bh^3]$ $J_y = \frac{1}{12} [B^3c + b^3(h - c)]$ <p>Además, <math>J_x = \beta \frac{Bh^3}{12}</math>, donde <math>\beta</math> se halla del gráfico</p> 	$W_{xs} = \frac{J_x}{y'_1} = \frac{J_{x_2}}{y'_1} - y_1' F$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1} = \frac{J_x}{h - y_1'}$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y = \frac{1}{6B} [B^3c + b^3(h - c)]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(B^3 - b^3)c + b^3h}{3[(B - b)c + bh]}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Sección no simétrica formada de rectángulos</p>  <p>El eje <math>x - x</math> es central</p>	$F = aH + bc$	$y_1 = \frac{aH^2 + bc^2}{2(aH + bc)}$ $y_1' = H - y_1 = \frac{aH^2 + bc(2H - c)}{2(aH + bc)}$
<p>Sección en U</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = Bh + 2b(H - h)$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{Bh^2 + 2b(H^2 - h^2)}{2[Bh + 2b(H - h)]}$ $y_1' = H - y_1$

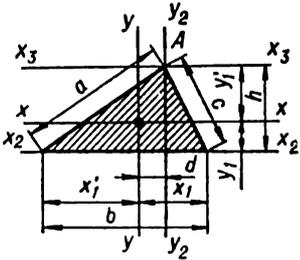
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{1}{3} (By_1^3 - bt^3 + ay_1'^3)$	$W_{xi} = \frac{J_x}{y_1} \text{ (para las fibras inferiores)}$ $W_{xs} = \frac{J_x}{y_1'} = \frac{J_x}{H - y_1}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_{xi} > W_{xs}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x = \frac{Bh^3 + 2b(H-h)^3}{12} + Bh\left(y_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + 2b(H-h)\left(\frac{H-h}{2} + h - y_1\right)^2$ $J_y = \frac{B^3H - (H-h)(B-2b)^3}{12}$	$W_x = \frac{J_x}{y_1} \text{ (para las fibras inferiores)}$ $W_x = \frac{J_x}{y_1'} \text{ (para las fibras superiores)}$ $W_y = \frac{B^3H - (H-h)(B-2b)^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="127 292 268 319">Estribo en U</p>  <p data-bbox="127 635 335 685">El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = BH - \frac{a + b}{2} h$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{3BH^2 - h^2(b + 2a)}{6BH - 3h(a + b)}$ $y_1' = H - y_1$
<p data-bbox="127 727 382 754">Angular de alas iguales</p> 	$F = t(2h - t)$	$x_1 = y_1 = \frac{h^2 + t(h - t)}{2(2h - t)}$ $x_1' = y_1' = h - x_1 = h - y_1$
<p data-bbox="127 1181 382 1207">Angular de alas iguales</p> 	$F = t(2h - t)$	$y_1 = \frac{h + t - 2c}{\sqrt{2}}$ $y_1' = \frac{h^2 + ht - t^2}{(2h - t)\sqrt{2}}$ $c = y_1' \frac{\sqrt{2}}{2}$

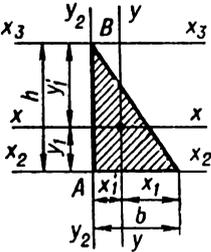
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math>; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = J_{x_1} - Fy_1^2$ $J_{x_1} = \frac{BH^3}{3} - \frac{h^3}{12}(b+3a)$ $J_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{h}{48} \frac{b^4 - a^4}{b - a}$	$W_x = \frac{J_x}{y_1} \text{ (para las fibras inferiores)}$ $W_x = \frac{J_x}{y'_1} \text{ (para las fibras superiores)}$ $W_y = \frac{HB^3}{6} - \frac{h}{24B} \frac{b^4 - a^4}{b - a}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{1}{3} [t(h-y_1)^3 + hy_1^3 - (h-t)(y_1-t)^2]$ $J_{x_2} = \frac{t(2h-3t)(h^2+t^2)}{6}$ $J_{y_2} = \frac{7h^4 - 5(h-t)^4}{12} - 2h^2y_1(h+y_1) + 2(h-t)(h-y_1)(y_1+t) - 4hy_1(h-t)^2$	$W_x = W_y = \frac{J_x}{y_1} \text{ (para las fibras izquierdas e inferiores)}$ $W_x = W_y = \frac{J_x}{y'_1} \text{ (para las fibras derechas y superiores)}$	$i_{\min} = i_{y_2} = \sqrt{\frac{J_{y_2}}{F}}$
$J_x = \frac{1}{3} \left[ 2c^4 - 2(c-t)^4 + t \left( h - 2c + \frac{t}{2} \right)^3 \right]$ $J_y = \frac{h^4 - (h-t)^4}{12}$	$W_{xs} = \frac{J_x}{y'_1} \text{ (para las fibras superiores)}$ $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1} \text{ (para las fibras inferiores)}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="150 324 405 349">Circular de alas desiguales</p> 	$F = t(b + h_1) = t(h + b_1)$	$x_1 = \frac{b^2 + h_1 t}{2(b + h_1)}$ $x_1' = b - x_1 = \frac{b^2 + h_1(2b - t)}{2(b + h_1)}$ $y_1 = \frac{h^2 + b_1 t}{2(h + b_1)}$ $y_1' = h - y_1 = \frac{h^2 + b_1(2h - t)}{2(h + b_1)}$
<p data-bbox="150 903 252 929">ión en Z</p> 	$F = ht_1 + 2t(b - t_1)$	$x_1 = b - \frac{t_1}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

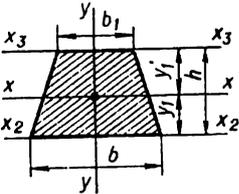
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{1}{3} [t(h - y_1)^3 + by_1^3 - b_1(y_1 - t)^3]$ $J_y = \frac{1}{3} [t(b - x_1)^3 + hx_1^3 - h_1(x_1 - t)^3]$ $J_{xy} = -\frac{bb_1hh_1t}{4(b + h_1)} = -\frac{bb_1hh_1t}{4(h + b_1)}$	$W_{xs} = \frac{J_x}{y'_1} \text{ (para las fibras superiores)}$ $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1} \text{ (para las fibras inferiores)}$ $W_{yd} = \frac{J_y}{x'_1} \text{ (para las fibras derechas)}$ $W_{yiz} = \frac{J_y}{x_1} \text{ (para las fibras izquierdas)}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = 0,29h$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 0,32b$
$J_x = \frac{bh^3 - (b - t_1)(h - 2t)^3}{12}$ $J_y = \frac{ht_1^3 + 6tb^2(b - t_1) + 2t(b - t_1)^3}{12}$ $J_{x_1} = \frac{J_x \cos^2 \alpha - J_y \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ $J_{y_1} = \frac{J_y \cos^2 \alpha - J_x \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{bt(b - t_1)(h - t)}{J_x - J_y}$	$W_x = \frac{bh^3 - (b - t_1)(h - 2t)^3}{6h}$ $W_y = \frac{ht_1^3 + 6tb^2(b - t_1) + 2t(b - t_1)^3}{6(2b - t_1)}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="127 312 230 337">Triángulo</p> 	$F = \frac{1}{2} bh$	$y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$ $d = \frac{1}{3} (x_1' - x_1)$

Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$ $J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{6}$ $J_{x_3} = \frac{bh^3}{4} = \frac{Fh^2}{2}$ $J_y = \frac{bh(b^2 - x'_1x_1)}{36} =$ $= \frac{F(b^2 - x'_1x_1)}{18}$ $J_{y_2} = \frac{h(x_1'^3 + x_1^3)}{12}$ $J_p = \frac{bh}{36} (h^2 + x_1'^2 +$ $+ x_1'^2x_1 + x_1^2)$ $J_{pA} = \frac{h}{12} (3bh^2 + x_1'^3 + x_1^3)$	$W_{x1} = \frac{bh^2}{12} \text{ (para las fibras inferiores)}$ $W_{x2} = \frac{bh^2}{24} \text{ (para las fibras superiores)}$ $W_{yd} = \frac{bh(b^2 - x'_1x_1)}{36x_1}$ (para las fibras derechas) $W_{yiz} = \frac{bh(b^2 - x'_1x_1)}{36x_1'}$ (para las fibras izquierdas)	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,2357h$ $i_y = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{b^2 - x'_1x_1} =$ $= 0,2357 \sqrt{b^2 - x'_1x_1}$
Para el triángulo equilátero con el lado $b$ y altura $h$		
$J_y = J_{y_2} = \frac{hb^3}{48} = \frac{Fb^3}{24} ;$ $J_t = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{h^4}{25,981} =$ $= \frac{3}{80} \frac{b^4}{\sqrt{3}} = \frac{b^4}{46,188}$	$W_{yd} = W_{yiz} = \frac{hb^2}{12}$ $W_t = 0,05b^3 =$ $= \frac{h^3}{7,5\sqrt{3}} = \frac{h^3}{12,99} = \frac{2J_t}{h}$	$i_y = \frac{b}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,204b$
Para el triángulo isósceles con la base $b$ , altura $h$ y ángulo en el vértice $\alpha < 15^\circ$		
$J_t = \frac{1}{12} hb^3 - 0,105b^4$	$W_t = \frac{1}{12} hb^2 - 0,105b^3 =$ $= \frac{J_t}{b}$	

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="127 325 352 354">Triángulo rectángulo</p> 	$F = \frac{1}{2} bh$	$x_1' = \frac{1}{3} b$ $x_1 = \frac{2}{3} b$ $y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$

Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$	$W_{xi} = \frac{bh^2}{12}$ (para las fibras inferiores)	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,2357h$
$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{6}$	$W_{x_1} = \frac{bh^2}{24}$ (para las fibras superiores)	$i_y = \frac{b}{3\sqrt{2}} = 0,2357b$
$J_{x_2} = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{2}$	$W_{y1z} = \frac{b^2h}{12}$ (para las fibras izquierdas)	
$J_y = \frac{b^3h}{36} = \frac{Fb^2}{18}$	$W_{y_1d} = \frac{b^2h}{24}$ (para las fibras derechas)	
$J_{y_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{Fb^2}{6}$		
$J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$		
$J_{x_1y_1} = \frac{b^2h^2}{24}$		
$J_{x_2y_2} = -\frac{b^2h^2}{8}$		
$J_p = \frac{bh}{36} (h^2 + b^2) =$ $= \frac{bhc^2}{36}$		
$c^2 = h^2 + b^2$		
$J_{pA} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) =$ $= \frac{bhc^2}{12}$		
$J_{rB} = \frac{bh}{12} (3h^2 + b^2)$		

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Trapezio</p>  <p>El eje <math>x - x</math> es central</p>	$F = \frac{1}{2} (b_1 + b)h$	$y_1 = \frac{b + 2b_1}{3(b + b_1)} h$ $y'_1 = \frac{2b + b_1}{3(b + b_1)} h$ <p>Para un trapezio isósceles</p> $y'_1 = \frac{3b_1 + 2b_0}{3(2b_1 + b_0)} h$ $x_1 = \frac{b}{2}$ <p>Para un trapezio cuneiforme</p>

<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
---	---	---

$$J_x = \frac{h^3(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{36(b + b_1)} = \frac{Fh^2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{18(b + b_1)^2}$$

$$J_{x_1} = \frac{h^3(b + 3b_1)}{12} = \frac{Fh^2(b + 3b_1)}{6(b + b_1)}$$

$$J_{x_2} = \frac{h^3(3b + b_1)}{12} = \frac{Fh^2(3b + b_1)}{6(b + b_1)}$$

$$W_{x_1} = \frac{h^2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12(b + 2b_1)}$$

(para las fibras inferiores)

$$W_{x_2} = \frac{h^2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12(2b + b_1)}$$

(para las fibras superiores)

$$i_x = \frac{h}{6(b + b_1)} \times \sqrt{2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}$$

con la base superior  $b_1$  e inferior  $b_1 + b_0 = b$

$$J_x = \frac{h^3(6b_1^2 + 6b_1b_0 + b_0^2)}{36(2b_1 + b_0)}$$

$$J_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b - b_1}$$

$$W_{x_3} = \frac{h^2(6b_1^2 + 6b_1b_0 + b_0^2)}{12(3b_1 + 2b_0)}$$

$$W_y = \frac{h}{24} \cdot \frac{b^4 - b_1^4}{b^2 - b_1^2}$$

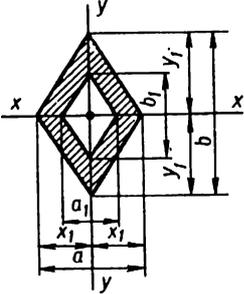
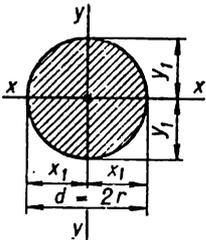
$$i_x = \frac{h}{6(2b_1 + b_0)} \times \sqrt{2(6b_1^2 + 6b_1b_0 + b_0^2)}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{24}}$$

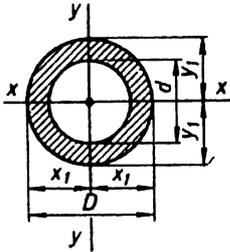
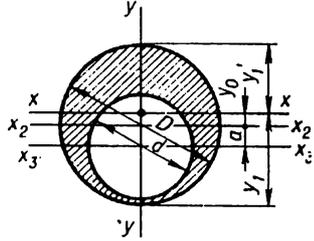
con la base mayor  $b$ , menor  $b_1$  y la altura  $h > 4b$

$$J_t = \frac{h(b^4 - b_1^4)}{12(b - b_1)} - 0,105(b^4 + b_1^4)$$

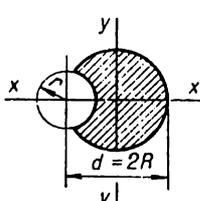
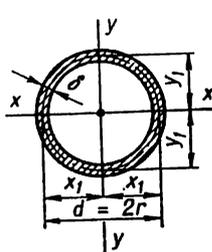
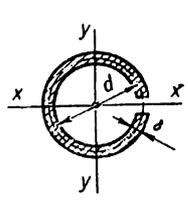
$$W_t = \frac{J_t}{b} = \frac{h(b^4 - b_1^4)}{12b(b - b_1)} - 0,105 \frac{b^4 + b_1^4}{b}$$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Rombo hueco</p> 	$F = \frac{1}{2} (ab - a_1b_1)$	$x_1 = \frac{a}{2}$ $y_1 = \frac{b}{2}$
<p>Círculo</p>  <p>Cualquier eje central es principal</p>	$F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 \approx$ $\approx 0,785d^2$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$

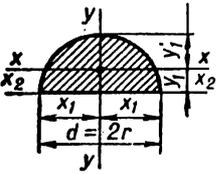
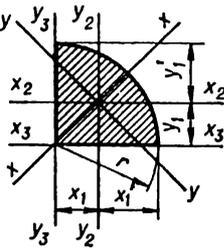
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{48}$ $J_y = \frac{a^3b - a_1^3b_1}{48}$	$W_x = \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{24b}$ $W_y = \frac{a^3b - a_1^3b_1}{24a}$	$i_x = \sqrt{\frac{ab^3 - a_1b_1^3}{24(ab - a_1b_1)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{a^3b - a_1^3b_1}{24(ab - a_1b_1)}}$
$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} =$ $= \frac{Fd^2}{16} = \frac{Fr^2}{4} \approx$ $\approx 0,05d^4 \approx 0,785r^4$ $J_p = J_t = 2J_x =$ $= 2J_y = \frac{\pi d^4}{32} =$ $= \frac{\pi r^4}{2} \approx 0,1d^4 \approx$ $\approx 1,57r^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4} \approx$ $\approx 0,1d^3 \approx 0,785r^3$ $W_p = W_t = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2} \approx$ $\approx 0,2d^3 \approx 1,57r^3$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="130 332 201 357"><b>Anillo</b></p>  <p data-bbox="130 698 404 749">Cualquier eje central es principal</p>	$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} =$ $= \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) \approx$ $\approx 0,785 D^2 (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = y_1 = \frac{D}{2}$
<p data-bbox="130 971 404 1021"><b>Círculo con orificio no concéntrico</b></p>  <p data-bbox="130 1345 430 1396">El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = \frac{D}{2}$ $y_0 = \beta D \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$ $y_1 = \frac{D}{2} \frac{1 - \alpha^2(1 + 2\beta)}{1 - \alpha^2}$ $y_1' = \frac{D}{2} \frac{1 - \alpha^2(1 + 2\beta)}{1 - \alpha^2}$ $\beta = \frac{a}{D}$

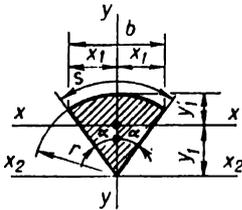
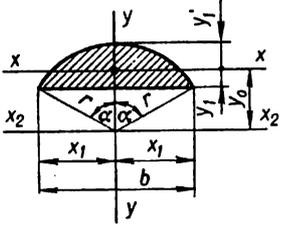
Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} =$ $= \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) =$ $= \frac{F(D^2 + d^2)}{16} =$ $= \frac{FD^2}{16} (1 + \alpha^2) \approx$ $\approx 0,05D^4(1 - \alpha^4)$ $J_p = J_t = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} =$ $= \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1D^4(1 - \alpha^4)$	$W_x = W_y =$ $= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} =$ $= \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1D^3(1 - \alpha^4)$ $W_p = W_t = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} =$ $= \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,2D^3(1 - \alpha^4)$	$i_x = i_y =$ $= \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2} =$ $= \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$
$J_x = \frac{\pi D^4}{64} \left( 1 - \alpha^4 - \right.$ $\left. - 16 \frac{\alpha^2 \beta^2}{1 - \alpha^2} \right)$ $J_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$	$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \times$ $\times \frac{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) - 16\alpha^2\beta^2}{1 - \alpha^2(1 + 2\beta)}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_x = \frac{\pi D^3}{32} \times$ $\times \frac{(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^4) - 16\alpha^2\beta^2}{1 - \alpha^2(1 - 2\beta)}$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$	$i_x = \frac{D}{4} \times$ $\times \sqrt{1 + \alpha^2 - 16 \left( \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} \right)^2}$ $i_y = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Círculo con recorte circular</p>  <p>El eje <math>x - x</math> es principal central</p>	—	—
<p>Anillo de paredes delgadas <math>\delta &lt; 0,1d</math></p>  <p>Cualquier eje central es principal</p>	$F = \pi \delta d$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$
<p>Anillo circular no cerrado de paredes delgadas</p>  <p><math>\delta \ll d</math> El eje <math>x - x</math> es principal central</p>	—	$x_1 = y_1 = \frac{d + \delta}{2}$

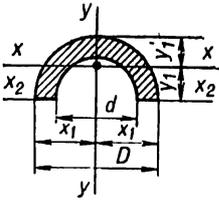
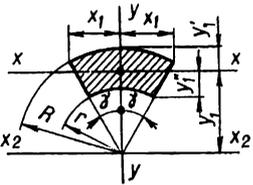
Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$																														
$J_t = k_1 R^4$	$W_t = \frac{R^3}{k_2}$	—																														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td><math>\frac{r}{R}</math></td> <td>0</td> <td>0,005</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,8</td> <td>1</td> <td>1,5</td> </tr> <tr> <td><math>k_1</math></td> <td>1,57</td> <td>1,56</td> <td>1,56</td> <td>1,46</td> <td>1,22</td> <td>0,92</td> <td>0,63</td> <td>0,38</td> <td>0,07</td> </tr> <tr> <td><math>k_2</math></td> <td>0,64</td> <td>1,22</td> <td>1,22</td> <td>1,23</td> <td>1,31</td> <td>1,52</td> <td>1,91</td> <td>2,63</td> <td>7,14</td> </tr> </table>	$\frac{r}{R}$	0	0,005	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	$k_1$	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07	$k_2$	0,64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14		
$\frac{r}{R}$	0	0,005	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5																							
$k_1$	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07																							
$k_2$	0,64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14																							
$J_x = J_y = \frac{\pi \delta d^3}{8} =$ $= \pi \delta r^3 = \frac{F d^2}{8} \approx$ $\approx 0,393 \delta d^3$ $J_p = J_t = \frac{\pi \delta d^3}{4} =$ $= 2 \pi \delta r^3 \approx 0,785 \delta d^3$	$W_x = W_y = \frac{\pi \delta d^2}{4} =$ $= \pi \delta r^2 \approx 0,785 \delta d^2$ $W_p = W_t \approx \frac{\pi \delta d^2}{2} =$ $= 2 \pi \delta r^2 \approx 1,57 \delta d^2$	$i_x = i_y = \frac{d}{2\sqrt{2}} =$ $= \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0,353 d$ <p>La elipse de inercia es un círculo</p>																														
$J_t = \frac{\pi d \delta^3}{3}$	$W_t = \frac{(\pi d \delta)^2}{3 \pi d + 1,8 \delta} \approx$ $\approx \frac{\pi d \delta^2}{3}$ <p>En los puntos de los contornos interior y exterior de la sección</p> $\tau_{\text{máx}} = \frac{3 \pi d + 1,8 \delta}{(\pi d \delta)^2} M_t$																															

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Semicírculo</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2} \approx 0,393d^2$	$x_1 = \frac{d}{2} = r$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{d}{\pi} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \approx 0,212d$ $y'_1 \approx 0,288d$
<p>Un cuarto del círculo</p> 	$F = \frac{\pi r^2}{4} \approx 0,785r^2$	$x_1 = y_1 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424r$ $x'_1 = y'_1 \approx 0,576r$

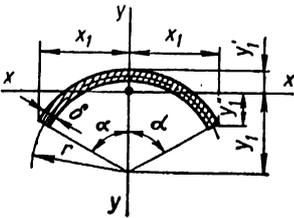
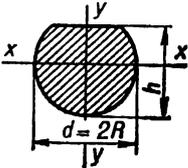
Momentos de inercia: axiales $J_x, J_y$ ; centrífugo $J_{xy}$ ; polar $J_p$ y durante la torsión libre $J_t$	Módulos de la sección: axiales $W_x, W_y$ ; polar $W_p$ y durante la torsión libre $W_t$	Radios de giro $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ ; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x \approx \frac{d^4}{16} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,00686d^4 \approx 0,11r^4$ $J_y = J_{x_2} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{F d^2}{16} = \frac{F r^2}{4} \approx 0,0246d^4 \approx 0,393r^4$	$W_x \approx 0,0324d^3 \approx 0,259r^3$ (para las fibras inferiores) $W_x \approx 0,0239d^3 \approx 0,191r^3$ (para las fibras superiores) $W_y = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8} \approx 0,05d^3 \approx 0,393r^3$	$i_x \approx 0,132d$ $i_y = \frac{d}{4}$
$J_{x_{máx}} \approx 0,0714r^4$ $J_{y_{mín}} \approx 0,0384r^4$ $J_{x_2} = J_{y_2} \approx 0,0549r^4$ $J_{x_3} = J_{y_3} = \frac{\pi r^4}{16} \approx 0,196r^4$ $J_{x_2 y_2} = -0,0165r^4$ $J_{x_3 y_3} = \frac{r^4}{8}$	$W_{x_2} = W_{y_2} = \frac{\pi^2 r^3}{48} \times \frac{9\pi^2 - 64}{3\pi - 4} \approx 0,923r^3$ (para las fibras superiores <sup>s</sup> y derechas) $W_{x_2} = W_{y_2} = \frac{\pi^2 r^3}{192} (9\pi^2 - 64) \approx 1,245r^3$ (para las fibras inferiores e izquierdas)	$i_{x_{máx}} \approx 0,302r$ $i_{y_{mín}} \approx 0,221r$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="134 304 285 329">Sector circular</p>  <p data-bbox="134 623 426 673">El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \frac{sr}{2} = \alpha r^2$ $s = 2r\alpha$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = \frac{b}{2} = r \operatorname{sen} \alpha$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{rb}{s} = \frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha} = 38,2 \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha^\circ}$ $y'_1 = r \left( 1 - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha} \right)$ $b = 2r \operatorname{sen} \alpha$
<p data-bbox="134 829 321 855">Segmento circular</p>  <p data-bbox="134 1165 426 1216">El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $b = 2r \operatorname{sen} \alpha$ $y_0 = \frac{4r \operatorname{sen}^3 \alpha}{3(2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)}$ $y_1 = r \left( \frac{4}{3} \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} - \operatorname{cos} \alpha \right)$ $y'_1 = r \left( 1 - \frac{4}{3} \times \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} \right)$

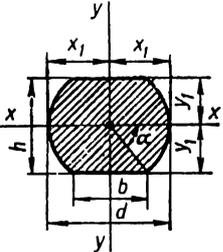
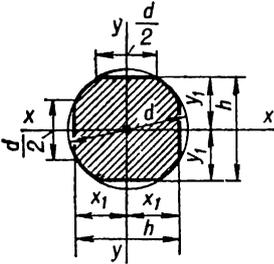
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x</math>, <math>J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x</math>, <math>W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{r^4}{8} \left( 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{32 \operatorname{sen}^2 \alpha}{9\alpha} \right) =$ $= \frac{Fr^2}{8\alpha} \left( 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{32 \operatorname{sen}^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ $J_{x_1} = \frac{r^4}{8} (2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha)$ $J_y = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha) =$ $= \frac{Fr^2}{8\alpha} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$	$W_x = \frac{r^3}{8} \times \frac{2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{32 \operatorname{sen}^2 \alpha}{9\alpha}}{1 - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_x = \frac{3r^3 \alpha}{16 \operatorname{sen} \alpha} \left( 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{32 \operatorname{sen}^2 \alpha}{9\alpha} \right)$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y = r^3 \frac{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$	$i_x = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha} - \frac{16 \operatorname{sen}^2 \alpha}{9\alpha^2}}$ $i_y = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha}}$
$J_x = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha + 4 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha) =$ $= \frac{Fr^2}{4} \left( 1 + \frac{4 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} \right)$ $J_y = \frac{r^4}{8} \left( 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{4}{3} \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha \right) =$ $= \frac{Fr^2}{4} \left( 1 - \frac{4}{3} \times \frac{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} \right)$ $J_{x_2} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{cos} 2\alpha)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ (para las fibras inferiores) $W_x = \frac{J_x}{y_1'}$ (para las fibras superiores) $W_y = \frac{r^3}{8 \operatorname{sen} \alpha} \left( 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{4}{3} \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha \right)$	$i_x = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 + \frac{4 \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}}$ $i_y = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 - \frac{4}{3} \frac{\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Semianillo</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{8} =$ $= \frac{\pi D^2}{8} (1 - \alpha^2) \approx$ $\approx 0,393 D^2 (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = \frac{D}{2}$ $y_1 = \frac{2}{3\pi} \frac{D^2 + Dd + d^2}{D + d} =$ $= \frac{2}{3} \frac{D}{\pi} \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha} \approx$ $\approx 0,212 D \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha}$ $y_1' \approx D \left( 0,288 - \right.$ $\left. - 0,212 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \right)$
<p>Sector del semianillo</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \gamma(R^2 - r^2) =$ $= \gamma R^2 (1 - \alpha^2)$ $\gamma = \frac{\pi \gamma^\circ}{180^\circ}$ $\alpha = \frac{r}{R}$	$x_1 = R \operatorname{sen} \gamma$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \times$ $\times \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} =$ $= \frac{2}{3} \frac{R \operatorname{sen} \gamma}{\gamma} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2}$ $y_1' = R \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\gamma} \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} \right)$ $y_1'' = \frac{2R \operatorname{sen} \gamma}{3\gamma} \times$ $\times \left( \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} - \frac{3}{2} \alpha \gamma \operatorname{ctg} \gamma \right)$

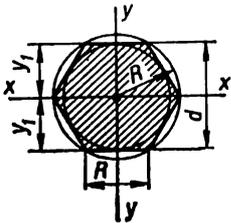
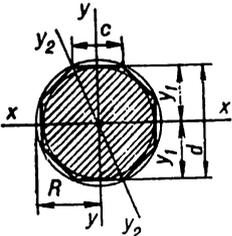
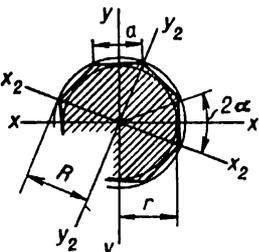
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math>; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$\frac{J_x \approx 0,00686(D^4 - d^4) - 0,0177D^2d^2(D - d)}{D + d} =$ $= 0,00686D^4 \left( 1 - \alpha^4 - 2,54\alpha^2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)$ $J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{128} =$ $= \frac{\pi D^4}{128} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,0246D^4(1 - \alpha^4)$	$W_x \approx 0,00686D^3 \times \frac{(1 - \alpha^4)(1 + \alpha) - 2,54\alpha^2(1 - \alpha)}{0,288(1 + \alpha) - 0,212\alpha^2}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_x \approx 0,0324D^3 \times \frac{(1 - \alpha^4)(1 + \alpha) - 2,54\alpha^2(1 - \alpha)}{1 + \alpha + \alpha^2}$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y = \frac{\pi D^3}{64} (1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,05D^3(1 - \alpha^4)$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2} =$ $= \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2}$
$J_x = \frac{R^4 - r^4}{8} \left( 2\gamma + \frac{32 \text{ sen}^2 \gamma}{9\gamma} \right) =$ $+ \text{sen } 2\gamma - \frac{32 \text{ sen}^2 \gamma}{9\gamma} =$ $= \frac{R^4}{8} (1 - \alpha^4) \left( 2\gamma + \frac{32 \text{ sen}^2 \gamma}{9\gamma} \right) =$ $+ \text{sen } 2\gamma - \frac{32 \text{ sen}^2 \gamma}{9\gamma} =$ $= \frac{FR^2}{8\gamma} (1 + \alpha^2) \left( 2\gamma + \frac{32 \text{ sen}^2 \gamma}{9\gamma} \right)$ $J_{x_1} = \frac{R^4 - r^4}{8} (2\gamma + \text{sen } 2\gamma) =$ $= \frac{R^4}{8} (1 - \alpha^4) (2\gamma + \text{sen } 2\gamma)$ $J_y = \frac{R^4 - r^4}{8} (2\gamma - \text{sen } 2\gamma) =$ $= \frac{R^4}{8} (1 - \alpha^4) (2\gamma - \text{sen } 2\gamma) =$ $- \text{sen } 2\gamma = \frac{FR^2}{8\gamma} \times$ $\times (1 + \alpha^2) (2\gamma - \text{sen } 2\gamma)$	$W_x = \frac{J_x}{y'_1}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_x = \frac{J_x}{y''_1}$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y = \frac{R^3}{8} (1 - \alpha^4) \times$ $\times \frac{2\gamma - \text{sen } 2\gamma}{\text{sen } \gamma}$	$i_x = \frac{R}{2} \times$ $\times \sqrt{(1 + \alpha^2) \left( 1 + \frac{\text{sen } 2\gamma}{2\gamma} - \frac{16 \text{ sen}^2 \gamma}{9\gamma^2} \right)}$ $i_y = \frac{R}{2} \times$ $\times \sqrt{(1 + \alpha^2) \left( 1 - \frac{\text{sen } 2\gamma}{2\gamma} \right)}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Sector del anillo de paredes delgadas</p>  <p><math>\delta \ll 2r</math></p> <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = 2ar\delta$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = r \operatorname{sen} \alpha$ $y_1 = r \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$ $y'_1 = r \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)$ $y''_1 = r \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} - \cos \alpha \right)$
<p>Círculo con rebajo plano</p> $\alpha = \frac{h}{d} > 0,5$  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	<p>—</p>	<p>—</p>

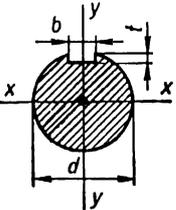
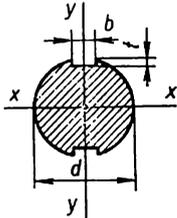
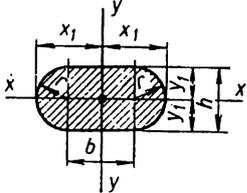
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{\delta r^3}{2} \left( 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha} \right) =$ $= \frac{Fr^2}{4\alpha} \left( 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha} \right)$ $J_y = \frac{\delta r^3}{2} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha) =$ $= \frac{Fr^2}{4\alpha} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$	$W_x \approx \frac{\delta r^2}{2} \times$ $\frac{2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_x \approx \frac{\delta r^2}{2} \times$ $\frac{2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} - \cos \alpha}$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_y \approx \frac{\delta r^2}{2} \cdot \frac{2\alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$	$i_x = \frac{r}{2} \times$ $\times \sqrt{2 + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha} - \frac{4 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\alpha^2}}$ $i_y = \frac{r}{2} \times$ $\times \sqrt{2 - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}}$
$J_t = \frac{d^4}{16} \left( 2,6 \frac{h}{d} - 1 \right) =$ $= \frac{d^4}{16} (2,6\alpha - 1)$	$W_t = \frac{d^3(2,6\alpha - 1)}{8(0,3\alpha + 0,7)}$	

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Círculo con segmentos cortados arriba y abajo</p>  <p>Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son principales centrales</p>	<p>a) <math>b = d \cos \alpha</math>  <math>h = d \operatorname{sen} \alpha</math></p> $F = \frac{d^2}{4} (2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha)$ <p>b) <math>b = \frac{d}{2}</math>; <math>h = 0,866d</math></p> $F = 0,74d^2;$ <p>c) <math>b = \frac{d}{3}</math>; <math>h = 0,943d</math></p> $F = 0,773d^2$	$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = \frac{d}{2} \operatorname{sen} \alpha$ $x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = 0,433d$ $x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = 0,471d$
<p>Círculo con segmentos cortados por cuatro lados</p>  <p>Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son principales centrales</p>	$F = \frac{\pi d^2}{12} \left( 1 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) = 0,694d^2$	$x_1 = y_1 = 0,433d$

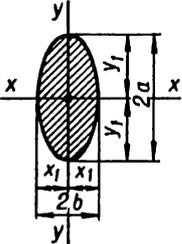
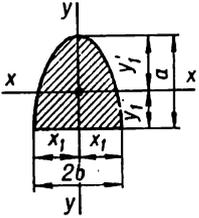
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{d^4}{32} \left( \alpha - \frac{\text{sen } 4\alpha}{4} \right)$ $J_y = \frac{d^4}{32} \left( \alpha + \frac{\text{sen } 2\alpha}{2} + \frac{\text{sen } 2\alpha \cos^2 \alpha}{3} \right)$ $J_x = 0,0395d^4$ $J_y = 0,0485d^4$ $J_x = 0,0461d^4$ $J_y = 0,049d^4$	$W_x = \frac{d^3}{16 \text{ sen } \alpha} \left( \alpha - \frac{\text{sen } 4\alpha}{4} \right)$ $W_y = \frac{d^3}{16} \left( \alpha + \frac{\text{sen } 2\alpha}{2} + \frac{\text{sen } 2\alpha \cos^2 \alpha}{3} \right)$ $W_x = 0,0912d^3$ $W_y = 0,097d^3$ $W_x = 0,0978d^3$ $W_y = 0,098d^3$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ $i_x = 0,231d$ $i_y = 0,256d$ $i_x = 0,244d$ $i_y = 0,252d$
$J_x = J_y = 0,038d^4$	$W_x = W_y = 0,087d^3$	$i_x = i_y = 0,234d$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Hexágono regular</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = 0,866d^2 =$ $= 2,598R^2$	$y_1 = \frac{d}{2}$
<p>Octógono regular</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F = 0,828d^2 =$ $= 4,828c^2$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2}$
<p>Polígono regular de <math>n</math> lados</p> 	$F = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \alpha =$ $= nr^2 \operatorname{tg} \alpha =$ $= \frac{nar}{2}$	$R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \alpha}$ $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

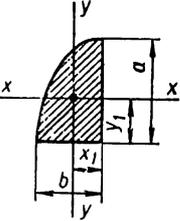
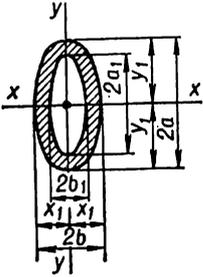
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = J_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 =$ $= 0,5413R^4 = 0,06d^4$ $J_t = 0,533F \frac{d^2}{4}$	$W_x = \frac{5}{8} R^3 = 0,625R^3 =$ $= 0,12d^3$ $W_y = 0,5413R^3 = 0,06d^3$ $W_t = 0,436F \frac{d}{2}$	$i_x = i_y = 0,456R =$ $= 0,263d$
$J_x = J_y = J_{y_1} =$ $= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 =$ $= 0,638R^4 = 0,0547d^4$ $J_t = 0,52F \frac{d^2}{4}$	$W_x = W_y = 0,6906R^3 =$ $= 0,1095d^3$ <p>Respecto a la diagonal</p> $W_{y_1} = 0,638R^3 = 0,1012d^3$ $W_t = 0,447F \frac{d}{2}$	$i_x = i_y = i_{y_1} = 0,257d$
$J_x = J_{x_1} = \frac{F}{24} (6R^2 - a^2) =$ $= \frac{nar}{48} (6R^2 - a^2)$ $J_x = J_{x_1} = \frac{F}{48} (12r^2 + a^2) =$ $= \frac{nar}{96} (12r^2 + a^2)$		$i_x = \sqrt{\frac{6R^2 - a^2}{24}}$ $i_{x_1} = \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Sección circular con un chavetero</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F \approx \frac{\pi d^2}{4} - bt$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2}$
<p>Sección circular con dos chaveteros</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son principales centrales</p>	$F \approx \frac{\pi d^2}{4} - 2bt$	$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 \approx \frac{d}{2}$
<p>Pila de puente con redondeos</p>  <p>Los ejes <math>x - x</math> e <math>y - y</math> son centrales principales</p>	$F = bh + \pi r^2 =$ $= bh \left( 1 + \frac{\pi}{4} \alpha \right)$ $r = \frac{h}{2}$ $\alpha = \frac{h}{b}$	$x_1 = \frac{b + h}{2} = \frac{b}{2} (1 + \alpha)$ $y_1 = \frac{h}{2}$

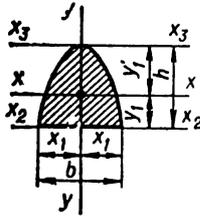
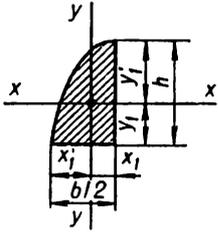
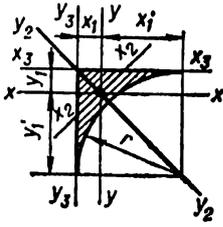
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x \approx \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ $J_t \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$	$W_x \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$ $W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x \approx \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{2}$ $J_t \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2}$	$W_x \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$ $W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} \left( 1 + \frac{3\pi}{16} \alpha \right)$ $J_y = \frac{hb^3}{12} [1 + 0,165\alpha^3 + 3\pi\alpha(0,5 + 0,212\alpha)^2]$	$W_x = \frac{bh^2}{6} \left( 1 + \frac{3\pi}{16} \alpha \right)$ $W_y = \frac{hb^2}{6(1+\alpha)} [1 + 0,165\alpha^3 + 3\pi\alpha(0,5 + 0,212\alpha)^2]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="127 324 191 349"><b>Elipse</b></p>  <p data-bbox="127 685 423 735">Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son centrales principales</p>	$F = \pi ab$ $\frac{a}{b} > 1$	$x_1 = b$ $y_1 = a$
<p data-bbox="127 974 235 999"><b>Semi-elipse</b></p>  <p data-bbox="127 1307 405 1357">El eje <math>y-y</math> es principal central</p>	$F = \frac{\pi ab}{2}$	$x_1 = b$ $y_1 = \frac{4}{3\pi} a$ $y'_1 = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) a$

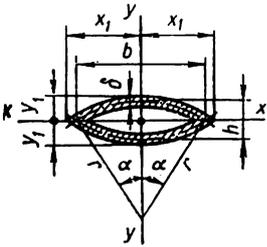
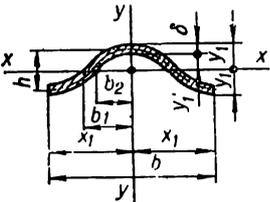
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x</math>, <math>J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x</math>, <math>W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Fa^2}{4} \approx 0,785a^3b$ $J_y = \frac{\pi ab^3}{4} = \frac{Fb^2}{4} \approx 0,785ab^3$ $J_p = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) = \frac{F}{4} (a^2 + b^2)$ $J_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{F^2}{\pi^2(a^2 + b^2)} = \frac{F^4}{4\pi^2 J_p}$	$W_x = \frac{\pi a^3 b}{4} \approx 0,785a^3b$ $W_y = \frac{\pi ab^3}{4} \approx 0,785ab^3$ $W_t = \frac{\pi b^2 a}{2}$ <p>En los extremos del eje menor</p> $\tau_{\text{máx}} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2M_t}{\pi b^2 a}$ <p>En los extremos del eje mayor</p> $\tau = \frac{b\tau_{\text{máx}}}{a}$	$i_x = \frac{a}{2}$ $i_y = \frac{b}{2}$
$J_x = ba^2 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = 2Fa^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2} \right)$ $J_y = \frac{\pi ab^3}{8} = \frac{Fb^2}{4}$	$W_x = \frac{3}{4} ba^2 \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{8}{9} \right)$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_x = \frac{ba^2 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)}{1 - \frac{4}{3\pi}}$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_y = \frac{\pi ab^2}{8} \approx 0,392ab^2$	$i_x = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2}$ $i_y = \frac{b}{2}$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="130 290 359 315">Un cuarto de la elipse</p> 	$F = \frac{\pi ab}{4}$	$x_1 = \frac{4}{3\pi} b$ $y_1 = \frac{4}{3\pi} a$
<p data-bbox="130 609 262 635">Elipse hueca</p>  <p data-bbox="130 1004 409 1055">Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son centrales principales</p>	$F = \pi(ab - a_1b_1)$	$x_1 = b$ $y_1 = a$ $a - a_1 = b - b_1 = \delta$  $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = n > 1$ $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \alpha < 1$

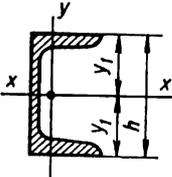
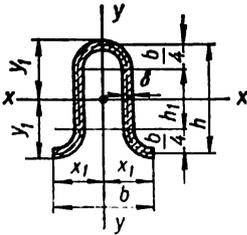
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = ba^3 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) =$ $= 4Fa^3 \left( \frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2} \right)$ $J_y = ab^3 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) =$ $= 4Fb^3 \left( \frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2} \right)$	$W_{x_{\min}} =$ $= \frac{3}{4} ba^2 \left( \frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{9} \right)$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_{y_{\min}} =$ $= \frac{3}{4} ab^2 \left( \frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{9} \right)$ <p>(para las fibras derechas)</p>	$i_x = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2}$ $i_y = \frac{b}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2}$
$J_x = \frac{\pi}{4} (a^3b - a_1^3b_1) \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} a^2(a + 3b)\delta$ $J_y = \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_1b_1^3) \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} b^2(b + 3a)\delta$	$W_x = \frac{\pi}{4} \frac{a^3b - a_1^3b_1}{a} \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} a(a + 3b)\delta$ $W_y = \frac{\pi}{4} \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{b} \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} b(b + 3a)\delta$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
<p>Los valores aproximados de <math>J</math> y <math>W</math> son válidos cuando las relaciones <math>\delta: a_1</math> y <math>\delta: b_1</math> son pequeñas</p>		
$J_t = \frac{\pi b^4 n^3}{n^2 + 1} (1 - \alpha^4)$	$W_t = \frac{\pi b^3 n}{2} (1 - \alpha^4)$	
<p>En el extremo del semieje menor</p>		
$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} ;$		
<p>en el extremo del semieje mayor</p>		
$\tau = \frac{\tau_{\max}}{n}$		
<p>Cuando el espesor es pequeño, la distribución de las tensiones por la sección puede considerarse uniforme</p>		
$\tau = \frac{M_t}{2F\delta}$		

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Segmento parabólico</p>  <p>El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = \frac{2}{3} bh$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{2}{5} h$ $y'_1 = \frac{3}{5} h$
<p>Semisegmento parabólico</p> 	$F = \frac{bh}{3}$	$x_1 = \frac{3}{16} b$ $x'_1 = \frac{5}{16} b$ $y_1 = \frac{2}{5} h$ $y'_1 = \frac{3}{5} h$
<p>Triángulo circular</p> 	$F = 0,215r^2$	$x_1 = y_1 = 0,223r$ $x'_1 = y'_1 = 0,777r$

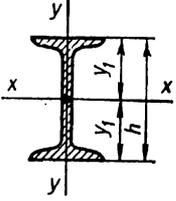
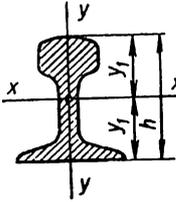
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{8}{175} bh^3 = \frac{12Fh^2}{175}$ $J_{x_1} = \frac{16}{105} bh^3 = \frac{8Fh^2}{35}$ $J_{x_2} = \frac{2}{7} bh^3 = \frac{3Fh^2}{7}$ $J_y = \frac{hb^3}{30} = \frac{Fb^2}{20}$	$W_x = \frac{4}{35} bh^2$ <p>(para las fibras inferiores)</p> $W_x = \frac{8}{105} bh^2$ <p>(para las fibras superiores)</p> $W_y = \frac{hb^2}{15}$	$i_x = \frac{2}{5} h \sqrt{\frac{3}{7}}$ $i_y = \frac{b}{2\sqrt{5}}$
$J_x = \frac{4}{175} bh^3 = \frac{12Fh^2}{175}$	$W_{x_{\min}} = \frac{2}{35} bh^2$ <p>(para las fibras inferiores)</p>	$i_x = \frac{2}{5} h \sqrt{\frac{3}{7}}$
$J_x = J_y = 0,00755r^4$ $J_{x_1} = 0,003r^4$ $J_{x_2} = J_{y_2} = 0,0181r^4$ $J_{y_1} = 0,0121r^4$	$W_{x_{2\min}} = 0,0097r^3$	$i_{x_{2\min}} = 0,187r$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="127 325 383 349">Sección hueca lenticular</p>  <p data-bbox="127 680 424 730">Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son centrales principales</p>	$F = \alpha \left( 1 + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) h \delta = \frac{\alpha \delta}{h} (h^2 + b^2) = 4\alpha r \delta$ $b = h \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$ $r = \frac{h}{4} \left( 1 + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \right)$	$x_1 = \sqrt{(\delta + h) \left( r + \frac{\delta - h}{4} \right)}$ $y_1 = \frac{\delta + h}{2}$
<p data-bbox="127 924 424 999">Hierro ondulado (las ondas son formadas por arcos parabólicos)</p>  <p data-bbox="127 1285 424 1335">El eje <math>y-y</math> es principal central</p>	$F = 12,5\delta \frac{b}{h} \times \left\{ \frac{4h}{b} \sqrt{1 + \left( \frac{4h}{b} \right)^2} + \ln \left[ \frac{4h}{b} + \sqrt{1 + \left( \frac{4h}{b} \right)^2} \right] \right\} \approx \frac{1}{3} \delta (2b + 5,2h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h + \delta}{2}$ $y'_1 = \frac{h - \delta}{2}$ $b_1 = \frac{b + 2,6\delta}{4}$ $b_2 = \frac{b - 2,6\delta}{4}$

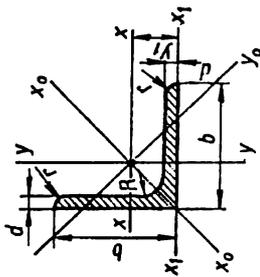
<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radio de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = r^3 \delta [2\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 3 \operatorname{sen} 2\alpha] =$ $= \frac{Fr^2}{4\alpha} [2\alpha(2 + \cos 2\alpha) - 3 \operatorname{sen} 2\alpha]$ $J_y = r^3 \delta (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha) =$ $= \frac{Fr^2}{4\alpha} (2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1} = \frac{2J_x}{\delta + h}$ $W_y = \frac{J_y}{x_1}$	$i_x = r \times \sqrt{\frac{2 + \cos 2\alpha}{2} - \frac{3 \operatorname{sen} 2\alpha}{4\alpha}}$ $i_y = r \times \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4\alpha}}$ $= \frac{r}{2} \sqrt{2 - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}}$
$J_x = \frac{1280}{21} \frac{1}{b} (b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3) =$ $= \frac{64}{105} (b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3) =$ $= \frac{16}{105} [b(y_1^3 - y_1'^3) + 2,6\delta(y_1^3 + y_1'^3)]$	$W_x = \frac{2J_x}{h + \delta}$	$i_x = \sqrt{\frac{3J_x}{\delta(2b + 5,2h)}} \approx$ $\approx 1,35 \times \sqrt{\frac{b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3}{\delta(2b + 5,2h)}}$

Forma de la sección	Area de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p data-bbox="130 332 426 383">Perfil canal laminado estándar puesto de canto</p>  <p data-bbox="130 635 426 685">Las fórmulas son aproximadas, <math>h</math>, cm</p> <p data-bbox="130 702 426 752">El eje <math>x - x</math> es principal central</p>	<p data-bbox="592 337 609 354">—</p>	$y_1 = \frac{h}{2}$
<p data-bbox="130 925 426 1001">Hierro ondulado (las ondas son formadas por arcos circulares)</p>  <p data-bbox="130 1328 426 1379">El eje <math>y - y</math> es principal central</p>	$F = 2\delta \left( \frac{\pi b}{4} + h_1 \right)$ $h_1 = h - \frac{b}{2}$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h + \delta}{2}$

<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x = \frac{\delta}{4} \left( \frac{\pi b^3}{16} + b^2 h_1 + \frac{\pi b h_1^3}{2} + \frac{2}{3} h_1^3 \right)$	$W_x = \frac{2J_x}{h + \delta}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x \approx \frac{h(h + 5)^3}{162}$	$W_x \approx \frac{(h + 5)^3}{81}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$

Forma de la sección	Área de la sección $F$	Coordenadas de los puntos extremos de la sección
<p>Doble T laminado estándar puesto de canto</p>  <p>Las fórmulas son aproximadas, <math>h</math>, cm Los ejes <math>x-x</math> e <math>y-y</math> son principales centrales</p>	-	$y_1 = \frac{h}{2}$
<p>Sección de carril ferroviario (fórmulas aproximadas)</p>  <p>El eje <math>y-y</math> es principal central</p>	$F \approx 0,238h^2$	$y_1 \approx 0,5h$
<p>Sección de cualquier forma. Las fórmulas pueden utilizarse solamente para la evaluación aproximada del valor del momento de inercia y del módulo de la sección respecto al eje central</p>	<p><math>F</math> es el área dentro del contorno exterior de la sección</p>	<p><math>h</math> y <math>b</math> son la altura y el ancho de la sección</p> <p><math>s</math> y <math>t</math> son el perímetro y espesor (para la sección hueca)</p>

<p>Momentos de inercia: axiales <math>J_x, J_y</math>; centrífugo <math>J_{xy}</math>; polar <math>J_p</math> y durante la torsión libre <math>J_t</math></p>	<p>Módulos de la sección: axiales <math>W_x, W_y</math>; polar <math>W_p</math> y durante la torsión libre <math>W_t</math></p>	<p>Radios de giro <math>i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}</math> ; <math>i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}</math></p>
$J_x \approx \frac{h(h+2)^3}{102}$	$W_x \approx \frac{(h+2)^3}{51}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x \approx 0,032h^4$	$W_x \approx 0,064h^3$	$i_x \approx 0,37h$
<p>Para la sección maciza</p> $J \approx \frac{F^2 h}{12b}$	<p>Para la sección maciza simétrica</p> $W \approx \frac{F^2}{6b}$	<p>—</p>
<p>Error ~ 15%</p>		
<p>Para la sección hueca</p> $J \approx \frac{Fh}{6b} \left[ s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] t$	<p>Para la sección hueca simétrica</p> $W \approx \frac{F}{3b} \left[ s + \frac{F(b-h)}{bh} \right] t$	<p>—</p>
<p>Error ~ 25%</p>		



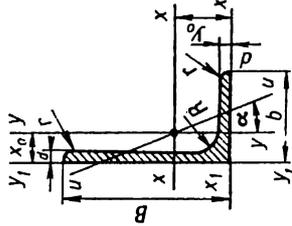
$b$ , el ancho del ala;  
 $d$ , el espesor del ala;  
 $R$ , el radio del redondeo interior;  
 $r$ , el radio del redondeo exterior;  
 $J$ , el momento de inercia;  
 $i$ , el radio de giro;  
 $y_0$ , la distancia desde el centro de gravedad hasta el ala

Número del perfil	Tamaños, en mm			Masa por metro lineal del perfil, en kg	Datos respecto a los ejes								
	$b$	$d$	$R$		$r$	$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$		$x_1 - x_1$	$y_1$
						$J_x$ , en $\text{cm}^4$	$i_x$ , en cm	$J_{x_0 \text{ máx.}}$ , en $\text{cm}^4$	$i_{x_0 \text{ máx.}}$ , en cm	$J_{y_0 \text{ mín.}}$ , en $\text{cm}^4$	$i_{y_0 \text{ mín.}}$ , en cm		
2	20	3	3,5	1,2	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
	4				0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	
2,5	25	3	3,5	1,2	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
	4				1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	
2,8	28	3	4	1,3	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
3,2	32	3	4,5	1,5	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	
	4				2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	
3,6	36	3	4,5	1,5	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
	4				3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	
4	40	3	5	1,7	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	
	4				4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	

4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6		3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4		2	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,0	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
		4,5			6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
7	70	7	8	2,7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,70	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
		5			7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
7,5	75	7	9	3	10,10	7,96	53,3	2,29	84,0	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,50	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15
		9			12,80	10,10	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18
		5,5			8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6		3	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19
8	80	7			10,80	8,51	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23
		8			12,30	9,65	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27
		6			10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
9	90	8	10	3,3	13,9	10,90	106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,20	118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55

Número del perfil	Tamaños, en mm					Masa por la sección, en kg	Datos respecto a los ejes									
	b	d	R	r	Área de la sección, en cm <sup>2</sup>		x - x		x <sub>0</sub> - x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> - y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>		
							J <sub>x</sub> , en cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , en cm	J <sub>x<sub>0</sub></sub> máx., en cm <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0</sub></sub> máx., en cm	J <sub>y<sub>0</sub></sub> min., en cm <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub></sub> min., en cm			J <sub>x<sub>1</sub></sub> , en cm <sup>4</sup>	
																J <sub>x<sub>0</sub></sub> máx., en cm <sup>4</sup>
10	6,5				12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68			
	7				13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71			
	8				15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75			
	100	12		4	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83			
11	10				22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91			
	12				26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99			
	14				29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06			
	110	12		4	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96			
12,5	8				17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00			
	8				19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36			
	9				22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40			
	125	14		4,6	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45			
14	10				28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53			
	12				33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61			
	14				37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68			
	140	14		4,6	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78			
16	10				27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82			
	12				32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90			
	10				31,4	774	4,86	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30			
	160	16		5,3	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35			
16	12				37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39			
	14				43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47			
	16				49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55			
	18				54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63			
	20				60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70			

18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
		12			47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
20	200	16	18	6	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
		16			78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
25	250	22	24	8	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25			119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31



$B$ , el ancho del ala mayor;  $J$ , el momento de inercia;  
 $b$ , el ancho del ala menor;  $i$ , el radio de giro;  
 $R$ , el radio del redondeo interior;  $x_0, y_0$ , la distancia desde el centro  
 $r$ , el radio del redondeo del ala; de gravedad hasta las alas

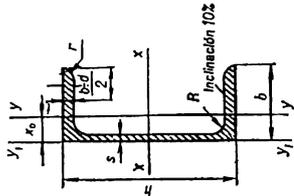
Número del perfil	Tamaños, en mm		Masa por metro lineal, en kg	Datos respecto a los ejes														
	$B$	$b$		$x - x$		$y - y$		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		$u - u$		Angulo de inclinación del eje $ig \alpha$				
				$J_x, en cm^4$	$i_x, en cm$	$J_y, en cm^4$	$i_y, en cm$	$J_{x_1}, en cm^4$	Distancia del centro de gravedad $y_0, en cm$	$J_{y_1}, en cm^4$	Distancia del centro de gravedad $x_0, en cm$	$J_u, en cm^4$	$i_u, en cm$					
2,5 / 1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2 / 2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
4,2 / 5	40	25	4	4,0	1,3	2,47	1,94	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4,5 / 2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,80	2,20	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4				1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
			3				1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4				2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379

5	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
3,2	4	4	5,5	2,0	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6	36	3	6,0	2,0	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
3,6	56	4	6,0	2,0	3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
		5			4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3	40	4			4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
4,0	63	5	7,0	2,3	4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,80	0,95	3,73	0,86	0,396
		6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393
		8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386
7	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51,0	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
4,5	70	5			5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5	75	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
5	80	6	8	2,7	7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
		8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,90	1,07	0,430
8	80	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
5	100	6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9	90	5,5			7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
5,6	100	6	9	3	8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
		8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10	100	6			9,59	7,53	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
6,3	110	7	10	3,3	11,10	8,70	113,0	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
		8			12,60	9,87	127,0	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
		10			15,50	12,10	154,0	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
11	110	6,5			11,4	8,98	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
7	170	7,0	10	3,3	12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
		8,0			13,9	10,90	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400

Número del perfil	Tamaños, en mm										Masa por metro lineal, en kg	Datos respecto a los ejes									
	B	b	d	R	r	Área de la sección, en cm <sup>2</sup>	x - x		y - y			x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> - y <sub>1</sub>		u - u		Angulo de inclinación del eje $i_{gr}$			
							J <sub>x</sub> , en cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , en cm	J <sub>y</sub> , en cm <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , en cm		J <sub>x</sub> min, en cm <sup>4</sup>	Distancia del centro de gravedad y <sub>0</sub> , en cm	J <sub>u</sub> , en cm <sup>4</sup>	Distancia del centro de gravedad x <sub>0</sub> , en cm	J <sub>u</sub> min, en cm <sup>4</sup>	i <sub>u</sub> min, en cm				
																			J <sub>x</sub> , en cm <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , en cm	J <sub>y</sub> , en cm <sup>4</sup>
12,5	125	80	8	11	3,7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	459	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407				
8	80	80	10	10	19,7	15,5	312	3,98	100,0	2,26	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406				
14	140	90	8	12	4	18,0	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411				
9	90	90	10	10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409				
16	160	100	9	13	4,3	22,9	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,20	0,391				
10	100	100	10	10	13	25,3	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390				
18	180	110	10	14	4,7	28,3	952	5,80	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375				
11	110	110	12	12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374				
20	200	125	11	14	4,7	34,9	1449	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392				
12,5	125	125	12	14	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392				
25	250	160	12	18	6	48,3	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410				
16	160	160	16	16	63,6	49,9	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408				
			18	18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407				
			20	20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405				

Petfiles canal con inclinación de las aristas interiores de las alas (GOST 8240-72)

Tabla 4



$h$ , la altura;  
 $b$ , el ancho del ala;  
 $s$ , el espesor del alma;  
 $t$ , el espesor del ala;  
 $R$ , el radio de redondeo interior;  
 $r$ , el radio del redondeo del ala;  
 $J$ , el momento de inercia;  
 $W$ , el módulo de la sección;  
 $i$ , el radio de giro;  
 $S$ , el momento estático de la semisección;  
 $x_0$ , la distancia desde el eje  $y-y$  hasta la arista exterior del alma

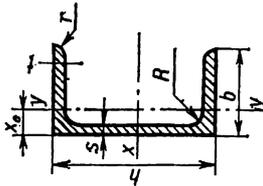
Número del perfil	Masa por metro lineal, en kg	Tamaños, en mm						Área de la sección, en cm <sup>2</sup>	Datos respecto a los ejes						Coordenada del centro de gravedad $x_0, y_0$ en cm
		$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$		$x-x$			$y-y$			
									$J_{x_0}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{x_0}$ en cm <sup>3</sup>	$i_{x_0}$ en cm	$S_{x_0}$ en cm <sup>3</sup>	$J_{y_0}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{y_0}$ en cm <sup>3</sup>	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3,5	17,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07

Continuación de la tabla 4

Número del perfil	Masa por metro lineal, en kg	Tamaños, en mm						Área de la sección, en cm <sup>2</sup>	Datos respecto a los ejes						Coordenada del centro de gravedad, $x_0$ en cm	
		h	b	s	r	R	r		x — x			y — y				
									$J_{x_0}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{x_0}$ en cm <sup>3</sup>	$I_{x_0}$ en cm	$S_{x_0}$ en cm <sup>3</sup>	$J_{y_0}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{y_0}$ en cm <sup>3</sup>		$I_{y_0}$ en cm
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Perfiles canal con aristas paralelas de las alas (GOST 8240—72)

Tabla 5



$J$ ,  $W$ ,  $i$ ,  $S$ ,  $x_0$ ,  
 el momento de inercia;  
 el módulo de la sección;  
 el radio de giro;  
 el momento estático de la semi-sección;  
 la distancia desde el eje  $y - y$  hasta la arista exterior del alma

$h$ ,  $b$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $R$ ,  $r$ ,  
 la altura;  
 el ancho del ala;  
 el espesor del alma;  
 el espesor del ala;  
 el radio del redondeo interior;  
 el radio del redondeo del ala;

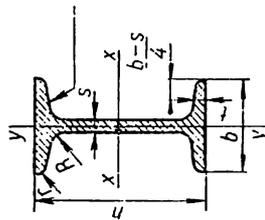
Número del perfil	Tamaños, en mm						Masa por metro lineal, en kg	Datos respecto a los ejes						Coordenada del centro de gravedad $x_0$ en cm
	h	b	s	t	R	r		x - x			y - y			
								$J_{x_0}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{x_0}$ en cm <sup>3</sup>	$i_{x_0}$ en cm	$S_{x_0}$ en cm <sup>3</sup>	$J_{y_0}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{y_0}$ en cm <sup>3</sup>	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,12	1,29
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	89,8	22,5	3,16	13,3	13,9	5,31	1,24	1,38
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	175	34,9	3,99	20,5	22,6	7,37	1,53	1,53
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	305	50,8	4,79	29,7	34,9	9,84	1,66	1,66
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	493	70,4	5,61	40,9	51,5	12,9	1,81	1,83
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	547	78,2	5,68	45,2	65,2	15,7	1,96	2,04
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	750	93,8	6,44	54,3	72,8	16,4	2,00	1,97
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	827	103	6,51	59,5	90,5	19,6	2,15	2,19

Continuación de la tabla 5

Número del perfil	Tamaños, en cm						Masa por metro lineal, en kg	Datos respecto a los ejes						Coordenada del centro de gravedad $x_0$ en cm		
	h	b	s	t	R	r		x - x			y - y					
								$J_{x_1}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{x_1}$ en cm <sup>3</sup>	$i_{x_1}$ en cm	$S_{x_1}$ en cm <sup>3</sup>	$J_{y_1}$ en cm <sup>4</sup>	$W_{y_1}$ en cm <sup>3</sup>		$i_{y_1}$ en cm	
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,7	16,3	1090	121	7,26	70,0	100	20,6	2,2	2,14
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,2	17,4	1200	133	7,34	76,3	123	24,3	2,35	2,36
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,4	18,4	1530	153	8,08	88,0	134	25,2	2,39	2,3
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,2	19,8	1680	168	8,17	96,2	162	29,7	2,54	2,53
22	220	82	5,4	9,5	10	6,0	26,7	21,0	2120	193	8,90	111	178	31,0	2,58	2,47
22a	220	87	5,4	10,2	10	6,0	28,8	22,6	2340	212	9,01	121	220	37,0	2,77	2,75
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,6	24,0	2910	243	9,75	139	248	39,5	2,85	2,72
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,9	25,8	3200	266	9,86	152	302	46,5	3,03	3,01
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,2	27,7	4180	310	10,9	178	314	46,7	2,99	2,78
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7	40,5	31,8	5830	389	12,0	224	393	54,8	3,12	2,83
33	330	105	7,0	11,7	13	7,5	46,5	36,5	8010	486	13,1	281	491	64,6	3,25	2,9
36	360	110	7,5	12,6	14	8,5	53,4	41,9	10850	603	14,3	350	611	76,3	3,38	2,99
40	400	115	8,0	13,5	15	9	61,5	48,3	15260	763	15,8	445	760	89,9	3,51	3,05

7\* Vigas doble T (GOST 8239—72)

Tabla 6



$h$ , la altura de la viga;  
 $b$ , el ancho del ala;  
 $s$ , el espesor del alma;  
 $t$ , el espesor medio del ala;  
 $R$ , el radio del redondeo interior;  
 $r$ , el radio del redondeo del ala;  
 $J$ , el momento de inercia;  
 $W$ , el módulo de la sección;  
 $S$ , el momento estático de la sección;  
 $i$ , el radio de giro

Número de la viga	Masa por metro lineal, en kg	Tamaños, en mm						Área de la sección, en cm <sup>2</sup>	Datos respecto a los ejes						
		$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$		$x - x$			$y - y$			
									$J_{x'}$ , en cm <sup>4</sup>	$W_{x'}$ , en cm <sup>3</sup>	$i_{x'}$ , en cm	$S_{x'}$ , en cm <sup>3</sup>	$J_{y'}$ , en cm <sup>4</sup>	$W_{y'}$ , en cm <sup>3</sup>	$i_{y'}$ , en cm
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27

Continuación de la tabla 6

Número de la viga	Masa por metro lineal, en kg	Tamaños, en mm						Área de la sección, en cm <sup>2</sup>	Datos respecto a los ejes						
		h	b	s	t	R	r		x - x			y - y			
									J <sub>x</sub> , en cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , en cm <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , en cm	S <sub>x</sub> , en cm <sup>3</sup>	J <sub>y</sub> , en cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , en cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , en cm
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27696	1231,0	18,1	708,0	808,0	101,0	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	39727	1589,0	19,9	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	55962	2035,0	21,8	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	108,0	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	76806	2560,0	23,6	1491,0	1725,0	182,0	3,54

### Capítulo 3

## FUERZAS EXTERIORES E INTERIORES. MÉTODO DE SECCIONES. DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERIORES. TENSIONES EN LA SECCIÓN

### § 13. Clasificación de las fuerzas exteriores

Se llaman *fuerzas exteriores* o *cargas* las fuerzas de interacción entre el elemento examinado de la estructura y los cuerpos relacionados con él. Si las fuerzas exteriores son resultado de una interacción directa, por contacto, de dicho cuerpo con otros cuerpos, entonces éstas están aplicadas solamente a los puntos de la superficie del cuerpo en el lugar del contacto y se llaman *fuerzas superficiales*. Estas pueden estar distribuidas continuamente por toda la superficie del cuerpo o una parte de ella. La magnitud de la carga por unidad del área se denomina *intensidad de la carga*, se designa, generalmente, por la letra  $p$  y se mide en  $\text{kgf/cm}^2$ ,  $\text{kgf/m}^2$  o  $\text{tf/m}^2$ . En el Sistema Internacional de Unidades (SI) la unidad de fuerza es newton (N). Es la fuerza que comunica a un cuerpo en reposo con masa de 1 kg una aceleración igual a  $1 \text{ m/s}^2$ . El newton se mide en  $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$

$$1 \text{ kgf} = 9,81 \text{ N}; \quad 1 \text{ N} = 0,102 \text{ kgf}.$$

La unidad de presión es newton por metro cuadrado ( $\text{N/m}^2$ ). En los cálculos de ingeniería puede tomarse  $1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \approx 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$ .

La carga distribuida por la superficie (fig. 26, a) y reducida al plano principal (fig. 26, b) se llama *carga lineal*, se designa, generalmente, por la letra  $q$  y se mide en  $\text{kgf/cm}$ ,  $\text{kgf/m}$  o  $\text{tf/m}$ . El carácter del cambio de  $q$  por la longitud se representa, por regla general, en forma de diagrama (gráfico) de  $q$ .

En el caso de una carga uniformemente distribuida (fig. 26, a) el diagrama de  $q$  es rectangular (fig. 26, b). Cuando actúa la presión hidrostática, el diagrama de  $q$  es triangular (fig. 26, c).

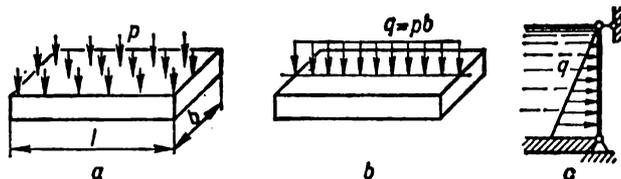


Fig. 26

La resultante de la carga distribuida es igual numéricamente al área de su diagrama y está aplicada en su centro de gravedad. Si la carga está distribuida sobre una parte pequeña de la superficie del cuerpo, siempre se sustituye por la resultante llamada *fuerza concentrada*  $P$  ( $\text{kgf}$  o  $\text{tf}$ ).

Se dan casos de cargas que pueden representarse en forma de momento (par) concentrado. Los momentos  $M$  ( $\text{kgf} \cdot \text{cm}$  o  $\text{tf} \cdot \text{m}$ ) se representan, generalmente, mediante uno de los dos modos (fig. 27, a, b) o en forma de un vector perpendicular al plano de acción del par. A diferencia del vector de la fuerza, el del momento se representa en forma de dos flechas o con línea ondulada (fig. 27, c, d). El vector del momento se considera dirigido en el sentido de las manecillas del reloj.

Las fuerzas que no son resultado del contacto de dos fuerzas, sino aplicadas a cada punto del volumen ocupado por el cuerpo (peso muerto, fuerzas de inercia) se llaman fuerzas *volumétricas* o *de masa*.

Según sea el carácter de aplicación de las fuerzas en función del tiempo, se distinguen cargas *estáticas* y *dinámicas*. La carga se considera *estática* si crece relativamente lenta y suavemente (aunque sea durante algunos segundos) desde

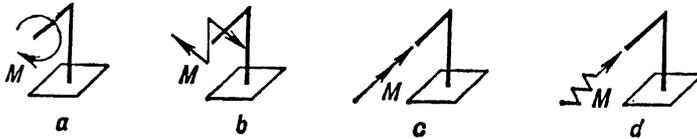


Fig. 27

cero hasta su valor final, y luego se mantiene constante. En este caso se puede prescindir de las aceleraciones de las masas deformadas y, por consiguiente, de las fuerzas de inercia.

Las cargas *dinámicas* van acompañadas de aceleraciones considerables tanto del cuerpo deformado como de los cuerpos que interaccionan con él. En dicho caso ya no se puede prescindir de las fuerzas de inercia que aparecen. Las cargas dinámicas se dividen en *aplicadas momentáneamente*, *de choque* (de impacto) y *repetidas*.

La carga *aplicada momentáneamente* crece desde cero hasta el valor máximo durante fracciones de segundo. Tales cargas aparecen durante la inflamación del carburante en el cilindro del motor de combustión interna o durante el arranque del tren.

La carga *de impacto* consiste en que el cuerpo que provoca dicha carga, en el momento de su aplicación, tiene cierta energía cinética. Tal carga aparece, por ejemplo, al hincar pilotes mediante martinete, en los elementos del martillo de forja.

La carga *repetida* se caracteriza por su periodicidad continua. Los vástagos, árboles, ejes de los vagones ferroviarios, elementos oscilatorios de las estructuras, etc. soportan tales cargas durante el trabajo.

#### § 14. Fuerzas interiores. Método de secciones.

##### Diagramas de las fuerzas interiores

Entre las partículas vecinas de cualquier cuerpo (cristales, moléculas, átomos) siempre existen ciertas fuerzas de interacción, o *fuerzas interiores*, que tienden a conservar el cuerpo en su integración, contrarrestando todo lo que puede cambiar la disposición mutua de las partículas, es decir, deformar el cuerpo.

Las fuerzas exteriores, al contrario, siempre tienden a provocar la deformación del cuerpo.

El valor de las fuerzas interiores que actúan entre dos partículas cualesquiera será diferente en el cuerpo cargado y no cargado.

En la resistencia de materiales no se toman en consideración las fuerzas interiores que actúan en el cuerpo no cargado, examinándose aquellas fuerzas interiores complementarias que aparecen al cargar el cuerpo. Estas fuerzas interiores complementarias de interacción, que surgen como resultado de la carga, a menudo se denominan *esfuerzos*.

Con el fin de revelar las fuerzas interiores que surgen en el cuerpo sujeto a la carga, en la resistencia de materias se hace uso del *método de secciones*.

La esencia de dicho método consiste en seccionar mentalmente el cuerpo cargado (fig. 28, a) en dos partes *A* y *B* por medio de algún plano. Con el propósito de que cada una de estas partes se encuentre en equilibrio bajo la acción de las cargas exteriores aplicadas, es necesario sustituir la acción de la parte

cortada por cierto sistema de fuerzas interiores en la sección. Estas fuerzas no son sino las fuerzas de interacción entre las partes *A* y *B* del cuerpo. Las fuerzas interiores que actúan en la sección por el lado de la parte *A*, de acuerdo con la tercera ley de Newton, son iguales en magnitud y contrarios en dirección a las fuerzas interiores que actúan en la sección por el lado de la parte *B* (fig. 28, b).

Se puede reducir las fuerzas interiores distribuidas por la sección, como cualquier sistema de fuerzas, a un punto (por ejemplo, al centro de gravedad de la sección), y como resultado obtendremos en cada lado de la sección un vector principal y un momento principal de las fuerzas interiores en la sección (fig. 28, c). Si se trata de una barra, ésta se corta, generalmente, por un plano perpendicular al eje (fig. 29, a). Al proyectar el vector principal y el momento principal sobre el eje *z* de la barra y los ejes principales centrales de la sección *y* y *x* obtendremos sobre cada lado de la sección seis factores interiores de fuerza (fig. 29, b): tres fuerzas ( $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_x$ ) y tres momentos ( $M_z$ ,  $M_y$ ,  $M_x$ ). Estos valores se denominan *esfuerzos* y *momentos* en la sección de la barra.

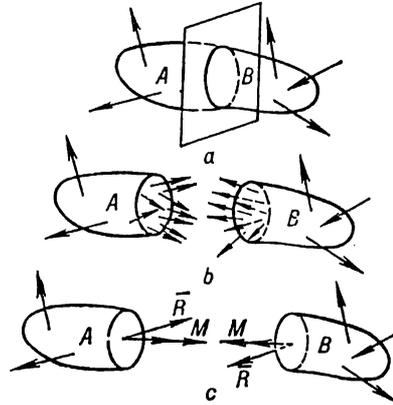


Fig. 28

Como se ve de la figura  $N$  provoca la deformación longitudinal de la barra (tracción o compresión);  $Q_y$  y  $Q_x$ , el desplazamiento de los lados de la sección en la dirección de los ejes *y* y *x*, respectivamente;  $M_z$  provoca la torsión de la barra;  $M_y$  y  $M_x$ , la flexión de la barra en los planos principales *xz* e *yz*. Por eso para los esfuerzos y momentos en la sección se tomaron las siguientes denominaciones:

- $N$  es la fuerza *longitudinal* o *axial* (dirigida a lo largo del eje);
- $Q_y$  y  $Q_x$  son las fuerzas *cortantes* (o *transversales*, pero con menor frecuencia);
- $M_z = M_t$  es el *momento torsional*;
- $M_y$  y  $M_x$  son los *momentos flectores*.

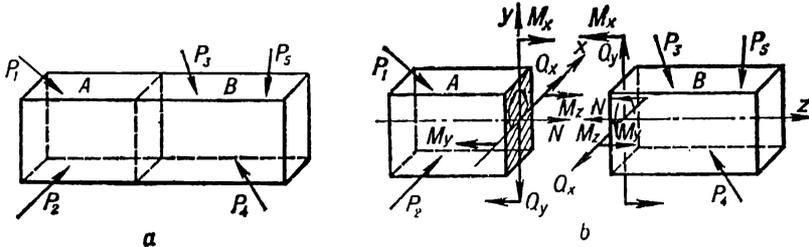


Fig. 29

Se pueden dar las siguientes definiciones a los componentes indicados de los esfuerzos interiores: LA FUERZA LONGITUDINAL  $N$  es la suma de las proyecciones de todas las fuerzas interiores que actúan en la sección sobre la normal a la sección (o sobre el eje de la barra); LAS FUERZAS CORTANTES  $Q_y$  y  $Q_x$  son las sumas de las proyecciones de todas las fuerzas interiores en la sección sobre los ejes principales centrales de la sección *x* e *y*, respectivamente; EL MOMENTO TORSIONAL  $M_z$  (o  $M_t$ ) es la suma de los momentos de todas las fuerzas interiores en la sección respecto al eje de la barra; LOS MOMENTOS DE FLEXIÓN  $M_x$  y  $M_y$  son las sumas de los mo-

mentos de todas las fuerzas interiores en la sección respecto a los ejes principales centrales de inercia  $x$  e  $y$  de la sección, respectivamente.

Para el cálculo práctico de los esfuerzos y momentos en la sección hay que tener en cuenta lo siguiente:  $N$  es igual numéricamente a la suma algebraica de las proyecciones de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre una de las partes (izquierda o derecha) de la barra seccionada, sobre el eje de la barra (sobre la normal a la sección);  $Q_y$ , lo mismo, sobre el eje  $y$ ;  $Q_x$ , lo mismo, sobre el eje  $x$ ;  $M_t$  es igual numéricamente a la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre una de las partes (izquierda o derecha) de la barra seccionada, respecto al eje de la barra;  $M_y$ , lo mismo, respecto al eje  $y$ ;  $M_x$ , lo mismo, respecto al eje  $x$ .

En definitiva, el método de secciones permite hallar todos los esfuerzos y momentos en cualquier sección de la barra sujeta a cualquier carga.

Con este propósito es necesario hacer lo siguiente:

1. Hallar los ejes principales centrales de la sección transversal de la barra.
2. Imaginarse mentalmente la sección transversal de la barra justamente en el lugar donde es necesario hallar los esfuerzos y momentos.

3. Calcular los esfuerzos  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_x$  y momentos  $M_t$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  como sumas algebraicas de las proyecciones y los momentos de las fuerzas exteriores que actúan sobre una de las partes (izquierda o derecha con respecto a la sección) de la barra seccionada, generalmente sobre aquella en la que las proyecciones y los momentos se calculan con mayor facilidad.

Los esfuerzos y momentos en diferentes secciones de la misma barra, en el caso general, son distintos. *Los gráficos que muestran cómo cambian los esfuerzos y momentos durante el paso de sección a sección se denominan diagramas de esfuerzos y momentos.*

Durante la construcción de los diagramas se recomienda hacer uso de las siguientes reglas:

1. El eje (la base) sobre el cual se construye el diagrama siempre se elige de manera tal que sea paralelo al eje de la barra (o coincida con él).

2. Las ordenadas de los diagramas que expresan, en escala elegida, la magnitud del esfuerzo o momento, se colocan a partir de la base del diagrama por la perpendicular.

3. Se acostumbra sombrear los diagramas con líneas perpendiculares a la base. Los valores positivos de los esfuerzos o momentos se colocan arriba de la base, los negativos abajo.

4. Sobre los diagramas se ponen números que indican valores de las ordenadas características, y en el campo del diagrama, en un círculo, el signo del esfuerzo.

Al construir los diagramas de fuerzas longitudinales y momentos torsionales se recomienda emplear las siguientes reglas en lo que se refiere a sus signos:

1. La fuerza longitudinal  $N$  se considera positiva si provoca tracción, y negativa, si provoca compresión.

2. El momento torsional  $M_t$  se considera positivo si, al observar por el tope a lo largo del eje de la parte examinada, éste actúa en el sentido de las manecillas del reloj (fig. 30).

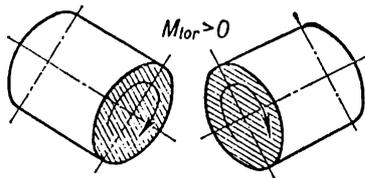


Fig. 30

Los ejemplos de construcción de los diagramas de fuerzas longitudinales pueden verse en las figs. 31, 32, 33 ( $\alpha_1 =$

$= \arctg \gamma F_1$ ;  $\alpha_2 = \arctg \gamma F_2$ ;  $\gamma$  es el peso volumétrico). El diagrama de momentos torsionales para un árbol de transmisión, cuyo esquema aparece en la fig. 34, *a*, se muestra en la fig. 34, *b*. En la fig. 34, *c* puede verse la dirección del momento máximo positivo en la sección del árbol examinado.

Antes de pasar a la construcción de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes durante la flexión de vigas — parte de la resistencia de

materiales que tiene importancia substancial para la comprensión del comportamiento de los elementos de estructuras bajo la carga — hagamos recordar algunas nociones básicas iniciales relacionadas con las vigas.

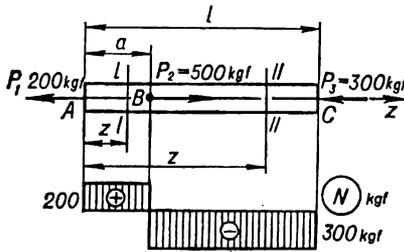


Fig. 31

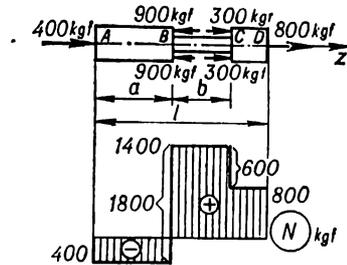


Fig. 32

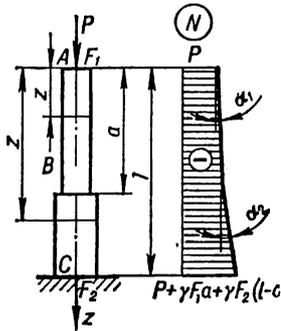


Fig. 33

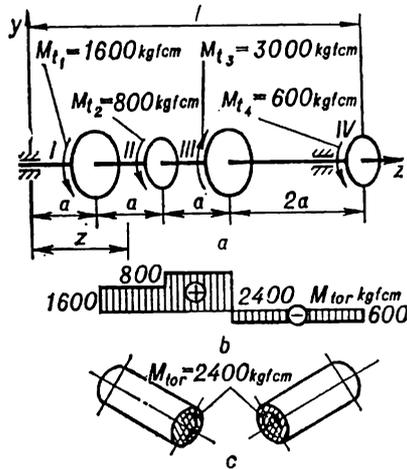


Fig. 34

### § 15. Vigas y sus apoyos

Se entienden por *vigas* barras rectilíneas que trabajan a flexión. Se llama *flexión plana* de la viga una flexión en que todas las fuerzas dadas se encuentran en un plano (de fuerza) (fig. 35, a), coincidiendo éste con uno de los planos principales de la viga.

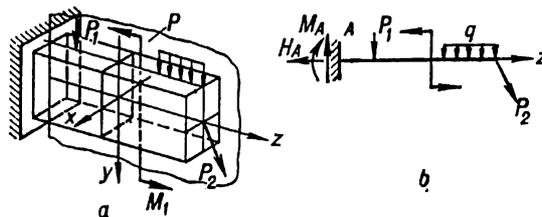


Fig. 35

Durante el cálculo se acostumbra sustituir la viga por su eje (fig. 35, b), todas las cargas tienen que reducirse a este eje y el plano de fuerza coincidirá con el plano de la figura.

Toda la diversidad de los dispositivos de apoyo existentes de las vigas se esquematiza en forma de los siguientes tres tipos principales de apoyos.

Apoyo *articulado móvil* (fig. 36, a), en el cual puede surgir solamente una componente de la reacción  $R_A$  dirigida a lo largo de la barra de apoyo.

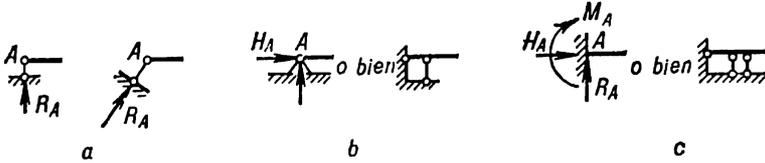


Fig. 36

Apoyo *articulado inmóvil* (fig. 36, b), en el cual pueden surgir dos componentes, a saber: la reacción vertical  $R_A$  y la horizontal  $H_A$ .

Apoyo *rígido* o *empotramiento*, donde pueden existir tres componentes: las reacciones vertical ( $R_A$ ) y horizontal ( $H_A$ ) y el momento de apoyo  $M_A$  (fig. 36, c).

Todas las reacciones y los momentos se consideran aplicados en el punto A, el centro de gravedad de la sección de apoyo.

La viga mostrada en la fig. 37, a se llama *simple*, de una luz o de dos apoyos, y la distancia  $l$  entre los apoyos se llama *luz*.

Se llama *voladizo* la viga empotrada en un extremo y que no tiene otros apoyos (fig. 35, b), o una parte de la viga que sobresale del apoyo (la parte BC en la fig. 37, b y las partes AC y BD en la fig. 37, c). Las vigas que tienen partes sobresalientes se denominan *voladizas*.

La viga se llama *estáticamente determinada* (isostática) si el número de las reacciones de apoyo incógnitas no sobrepasa las tres; en el caso contrario la viga se considera *estáticamente indeterminada* (hiperestática). Las vigas mostradas en las figs. 35 y 37 son isostáticas, y la viga que aparece en la fig. 38, a se

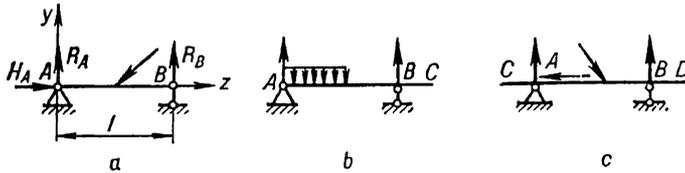


Fig. 37

llama *continua* y es *estáticamente indeterminada*, porque tiene cinco reacciones de apoyo incógnitas: tres en el apoyo A y una en cada uno de los apoyos B y C. Poniendo, por ejemplo, articulaciones en dos secciones cualesquiera de la primera luz de la viga (puntos D y E en la fig. 38, b), obtenemos una viga arti-

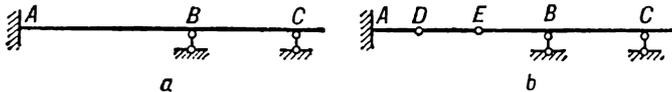


Fig. 38

culada *estáticamente determinada*, ya que cada articulación intermedia añade a las tres ecuaciones principales de la estática una complementaria, pues la suma de los momentos, respecto al centro de la articulación, de todas las fuerzas situadas a un lado de ésta es igual a cero.

## § 16. Cálculo de las reacciones

Para poder empezar a construir los diagramas de esfuerzos interiores es necesario conocer todas las cargas exteriores, incluidas las reacciones que deben hallarse de antemano.

Durante la determinación de las reacciones se recomienda observar el siguiente orden que ilustramos en el ejemplo de una viga simple (fig. 37, a):

1. Designando los apoyos con las letras  $A$  y  $B$ , hallamos las tres reacciones incógnitas  $R_A$ ,  $R_B$  y  $H_A$  de las siguientes ecuaciones de equilibrio:

la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje de la viga es igual a cero

$$\sum Z = 0,$$

de donde hallamos  $H_A$ ;

la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a la articulación de apoyo  $A$  es igual a cero

$$\sum M_A = 0,$$

de donde hallamos  $R_B$ ;

la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a la articulación de apoyo  $B$  es igual a cero

$$\sum M_B = 0,$$

de donde hallamos  $R_A$ .

2. Para el control se puede utilizar la condición de igualdad a cero de la suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje  $y$ ,

$$\sum Y = 0$$

o la condición de igualdad a cero de la suma de los momentos respecto a cualquier punto  $C$  distinto de  $A$  y  $B$ , es decir,

$$\sum M_C = 0.$$

3. Si al final del cálculo alguna reacción resulta negativa, es necesario cambiar en la figura su dirección en la contraria en comparación con la dirección aceptada al principio del cálculo.

4. Si las cargas que actúan sobre la viga son perpendiculares a su eje, entonces  $H_A = 0$  y no se utiliza la ecuación  $\sum Z = 0$ .

## § 17. Esfuerzos y momentos en las secciones de la viga.

### Construcción de los diagramas de $Q$ y $M$

Durante la flexión plana toda la carga está situada en el plano principal  $zy$  de la viga (fig. 35, a), por eso no da proyecciones sobre el eje  $x$  y momentos respecto a los ejes  $z$  e  $y$ . Por lo tanto, en cada sección de la viga

$$Q_x = M_z = M_t = M_y = 0$$

y los tres valores:  $N$ ,  $Q_y$  y  $M_x$  que se suelen designar como  $N$ ,  $Q$  y  $M$  serán distintos de cero.

Estos esfuerzos actúan en las secciones de los pórticos y barras curvas. En las vigas, cuando la carga se aplica perpendicularmente al eje, la fuerza axial  $N = 0$ . Por eso durante el cálculo de las vigas se opera con la fuerza cortante  $Q$  y el momento flexionante  $M$ .

Durante la construcción de los diagramas de fuerzas cortantes  $Q$  y momentos flectores  $M$  se aceptan las siguientes reglas de signos.

LA FUERZA CORTANTE  $Q$  en la sección es positiva, cuando sus vectores tienden a hacer girar las partes de la viga seccionada en el sentido de las manecillas del reloj (fig. 39, a).

EL MOMENTO FLECTOR  $M$  en la sección es positivo, si provoca compresión en las fibras superiores de la viga (fig. 39, a).

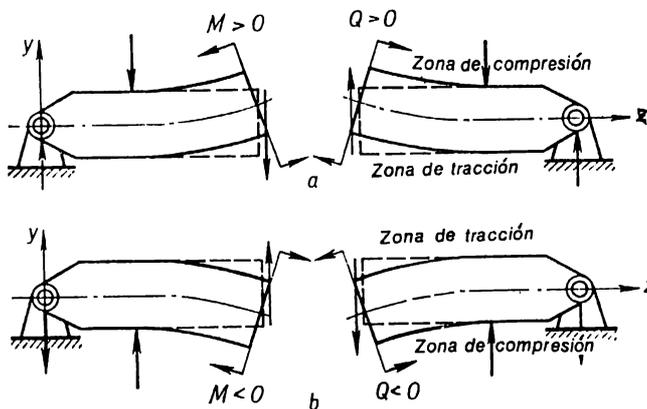


Fig. 39

Está claro que las fuerzas cortantes y los momentos mostrados en la fig. 39, b tienen signos negativos. Los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para vigas cargadas según diferentes esquemas típicos pueden verse en las figs. 40-44.

Con la línea de trazos está mostrada la posición de las vigas en el estado deformado.

PARA UN VOLADIZO SOLICITADO POR LA FUERZA CONCENTRADA  $P$  EN EL EXTREMO LIBRE (fig. 40), la fuerza cortante y el momento flector en una sección arbitraria con abscisa  $z$  se han determinado, respectivamente, mediante las fórmulas:

$$Q(z) = P; \quad M(z) = -P \cdot KB = -P(l - z).$$

PARA UNA VIGA DE DOS APOYOS SOLICITADA POR UNA CARGA CON INTENSIDAD  $q$  DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE POR LA LONGITUD (fig. 41), las reacciones de los apoyos  $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$ , la fuerza cortante y el momento flector se han determinado mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} Q(z) &= R_A - q \cdot AK = q \left( \frac{l}{2} - z \right); \quad M(z) = R_A z - qz \cdot \frac{z}{2} = \\ &= \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right). \end{aligned}$$

PARA UNA VIGA DE DOS APOYOS SOLICITADA EN LA LUZ POR LA FUERZA CONCENTRADA  $P$  (fig. 42), las reacciones de los apoyos  $R_A = \frac{Pb}{l}$ ;  $R_B = \frac{Pa}{l}$ , la fuerza cortante y el momento flector se han determinado en el tramo  $AC$  ( $0 < z < a$ ) mediante las fórmulas

$$Q(z) = R_A = \frac{Pb}{l}; \quad M(z) = R_A \cdot AK_1 = \frac{Pb}{l} z$$

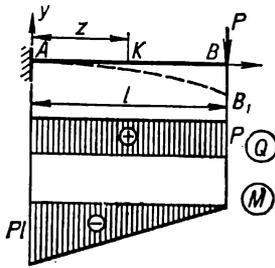


Fig. 40

y en el tramo  $CB(a < z < l)$ , mediante las fórmulas

$$Q(z) = -R_B = -\frac{Pa}{l};$$

$$M(z) = R_B \cdot K_2 b = \frac{Pa}{l} (l - z).$$

PARA UNA VIGA DE DOS APOYOS CARGADA EN LA LUZ CON MOMENTO CONCENTRADO  $M_1$  (fig. 43), las reacciones de los apoyos  $R_A = R_B = \frac{M_1}{l}$ , la fuerza

cortante y el momento flector se han determinado en el tramo  $AC(0 \leq z < a)$  mediante las fórmulas

$$Q(z) = -R_A = -\frac{M_1}{l};$$

$$M(z) = -R_A \cdot AK_1 = -\frac{M_1}{l} z$$

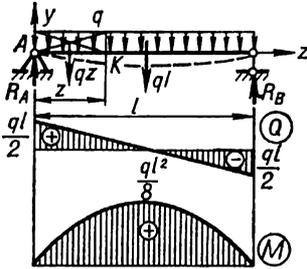


Fig. 41

y en el tramo  $CB(a < z < l)$ , mediante las fórmulas

$$Q(z) = -R_B = -\frac{M_1}{l};$$

$$M(z) = R_B \cdot K_2 b = \frac{M_1}{l} (l - z).$$

En el caso particular, cuando el momento está aplicado a la sección de apoyo,  $Q(z)$  y  $M(z)$  se determinan por las fórmulas de uno de los tramos analizados. Por ejemplo, si el momento está aplicado en

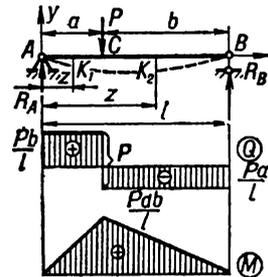


Fig. 42

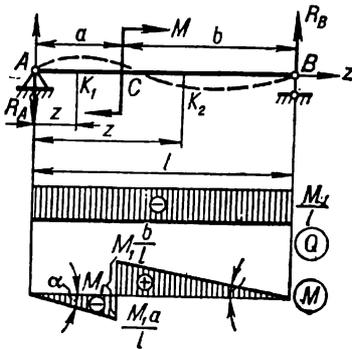


Fig. 43

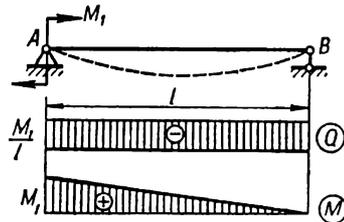


Fig. 44

la sección A (fig. 44), entonces  $Q(z)$  y  $M(z)$  se deducen por medio de las fórmulas del segundo tramo cuando  $a = 0$ .

**§ 18. Dependencias diferenciales durante la flexión de las vigas. Algunas particularidades de los diagramas de  $Q$  y  $M$**

Examinemos una viga con carga arbitraria (fig. 45, a). Entre la intensidad  $q$  de la carga distribuida, la fuerza cortante  $Q$  y el momento de flexión  $M$ , que actúan en cierta sección, existen las siguientes dependencias diferenciales, fácil-

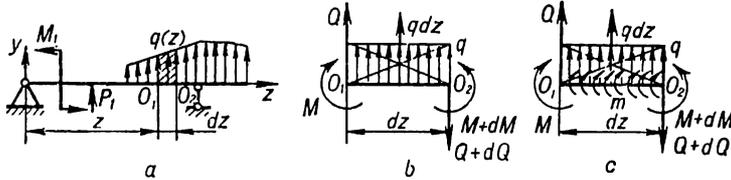


Fig. 45

mente deducidas de las condiciones de equilibrio de un elemento con longitud  $dz$  separado de la viga (fig. 45, b):

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad (3.1)$$

$$\frac{dM}{dz} = Q \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q \quad (3.3)$$

En los casos de que en el tramo examinado actúa un momento uniformemente distribuido de intensidad  $m \frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{\text{cm}}$  (fig. 45, c) la expresión (3.2) obtiene la forma,

$$\frac{dM}{dz} = Q + m. \quad (3.4)$$

Las relaciones (3.1)–(3.4) se llaman *dependencias diferenciales durante la flexión* y permiten establecer algunas particularidades de los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores.

1. En los tramos donde no hay carga distribuida el diagrama de  $Q$  está limitado por rectas paralelas a la base, y el diagrama de  $M$ , en el caso general, por rectas inclinadas (fig. 46).

2. En los tramos donde a la viga se le aplica una carga uniformemente distribuida el diagrama de  $Q$  se limita por rectas inclinadas, y el diagrama de  $M$ , por parábolas cuadráticas (fig. 47). Si el diagrama de  $M$  se construye sobre las fibras comprimidas, la convexidad de la parábola da hacia el lado contrario a la dirección de la carga  $q$  (fig. 48, a, b).

3. En las secciones en que  $Q = 0$  la tangente al diagrama de  $M$  es paralela al eje del diagrama (figs. 47, 48).

4. En los tramos en que  $Q > 0$ ,  $M$  va creciendo, es decir, las ordenadas positivas del diagrama de  $M$  van aumentando de izquierda a derecha, y las negativas, van disminuyendo (tramos  $AC$  y  $BE$  en las figs. 46 y 47); en aquellos tramos donde  $Q < 0$ ,  $M$  va disminuyendo (tramos  $CD$  y  $BD$  en las figs. 46 y 47).

5. En las secciones de la viga solicitadas por las fuerzas concentradas:

a) en el diagrama de  $Q$  habrá saltos que tienen el valor y la dirección de las

fuerzas aplicadas (en las figs. 46 y 47 estos saltos están marcados con líneas gruesas con flechas);

b) en el diagrama de  $M$  habrá inflexiones (fig. 49), además el vértice de la inflexión está dirigido contra la acción de la fuerza.

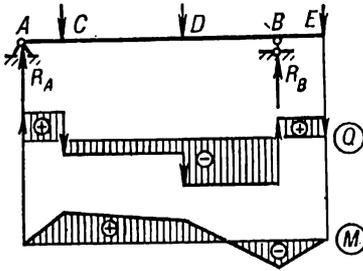


Fig. 46

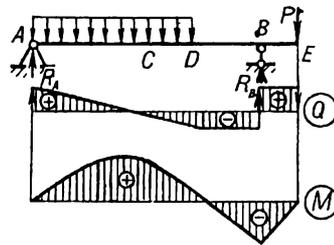


Fig. 47

6. En las secciones donde la viga está solicitada por los momentos concentrados, el diagrama de  $M$  tendrá saltos iguales a estos momentos; el diagrama de  $Q$  no sufrirá ningún cambio.

7. Si en el extremo del voladizo o en el apoyo final está aplicado un momento concentrado, el momento flexionante en esta sección es igual al momento exterior (secciones C y B en la fig. 50).

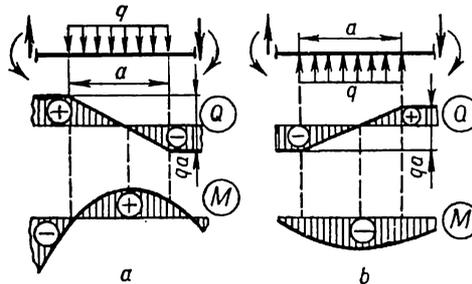


Fig. 48

8. El diagrama de  $Q$  es una derivada del diagrama de  $M$ . Esto quiere decir que las ordenadas de  $Q$  son proporcionales a la tangente del ángulo de inclinación de la tangente al diagrama de  $M$  (en la fig. 43  $\alpha = \beta = \arctg \frac{M_1}{l}$ ).

Los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores para vigas con diferente sujeción de los extremos pueden verse en la tabla 7.

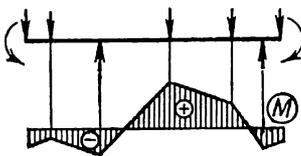


Fig. 49

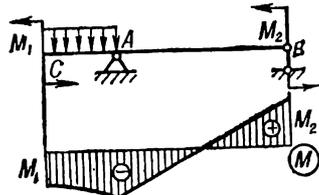


Fig. 50

**§ 19. Construcción de los diagramas para los pórticos estáticamente determinados**

Se entiende por pórticos los sistemas compuestos de barras unidas con nudos rígidos. Se acostumbra denominar *columnas* las barras verticales del pórtico, y *cabezales*, las horizontales. La rigidez de los nudos elimina la posibilidad de giro mutuo de las barras sujetadas en el nudo, es decir, en el punto nodal los ángulos entre sus ejes durante la deformación se mantienen invariables.

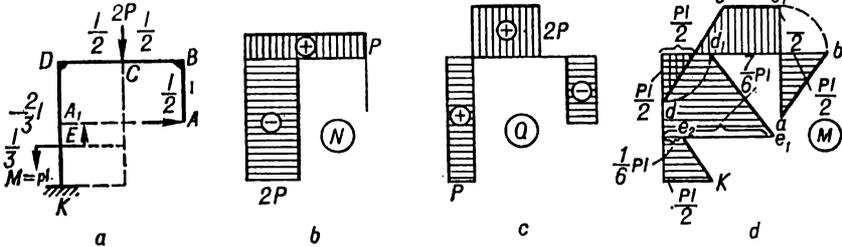


Fig. 51

El eje del pórtico representa una línea quebrada, sin embargo, se puede estimar cada su tramo como una viga. Por eso la construcción del diagrama para un pórtico se reduce a la construcción de los diagramas para cada barra integrante como para la viga. Sin embargo, a diferencia de las vigas simples, en las secciones de las barras del pórtico actúan, generalmente, además de los momentos flectores  $M$  y fuerzas cortantes  $Q$ , también las fuerzas axiales  $N$ . Por eso es necesario construir para los pórticos los diagramas de  $M$ ,  $Q$  y  $N$ .

Para  $N$  y  $Q$  se conservan las reglas de signos aceptadas anteriormente:  $N > 0$  si la fuerza axial provoca tracción;  $Q > 0$  si el vector de la fuerza hace girar las partes del pórtico seccionado en el sentido de las manecillas del reloj.

Para los momentos de flexión no se establecen reglas especiales de signos, tomando positivo cualquier momento según su propio parecer durante la composición de las expresiones para  $M$ .

Las ordenadas positivas de  $N$  y  $Q$  se colocan, durante la construcción de los diagramas, en el lado exterior, y las negativas, en el lado interior del contorno del pórtico. Pongámonos de acuerdo de construir los diagramas de  $M$  sobre las fibras comprimidas. La determinación de las relaciones incógnitas debe anteceder a la construcción de los diagramas.

El ejemplo de construcción de los diagramas de  $N$ ,  $Q$  y  $M$  para un pórtico voladizo cargado según el esquema dado en la fig. 51,  $a$  puede verse en la fig. 51,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

Los valores de los esfuerzos interiores  $N$ ,  $Q$  y  $M$  se han determinado por medio de las siguientes fórmulas para los tramos correspondientes (véase la fig. 51,  $a$ ).

El tramo  $AB$   $\left(0 < z < \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = 0; \quad Q(z) = -P; \quad M(z) = Pz.$$

El tramo  $BC$   $\left(0 < z < \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = P; \quad Q(z) = 0; \quad M(z) = P \frac{l}{2}.$$

El tramo  $CD$   $\left(0 < z < \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = P; \quad Q(z) = 2P; \quad M(z) = P \frac{l}{2} - 2Pz = P \left(\frac{l}{2} - 2z\right).$$

El tramo  $DE$   $\left(0 < z < \frac{2}{3} l\right)$

$$N(z) = -2P; \quad Q(z) = P; \quad M(z) = 2P \frac{l}{2} - P \left(\frac{l}{2} - z\right) = P \left(\frac{l}{2} + z\right).$$

El tramo  $EK$   $\left(\frac{2}{3} l < z < l\right)$

$$N(z) = -2P; \quad Q(z) = P; \quad M(z) = P \left(\frac{l}{2} + z\right) - M = P \left(z - \frac{l}{2}\right).$$

### § 20. Construcción de los diagramas para las barras curvas

En las secciones transversales de una barra plana curva pueden actuar, lo mismo que en los pórticos, tres factores de fuerza:  $N$ ,  $Q$  y  $M$ . En el caso de que el eje de la barra curva se traza por un arco circular, es cómodo determinar la posición de cualquier sección por medio de un sistema polar de coordenadas; entonces las fuerzas axial y cortante y el momento flector serán funciones del ángulo  $\varphi$ :  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ .

Para  $N$  y  $Q$  se quedan las reglas de signos aceptadas anteriormente; los diagramas de  $M$ , igual que en el caso de los pórticos, los construimos por el lado de las fibras comprimidas.

Un ejemplo de construcción de los diagramas  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  y  $M(\varphi)$ , para una barra en voladizo curva cargada según el esquema dado en la fig. 52, *a*, siendo  $P_1 = 2P_2 = P$ , cuando

$$N(\varphi) = (\cos \varphi + 0,5 \operatorname{sen} \varphi) P;$$

$$Q(\varphi) = (\operatorname{sen} \varphi - 0,5 \cos \varphi) P;$$

$$M(\varphi) = (1 - \cos \varphi - 0,5 \operatorname{sen} \varphi) PR$$

puede verse en la fig. 52, *b*, *c*, *d*.

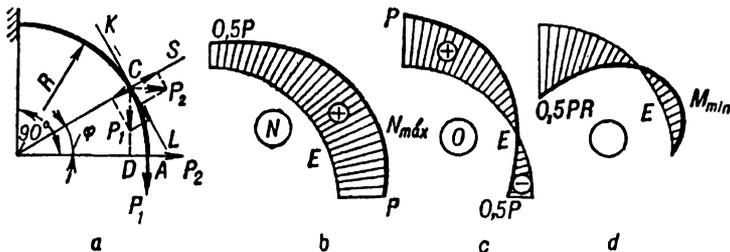


Fig. 52

Si la barra curva está solicitada por una carga uniformemente distribuida, es útil, durante el cálculo de  $N$ ,  $Q$  y  $M$ , tener en cuenta el siguiente teorema: *la*

resultante de una carga uniformemente distribuida aplicada a un arco de cualquier configuración es igual al producto de la intensidad de la carga por la longitud de la cuerda que une los extremos de ese arco, es perpendicular a la cuerda y pasa por su centro.

Los diagramas de  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  y  $M(\varphi)$  para una barra curva cargada según el esquema mostrado en la fig. 53, a pueden verse en la fig. 53, b, c, d.

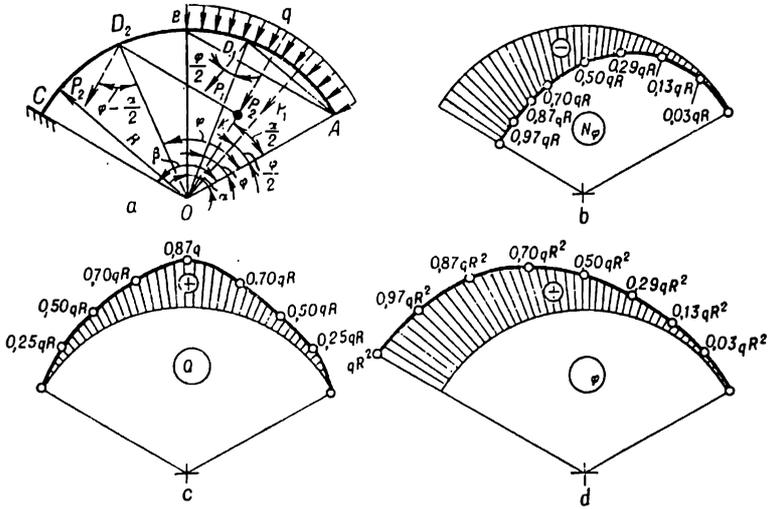


Fig. 53

En el tramo  $0 < \varphi < \alpha$  se determinaron  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  y  $M(\varphi)$  a partir de las siguientes fórmulas correspondientes:

$$N(\varphi) = -P_1 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = -2qR \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = -qR(1 - \cos \varphi);$$

$$Q(\varphi) = P_1 \cos \frac{\varphi}{2} = 2qR \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = qR \operatorname{sen} \varphi;$$

$$M(\varphi) = P_1 \frac{AD_1}{2} = 2qR^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = qR^2(1 - \cos \varphi),$$

donde  $P_1 = 2qR \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$  es la resultante de la carga distribuida  $q$  sobre el arco que corresponde al ángulo  $\varphi$ .

En el tramo  $\alpha < \varphi < \beta$

$$N(\varphi) = -P_2 \operatorname{sen} \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = -2qR \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$Q(\varphi) = P_2 \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$M(\varphi) = P_2 \cdot KD_2 P_2 \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) = 2qR^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right),$$

donde  $P_2 = 2qR \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$  es la resultante de la carga distribuida  $q$  sobre el arco  $AB$  que corresponde al ángulo  $\alpha$ .

### § 21. Dependencias diferenciales durante la flexión de barras curvas planas

Las relaciones diferenciales entre  $q$ ,  $Q$ ,  $N$  y  $M$  deducidas de las condiciones de equilibrio de un elemento con longitud  $ds$  separado de la barra curva (fig. 54 y 55) cargada arbitrariamente, tienen la siguiente forma:

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q; \quad (3.5)$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} = N + qr; \quad (3.6)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Qr. \quad (3.7)$$

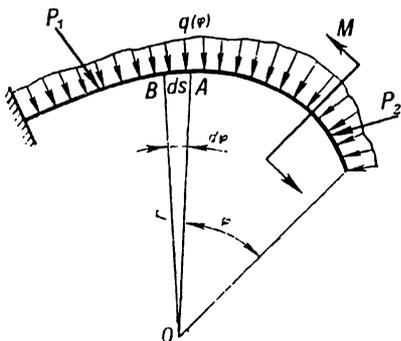


Fig. 54

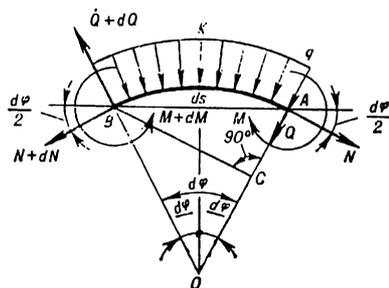


Fig. 55

Considerando  $r d\varphi = ds$ , se puede escribir estas ecuaciones de manera siguiente:

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{r}; \quad (3.8)$$

$$\frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{r}; \quad (3.9)$$

$$\frac{dM}{ds} = Q. \quad (3.10)$$

Durante la deducción de las dependencias señaladas se supuso que el momento flector se considera positivo si provoca compresión de las fibras interiores de la barra (fibras situadas en el lado cóncavo), y la carga distribuida es positiva si está dirigida hacia el centro de curvatura de la barra. Las dependencias (3.5)–(3.10) permiten verificar lo correcto de la composición de las expresiones para  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$  y  $M(\varphi)$ . Las expresiones para los esfuerzos interiores en la barra curva para diferentes casos de su carga pueden verse en las tablas 8 y 9.

**§ 22. Construcción de los diagramas de fuerzas interiores para las barras espaciales**

En los sistemas de pórtico, los ejes de cuyas barras componentes no se encuentran en un plano, al igual que en los sistemas planos que son influidos por cargas espaciales, en las secciones de las barras pueden actuar todos los seis factores interiores de fuerza:  $N_z$ ,  $Q_y$ ,  $Q_x$ ,  $M_z$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  (fig. 29, b). En este caso se siguen

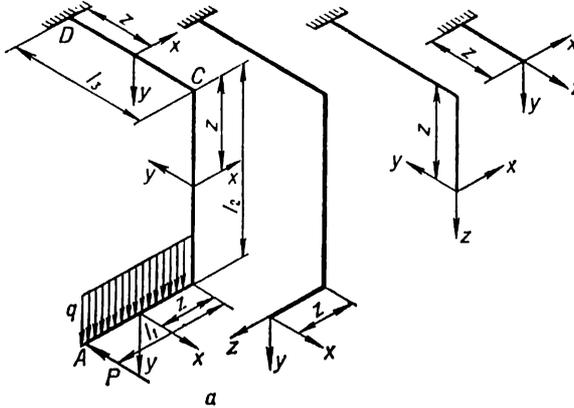


Fig. 56

construyendo los diagramas de momentos flectores sobre las fibras comprimidas, además se debe orientarlos de tal manera que el plano del diagrama coincida con el plano de acción del par de aquel momento de flexión, para el cual fue construido. El signo del momento de flexión se introduce arbitrariamente, solamente en el caso de tener la necesidad de escribir la ecuación correspondiente.

Tanto para las fuerzas axiales como para los momentos torsionales se conservan las reglas de signos anteriores. Los diagramas de  $N$  y  $M_t$  pueden orientarse como quiera, pero sus ordenadas siempre se colocan sobre la normal al eje de la barra.

Las fuerzas cortantes en la sección se consideran positivas, si su dirección coincide con la dirección positiva de  $y$  y  $x$ .

A título de ilustración, mostremos para una barra quebrada (fig. 56, a) los resultados de construcción de los diagramas de factores interiores de fuerza (fig. 57).

Los diagramas de fuerzas interiores para una barra curva cargada especialmente (fig. 58), construidos a base de las dependencias

$$M_f(\varphi) = M_y(\varphi) = (PR + M_A) \operatorname{sen} \varphi;$$

$$M_t(\varphi) = M_z(\varphi) = (PR + M_A) \operatorname{cos} \varphi - PR,$$

cuando  $P = 200 \text{ kgf}$ ;  $M_A = 2000 \text{ kgf} \cdot \text{cm}$ ;  $R = 30 \text{ cm}$ , se dan en la fig. 59.

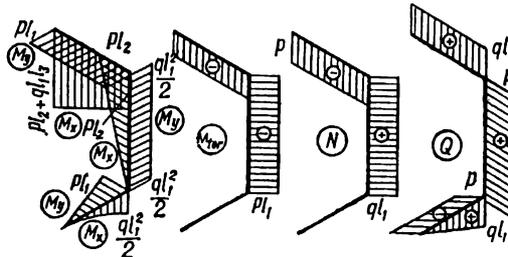


Fig. 57

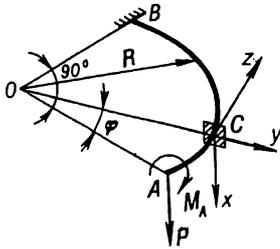


Fig. 58

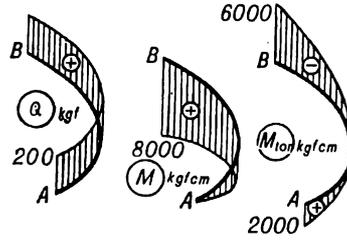


Fig. 59

### § 23. Tensiones en la sección

En las secciones de la barra cargada surgen los esfuerzos interiores distribuidos ininterrumpidamente (fig. 60, a), cuyas resultantes son *el vector principal*  $\vec{R}$  y *el momento principal*  $\vec{M}$  aplicados en el centro de gravedad de la sección. Las proyecciones de  $\vec{R}$  y  $\vec{M}$  sobre los ejes principales centrales  $x$ ,  $y$  y el eje de la barra

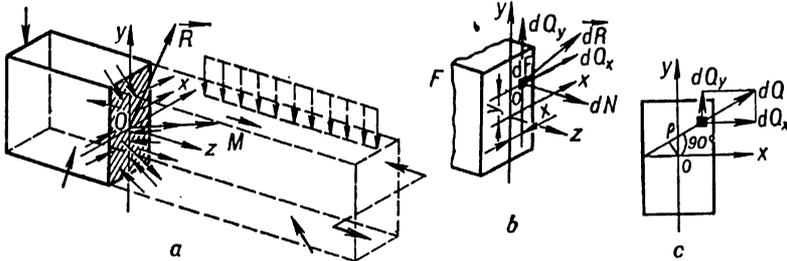


Fig. 60

$z$  ofrecen los valores de los componentes de los esfuerzos interiores  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_x$ ,  $M_y$ ,  $M_x$  y  $M_z$ .

Examinemos un elemento infinitamente pequeño de área  $dF$  (fig. 60, b) con coordenadas arbitrarias  $x$ ,  $y$ . A causa de pequeñez del elemento puede considerarse que los esfuerzos interiores están distribuidos en él uniformemente, y su resultante  $\vec{dR}$  está aplicada en el centro de su gravedad. Es decir, al reducir estos esfuerzos al centro de gravedad del elemento,  $\vec{dR}$  será el vector principal de fuerza, y el momento principal, evidentemente, será igual a cero.

Las fuerzas elementales  $dN$ ,  $dQ_y$ ,  $dQ_x$  serán las proyecciones de  $\vec{dR}$  sobre los ejes  $z$ ,  $y$ ,  $x$ . Dividiendo estos valores por el área  $dF$  obtenemos las expresiones para los esfuerzos interiores por unidad de área, llamados *tensiones* en el punto  $(y, x)$  de la sección transversal de la barra:

$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dF}, \quad (3.11)$$

donde  $\sigma$  es la *tensión normal*,  $\tau_y$ ,  $\tau_x$  son las *tensiones tangenciales*.

Las tensiones se miden en fuerza dividida por el cuadrado de la longitud ( $\text{kgf/mm}^2$ ,  $\text{kgf/cm}^2$ , etc.).

Así pues, se llama *tensión* la fuerza interior referida a la unidad de área en el punto dado de la sección examinada.

La tensión total en el punto puede expresarse a través de las tensiones normales y tangenciales:

$$p = \frac{dR}{dF} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_x^2}. \quad (3.12)$$

Tomando en consideración (3.11), no es difícil establecer las dependencias generales entre las tensiones  $\sigma$  y  $\tau$ , por un lado, y las componentes de las fuerzas interiores, por otro:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad (3.13)$$

$$Q_y = \int_F \tau_y dF; \quad (3.14)$$

$$Q_x = \int_F \tau_x dF; \quad (3.15)$$

$$M_y = \int_F x \sigma dF; \quad (3.16)$$

$$M_x = \int_F y \sigma dF; \quad (3.17)$$

$$M_z = M_t = \int_F (y \tau_x + x \tau_y) dF = \int_F \rho \tau dF, \quad (3.18)$$

donde

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \sqrt{\left(\frac{dQ_y}{dF}\right)^2 + \left(\frac{dQ_x}{dF}\right)^2} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2};$$

$\rho$  es la distancia desde el centro de gravedad de la sección hasta la línea de acción de  $dQ$  (fig. 60, c).

Las dependencias (3.13)–(3.18) se llaman *ecuaciones estáticas*. En el caso general de cálculo, cuando la ley de distribución de las tensiones por la sección no es conocida, no se puede utilizarlas. Por ejemplo, conociendo el valor del momento flector  $M_y$  en la sección no se puede hallar las tensiones normales haciendo uso de la fórmula (3.16). Sin embargo, si valiéndose de unas u otras consideraciones, se logra establecer cómo se distribuyen por la sección  $\sigma$  o  $\tau$ , entonces ya se puede hallar los valores de las tensiones por las fórmulas (3.13)–(3.18).

Es racional hacer las deducciones de las fórmulas para la determinación de las tensiones según el siguiente esquema:

1. Se examina la *parte estática del problema*: se escriben aquellas de las ecuaciones (3.13)–(3.18) que son necesarias para el resumen.

2. Se examina la *parte geométrica del problema*: a base de los datos experimentales se escriben las ecuaciones geométricas que establecen los desplazamientos de los puntos de la barra en función de su posición en la sección.

3. Si se examina *la parte física* del problema: a base de los datos experimentales se escriben las ecuaciones que expresan la dependencia entre las tensiones y las deformaciones (o desplazamientos).

4. Se efectúa la síntesis, es decir, se resuelven juntamente las ecuaciones obtenidas en los puntos 1—3 y, eliminando las deformaciones (o desplazamientos), se obtienen las fórmulas que expresan las tensiones a través de los esfuerzos o momentos en la sección.

## § 24. Condiciones de resistencia y rigidez

La tarea principal de la resistencia de materiales consiste en determinar las dimensiones seguras de la sección transversal de la pieza sometida a una u otra acción de fuerza, temperatura, etc. Tales dimensiones pueden determinarse a partir del cálculo a la resistencia, la rigidez o la estabilidad. El cálculo a la resistencia es el principal.

Físicamente es evidente que el material no es capaz de resistir las tensiones tan grandes como se quiera. Por eso los valores de las tensiones máximas tienen que ser limitados, partiendo de la condición de seguridad del trabajo de la pieza, por ciertas magnitudes permisibles. Estas magnitudes se llaman *tensiones admisibles* y se designan como  $[\sigma]$  o  $[\tau]$ .

Si son conocidas las tensiones admisibles y hay fórmulas que expresan las tensiones por medio de los esfuerzos y momentos en la sección, en principio se puede calcular a la resistencia cualquier pieza (eligiendo las dimensiones necesarias, con las cuales la tensión no sobrepasará las admisibles).

En la práctica se encuentran tres casos de cálculo a la resistencia:

1. A base de cargas conocidas se debe hallar, para el material escogido, las dimensiones necesarias de la sección transversal de la pieza que garanticen su funcionamiento seguro (cálculo de proyección).

2. Son conocidos el material y las dimensiones de la pieza. Se necesita comprobar si esta pieza puede soportar la carga dada (cálculo de comprobación).

3. Son conocidos el material, las dimensiones de la pieza y el esquema de su carga; se necesita hallar el valor admisible de la carga.

La base de todos estos cálculos es *la condición de resistencia*:

$$\sigma_{\text{máx}} < [\sigma] \quad \text{o} \quad \tau_{\text{máx}} < [\tau]$$

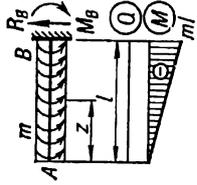
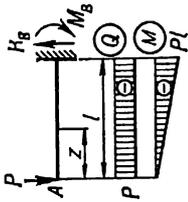
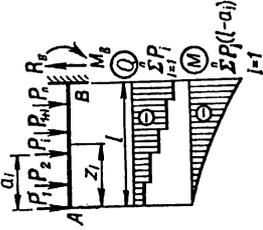
que expresa el hecho de que las tensiones máximas — normal, tangencial o equivalente (véase el cap. VI) que actúan en el punto de peligro — no deben rebasar la tensión admisible.

El cálculo a la rigidez se realiza por analogía, utilizando en vez de la condición de resistencia *la de rigidez* que limita el valor de las deformaciones (o desplazamientos). Sin embargo, incluso para el caso de que el cálculo a la rigidez ya está hecho, siempre es necesario realizar el cálculo de comprobación a la resistencia, y si ofrece resultado negativo, hay que tomar las dimensiones obtenidas del cálculo a la resistencia.

Tabla 7

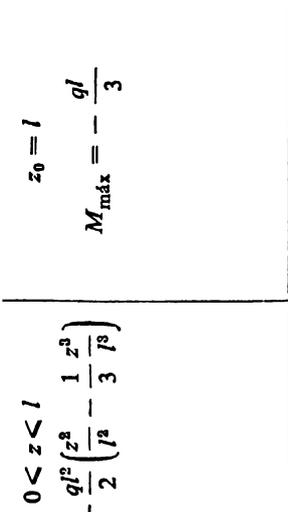
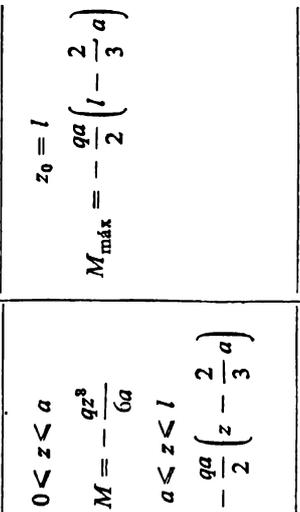
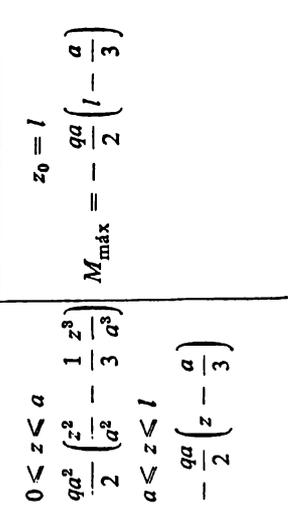
Reacciones de apoyo, fuerzas cortantes y momentos flectores en las vigas isostáticas

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\max}$
	$R_B = 0$ $M_B = M_0$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < l$ $M = -M_0$	<p>—</p>
	$R_B = 0$ $M_B = M_1 + M_2$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < a$ $M = 0$ $a < z < a + b$ $M = -M_1$ $a + b < z < l$ $M = -(M_1 + M_2)$	$a + b < z_0 < l$ $M_{\max} = -(M_1 + M_2)$
	$R_B = 0$ $M_B = M_1 - M_2$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < a$ $M = 0$ $a < z < a + b$ $M = -M_1$ $a + b < z < l$ $M = -(M_1 - M_2)$	<p>I <math>M_1 &gt; M_2</math>  <math>a &lt; z_0 &lt; b</math>  <math>M_{\max} = -M_1</math>                      II <math>M_2 &gt; 2M_1</math>  <math>a + b &lt; z_0 &lt; l</math>  <math>M_{\max} = M_2 - M_1</math></p>

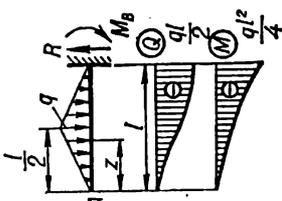
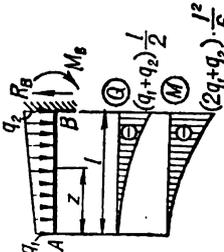
	$R_B = 0$ $M_B = ml$	$0 < z < l$ $Q = 0$	$0 < z < l$ $M = -mz$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -ml$
	$R_B = P$ $M_B = Pl$	$0 < z < l$ $Q = -P$	$0 < z < l$ $M = -Pz$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -Pl$
	$R_B = \sum_{i=1}^n P_i$ $M_B = \sum_{i=1}^n P_i b_i$ $b_i = l - a_i$	$a_i < z < a_{i+1}$ $Q = - \sum_{j=1}^i P_j$	$a_i < z < a_{i+1}$ $M = - \sum_{j=1}^i P_j (z - a_j)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = - \sum_{i=1}^n P_i b_i$

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_B = ql$ $M_B = \frac{ql^2}{2}$	$0 < z < l$ $Q = -qz$	$0 < z < l$ $M = -\frac{qz^2}{2}$	$z_0 = l$ $M_{\text{máx}} = -\frac{ql^2}{2}$
	$R_B = qa$ $M_B = qa \left( l - \frac{a}{2} \right)$	$0 < z < a$ $Q = -qz$ $a < z < l$ $Q = -qa$	$0 \leq z \leq a$ $M = -\frac{qz^2}{2}$ $a \leq z \leq l$ $M = -qa \left( z - \frac{a}{2} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\text{máx}} = -qa \left( l - \frac{a}{2} \right)$
	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{6}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{qz^2}{2}$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{qz^3}{6}$	$z_0 = l$ $M_{\text{máx}} = -\frac{ql^2}{6}$

	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{3}$	$0 < z < l$ $Q = -ql \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{l^2} \right)$	$0 < z < l$ $M = -\frac{ql^2}{2} \left( \frac{z^3}{l^3} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{l^3} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql}{3}$
	$R_B = \frac{qa}{2}$ $M_B = \frac{qa}{2} \left( l - \frac{2}{3} a \right)$	$0 < z < a$ $Q = -\frac{qz^2}{2a}$ $a < z < l$ $Q = -\frac{qa}{2}$	$0 < z < a$ $M = -\frac{qz^3}{6a}$ $a < z < l$ $M = -\frac{qa}{2} \left( z - \frac{2}{3} a \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{qa}{2} \left( l - \frac{2}{3} a \right)$
	$R_B = \frac{qa}{2}$ $M_B = \frac{qa}{2} \left( l - \frac{a}{3} \right)$	$0 < z < a$ $Q = -\frac{qa}{2} \left( \frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2} \right)$ $a < z < l$ $Q = -\frac{qa}{2}$	$0 < z < a$ $M = -\frac{qa^2}{2} \left( \frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{a^3} \right)$ $a < z < l$ $M = -\frac{qa}{2} \left( z - \frac{a}{3} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{qa}{2} \left( l - \frac{a}{3} \right)$

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{4}$	$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ $Q = -\frac{qz^2}{2}$ $\frac{l}{2} \leq z \leq l$ $Q = -ql \left[ \frac{1}{4} + \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]$	$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ $M = -\frac{qz^3}{3l}$ $\frac{l}{2} \leq z \leq l$ $M = -\frac{ql^2}{4} \left[ \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{3} \right) + 2 \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^3 \right]$	$z_0 = l$ $M_{\text{máx}} = -\frac{ql^2}{4}$
	$R_B = \frac{q_1 + q_2}{2} l$ $M_B = (2q_1 + q_2) \frac{l^2}{6}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -q_1 z - \frac{q_2 - q_1}{2l} z^2$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{q_1 z^2}{2} - \frac{q_2 - q_1}{6l} z^3$	$z_0 = l$ $M_{\text{máx}} = -(2q_1 + q_2) \frac{l^2}{6} + q_2 \frac{l^2}{6}$

<p> <math>q_z = \frac{qz^2}{l^2}</math>  <math>R_B = \frac{ql}{3}</math>  <math>M_B = \frac{ql^2}{12}</math> </p>	$0 < z < l$ $Q = -\frac{qz^3}{3l^2}$	$0 < z < l$ $M = -\frac{qz^4}{12l^2}$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{12}$
<p> <math>q_z = \frac{qz(2l-z)}{l^2}</math>  <math>R_B = \frac{2}{3}ql</math>  <math>M_B = \frac{ql^2}{4}</math> </p>	$0 < z < l$ $Q = -ql \left( \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{z^3}{l^3} \right)$	$0 < z < l$ $M = -\frac{ql^2}{3} \left( \frac{z^3}{l^3} - \frac{z^4}{4l^4} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{4}$
<p> <math>q_z = \frac{4qz(l-z)}{l^2}</math>  <math>R_B = \frac{2}{3}ql</math>  <math>M_B = \frac{ql^2}{3}</math> </p>	$0 < z < l$ $Q = -2ql \left( \frac{z^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{z^3}{l^3} \right)$	$0 < z < l$ $M = -\frac{ql^2}{3} \left( 2 \frac{z^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4} \right)$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{ql^2}{3}$

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $M = \frac{M_0}{l} (l - z)$	$z_0 = 0$ $M_{\text{máx}} = M_0$
	$R_A = R_B = \frac{M_1 - M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 - M_2}{l}$	$0 < z < l$ $M = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} z$	<p>I <math>M_1 &gt; M_2</math>  <math>z_0 = 0; M_{\text{máx}} = M_1</math></p> <p>II <math>M_1 &lt; M_2</math>  <math>z_0 = l; M_{\text{máx}} = M_2</math></p>
	$R_A = R_B = \frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $M = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} z$	<p>I <math>M_1 &gt; M_2</math>  <math>z_0 = 0; M_{\text{máx}} = M_1</math></p> <p>II <math>M_1 &lt; M_2</math>  <math>z_0 = l; M_{\text{máx}} = -M_2</math></p>

	$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_0}{l}$	$0 < z < a$ $M = -\frac{M_0}{l} z$ $a < z < l$ $M = \frac{M_0}{l} (l - z)$	<p>I <math>a &lt; \frac{l}{2}</math>  <math>z_0 = a; M_{\max} = M_0 \frac{l-a}{l}</math></p> <p>II <math>a &gt; \frac{l}{2}</math>  <math>z_0 = a; M_{\max} = -M_0 \frac{a}{l}</math></p>
	$R_A = R_B = \frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < a$ $M = -\frac{M_1 + M_2}{l} z$ $a < z < a + b$ $M = -\frac{M_1 + M_2}{l} z + M_1$ $a + b < z < l$ $M = \frac{M_1 + M_2}{l} (l - z)$	<p><math>M_{\max}</math> es el valor absoluto máximo del momento en las secciones C y D.</p>

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_A = P \frac{b}{l}$ $R_B = P \frac{a}{l}$	$0 < z < a$ $Q = P \frac{b}{l}$ $a < z < l$ $Q = -P \frac{a}{l}$	$0 < z < a$ $M = P \frac{bz}{l}$ $a < z < l$ $M = P \frac{a}{l} (l - z)$	$z_0 = a$ $M_{\text{máx}} = P \frac{ab}{l}$
	$R_A = R_B = P$	$0 < z < a$ $Q = P$ $a < z < l - a$ $Q = 0$ $l - a < z < l$ $Q = -P$	$0 < z < a$ $M = Pz$ $a < z < l - a$ $M = Pa$ $l - a < z < l$ $M = P(l - z)$	$a < z_0 < l - a$ $M_{\text{máx}} = Pa$

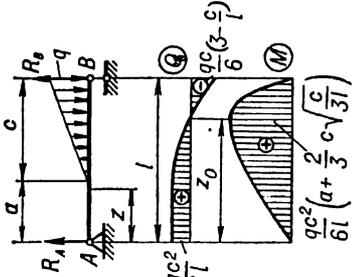
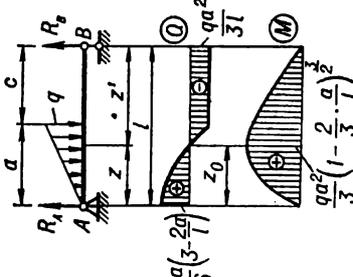
	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$	$0 < z < l$ $Q = ql \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{l} \right)$	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right)$	$z_0 = \frac{l}{2}$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$
	$R_A = \frac{qb(2c+b)}{2l}$ $R_B = \frac{qb(2a+b)}{2l}$	$0 < z < a$ $Q = \frac{qb(2c+b)}{2l}$ $a < z < a+b$ $Q = qb \left( \frac{2c+b}{2l} - \frac{z-a}{b} \right)$ $a+b < z < l$ $Q = -\frac{qb(2a+b)}{2l}$	$0 < z < a$ $M = qb \frac{2c+b}{2l} z$ $a < z < a+b$ $M = \frac{qb^2}{2} \left[ \frac{2c+b}{l} - \frac{z-a}{b} \right] \times \left[ \frac{z-a}{b} - \frac{(z-a)^2}{b^2} \right]$ $a+b < z < l$ $M = qb \frac{2a+b}{2l} (l-z)$	$z_0 = a + \frac{b(2c+b)}{2l}$ $M_{\max} = qb \frac{2c+b}{2l} \times \left[ a + \frac{b(2c+b)}{4l} \right]$

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_A = \frac{qa}{l} \left( \frac{a}{2} + b \right)$ $R_B = \frac{qa^2}{2l}$	$0 < z < a$ $Q = qa \left( \frac{a}{2l} + \frac{b}{l} - \frac{z}{a} \right)$ $a < z < l$ $Q = -\frac{qa^2}{2l}$	$0 < z < a$ $M = qa^2 \left[ \frac{z}{2l} + \frac{b}{l} \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} \right]$ $a < z < l$ $M = \frac{qa^2}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)$	$z_0 = \frac{a}{2} \left( 2 - \frac{a}{l} \right) = \frac{a}{l} \left( \frac{a}{2} + b \right)$ $M_{\text{máx}} = \frac{qa^2}{8} \left( 2 - \frac{a}{l} \right)^2$
	$R_A = q_1 a - R$ $R_B = q_2 c + R,$ siendo $R = \frac{q_1 a^2 - q_2 c^2}{l}$	$0 < z < a$ $Q = q_1(a - z) - R$ $a < z < a + b$ $Q = -R$ $a + b < z < l$ $Q = q_2(a + b - z) - R$	$0 < z < a$ $M = q_1 a^2 \left( \frac{z}{a} - \frac{R z}{q_1 a} - \frac{z^2}{2a^2} \right)$ $a < z < a + b$ $M = \frac{a^2}{2} - Rz$ $a + b < z < l$ $M = q_2 c(l - z) \times \left( 1 + \frac{R}{q_2 c} - \frac{l - z}{2c} \right)$	I $R > 0$ $z_0 = a - \frac{R}{q_1}$ $M_{\text{máx}} = \frac{q_1}{2} \left( a - \frac{R}{q_1} \right)^2$ II $R < 0$ $z_0 = c + \frac{R}{q_2}$ $M_{\text{máx}} = \frac{q_2}{2} \left( c + \frac{R}{q_2} \right)^2$

	$R_A = \frac{ql}{6}$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = \frac{ql}{6} \left( 1 - 3 \frac{z^2}{l^2} \right)$	$0 \leq z \leq l$ $M = \frac{ql^2}{6} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$	$z_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.5774 l$ $M^{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} = 0.0642 ql^2$
	$R_A = \frac{2q_1 + q_2}{6} l$ $R_B = \frac{q_1 + 2q_2}{6} l$	$0 \leq z \leq l$ $Q = R_A - q_1 z + \frac{q_1 - q_2}{2l} z^2$	$0 \leq z \leq l$ $M = R_A z - \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{6l} z^3$	$z_0 = \frac{1 - R}{1 - k} l$ $M^{\max} = \frac{q_1 l^2}{6} \times \frac{2R^2 - k(1+k)}{(1-k)^2}$ <p>siendo</p> $k = \frac{q_2}{q_1}$ $R = \sqrt{\frac{1+k+k^2}{3}}$

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
 <p> <math>R_A = \frac{qc^2}{6l}</math>  <math>R_B = \frac{qc}{6} \left( 3 - \frac{c}{l} \right)</math>  <math>\frac{qc^2}{6l} \left( a + \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{c}{3l}} \right)</math> </p>	$R_A = \frac{qc^2}{6l}$ $R_B = \frac{qc}{6} \left( 3 - \frac{c}{l} \right)$	$0 < z < a$ $Q = \frac{qc^2}{6l}$ $a < z < l$ $Q = \frac{qc}{6} \left[ \frac{c}{l} - \left( z - a \right)^2 \right]$	$0 < z < a$ $M = \frac{qc^2}{6l} z$ $a < z < l$ $M = \frac{qc^2}{6} \left[ \frac{z}{l} - \frac{(z-a)^3}{c^3} \right]$	$z_0 = a + c \sqrt{\frac{c}{3l}}$ $M_{\text{máx}} = \frac{qc^2}{6l} \left( a + \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{c}{3l}} \right)$
 <p> <math>R_A = \frac{qa}{6} \left( 3 - 2 \frac{a}{l} \right)</math>  <math>R_B = \frac{qa^2}{3l}</math>  <math>\frac{qa^2}{6} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{a}{l} \right)^2</math> </p>	$R_A = \frac{qa}{6} \left( 3 - 2 \frac{a}{l} \right)$ $R_B = \frac{qa^2}{3l}$	$0 < z < a$ $Q = \frac{qa}{6} \left( 3 - 2 \frac{a}{l} - 3 \frac{z^2}{a^2} \right)$ $a < z < l$ $Q = - \frac{qa^2}{3l}$	$0 < z < a$ $M = \frac{qa^2}{6} \left[ \left( 3 - 2 \frac{a}{l} \right) \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} \right]$ $a < z < l$ $M = \frac{qa^2}{3} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)$	$z_0 = a \sqrt{1 - \frac{2a}{3l}}$ $M_{\text{máx}} = \frac{qa^3}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{a}{l} \right)^{3/2}$

$$R_A = \frac{q(l+c)}{6}$$

$$R_B = \frac{q(l+a)}{6}$$

$$0 < z < a$$

$$Q = \frac{qa}{6} \left( \frac{l+c}{a} - 3 \frac{z^2}{a^2} \right)$$

$$a < z < l$$

$$Q = -\frac{qc}{6} \left[ \frac{l+a}{c} - 3 \frac{(l-z)^2}{c^2} \right]$$

$$0 < z < a$$

$$M = \frac{qaz}{6} \left( \frac{l+c}{a} - \frac{z^2}{a^2} \right)$$

$$a < z < l$$

$$M = \frac{qc(l-z)}{6} \times$$

$$\times \left[ \frac{l+a}{c} - \frac{(l-z)^2}{c^2} \right]$$

I  $a > c$

$$z_0 = \sqrt{\frac{a(l-c)}{3}}$$

$$M_{\max} =$$

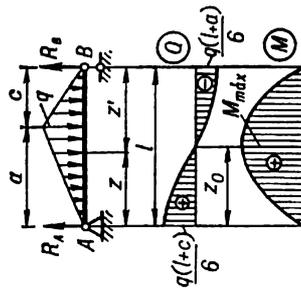
$$= \frac{q(l+c)}{9} \sqrt{\frac{a(l-c)}{3}}$$

II  $a < c$

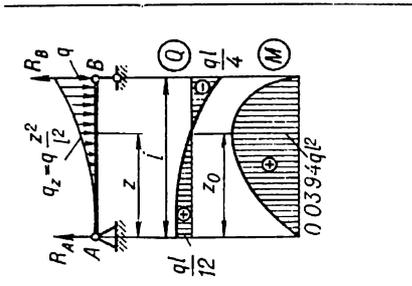
$$z_0 = l - \sqrt{\frac{c(l-a)}{3}}$$

$$M_{\max} = \frac{q(l+a)}{9} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{c(l-a)}{3}}$$



Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_A = \frac{q_1 a}{2} - R$ $R_B = \frac{q_2 b}{2} + R$ $R = \frac{q_1 a^2 - q_2 b^2}{6l}$	$0 \leq z \leq a$ $Q = R_A - \frac{q_1 z}{2} \times \left( 2 - \frac{z}{a} \right)$ $a \leq z \leq l$ $Q = -R_B + \frac{q_2(l-z)}{2} \left( 2 - \frac{l-z}{b} \right)$	$0 \leq z \leq a$ $M = R_A z - \frac{q_1 z^2}{6} \left( 3 - \frac{z}{a} \right)$ $a \leq z \leq l$ $M = R_B (l-z) - \frac{q_2(l-z)^2}{6} \left( 3 - \frac{l-z}{b} \right)$	<p>I <math>R &gt; 0</math></p> $z_0 = a - \sqrt{\frac{2Ra}{q_1}}$ $M_{\text{máx}} = M + \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{2Ra}{q_1}}$ <p>II <math>R &lt; 0</math></p> $z_0 = a + \sqrt{\frac{2Rb}{q_2}}$ $M_{\text{máx}} = M - \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{2Rb}{q_2}}$ $* M = \frac{q_1 a^2}{6} - Ra = \frac{q_2 b^2}{6} + Rb$

 <p> <math>z_0 = 0,63l</math>  <math>M_{\max} = 0,0394 ql^2</math> </p>	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{12} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^4}{l^4} \right)$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{12} \left( 1 - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$	$R_A = \frac{ql}{12}$ $R_B = \frac{3ql}{4}$	
	$0 < z < l$ $M = \frac{ql^2}{3} \left( \frac{z}{l} - 2 \frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right)$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{3} \left( 1 - 6 \frac{z^2}{l^2} + 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$	$R_A = \frac{ql}{3}$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$z_0 = \frac{l}{2}$ $M_{\max} = \frac{5}{48} ql^2$

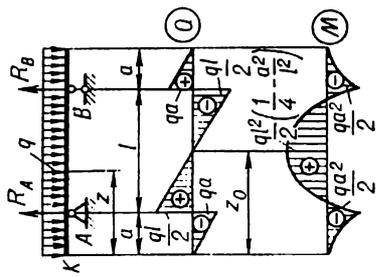
Continuación de la tabla 7

Esquema de solitación de a viga, diagramas de Q y M	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante Q	Momento flector M	Coordenada de la sección peligrosa z <sub>0</sub> y momento máximo M <sub>máx</sub>
	$R_A = \frac{ql}{2} - \frac{\Delta M}{l}$ $R_B = \frac{ql}{2} + \frac{\Delta M}{l}$ $\Delta M = M_2 - M_1$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{2} \left( 1 - 2 \frac{z}{l} \right) - \frac{\Delta M}{l}$	$0 \leq z \leq l$ $M = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - \Delta M \frac{z}{l} - M_1$	$z_0 = \frac{l}{2} - \frac{\Delta M}{ql}$ $M_{\text{máx}} = \frac{ql^2}{8} + \frac{(\Delta M)^2}{2ql^2} - \frac{M_2 + M_1}{2}$
	$R_A = R_B = \frac{M}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M}{l} z$ $l < z \leq l + a$ $Q = 0$	$0 \leq z \leq l$ $M = -M \frac{z}{l}$ $l \leq z \leq l + a$ $M = -M$	$l \leq z_0 \leq l + a$ $M_{\text{máx}} = -M$

	$R_A = P \frac{a}{l}$ $R_B = P \left( 1 + \frac{a}{l} \right)$	$0 < z < l$ $Q = -P \frac{a}{l}$ $l < z < l + a$ $Q = P$	$z_0 = l$ $M_{\max} = -Pa$
	$R_A = q \frac{l^2 - a^2}{2l}$ $R_B = q \frac{l^2 + a^2}{2l} + qa$	$0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} - 2 \frac{z}{l} \right)$ $l \leq z \leq l + a$ $Q = q(l + a - z)$	<p>I <math>l &lt; a(1 + \sqrt{2})</math></p> $z_0 = l$ $M_{\max} = -\frac{qa^2}{2}$ <p>II <math>l &gt; a(1 + \sqrt{2})</math></p> $z_0 = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$ $M_{\max} = \frac{q(l^2 - a^2)^2}{8l^2}$

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_A = \frac{qa^2}{2l}$ $R_B = \frac{qa^2}{2l} \left( 1 + 2 \frac{l}{a} \right)$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{qa^2}{2l}$ $l \leq z \leq l + a$ $Q = q(l + a - z)$	$0 \leq z \leq l$ $M = -\frac{qa^2}{2} \frac{z}{l}$ $l \leq z \leq l + a$ $M = -\frac{q(l + a - z)^2}{2}$	$z_0 = l$ $M_{\text{máx}} = -\frac{qa^2}{2}$
	$R_A = R_B = P$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -P$ $a \leq z \leq a + l$ $Q = 0$ $a + l \leq z \leq l + 2a$ $Q = P$	$0 \leq z \leq a$ $M = -Pz$ $a \leq z \leq a + l$ $M = -Pa$ $a + l \leq z \leq l + 2a$ $M = -P(l + 2a - z)$	$a \leq z_0 \leq l + a$ $M_{\text{máx}} = -Pa$

	$R_A = R_B = -q \left( \frac{l}{2} + a \right)$	$0 < z < a$ $Q = -qz$ $a < z < a+l$ $Q = \frac{ql}{2} \left( 1 + 2 \frac{a}{l} - 2 \frac{z}{l} \right)$ $a+l < z < l+2a$ $Q = q(l+2a-z)$	$0 < z < a$ $Q = -Pz$ $a < z < l$ $Q = P \frac{a}{b}$	$R_A = P \left( 1 + \frac{a}{b} \right)$ $R_B = P \frac{a}{b}$ $M_B = P \frac{ac}{b}$
$0 < z < a$ $M = -\frac{qz^2}{2}$ $a < z < a+l$ $M = \frac{ql^2}{2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{a}{l} \right) \times \left( \frac{z}{l} - \frac{a}{l} \right) - \frac{z^2}{l^2} \right]$ $a+l < z < l+2a$ $M = -\frac{1}{2} q(l+2a-z)^2$	$0 < z < a$ $M = -Pz$ $a < z < l$ $M = -Pa \left( 1 - \frac{z-a}{b} \right)$	$I \quad l > 2\sqrt{2a}$ $z_0 = a + \frac{l}{2}$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{a^2}{l^2} \right]$ $II \quad l < 2\sqrt{2a}$ $z_0 = a; z_0 = a+l$ $M_{\max} = -\frac{qa^2}{2}$	$I \quad c > b$ $z_0 = l$ $M_{\max} = P \frac{ac}{b}$ $II \quad c < b$ $z_0 = a$ $M_{\max} = -Pa$	

Continuación de la tabla 7

Esquema de sollicitación de la viga, diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo	Fuerza cortante $Q$	Momento flector $M$	Coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y momento máximo $M_{\text{máx}}$
	$R_A = q \frac{(l-c)^2}{2b}$ $R_B = q \left[ l - \frac{(l-c)^2}{2b} \right]$ $M_B = \frac{q}{2} \left[ c^3 + (b^2 - a^2) \frac{c}{b} \right]$	$0 < z < a$ $Q = -qz$ $a < z < l$ $Q = q \left[ \frac{(l-c)^2}{2b} - z \right]$	$0 < z < a$ $M = -\frac{1}{2} qz^2$ $a < z < l$ $M = -\frac{1}{2} q \left[ z^2 - (l-c)^2 \frac{z-a}{b} \right]$	$* z_0 = \frac{(l-c)^2}{2b}$ $* M_{\text{máx}} = -\frac{q}{2} \left[ z_0^2 - (l-c)^2 \frac{z_0-a}{b} \right]$
	$R_A = P \frac{bd}{ac}$ $R_B = P \frac{d}{c} \left( 1 + \frac{b}{a} \right)$ $R_C = P \left( 1 + \frac{d}{c} \right)$	$0 < z < a$ $Q = P \frac{bd}{ac}$ $a < z < a+b+c$ $Q = -P \frac{d}{c}$ $l-d < z < l$ $Q = P$	$0 < z < a$ $M = P \frac{bd}{ac} z$ $a < z \leq l-d$ $M = P \frac{d}{c} (a+b-z)$ $l-d < z < l$ $M = -P(l-z)$	<p>I <math>c &gt; b</math>  <math>z_0 = l-d</math>  <math>M_{\text{máx}} = -Pd</math>  <math>b &gt; c</math>  <math>z_0 = a</math>  <math>M_{\text{máx}} = Pd \frac{b}{c}</math></p>

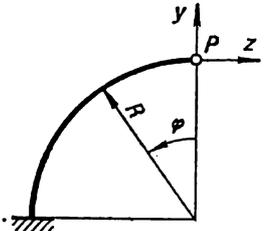
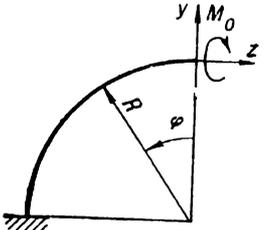
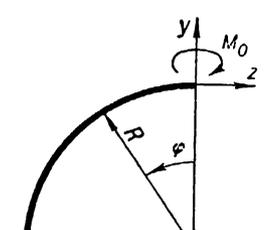
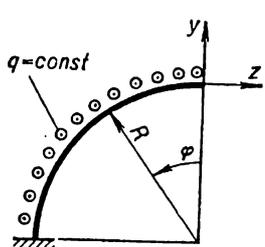
Tabla 8

Momento flector  $M$ , fuerza normal  $N$  y cortante  $Q$  en la barra voladiza circular cargada en su plano

Esquema	$N$	$Q$	$M$
	$P \operatorname{sen} \varphi + T \cos \varphi$	$P \cos \varphi - T \operatorname{sen} \varphi$	$M_0 + PR \operatorname{sen} \varphi - TR(1 - \cos \varphi)$
	$P \cos(\alpha - \varphi) + T \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)$	$P \operatorname{sen}(\alpha - \varphi) - T \cos(\alpha - \varphi)$	$M_0 + PR[\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha] - TR[\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}(\alpha - \varphi)]$
	$qR(1 - \cos \varphi)$	$qR \operatorname{sen} \varphi$	$qR^2(1 - \cos \varphi)$
	$qR \operatorname{sen} \varphi$	$-qR(1 - \cos \varphi)$	$-qR^2(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$
	$0$	$0$	$mR\varphi$

Tabla 9

**Momento flector  $M_{fl}$  y torsional  $M_t$  en la barra voladiza circular cargada perpendicularmente a su plano**

Esquema	$M_{fl}$ (perpendicularmente al plano $yz$ )	$M_t$
	$PR \operatorname{sen} \varphi$	$PR(1 - \operatorname{cos} \varphi)$
	$M_0 \operatorname{sen} \varphi$	$- M_0 \operatorname{cos} \varphi$
	$M_0 \operatorname{cos} \varphi$	$M_0 \operatorname{sen} \varphi$
	$qR^2(1 - \operatorname{cos} \varphi)$	$qR^2(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$

**CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DEL MATERIAL  
EN LA TRACCIÓN Y COMPRESIÓN.  
CONCENTRACIÓN DE TENSIONES.  
TENSIONES ADMISIBLES**

**§ 25. Tensiones y deformaciones durante  
tracción y compresión**

El estado tensional de la tracción o compresión axial se caracteriza por el hecho de que de las seis componentes de los esfuerzos interiores solamente la fuerza longitudinal  $N$  no es igual a cero. Examinemos una barra cargada con fuerzas axiales (fig. 61). Para una sección arbitraria  $n - n$  la parte estática del problema se expresa por medio de la ecuación

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

La parte geométrica del problema se determina por la *hipótesis de las secciones planas (hipótesis de Bernoulli)*, basada sobre datos experimentales: las secciones transversales de la barra, planas antes de la deformación, permanecen planas después de ocurrir la deformación, desplazándose progresivamente a lo largo del eje de la barra. De aquí se desprende que todas las fibras del elemento de longitud  $l$  se alargan en el mismo valor  $\Delta l$  y sus alargamientos unitarios  $\varepsilon$  son los mismos:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const.} \quad (4.2)$$

La parte física del problema examinado se determina por la *ley de Hooke* que expresa la dependencia lineal entre las deformaciones y las tensiones

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{o bien} \quad \sigma = E\varepsilon, \quad (4.3)$$

siendo  $E$  el coeficiente de proporcionalidad llamado *módulo de elasticidad durante la tracción o módulo de Young*.  $E$  tiene la dimensión de la tensión ( $\text{kgf/cm}^2$ ,  $\text{kgf/mm}^2$ , etc.) y es una de las constantes físicas del material (véase la tabla 10). Teniendo en cuenta que  $E = \text{const}$  y de acuerdo con (4.2), (4.3) también  $\sigma = E\varepsilon = \text{const}$ , hallamos de (4.1)

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (4.4)$$

Durante la tracción  $\sigma$  es positiva, durante la compresión, negativa. La fórmula (4.4) es justa para las secciones lo suficientemente alejadas de los puntos de aplicación de las cargas concentradas. Cerca de esos puntos tiene lugar una ley de distribución de las cargas más complicada.

Durante la determinación de las tensiones en la tracción y compresión, al igual que para los demás tipos de deformación, es necesario utilizar una proposición que deriva del experimento y se llama PRINCIPIO DE SAINT VENANT: *si el cuerpo se carga con sistema de fuerzas estáticamente equivalente, es decir, con*

tales fuerzas que tienen iguales el vector principal y el momento principal, siendo pequeña la zona de aplicación de las cargas en comparación con el tamaño del cuerpo, entonces en las secciones, bastante alejadas de los lugares de aplicación de las fuerzas, las tensiones dependen poco del modo de carga.

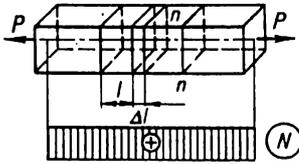


Fig. 61

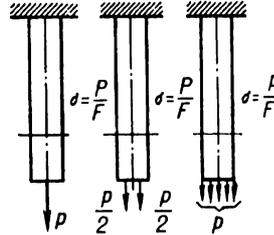


Fig. 62

Dicho principio puede ilustrarse con el ejemplo de aplicación de las cargas equivalentes dado en la fig. 62. La misma barra, empotrada por el extremo superior, se carga en el extremo libre con cargas estáticamente equivalentes, cuyas resultantes se expresan por medio del valor del vector  $P$ . Las investigaciones demuestran que las tensiones en las secciones bastante alejadas del lugar de aplicación de la carga resultan prácticamente iguales en todos los tres casos.

La deformación unitaria se determina por medio de la fuerza axial a base de (4.3) y (4.4) a partir de la siguiente fórmula:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad (4.5)$$

y la deformación total de la barra de longitud  $l$  para un material homogéneo ( $E = \text{const}$ ), siendo la fuerza  $N$  igual por la longitud, mediante la fórmula:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (4.6)$$

La fórmula (4.6) expresa la *ley de Hooke para los alargamientos absolutos*. El producto  $EF$  en el denominador de la fórmula se llama *rigidez de la sección transversal de la barra durante la tracción (compresión)* y tiene la dimensión de la fuerza, el valor  $c = \frac{EF}{l}$  se llama *rigidez de la barra durante la tracción (compresión)* y su dimensión es fuerza dividida por longitud.

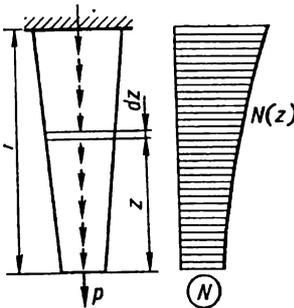


Fig. 63

En el caso de que tanto la fuerza axial como la sección transversal de la barra no son constantes por la longitud (fig. 63), el alargamiento total de la barra se determina por medio de la fórmula

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{EF(z)} dz. \quad (4.7)$$

La tracción y compresión están acompañadas también por el cambio de las secciones transversales de la barra (fig. 64, a, b). Las deformaciones transversales absolutas de la barra se determinan por las fórmulas,

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_1 - a; \\ \Delta b &= b_1 - b \end{aligned}$$

Las deformaciones transversales unitarias (negativas durante la tracción y positivas durante la compresión) se determinan a partir de la siguiente fórmula:

$$\epsilon' = \frac{\Delta a}{a} = -\frac{\Delta b}{b}.$$

Entre las deformaciones unitarias transversal y longitudinal existe, durante la tracción o compresión simple dentro de los límites de la aplicabilidad de la ley de Hooke, una relación constante, cuyo valor absoluto se llama *coeficiente de Poisson* y se designa con la letra  $\mu$ ,

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (4.8)$$

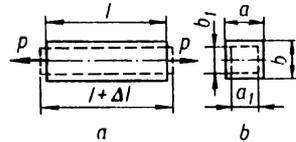


Fig. 64

El coeficiente de Poisson es una magnitud adimensional y para todos los materiales isótropos (véase la tabla 10) se encuentra entre los límites de 0 a 0,5 (para el corcho se aproxima a cero, para el caucho es cerca de 0,5, para el acero  $\mu \approx 0,3$ ).

Teniendo en cuenta que  $\epsilon$  y  $\epsilon'$  siempre tienen signos contrarios obtendremos

$$\epsilon' = -\mu\epsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (4.9)$$

Durante el cálculo de las barras que trabajan a tracción o compresión la condición de resistencia tiene que escribirse para la *sección peligrosa* que se caracteriza con el valor máximo  $N_{\text{máx}}$  en el diagrama de fuerzas axiales

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_{\text{máx}}}{F} < [\sigma], \quad (4.10)$$

donde  $[\sigma]$  es la tensión admisible para la tracción  $[\sigma_+]$  (durante el cálculo a la tracción) o la tensión admisible para la compresión  $[\sigma_-]$  (durante el cálculo a la compresión).

Con la fórmula (4.10) pueden resolverse los problemas de tres tipos: elección del tamaño de la sección transversal de la barra; comprobación de la resistencia; determinación de la carga admisible.

En algunos casos las barras se calculan partiendo de la *condición de rigidez*,

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(z)}{EF(z)} dz < [\Delta l], \quad (4.11)$$

siendo  $\Delta l$  el cambio de las dimensiones de la pieza;  $[\Delta l]$  es el valor admisible del cambio de las dimensiones.

El cálculo a partir de la condición de rigidez siempre tiene que completarse por el cálculo a la resistencia. Si resulta que la condición de resistencia no se satisface, las dimensiones de la barra deben tomarse a partir de esta condición.

## § 26. Ensayo de los materiales a tracción y compresión

**Ensayo a tracción.** Es el principal tipo de ensayo de las propiedades mecánicas de los materiales. Se efectúa en unas máquinas especiales de ensayo que aplican a la probeta una carga en gradual aumento y registran durante el proceso de carga el valor de la fuerza que actúa sobre la probeta y sus deformaciones.

Se utilizan, como regla general, probetas cilíndricas (fig. 65, a), y durante el ensayo del material en hojas, probetas planas (fig. 65, b). Para las probetas cilíndricas se mantiene una distancia determinada entre la longitud de cálculo  $l_0$  de la probeta y el diámetro  $d_0$ . Generalmente  $l_0 = 10d_0$  (probeta larga); con menor frecuencia  $l_0 = 5d_0$  (probeta corta).

Tomando en consideración que el diámetro  $d_0$  está ligado con el área de la sección de la probeta  $F_0$  mediante la fórmula

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 1,13 \sqrt{F_0},$$

la relación entre la longitud de cálculo  $l_0$  y el área de la sección transversal de la probeta  $F_0$  puede expresarse, para la probeta larga, por medio de la dependencia

$$l_0 = 11,3 \sqrt{F_0}, \quad (4.12)$$

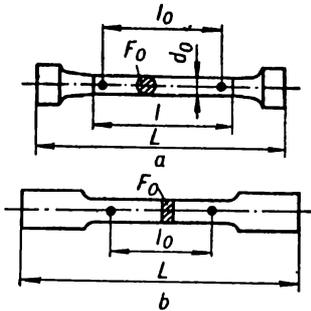


Fig. 65.

para la corta,

$$l_0 = 5,65 \sqrt{F_0}.$$

En calidad de probetas principales se utilizan, durante el ensayo a tracción, probetas cilíndricas de diámetro  $d_0 = 10$  mm, longitud de cálculo  $l_0 = 100$  mm y  $l_0 = 50$  mm. Se admite utilizar otras probetas proporcionales, que tienen mantenidas la correlación de las dimensiones de acuerdo con la fórmula (4.12).

**Diagrama de tracción.** Durante el ensayo del material a tracción las máquinas modernas permiten obtener automáticamente, a escala determinada, el gráfico de la deformación de la probeta en función de la carga,

o el llamado *diagrama de tracción*. El aspecto típico del diagrama de tracción en las coordenadas  $P - \Delta l$  para el acero pobre en carbono puede verse en la fig. 66.

En el diagrama hay una serie de tramos y puntos característicos que corresponden a diferentes etapas de la deformación de la probeta.

El punto A caracteriza la carga máxima (límite)  $P_{pr}$ , hasta la cual se mantiene la dependencia lineal entre la carga y el alargamiento de la probeta; el punto B corresponde a la carga máxima  $P_{el}$ , durante

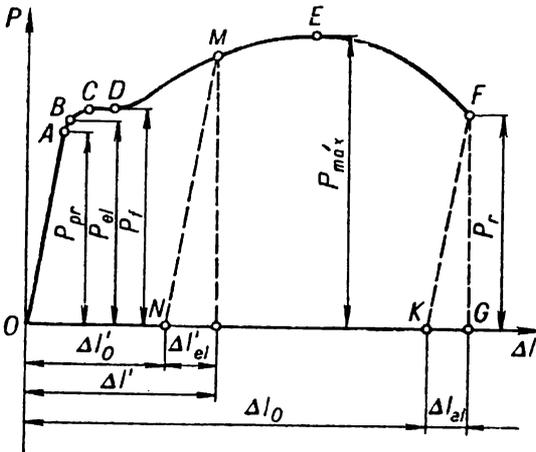


Fig. 66

la cual la probeta conserva las propiedades elásticas, es decir, al quitarle la carga, no se observa todavía la deformación permanente; el punto C corresponde a la carga  $P_f$ , con la cual la probeta se deforma sin crecer la carga o, como se dice, el material empieza a "fluir", formando en el diagrama el llamado *escalón de fluencia CD*. Pasada la etapa de fluencia, el material vuelve a obtener la propiedad de aumentar la resistencia a la ulterior deformación. El

punto *E* corresponde a la carga máxima (límite)  $P_{m\acute{a}x}$ , después de la cual empieza la reducción local de la probeta en forma de cuello (fig. 67), como resultado de lo cual ocurre la caída de la carga. El punto *F* corresponde a la carga  $P_{rot}$ , con la cual la probeta se descompone.

Utilizando las cargas señaladas típicas tomadas del diagrama de tracción y conociendo el área de la sección de la probeta ensayada  $F_0$  se determinan las características principales de resistencias del material:

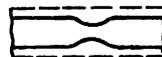


Fig. 67

$$\sigma_{pr} = \frac{P_{pr}}{F_0}, \text{ el límite de proporcionalidad};$$

$$\sigma_{el} = \frac{P_{el}}{F_0}, \text{ el límite de elasticidad};$$

$$\sigma_f = \frac{P_f}{F_0}, \text{ el límite de fluencia};$$

$$\sigma_p = \frac{P_{m\acute{a}x}}{F_0}, \text{ el límite de resistencia o resistencia provisional};$$

$$\sigma_{rot} = \frac{P_{rot}}{F_0}, \text{ la tensión en el momento de la rotura.}$$

Como durante la tracción la sección transversal de la probeta varía continuamente, sobre todo en el período de carga que se caracteriza por el tramo *DEF* del diagrama, los valores de  $\sigma_p$  y  $\sigma_{rot}$  tienen un carácter bastante convencional. Especialmente es convencional la tensión  $\sigma_{rot}$ , porque la formación del *cuello* empieza a partir de la carga  $P_{m\acute{a}x}$  y en el momento de la rotura la sección de la probeta en el cuello  $F_c$  resulta sensiblemente menor del área inicial de la sección de la probeta  $F_0$ .

Para los materiales, cuyo diagrama de tracción no tiene un escalón de fluencia bien expresado, el límite de fluencia se determina convencionalmente como la tensión para la cual la deformación permanente constituye un valor establecido por el GOST o las especificaciones. Según el GOST 1497-61 ese valor de la deformación permanente constituye un 0,2% de la longitud calculada de la probeta, y el límite convencional de fluencia  $\sigma_f$  se denota por  $\sigma_{0,2}$ .

Teniendo en cuenta que prácticamente es difícil determinar el inicio de la desviación de la ley de proporcionalidad y la aparición de las primeras deformaciones permanentes, se introduce también la noción del límite convencional de proporcionalidad y límite convencional de elasticidad.

Se entiende por el *límite convencional de proporcionalidad* la tensión mínima, para la cual la desviación de la dependencia lineal entre la tensión y deformación alcanza cierto valor dado (del orden de un 0,002%).

Se entiende por el *límite convencional de elasticidad* la tensión mínima, para la cual la deformación permanente alcanza un valor dado (generalmente, de 0,001% a 0,05%). El límite convencional de elasticidad se señala con un índice que corresponde al valor dado de la deformación permanente, por ejemplo,  $\sigma_{0,001}$  y  $\sigma_{0,05}$ .

Durante el ensayo de las probetas a tracción se determinan también las características de la plasticidad, tales como el *alargamiento unitario*

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100, \%$$

y la reducción unitaria

$$\psi = \frac{\Delta F_0}{F_0} 100, \%$$

siendo

$$\Delta F_0 = F_0 - F_{\min}$$

Además de las características de las propiedades mecánicas del material (resistencia y plasticidad), señaladas anteriormente, cuyos datos para diferentes

materiales se dan en el Apéndice 1, se determinan también las características energéticas del material. Resulta que el diagrama de tracción ofrece información sobre estas propiedades. Así, su área caracteriza el trabajo gastado para la tracción de la probeta. El trabajo invertido para la deformación de la probeta antes de la deformación  $\lambda_1$  (fig. 68), es igual a

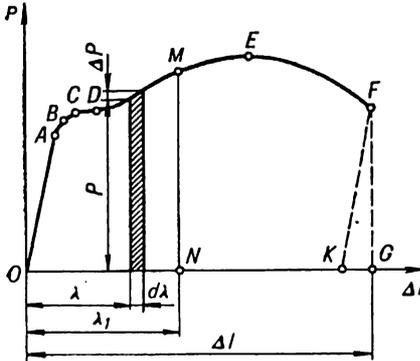


Fig. 68

$$A_1 = \int_0^{\lambda_1} (P + dP)d\lambda \approx \int_0^{\lambda_1} Pd\lambda,$$

lo que corresponde al área  $OABCDMN$  del diagrama, y el trabajo gastado para la ruptura de la probeta se determina por el área de todo el diagrama  $OABCDEFG$ .

El trabajo de la deformación se expresa, dentro de los límites de la elasticidad, por el área del triángulo sombreado (fig. 69, a), y para el alargamiento de la probeta  $\Delta l$  y la fuerza  $P$  que le corresponde es igual a

$$A_{e1} = \frac{P\Delta l}{2},$$

el trabajo específico de la deformación es

$$a_{e1} = \frac{A_{e1}}{V} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$$

y se expresa por el área del triángulo sombreado del diagrama en las coordenadas  $\sigma - \varepsilon$  (fig. 69, b).

**Diagrama de tensiones.** Como el diagrama de tracción no sólo caracteriza las propiedades del metal, sino también las dimensiones de la probeta, se suele reconstruirlo en las coordenadas relativas  $\sigma - \varepsilon$ . Tal diagrama, construido a base del diagrama de tracción (fig. 66) y llamado *diagrama de tensiones*, está representado en la fig. 70. En este diagrama los puntos  $O, a, b, c, d, e, f$  corresponden a los puntos  $O, A, B, C, D, E, F$  del *diagrama primario de tracción* (fig. 66).

Del diagrama de tensiones (fig. 70) se ve que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

es decir, el módulo de elasticidad durante la tracción es numéricamente igual a la tangente del ángulo de inclinación del tramo rectilíneo del diagrama de tensiones con respecto al eje de las abscisas. Precisamente en ello consiste el sentido geométrico del módulo de elasticidad durante la tracción.

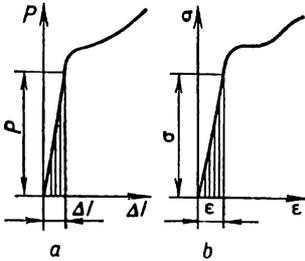


Fig. 69

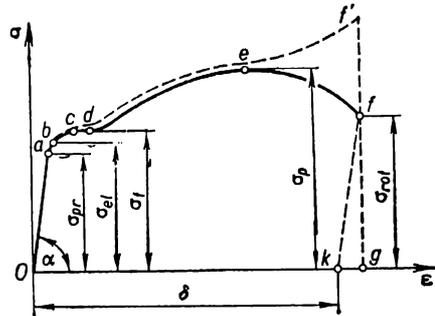


Fig. 70

Cabe señalar que el tramo descendente *ef* del diagrama de tensiones (fig. 70) tiene un carácter convencional a causa de una diferencia considerable entre la sección del cuello y el área inicial de la sección de la probeta  $F_0$ , por la cual se dividen los esfuerzos correspondientes tomados del diagrama de tracción para obtener las ordenadas del diagrama de tensiones en el tramo *ef*.

El aspecto aproximado del diagrama de tensiones para diferentes materiales puede verse en la fig. 71. Las curvas 1, 2, 3, 4 caracterizan, respectivamente, las propiedades mecánicas del bronce ( $\sigma_p = 2470 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\delta = 36\%$ ); del acero al carbono ( $\sigma_p = 3580 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\delta = 38\%$ ); del acero al níquel ( $\sigma_p = 7150 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\delta = 54\%$ ); del acero al manganeso ( $\sigma_p = 9160 \text{ kgf/cm}^2$ ;  $\delta = 30\%$ ).

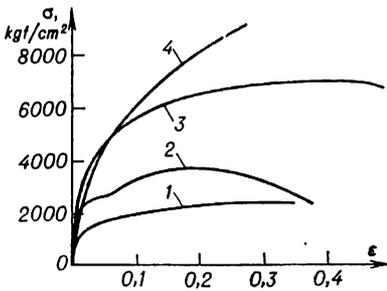


Fig. 71

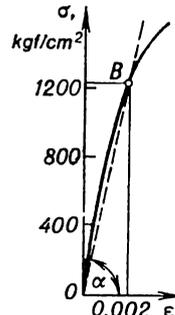


Fig. 72

El diagrama de tensión para la fundición, que es típico para el material frágil, se expone en la fig. 72.

Si los esfuerzos que actúan sobre la probeta en cada instante de carga se relacionan con el valor verdadero de la sección transversal en el momento correspondiente, obtendremos *el diagrama de tensiones verdaderas* (fig. 70, línea de trazos).

**Ensayo a compresión.** El ensayo de los materiales a compresión se efectúa por medio de prensas especiales o máquinas universales de ensayo. Para los ensayos se fabrican probetas en forma de cilindros de una altura no grande (la

altura constituye, generalmente, de uno a tres diámetros) o pequeños cubos. La fricción que aparece entre los platos de compresión de la máquina de ensayo y los topes de la probeta durante el ensayo de compresión influye esencialmente sobre los resultados del ensayo y el carácter de la descomposición de la probeta ensayada.

Al comprimir la probeta cilíndrica de acero pobre en carbono, ésta toma una forma acubada (fig. 73). El diagrama de compresión obtenido para este material puede verse en la fig. 74.



Fig. 73

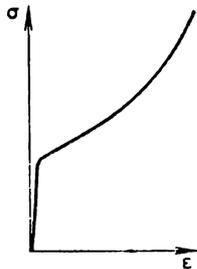


Fig. 74

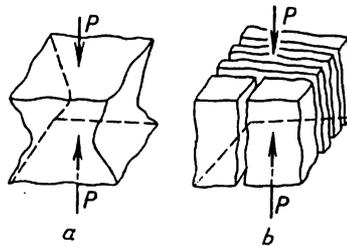


Fig. 75

En la fig. 75, *a* se muestra el carácter de la destrucción durante la compresión de una probeta de piedra, teniendo presentes las fuerzas de fricción entre los platos de la máquina y los topes de la probeta. Al disminuir las fuerzas de fricción mediante la aplicación de una capa de parafina sobre los topes, el carácter de la descomposición de la misma probeta puede ilustrarse en la fig. 75, *b*.

El aspecto de la probeta de fundición, destruida durante la compresión, se muestra en la fig. 76, *a*, y el diagrama de compresión correspondiente, en la fig. 77.



Fig. 76

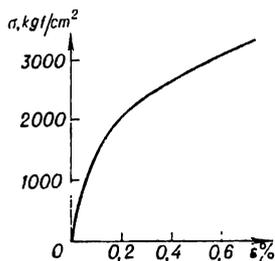


Fig. 77

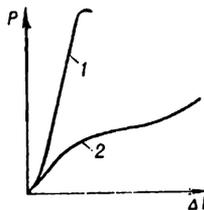


Fig. 78

Los diagramas de compresión durante el ensayo de los cubitos de madera se muestran en la fig. 78 (la curva 1 es durante la compresión a lo largo de las fibras, la curva 2, de través).

## § 27. Concentración de las tensiones

La *concentración de las tensiones* es el aumento local de las tensiones en los elementos de estructuras determinado por las tensiones bruscas en las secciones transversales; dichas transiciones tienen lugar a causa de orificios, cavetos, ranuras, cortes, etc., llamados *concentradores*. En la fig. 79 pueden verse los

diagramas de distribución de las tensiones en la sección de la banda traccionada debilitada por un orificio redondo (fig. 79, a) y chavetos semicirculares (fig. 79, b).

El grado de concentración de las tensiones se caracteriza por el llamado *coeficiente de concentración*

$$\alpha = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_n}, \quad (4.13)$$

siendo  $\sigma_{\text{máx}}$  la tensión máxima en el lugar de concentración y  $\sigma_n$ , la tensión nominal que se deduce por la fórmula

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\text{mín}}}, \quad (4.14)$$

donde  $N$  es la fuerza normal en la sección debilitada;  $F_{\text{mín}}$ , el área de la sección debilitada llamada *área neta*.

A veces la tensión nominal se determina por la fórmula

$$\sigma_n = \frac{N}{F_{\text{br}}}, \quad (4.15)$$

siendo  $F_{\text{br}}$  el área de la sección entera (sin contar con su debilitamiento por la presencia del concentrador) o el *área bruta*.

Si los concentradores ocupan una parte insignificante de la sección (por ejemplo, orificios pequeños), las tensiones nominales, determinadas por medio de las fórmulas (4.14) y (4.15), son prácticamente iguales.

Al determinar las tensiones máximas en la zona del concentrador mediante el cálculo, el coeficiente de concentración deducido según (4.13) se llama *coeficiente teórico de concentración*. Por ejemplo, en el caso de pequeño orificio redondo (fig. 79, a)  $\alpha = 3$ ; en el caso de cortes semicirculares (fig. 79, b)  $\alpha \approx 2$ . En realidad, el coeficiente de concentración de elementos reales de estructuras — el llamado *coeficiente efectivo de concentración*  $k$  determinado experimentalmente — resulta menor del teórico ( $\alpha > k$ ). Los cálculos a la resistencia tomando en

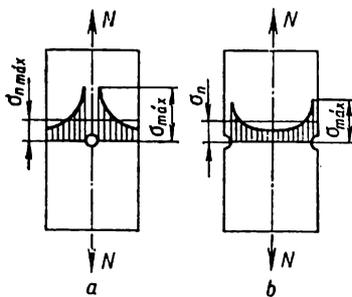


Fig. 79

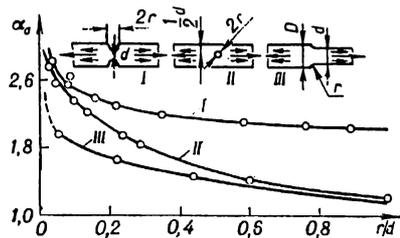


Fig. 80

consideración la concentración de las tensiones se efectúan, por regla general, a base del conocimiento de los valores de los coeficientes teóricos de concentración, cuyos valores, para el caso de tracción de barras redondas con diferente forma de los concentradores, se exponen en la fig. 80 y a continuación.

Tipo del concentrador de tensiones

Rebajo semicircular, siendo la relación de su radio al diámetro de la barra		$\alpha$
	0,1	2,0
	0,5	1,6
	1,0	1,2
Arista hueca, siendo la relación de su radio al diámetro de la barra	2,0	1,1
	0,0625	1,75
	0,125	1,50
	0,25	1,20
Transición con ángulo entrante recto	0,5	1,10
		2,0
Rebajo agudo en forma de V		3,0
Rosca Whitworth		2,0
Rosca métrica		2,5
Orificio, siendo la relación de su diámetro al diámetro de la barra de 0,1 a 0,33		2,0
Trazos dejados por la cuchilla en la superficie de la pieza		1,2—1,4

Los datos más completos sobre los coeficientes de concentración se dan en el Apéndice 2.

La alta concentración de las tensiones sobre todo es peligrosa para los elementos de estructuras fabricados de materiales frágiles, porque, al alcanzar en la zona de concentración las tensiones iguales al límite de resistencia del material, éste empieza a descomponerse. En el caso de un material plástico la concentración de las tensiones es menos peligrosa, ya que, al alcanzar en la zona del concentrador la tensión igual al límite de fluencia  $\sigma_f$ , tiene lugar la redistribución de las tensiones de acuerdo con el esquema mostrado con líneas punteadas en la fig. 81.

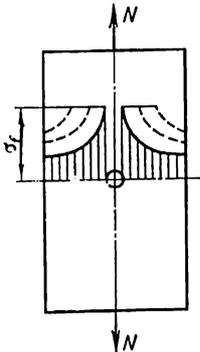


Fig. 81

### § 28. Tensiones admisibles

Después de haber determinado las propiedades mecánicas del material por medio de realizar ensayos correspondientes de las probetas, se puede hallar que tensiones son seguras para el trabajo de la estructura, es decir, establecer *las tensiones admisibles*. Claro está que la tensión admisible tiene que ser menor que la peligrosa para el material dado, formando una parte de ésta. Tomemos

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (4.16)$$

donde  $[\sigma]$  es la tensión admisible;  $\sigma_0$ , tensión peligrosa;  $n$ , coeficiente de seguridad.

Para las piezas fabricadas de materiales plásticos se debe considerar el límite de fluencia  $\sigma_0 = \sigma_f$  como la tensión peligrosa; de materiales frágiles, la resistencia provisional  $\sigma_0 = \sigma_p$ .

La elección del coeficiente de seguridad  $n$ , que muestra cuántas veces la tensión admisible es menor que la peligrosa, depende del estado del material (frágil, plástico), carácter de aplicación de la carga (estática, dinámica, que varía periódicamente), al igual que de tales factores generales como la heterogeneidad del material, inexactitud al fijar cargas exteriores, aproximación de los esquemas de cálculo y fórmulas, etc.

El valor del coeficiente de seguridad depende también de qué tensión consideramos como peligrosa ( $\sigma_f$  o  $\sigma_p$ ).

Para los materiales plásticos, al aplicar carga estática, cuando  $\sigma_0 = \sigma_f$ ;  $n = n_f$ ,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_f}{n_f},$$

el coeficiente de seguridad se toma igual a

$$n_f = 1,4 \div 1,6.$$

Si las cargas son estáticas, en el caso de materiales frágiles, cuando  $\sigma_0 = \sigma_p$ ;  $n = n_p$ ,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_p}{n_p},$$

el coeficiente de seguridad se toma igual a

$$n_p = 2,5 \div 3,0.$$

A veces se determinan también para los materiales plásticos las tensiones admisibles a base de la resistencia provisional, cuyo valor se halla prácticamente con más facilidad. Entonces

$$[\sigma] = \frac{\sigma_p}{n_p}.$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma_f = (0,5 \div 0,7) \sigma_p$ ;  $n_p = 2,4 \div 2,6$ .

A veces las tensiones admisibles de tracción se denotan por  $[\sigma_+]$  y de compresión,  $[\sigma_-]$ . Los materiales frágiles registran la compresión mejor que la tracción, para ellos  $[\sigma_+] < [\sigma_-]$ .

Cuando las cargas son estáticas, en el caso de los materiales frágiles homogéneos, se debe tomar en consideración la concentración de las tensiones y efectuar el cálculo a base de las tensiones máximas locales

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \alpha \sigma_n < [\sigma].$$

En la tabla 11 se dan valores aproximados de las tensiones admisibles para diferentes materiales, cuando la carga es estática.

Los datos sobre las propiedades físico-mecánicas de los materiales principales de construcción se dan en el Apéndice I.

Tabla 10

## Módulos de elasticidad y coeficientes de Poisson

Denominación del material	Módulo de elasticidad $E \cdot 10^{-6}$ kgf/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad $G \cdot 10^{-3}$ kgf/cm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson $\mu$
Fundición gris, blanca	1,15—1,60	4,5	0,23—0,27
Fundición maleable	1,55	—	—
Aceros al carbono	2,0 — 2,1	8,0 — 8,1	0,24—0,28
Aceros aleados	2,1 — 2,2	8,0 — 8,1	0,25—0,30
Cobre laminado	1,1	4,0	0,31—0,34
Cobre estirado en frío	1,3	4,9	—
Fundición de cobre	0,84	—	—
Bronce fosforado laminado	1,15	4,2	0,32—0,35
Latón estirado en frío	0,91—0,99	3,5 — 3,7	0,32—0,42
Latón naval laminado	1,0	—	0,36
Bronce de manganeso laminado	1,1	4,0	0,35
Aluminio laminado	0,69	2,6 — 2,7	0,32—0,36
Alambre de aluminio estirado	0,7	—	—
Fundición de bronce de aluminio	1,05	4,2	—
Duraluminio laminado	0,71	2,7	—
Zinc laminado	0,84	3,2	0,27
Plomo	0,17	0,70	0,42
Hielo	0,1	0,28—0,3	—
Vidrio	0,56	2,2	0,25
Granito	0,49	—	—
Caliza	0,42	—	—
Mármol	0,56	—	—
Arenisca	0,18	—	—
Mampostería			
de granito	0,09—0,1	—	—
de caliza	0,06	—	—
de ladrillo	0,027—0,030	—	—
Hormigón cuando el límite de resistencia es de			0,16—0,18
100 kgf/cm <sup>2</sup>	0,146—0,196	—	—
150 kgf/cm <sup>2</sup>	0,164—0,214	—	—
200 kgf/cm <sup>2</sup>	0,182—0,232	—	—
Madera a lo largo de las fibras	0,1 — 0,12	0,055	—
Madera de través de las fibras	0,005—0,01	—	—
Caucho	0,00008	—	0,47
Textolita	0,06—0,1	—	—
Guetinax	0,1—0,17	—	—
Baquelita	0,02—0,03	—	0,36
Visjomlita (IM-44)	0,040—0,042	—	0,37
Celuloide	0,014—0,028	—	0,33—0,38

Tabla 11

**Valores aproximados de las tensiones admisibles principales de tracción y compresión**

Denominación del material	Tensiones admisibles, kg/cm <sup>2</sup>	
	de tracción	de compresión
Fundición gris en lingotes	280 — 800	1200 — 1500
Acero OC y Cr. 2	1400	1400
Acero Cr. 3	1600	1600
Acero Cr. 3, para puentes	1400	1400
Acero de construcción al carbono (para la construcción de máquinas)	600 — 2500	600 — 2500
Acero de construcción aleado (para la construcción de máquinas)	1000 — 4000 y mayores	1000 — 4000 y mayores
Cobre	300 — 1200	300 — 1200
Latón	700 — 1400	700 — 1400
Bronce	600 — 1200	600 — 1200
Aluminio	300 — 800	300 — 800
Bronce de aluminio	800 — 1200	800 — 1200
Duraluminio	800 — 1500	800 — 1500
Textolita	300 — 400	300 — 400
Guetinax	500 — 700	500 — 700
Madera contrachapada baquelizada	400 — 500	400 — 500
Pino, a lo largo de las fibras	70 — 100	100 — 120
Pino, de través de las fibras	—	15 — 20
Roble, a lo largo de las fibras	90 — 130	130 — 150
Roble, de través de las fibras	—	20 — 35
Mampostería de piedra	hasta 3	4 — 40
Mampostería de ladrillo	hasta 2	6 — 25
Hormigón	1 — 7	10 — 90

§ 29. Tensiones en un punto.

Planos principales y tensiones principales

Las tensiones son resultado de la interacción de las partículas del cuerpo, la cual aparece durante su carga con fuerzas exteriores. La acción de las fuerzas exteriores que tratan de cambiar la disposición de las partículas del cuerpo o provocar su desplazamiento, la contrarrestan las tensiones que surgen en dicho cuerpo, limitando este desplazamiento con cierta pequeña magnitud. Las tensiones en un mismo punto serán, como regla general, diferentes en las distintas direcciones, y solamente en algunos casos de carga pueden ser iguales.

Analizando la tensión en el punto  $A$  del cuerpo cargado, referido a los planos pequeños (fig. 82) que pertenecen a las dos partes diferentes del cuerpo dividido por la sección  $I-I$  trazada a través de ese punto, se convence fácilmente de que, si bajo la acción de las cargas exteriores los planos tratan de separarse uno del otro o acercarse, entre ellos surgen correspondientemente *las tensiones normales*  $\sigma$  de tracción o compresión; si los planos tratan de desplazarse uno con respecto al otro, en ellos surgen *las tensiones tangenciales*  $\tau$ ; si uno de los planos trata de alejarse del otro, manteniéndose paralelo a éste en cualquier dirección arbitraria, en tal plano surgen simultáneamente tanto las tensiones normales  $\sigma$  como tangenciales  $\tau$ , y su resultante es *la tensión total*  $p$ , cuyo vector coincide con esa dirección. El desplazamiento de los planos puede descomponerse geoméricamente, en este caso, en dos desplazamientos, a saber: alejamiento mutuo y deslizamiento.

Separemos, en el caso general, un volumen elemental del material en forma de un paralelepípedo infinitamente pequeño (fig. 83) en el entorno del punto examinado en el cuerpo sometido a carga. La influencia de la parte quitada del

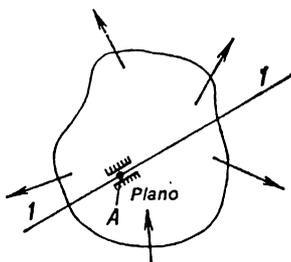


Fig. 82

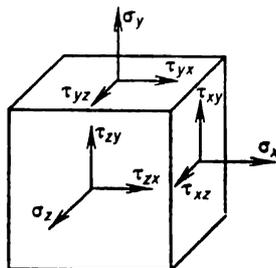


Fig. 83

cuerpo tiene que sustituirse en sus caras por las tensiones correspondientes o sus componentes (tensiones normales y tangenciales), como se muestra en la figura.

Al cambiar la orientación de las caras del separado paralelepípedo elemental, también cambiarán las tensiones en sus caras. Siempre se puede hallar tal orientación del elemento, con la cual en las caras faltarán las componentes tangenciales de las tensiones.

Tales planos en los cuales no actúan las tensiones tangenciales se denominan *planos principales* y las tensiones normales en estos planos, *tensiones principales*.

Se puede demostrar que en cada punto del cuerpo cargado arbitrariamente siempre hay por lo menos tres planos principales mutuamente perpendiculares, es decir, planos en los cuales faltan las tensiones tangenciales. Las direcciones paralelas a las tensiones principales se llaman *direcciones principales* en el punto dado. Se acostumbra denotar las tensiones principales por  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , considerando que entre las tres tensiones señaladas existe la siguiente correlación (comprendiéndola en el sentido algebraico):

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

El estado tensional en el cual solamente una de las tensiones principales (cualquiera de las tres) no es igual a cero, siendo igual a cero las dos demás, se denomina *uniaxial* o *lineal* (fig. 84, a). Si dos tensiones principales son dis-

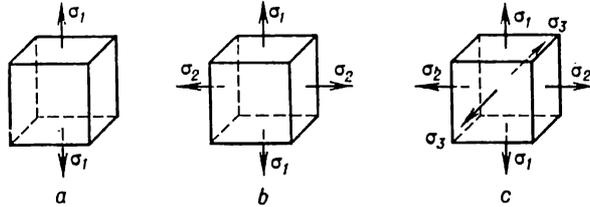


Fig. 84

tintas de cero y una es igual a cero, tal estado tensional se denomina *biaxial* o *plano* (fig. 84, b). El caso del estado tensional en que todas las tres tensiones principales difieren de cero se denomina *triaxial* o *espacial* (de volumen) (fig. 84, c).

Además, se distingue el estado tensional *homogéneo* del cuerpo, cuando en cada punto de cualquier sección y en todas las secciones paralelas a ésta las tensiones son iguales, y el estado tensional *heterogéneo*, cuando en diferentes puntos de cualquier sección del cuerpo examinado o en otras secciones paralelas a ésta las tensiones son diferentes.

### § 30. Estado tensional lineal

Nos encontramos, generalmente, con el estado tensional lineal en las barras que experimentan tracción o compresión, aunque algunos elementos experimentan la tensión lineal también en las barras sometidas a flexión o carga combinada.

Durante la tracción de la barra (fig. 85, a) la tensión normal en el plano  $F$  se determina por la fórmula

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}.$$

Las tensiones tangenciales en este plano son iguales a cero. En cualquier plano  $F_a$  (fig. 85, b), cuya normal exterior  $n_a$  forma con la dirección  $\sigma$  un ángulo  $\alpha$ , la tensión total  $p_a$  es igual a

$$p_a = \frac{N}{F_a} = \frac{N}{F} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha.$$

Las tensiones normales y tangenciales en el plano  $F_a$  serán

$$\sigma_a = p_a \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (5.1)$$

$$\tau_a = p_a \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.2)$$

Las tensiones normales  $\sigma_\alpha$  son positivas si son de tracción; las tensiones tangenciales  $\tau_\alpha$  son positivas si tratan de girar la parte examinada del elemento con respecto a cualquier punto tomado dentro de éste en el sentido de las manecillas del reloj ( $\sigma_\alpha$  y  $\tau_\alpha$  en la fig. 85, *b* son positivas).

De acuerdo con las fórmulas (5.1) y (5.2) cuando  $\alpha = 0$  (el plano *I* en la

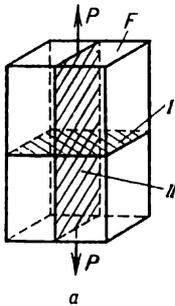


fig. 85, *a*),  $\tau_\alpha = 0$ ,  $\sigma_\alpha = \sigma$ ; cuando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (plano *II*),

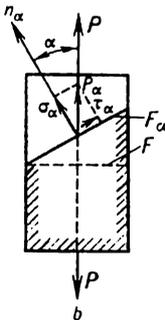
$\tau_\alpha = \sigma_\alpha = 0$ . Es decir, los planos *I* y *II* son principales; las tensiones principales serán

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

Durante la compresión  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\sigma$ .

Las tensiones tangenciales, según (5.2), alcanzan su máximo valor cuando  $\alpha = \pm 45^\circ$  y son iguales a

$$\tau_{\alpha \text{máx}} = \frac{\sigma}{2}.$$



Es fácil convencerse a base de (5.1) y (5.2) de que las tensiones normales y tangenciales en el plano  $F_\beta$  perpendicular al plano  $F_\alpha$ , es decir, en el plano, cuya normal exterior forma un ángulo  $\beta = \alpha + 90^\circ$  con la dirección de la tensión  $\sigma$ , serán

$$\sigma_\beta = \sigma \cos^2 \beta = \sigma \cos^2 (\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2 \alpha; \quad (5.3)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.4)$$

### § 31. Estado tensional plano

Durante el estado tensional plano, cuando sobre el elemento por sus dos caras mutuamente perpendiculares actúan las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  (fig. 86), las tensiones normales y tangenciales que actúan en el plano ( $\alpha$ ), cuya normal exterior  $n_\alpha$  forma con la dirección de la tensión  $\sigma_1$  un ángulo  $\alpha$ , se determinan a partir de las siguientes fórmulas correspondientes:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \quad (5.5)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.6)$$

De estas fórmulas pueden obtenerse las expresiones para la determinación de las tensiones normales y tangenciales en el plano ( $\beta$ ) perpendicular al plano ( $\alpha$ ), es decir, en el plano, cuya normal exterior forma un ángulo  $\beta = -(90^\circ - \alpha)$  con la dirección de  $\sigma_1$ :

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \quad (5.7)$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.8)$$

Sumando las partes izquierda y derecha de las ecuaciones (5.5) y (5.7), hallamos:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (5.9)$$

es decir, la suma de las tensiones normales que actúan por dos planos mutuamente perpendiculares es invariante con relación a la inclinación de estos planos e igual a la suma de las tensiones principales.

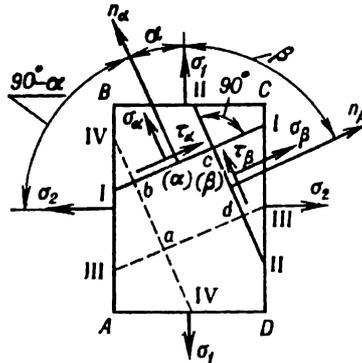


Fig. 86

De (5.6) y (5.8) se desprende que, lo mismo que para el estado tensional uniaxial, las tensiones tangenciales alcanzan el valor máximo cuando  $\alpha = \pm 45^\circ$ , es decir, por los planos inclinados bajo un ángulo de  $45^\circ$  a los planos principales, y son iguales a:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (5.10)$$

Comparando (5.6) y (5.8), hallamos que

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (5.11)$$

Esta igualdad expresa la ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales que puede formularse así: si en algún plano actúa cierta tensión tangencial, entonces en el plano perpendicular a éste actuará indispensablemente una tensión tangencial igual de valor e inversa de signo.

Las magnitudes de las tensiones principales son extremas para las tensiones normales.

En todos los planos inclinados las tensiones normales tienen valores intermedios entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

El mismo estado tensional del elemento puede expresarse por medio de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  (elemento ABCD, fig. 86 y 87, a) o bien por medio de las tensiones en los planos inclinados  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  (elementos abcd en la fig. 86 y 87, b).

En la teoría del estado tensional se distinguen dos problemas principales.

**PROBLEMA DIRECTO.** Siendo conocidos en el punto los planos principales y las tensiones que actúan en ellos, se necesita determinar las tensiones normales y tangenciales en los planos inclinados bajo ángulo dado con respecto a los planos principales, es decir, determinar las tensiones en las caras del elemento abcd conociendo las tensiones que actúan en las caras del elemento ABCD (fig. 88).

**PROBLEMA INVERSO.** Conociendo las tensiones normales y tangenciales que actúan en dos planos mutuamente perpendiculares que pasan a través del punto dado, se necesita hallar las direcciones principales y las tensiones principales.

En otras palabras, se da el elemento  $abcd$  (fig. 88) con las tensiones normales y tangenciales actuando por sus caras; se necesita determinar la posición del elemento  $ABCD$  es decir, el ángulo  $\alpha_0$  y hallar las tensiones principales.

Ambos problemas se resuelven tanto analíticamente como gráficamente.

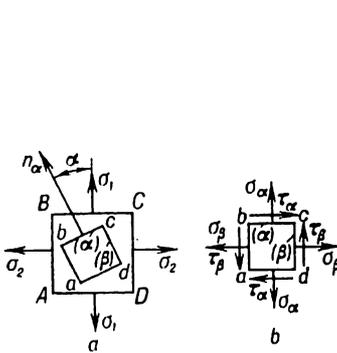


Fig. 87

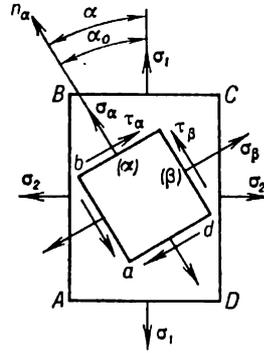


Fig. 88

**§ 32. Problema directo durante el estado tensional plano.**  
**Circulo de las tensiones**

La solución analítica del problema directo se da por medio de las fórmulas (5.5)–(5.8).

Gráficamente,  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  pueden hallarse a partir de las tensiones conocidas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  (fig. 89, a) por medio del llamado *circulo de las tensiones* (*circulo de Mohr*) construido en las coordenadas  $\sigma$ ,  $\tau$  sobre el segmento  $AB$  como diámetro igual a la diferencia de las tensiones principales  $\sigma_1 - \sigma_2$  (fig. 89, b). En efecto, trazando desde el centro del círculo de las tensiones (punto  $C$ ) el rayo  $CD$  bajo

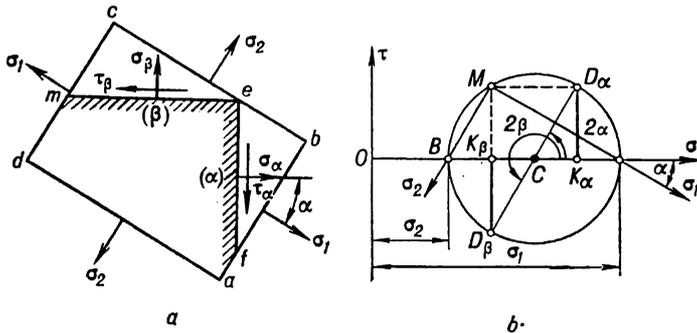


Fig. 89

un ángulo  $2\alpha$  hasta la intersección con la circunferencia, obtenemos el punto  $D_\alpha$  cuyas coordenadas van a caracterizar, respectivamente, las tensiones  $\sigma_\alpha$  y  $\tau_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \overline{OK_\alpha} &= \overline{OC} + \overline{CD_\alpha} \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha; \\ \overline{K_\alpha D_\alpha} &= \overline{CD_\alpha} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha. \end{aligned}$$

Es fácil demostrar que el punto  $D_\beta$  caracteriza las tensiones  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  en el plano ( $\beta$ ) perpendicular al plano  $\alpha$

$$\begin{aligned}\overline{OK_\beta} &= \overline{OC} - \overline{CK_\beta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \\ &= \sigma_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + \sigma_2 \operatorname{cos}^2 \alpha = \sigma_\beta; \\ \overline{D_\beta K_\beta} &= -\tau_\alpha = \tau_\beta.\end{aligned}$$

Los puntos  $D_\alpha$  y  $D_\beta$ , que caracterizan las tensiones en dos planos mutuamente perpendiculares ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ), siempre se encuentran en los extremos de un mismo diámetro.

El círculo de Mohr construido define totalmente el estado tensional del elemento mostrado en la fig. 89, a. Si se varía el ángulo  $\alpha$  dentro de los límites de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ , los planos inclinados ( $\alpha$ ) y ( $\beta$ ) han de ocupar consecutivamente todas las posiciones posibles, y los puntos  $D_\alpha$  y  $D_\beta$  describirán un círculo completo. En particular, si  $\alpha = 0$ , cuando las caras  $ef$  y  $em$  se conviertan en planos principales y en ellas actúen las mismas tensiones que en las caras del elemento  $abcd$ , el punto  $D_\alpha$  coincidirá con el punto  $A$  y el punto  $D_\beta$ , con el punto  $B$ .

Con el fin de determinar la posición del polo en el círculo de las tensiones trazamos desde el punto  $D_\alpha$ , igual que en el caso del círculo de inercia, una línea paralela a  $\sigma_\alpha$  (en nuestro caso es una horizontal, fig. 89, b) hasta la intersección con la circunferencia. El polo buscado es el punto  $M$ . Se podría hallar el polo  $M$  trazando desde el punto  $D_\beta$  una línea paralela a la tensión  $\sigma_\beta$ , es decir, trazando una vertical. Se puede demostrar que *la línea que une el polo  $M$  con cualquier punto del círculo es paralela a la dirección de la tensión normal en el plano, al cual corresponde este punto*: Así, por ejemplo, la línea  $MA$  es paralela a la tensión principal  $\sigma_1$  y la línea  $MB$ , a la tensión principal  $\sigma_2$ .

### § 33. Problema inverso durante el estado tensional plano

Durante los cálculos prácticos se tiene que resolver, no pocas veces, el problema inverso, o sea, determinar  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  siendo conocidas  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  (fig. 90, a). Supongamos que  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ ,  $\tau_\alpha > 0$ .

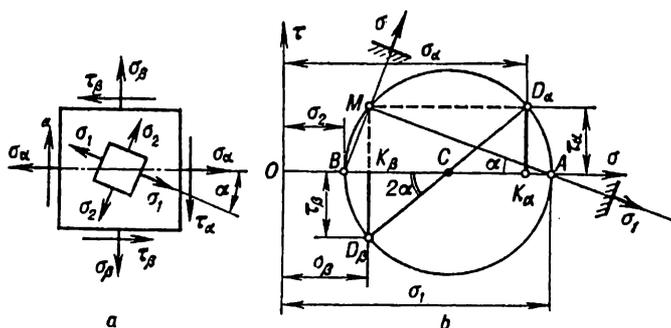


Fig. 90

Es evidente que fácilmente construimos el círculo de las tensiones en las coordenadas  $\sigma$ ,  $\tau$  (fig. 90, b) conociendo la posición de dos puntos diametralmente opuestos del círculo  $D_\alpha$  y  $D_\beta$ , cuyas coordenadas son respectivamente

$\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$  y  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$ . Además, las abscisas de los puntos de intersección del círculo con el eje  $\sigma - OA$  y  $OB$  — ofrecerán valores correspondientes de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

Para determinar la posición de los planos principales hallemos el pólo y aprovechémonos de su propiedad. Tracemos, con este fin, del punto  $D_\alpha$  una línea paralela a la línea de acción de  $\sigma_\alpha$ , es decir, una horizontal. El punto  $M$  de intersección de esta línea con la circunferencia no es sino el polo. Uniendo el punto  $M$  con los puntos  $A$  y  $B$  obtenemos las direcciones de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . La posición de los planos principales será, evidentemente, perpendicular a las direcciones de las tensiones principales. En la fig. 90, *a* dentro del elemento inicial está separado un elemento limitado por los planos principales, en cuyas caras se muestran las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Examinando el círculo de las tensiones pueden obtenerse las expresiones analíticas de las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  a través de  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}]; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} [\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

De la fig. 90, *b* se desprende también que

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\overline{MK}_\beta}{\overline{AK}_\beta} = - \frac{\overline{MK}_\beta}{\overline{OA} - \overline{OK}_\beta} = - \frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \quad (5.13)$$

Esta fórmula es la que determina el único valor del ángulo  $\alpha$ , en el cual se debe hacer girar la normal  $n_\alpha$  con el propósito de obtener la dirección de la tensión principal algebraicamente mayor. Hagamos notar que al valor negativo de  $\alpha$  le corresponden los ángulos colocados en el sentido de las manecillas del reloj, y que si una de las tensiones principales, deducidas por medio de las fórmulas (5.12), resulta negativa, entonces se debe denotar las tensiones no por  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , sino por  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ ; si ambas tensiones principales resultan negativas, tienen que denotarse por  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ .

### § 34. Estado tensional espacial

El estado tensional espacial o triaxial se examina pocas veces en el curso de resistencia de materiales. Por eso señalaremos aquí solamente algunos momentos esenciales de la teoría del estado tensional espacial.

Examinemos el caso del estado tensional espacial (fig. 91) cuando por las caras del cubo elegido actúan todas las tres tensiones principales

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0.$$

Está claro que en el plano *I* paralelo a  $\sigma_1$  las tensiones normales y tangenciales no dependerán de  $\sigma_1$ , sino de las tensiones  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , y en todos los planos semejantes van a caracterizarse por el círculo de las tensiones  $L_I$  con diámetro  $\sigma_2 - \sigma_3$  (fig. 92). En el plano *II* paralelo a  $\sigma_2$ , las tensiones normales y tangenciales se caracterizarán por el círculo de las tensiones  $L_{II}$  con diámetro  $\sigma_1 - \sigma_3$ , y, por fin, en el plano *III* paralelo a la tensión  $\sigma_3$ , las tensiones normales y tan-

genciales van a caracterizarse por el círculo de las tensiones  $L_{III}$  con diámetro  $\sigma_1 - \sigma_2$ .

En todos los planos señalados el método de determinación de  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$  y  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  no diferirá del método examinado más arriba de solución del problema directo para el estado tensional plano.

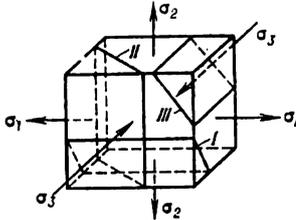


Fig. 91

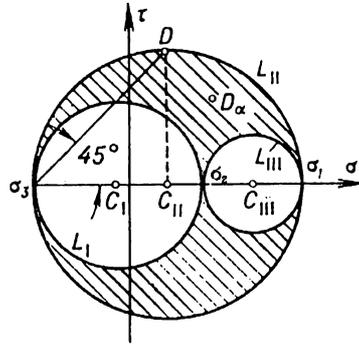


Fig. 92

Se puede demostrar que si trazamos un plano no paralelo a ninguna de las tensiones principales, la tensión normal  $\sigma_\alpha$  y la tangencial  $\tau_\alpha$  en este plano pueden determinarse por las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son los ángulos que la normal al plano examinado forma con las direcciones de  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Se demuestra también que el punto  $D_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$  que caracteriza el estado tensional en un plano inclinado arbitrariamente siempre se encontrará en la zona sombreada (fig. 92) o en su frontera, si el plano es paralelo a una de las tensiones principales.

Del examen de los círculos de las tensiones se ve (fig. 92) que  $\tau_{m\acute{a}x}$ , que se caracteriza por el punto  $D$  en la circunferencia  $L_{II}$  y actúa en el plano paralelo a la tensión principal  $\sigma_2$  inclinado bajo un ángulo  $\alpha = 45^\circ$  con respecto a las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , es igual al radio del círculo máximo. Por lo tanto, durante el estado tensional espacial

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (5.15)$$

En el caso de un plano, cuya normal exterior forma con las direcciones de  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  ángulos iguales  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ , llamado *plano octaédrico* (porque es paralelo a la cara del octaedro que puede formarse del cubo), cuando

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3},$$

las fórmulas (5.14) obtendrán el siguiente aspecto:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m; \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

La tensión tangencial determinada por medio de la fórmula (5.17) se llama *octaédrica*. La tensión normal octaédrica representa una especie de la tensión media para el estado tensional triaxial dado.

Al evaluar la resistencia del material en las condiciones del estado tensional complejo se utiliza muchas veces cierta magnitud ficticia de la tensión  $\sigma_i$  llamada *intensidad de la tensión* y relacionada con  $\tau_{\text{oct}}$  por la siguiente dependencia:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{oct}}.$$

### § 35. Deformaciones durante el estado tensional espacial.

#### Ley de Hooke generalizada

Basándose en la hipótesis de que el material sigue la ley de Hooke y las deformaciones son pequeñas, se puede obtener dependencias entre las tensiones y deformaciones en el caso general del estado tensional espacial. En este caso partimos de las dependencias (4.3) y (4.9) obtenidas anteriormente para el estado tensional lineal.

Examinemos la deformación de un paralelepípedo rectangular con dimensiones  $a \times b \times c$  (fig. 93, a) sujeto a la acción de las tensiones principales  $\sigma_1$ ,

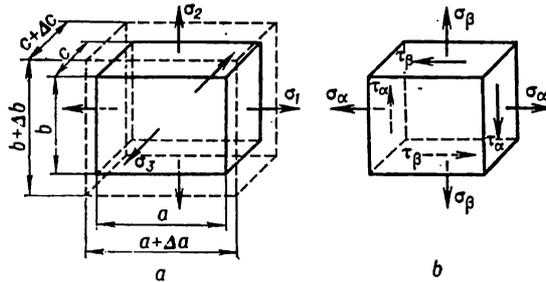


Fig. 93

$\sigma_2, \sigma_3$  (suponemos que todas son positivas) por sus tres caras paralelas, respectivamente, a las aristas  $a, b, c$ .

Los alargamientos de las aristas son, respectivamente,  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  y las deformaciones unitarias en las direcciones principales

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}. \quad (5.18)$$

Cada uno de estos alargamientos unitarios es resultado de acción de todas las tres tensiones  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ . En este caso, por ejemplo,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''', \quad (5.19)$$

donde de acuerdo con (4.3) y (4.9),

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}. \quad (5.20)$$

Tomando en consideración (5.20), se puede escribir (5.19) en la siguiente forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (5.21)$$

Las expresiones para  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  pueden escribirse, por analogía, como  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . De resultas, la ley generalizada de Hooke para el material isótropo se expresa por medio de las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Hagamos notar que las tensiones de compresión deben introducirse en las fórmulas (5.22) con el signo "menos". Es evidente que en el caso de estado tensional plano cuando, en particular,  $\sigma_2 = 0$ , la ley generalizada de Hooke (5.22) tendrá el aspecto,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_3);$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_3);$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu\sigma_1).$$

La ley de Hooke es justa no sólo para las tensiones principales, sino también para el cálculo de las deformaciones unitarias por cualquiera de las tres direcciones mutuamente perpendiculares, porque, cuando las deformaciones son pequeñas, se puede prescindir, a causa de pequeñez, de la influencia del deslizamiento sobre la deformación lineal. Por eso los alargamientos unitarios en dirección de la acción de las tensiones  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$  (fig. 93, b) son iguales a

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta); \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha).$$

La *deformación espacial*  $\varepsilon_v$ , que representa el cambio relativo del volumen  $v_0 = abc$  una vez de haber aplicado a éste las tensiones  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , se determina con precisión de las magnitudes de segundo orden de pequeñez por medio de la fórmula

$$\varepsilon_v = \frac{v - v_0}{v_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (5.23)$$

o bien por medio de las tensiones, tomando en consideración (5.22), mediante la fórmula

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (5.24)$$

En particular, durante la *compresión multilateral uniforme* cuando  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ,

$$\varepsilon_v = -\frac{p}{K}, \quad (5.25)$$

donde  $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$ .

La magnitud  $K$  se llama *módulo de deformación espacial*. De (5.24) se ve que al deformar un cuerpo cuyo material tiene el coeficiente de Poisson  $\mu = 0,5$  (por ejemplo, goma), el volumen del cuerpo no varía.

### § 36. Energía potencial de la deformación

Se llama *energía potencial de la deformación* la energía que se acumula en el cuerpo durante su deformación elástica. Cuando el cuerpo se deforma bajo la acción de una carga estática exterior, los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores se desplazan y la energía potencial de la carga disminuye en el valor que es igual numéricamente al trabajo realizado por las fuerzas exteriores. La energía que éstas pierden no desaparece, sino se convierte, generalmente, en *energía potencial de la deformación del cuerpo* (se desprecia de la parte insignificante de la energía dispersada en el proceso de la deformación, principalmente, en forma de calor).

El incremento de la energía potencial  $U$  del cuerpo deformado es igual a la disminución de la energía potencial de la carga  $U_{pot}$  y numéricamente igual al trabajo  $A_p$  realizado por las fuerzas exteriores, es decir,

$$U = A_p. \quad (5.26)$$

De esta manera la energía potencial de la deformación es igual numéricamente al trabajo de las fuerzas exteriores gastado durante la deformación elástica del cuerpo.

En el caso de tracción simple (fig. 94)

$$U = \frac{P\Delta l}{2},$$

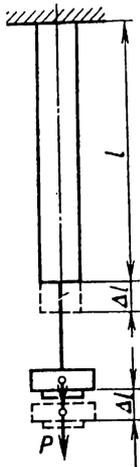


Fig. 94

la *energía potencial unitaria*

$$u = \frac{U}{v} = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}, \quad (5.27)$$

donde  $v$  es el volumen del cuerpo;  $F$ , el área de la sección transversal.

Tomando en consideración que  $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ , obtendremos

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (5.28)$$

En el caso del estado tensional espacial, cuando la energía potencial unitaria de la deformación se determina por el trabajo total de las tensiones principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  en los desplazamientos correspondientes iguales a las deformaciones relativas  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  (fig. 95), la energía potencial unitaria se expresa, a base de (5.28), mediante la fórmula

$$u = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2}.$$

Al hacer uso de la ley de Hooke generalizada podemos suprimir las deformaciones, obteniendo

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (5.29)$$

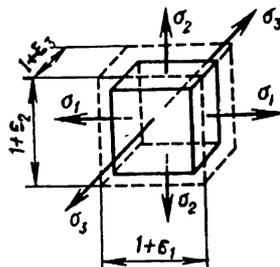


Fig. 95

Durante la deformación del cuerpo elástico (fig. 95) varía, hablando en general, no sólo su volumen, sino también la forma (por ejemplo, el cubo se convierte en el paralelepípedo). Por eso la energía potencial total unitaria de la deformación  $u$  puede presentarse en forma de dos sumandos:

$$u = u_v + u_f,$$

siendo  $u_v$  la energía potencial unitaria de variación del volumen;

$u_f$ , la energía potencial unitaria de variación de la forma.

Puede demostrarse que

$$u_v = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} u_f &= \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] = \\ &= \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

§ 37. Teorías principales de resistencia

El problema importantísimo del cálculo ingenieril consiste en evaluar la resistencia de la pieza conociendo el estado tensional, es decir, conociendo las tensiones principales en los puntos del cuerpo. Este problema se resuelve con mayor facilidad para los tipos simples de la deformación, en particular, para el estado tensional uniaxial, puesto que en este caso no es difícil determinar experimentalmente los valores de las tensiones límite (peligrosas). Hagamos recordar que la tensión peligrosa para los materiales plásticos es el límite de fluencia, y para los frágiles, la resistencia provisional.

De tal manera, la condición de resistencia durante el estado tensional uniaxial (fig. 96, a) tendrá el siguiente aspecto:

$$\sigma_1 < [\sigma_+]; \quad \sigma_3 \leq [\sigma_-], \quad (6.1)$$

siendo  $[\sigma_+]$  y  $[\sigma_-]$  las tensiones admisibles en la tracción y compresión, respectivamente.

En el caso del estado tensional compuesto, cuando dos o todas las tres tensiones principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  no son iguales a cero (fig. 96, b), el estado límite (peligroso) para un mismo material puede tener lugar con diferentes valores límite de las tensiones principales según sea la correlación entre ellas. Por eso se excluye prácticamente la comprobación experimental del estado peligroso a causa del sinnúmero de las posibles correlaciones entre  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y la dificultad en realizar los experimentos.

La otra vía para resolver el problema planteado consiste en la elección del *criterio de resistencia* (criterio del estado tensional-deformacional límite). Con este propósito se introduce la hipótesis de la influencia predominante de tal o cual factor sobre la resistencia del material. Además se prevé la posibilidad de comprobar el criterio de resistencia elegido confrontando el estado tensional

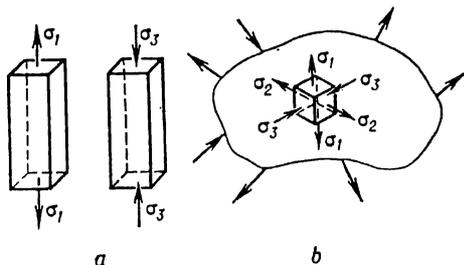


Fig. 96

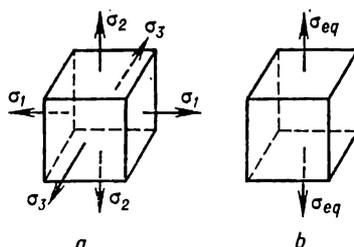


Fig. 97

complejo dado con el simple, por ejemplo, con tracción uniaxial (fig. 97, a, b), y establecer tal tensión equivalente que en ambos casos dé un igual coeficiente de seguridad. Se entiende que éste es, en el caso general del estado tensional, un número  $n$  que muestra cuántas veces es necesario aumentar simultáneamente

todas las componentes del estado tensional ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) para que dicho estado sea límite:

$$\sigma_1^0 = n\sigma_1; \quad \sigma_2^0 = n\sigma_2; \quad \sigma_3^0 = n\sigma_3.$$

Las hipótesis elegidas de tal manera se llaman *teorías mecánicas de resistencia*. A consecuencia se examinan los criterios principales (teorías de resistencia).

**Criterio de las tensiones normales máximas (primera teoría de resistencia).** Se supone que el estado peligroso del cuerpo, que se encuentra en las condiciones del estado tensional complejo, se determina por el nivel de la tensión normal máxima

$$\text{o bien} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_+^0 \\ |\sigma_3| = \sigma_-^0 \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

La condición de resistencia con el coeficiente de seguridad  $n$  tiene el aspecto

$$\text{o bien} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_1 < [\sigma_+] \\ |\sigma_3| < |\sigma_-| \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

donde

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}.$$

Esta teoría se comprueba en la práctica solamente para los materiales bastante frágiles y lo suficientemente homogéneos (vidrio, yeso, algunos tipos de cerámica).

**Criterio de las deformaciones lineales unitarias máximas (segunda teoría de resistencia).** Se toma por el criterio del estado límite la deformación lineal de valor absoluto máximo, es decir, la condición de la destrucción:

$$|\varepsilon_{\text{máx}}| = \varepsilon^0. \quad (6.4)$$

La condición de resistencia tiene el aspecto:

$$\varepsilon_{\text{máx}} = \varepsilon_1 < [\varepsilon] = \frac{\varepsilon^0}{n}. \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta que  $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$ , y que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

la condición de resistencia (6.5) puede representarse en forma de

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) < [\sigma]. \quad (6.6)$$

Como se ve de (6.6), hay que comparar con la tensión admisible no tal o cual tensión principal, sino su combinación. La tensión equivalente, en este caso, será igual a

$$\sigma_{\text{eq II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (6.7)$$

Esta teoría se propagó en bastante amplia escala, sin embargo hoy día casi no se emplea en la práctica de cálculo en vista de baja autenticidad.

**Criterio de las tensiones tangenciales máximas (tercera teoría de resistencia).** Se supone que el estado peligroso del cuerpo cargado se determina por el nivel de la tensión tangencial máxima. Las condiciones de la destrucción y resistencia tienen, respectivamente, el siguiente aspecto:

$$\tau_{\text{máx}} = \tau^0; \quad (6.8)$$

$$\tau_{\text{máx}} < [\tau] = \frac{\tau^0}{n}. \quad (6.9)$$

Como

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau^0 = \frac{\sigma^0}{2} \quad \text{y} \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2},$$

la condición de resistencia (6.9) por el intermedio de las tensiones principales se escribirá del modo siguiente:

$$\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma] \quad (6.10)$$

y la tensión equivalente de acuerdo con la tercera teoría de resistencia se determina mediante la fórmula

$$\sigma_{\text{eq. III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (6.11)$$

Esta teoría ofrece buenos resultados para los materiales que resisten de un modo igual tanto tracción como compresión. La insuficiencia de la tercera teoría consiste en no tomar en consideración la tensión principal  $\sigma_2$  de valor medio que ejerce cierta influencia, aunque insignificante en la mayoría de los casos, sobre la resistencia del material. Considerando el límite de fluencia como el estado límite para los materiales plásticos, la condición (6.8) puede presentarse en forma de

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_f. \quad (6.12)$$

Esta condición describe satisfactoriamente el inicio de la deformación plástica de los materiales sujetos a endurecimiento, para los cuales su localización es característica.

**Criterio de la energía potencial unitaria de variación de la forma (cuarta teoría de resistencia).** Se supone que el estado peligroso (límite) del cuerpo cargado se determina por el valor límite de la energía unitaria acumulada de variación de la forma. Esta puede determinarse durante la tracción simple en el momento del inicio de la fluencia

$$u_{\text{for. máx}} = u_{\text{for}}^0 = u_{\text{for.f.}} \quad (6.13)$$

La condición de resistencia será

$$u_{\text{for. máx}} < [u_{\text{for}}]. \quad (6.14)$$

Suponiendo que el material sigue la ley de Hooke hasta la llegada del estado límite, a base de (5.31) obtenemos durante la tracción simple en el momento de inicio de la fluencia ( $\sigma_1 = \sigma_f$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ):

$$u_{\text{for.f.}} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_f^2.$$

La condición (6.13), una vez de haber sustituido (5.31) y el valor  $u_{\text{for.f.}}$  de la última igualdad, tomará el siguiente aspecto

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_f, \\ \text{o bien} & \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_f. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

La condición de resistencia (6.14) tendrá el aspecto:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_f}{n} = [\sigma]. \quad (6.16)$$

La tensión equivalente (de cálculo) de acuerdo con la cuarta teoría de resistencia se determinará por medio de la fórmula

$$\sigma_{\text{eq. IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (6.17)$$

La ecuación de cálculo de la cuarta teoría de resistencia puede obtenerse partiendo del criterio de constancia de las tensiones octaédricas tangenciales

$$\tau_{oct. \text{ máx}} < [\tau_{oct.}]$$

Tal interpretación libera la teoría de resistencia examinada de las limitaciones vinculadas con la esfera de aplicabilidad de la ley de Hooke y ofrece una posibilidad de fijar no sólo el inicio de la deformación plástica, sino también el inicio de la destrucción.

La cuarta teoría de resistencia es aplicable para los materiales plásticos que resisten de un modo igual la tracción y la compresión.

**Criterio de Coulomb-Mohr.** Se funda en la suposición de que la resistencia del material depende, principalmente, en el caso general del estado tensional, de la magnitud y el signo de la tensión principal mayor  $\sigma_1$  y menor  $\sigma_3$  (el error por no tomar en consideración  $\sigma_2$  no sobrepasa, generalmente, un 12–15%). Partiendo de esta suposición, cualquier estado tensional puede representarse por un círculo de Mohr construido sobre las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ .

Si durante  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  dadas se altera la resistencia del material, el círculo construido sobre estas tensiones se llama círculo *límite*. Variando la correlación entre  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , obtenemos, para el material dado, una familia de círculos límite (fig. 98). Se puede sustituir, con suficiente grado de precisión, la envolvente *ABCDE* de la familia de círculos límite por rectas tangentes a los círculos de

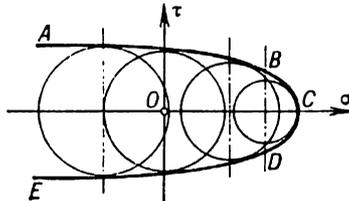


Fig. 98

Mohr construidos para la tracción con diámetro igual a la resistencia provisional en la tracción  $\sigma_p$  y para la compresión, con diámetro igual a la resistencia provisional del material en la compresión  $\sigma_{p.com}$  (fig. 99).

Está claro que la fig. 99 puede reconstruirse en escala de las tensiones admisibles (fig. 100). El diámetro del círculo para la tracción es igual a  $[\sigma_+] =$

$$= \frac{\sigma_p}{n}, \text{ y para la compresión, } [\sigma_-] = \frac{\sigma_{p.com}}{n}.$$

Del examen de la semejanza de los triángulos  $O_1O_2a$  y  $O_1O_3b$  hallamos la condición de resistencia

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 < [\sigma_+]. \quad (6.18)$$

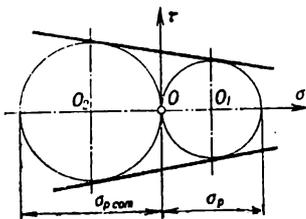


Fig. 99

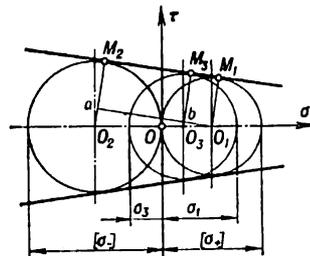


Fig. 100

La tensión equivalente de acuerdo con la teoría examinada de Mohr

$$\sigma_{\text{eq. M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3. \quad (6.19)$$

La teoría de resistencia de Coulomb-Mohr permite establecer la resistencia a la destrucción de los materiales que tienen diferente resistencia a la tracción y compresión (materiales frágiles).

Hay que subrayar que el estado frágil o plástico del material se determina no sólo por sus propiedades, sino también por el tipo del estado tensional, la temperatura y velocidad de carga. Como muestran los experimentos, los materiales plásticos se portan, en determinadas condiciones de carga y temperatura, como frágiles, y los materiales frágiles, en determinados estados tensionales, pueden portarse como plásticos.

### § 38. Noción sobre algunas nuevas teorías de resistencia

La condición de la transición del material en estado límite puede expresarse en forma de cierta ecuación

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (6.20)$$

que puede ser representada por la superficie límite en el espacio tridimensional, donde las tensiones principales se colocan sobre los ejes del sistema cartesiano de coordenadas.

Así, la superficie límite que corresponde a la condición de aparición de las deformaciones plásticas en masa tiene, de acuerdo con la teoría de la energía potencial unitaria de variación de la forma (6.15), el siguiente aspecto:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_f^2 = 0. \quad (6.21)$$

La superficie límite (6.21) representa un cilindro circular con el eje inclinado igualmente respecto a los ejes de coordenadas (fig. 101, a) y con un radio

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_f.$$

Para el estado tensional plano, cuando una de las tensiones principales es igual a cero, la condición (6.21) da la curva límite elíptica (fig. 101, b).

Al criterio de las tensiones tangenciales máximas le corresponde la superficie límite en forma de un prisma hexagonal regular inscrito en un cilindro.

Al criterio de las tensiones normales máximas le corresponde un cubo con aristas iguales a  $\sigma^0$ . Hagamos notar que todos los puntos situados dentro de la zona limitada por la superficie límite corresponden a los estados tensionales con el coeficiente de seguridad  $n > 1$ , y los estados tensionales representados por los puntos que se encuentran fuera de la zona limitada por la superficie límite tienen el coeficiente de seguridad  $n < 1$ .

Las teorías modernas se basan precisamente en la elección de diferentes variantes de la forma de la superficie límite, con la cual pueden tomarse en consideración lo más plenamente posible las particularidades de resistencia de la clase dada de materiales en las condiciones del estado tensional complejo.

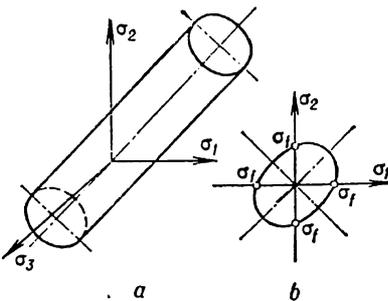


Fig. 101

**Criterio de resistencia de Yagn-Buginski.** La superficie límite (6.20) se toma en forma de polinomio de segundo grado simétrico a todas las tres tensiones principales

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \quad (6.22)$$

donde

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]};$$

$$b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]};$$

$$c = 6[\tau]^2.$$

Además  $[\sigma_+]$ ,  $[\sigma_-]$ ,  $[\tau]$  se determinan para el material dado del experimento, ensayando, respectivamente, a tracción uniaxial, compresión y deslizamiento puro.

Es evidente que la teoría de resistencia de Yagn-Buginski permite tomar en consideración no sólo la diferencia en la resistencia del material a la tracción y compresión, sino también la resistencia al deslizamiento.

**Criterio de resistencia de Pisarenko-Lébedev.** Entre las nuevas teorías hay que colocar una, sugerida por G. S. Pisarenko y A. A. Lébedev, que se funda en la suposición de que la llegada del estado límite es determinada por la capacidad del material de contrarrestar tanto las tensiones tangenciales como normales. Se propone buscar el criterio de resistencia en forma de funciones de las tensiones tangenciales invariantes al estado tensional, por ejemplo, tensiones tangenciales octaédricas, y la tensión normal máxima.

El criterio de resistencia puede escribirse en la siguiente forma:

$$\tau_{\text{oct}} + m_1\sigma_1 \leq m_2. \quad (6.23)$$

Expresando las constantes  $m_1$  y  $m_2$  por medio de las tensiones límite para la tracción  $\sigma_+^0$  y compresión  $\sigma_-^0$  (en particular, por medio de  $\sigma_p$  y  $\sigma_{p'com}$ ) reducimos la condición (6.23) a la forma

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{oct}} + (1 - \chi)\sigma_1 \leq \sigma_+^0,$$

o bien, pasando a la intensidad de las tensiones, a la forma

$$\chi\sigma_1 + (1 - \chi)\sigma_1 \leq \sigma_+^0, \quad (6.24)$$

donde

$$\chi = \frac{\sigma_+^0}{\sigma_-^0}.$$

Para el material que se encuentra en el estado plástico, cuando  $\sigma_+^0 = \sigma_-^0$ ;  $\chi = 1$ , la expresión (6.24) se transforma en el criterio de resistencia correspondiente a la teoría de la variación de la forma; para los materiales frágiles, cuando  $\chi = 0$ , la expresión (6.24) se transforma en primera teoría de resistencia. Cuando  $0 < \chi < 1$ , que corresponde a la mayoría de materiales de construcción reales, la superficie límite ha de representar, de acuerdo con la ecuación (6.24), una figura de igual inclinación con respecto a los ejes principales, en la que está inscrita una pirámide hexagonal correspondiente a la teoría de Coulomb-Mohr y expresada mediante la fórmula (6.19).

La teoría representada por el criterio (6.24) concuerda bien con los datos experimentales para una clase amplia de los materiales de construcción lo suficientemente homogéneos.

Para los materiales que tienen la heterogeneidad estructural de consideración (algunos tipos de cerámica metálica, grafitos, espumas sintéticas, fundición de piedra, etc.) se propuso la condición

$$\chi\sigma_i + (1 - \chi)\sigma_1 A^{1-J} = \sigma_+^0, \quad (6.25)$$

donde  $J = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}$  es el parámetro del estado tensional;  $A$ , el parámetro de la estructura del material cuyo valor estadístico medio para la clase señalada de los materiales es de 0,7 a 0,8.

Se puede hallar el valor precisado del parámetro  $A$  utilizando datos de los ensayos a torsión:

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3}\chi}{1 - \chi},$$

donde  $\varphi = \frac{\sigma_+^0}{\tau_{\text{tor}}}$ ;  $\tau_{\text{tor}}$  es la tensión límite durante la torsión.

**Criterio de resistencia de Davidénkov—Fridman.** Se basa en el examen de los diagramas del estado mecánico que se construyen partiendo de que, en dependencia del tipo del estado tensional, los materiales pueden destruirse a causa de las tensiones de tracción (mediante el desprendimiento) y las tangenciales (mediante el cizallamiento). Según lo señalado, se distinguen dos características de resistencia: resistencia al desprendimiento  $S_{\text{des}}$  que representa el valor de las tensiones normales en la superficie de destrucción, en el primer caso, y la resistencia al cizallamiento  $t_{\text{tan}}$  que representa el valor de las tensiones tangenciales, en el segundo caso. Ambas características de resistencia  $S_{\text{des}}$  y  $t_{\text{tan}}$  no dependen del tipo del estado tensional. Las curvas de deformación tampoco dependen del estado tensional.

La alteración de la resistencia por medio del desprendimiento se describe por la segunda teoría de resistencia

$$\sigma_{\text{eq II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = S_{\text{des}}, \quad (6.26)$$

y la alteración de la resistencia de segundo género, por la tercera teoría de resistencia

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = t_{\text{tan}}. \quad (6.27)$$

El diagrama del estado mecánico consiste de dos diagramas (fig. 102): en las coordenadas  $\tau_{\text{máx}}, \sigma_{\text{eq II}} = S_{\text{des}}$  y  $\tau_{\text{máx}}, \gamma_{\text{máx}}$ . En el diagrama se ponen lí-

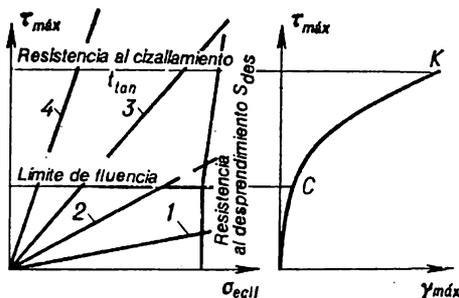


Fig. 102

neas límite que corresponden al límite de fluencia durante el deslizamiento  $\tau_f$ , la resistencia al cizallamiento  $\tau_{lan}$  y al desprendimiento  $S_{des}$ . La desviación de la línea de resistencia al desprendimiento a la derecha por encima del límite de fluencia corresponde al aumento de la resistencia al desprendimiento con aparición de las deformaciones permanentes.

Para caracterizar el tipo del estado tensional se introduce *el coeficiente de blandura*

$$\alpha = \frac{\tau_{m\acute{a}x}}{\sigma_{eq II}} \quad (6.28)$$

Los diferentes estados tensionales se representan en el diagrama por medio de los rayos, cuyas tangentes de ángulos de inclinación son iguales a  $\alpha$ .

Durante la tracción multilateral ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ )

$$\tau_{m\acute{a}x} = 0; \quad \alpha = 0$$

y el rayo coincide con el eje de las abscisas. Durante la tracción simple ( $\sigma_1 = \sigma$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) tenemos:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{eq II} = \sigma; \quad \alpha = 0,5.$$

Durante la compresión simple ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\sigma$ )

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{eq II} = \mu\sigma; \quad \alpha = \frac{1}{2\mu}.$$

Tomando  $\mu = 0,25$ , hallamos que  $\alpha = 2$ .

Examinando los rayos que corresponden a diferentes tipos del estado tensional del material, podemos establecer aproximadamente la variedad de la destrucción y elegir, de esta manera, la teoría de resistencia conveniente.

Al examinar el rayo *I* en el diagrama vemos que interseca ante todo la línea de resistencia al desprendimiento. Por tanto, el material se descompone mediante el desprendimiento sin que le anteceda la deformación plástica. El rayo *2* interseca primeramente la línea de fluencia y luego la línea de resistencia al desprendimiento. De esta manera, durante el estado tensional dado la destrucción por medio del desprendimiento es antecedida por la deformación plástica. Para el estado tensional caracterizado por el rayo *3* la destrucción sucede después de la deformación plástica mediante el cizallamiento.

En el caso de que el rayo interseca primeramente la línea de resistencia al desprendimiento, se debe valerse de la teoría de Coulomb-Mohr, primera o segunda teoría de resistencia. Si primeramente se interseca la línea del límite de fluencia, el cálculo de la resistencia tiene que efectuarse por la tercera o cuarta teoría de resistencia.

Así, pues, los diagramas del estado mecánico reflejan, con cierta aproximación, el tipo de la destrucción de acuerdo con la variedad del estado tensional.

Hagamos notar que los rayos, que representan el estado tensional, son rectas solamente hasta alcanzar el límite de fluencia.

Al final del capítulo presente demos, en la forma tabular, el resumen de las teorías de resistencia examinadas y otras que se encuentran en la resistencia de materiales (véase la tabla 12).

Criterios del estado límite de los materiales isótropos (para carga estática)

$\sigma_{eq}$ , la tensión equivalente;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , las tensiones principales;  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , las deformaciones principales unitarias que se determinan por la ley generalizada de Hooke;  $\sigma_m$ , la tensión media igual a  $\left(\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right)$ ;  $\sigma_I$ , la intensidad de la tensión

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}\right) \sigma_0^+, \sigma_0^-, \tau_0, \text{ las tensiones límite para el material dado durante la tracción uniaxial,}$$

compresión uniaxial y deslizamiento puro, respectivamente:  $\chi = \frac{\sigma_0^+}{\sigma_0^-}$ ;  $\varphi = \frac{\sigma_0^+}{\tau_0}$ ;  $\psi = \frac{\sigma_0^-}{\tau_0}$ .

Criterio	Expresión para la tensión equivalente $\sigma_{eq}$	Interpretación geométrica del criterio en el espacio de las tensiones	Observaciones
Criterio de las tensiones normales máximas (de Galileo—Leibnitz, llamado también de Clebsch—Rankine)	$\sigma_{eq} = \sigma_1$	Cubo con el centro desplazado con respecto al origen de las coordenadas hacia la compresión hidrostática	Describe satisfactoriamente el estado límite de los materiales bastante frágiles y lo suficientemente homogéneos, tales como el vidrio, el yeso, algunos tipos de cerámica
Criterio de las deformaciones lineales máximas (de Mariotte—Grashof, llamado también de Saint—Venant)	$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$	Paralelepípedo equilátero oblicuángulo con el eje de simetría de igual inclinación a los ejes de coordenadas	Actualmente casi no se emplea en la práctica de cálculo a causa de poca autenticidad

<p>Criterio de las tensiones tangenciales máximas (de Coulomb)</p>	$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3$	<p>Prisma recto hexagonal de igual inclinación a los ejes de coordenadas</p>	<p>Describe satisfactoriamente el estado límite de los materiales plásticos de poco endurecimiento (aceros revenidos), que se caracterizan por la localización de las deformaciones plásticas</p>
<p>Criterio de las tensiones tangenciales octaédricas o de energía unitaria de variación de la forma (de Huber — Mises — Henke)</p>	$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_I$	<p>Cilindro circular circunscrito alrededor del prisma interpretando el criterio de las tensiones tangenciales máximas</p>	<p>Describe bien el estado límite de una clase amplia de materiales plásticos (cobre, níquel, aluminio, aceros al carbono y al cromoníquel, etc.)</p>
<p>Criterio de Coulomb — Mohr</p>	$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \lambda \sigma_3$	<p>Pirámide hexagonal de igual inclinación a los ejes de coordenadas</p>	<p>Se emplea para establecer el estado límite de los materiales bastante homogéneos que contrastan diferentemente la tracción y la compresión</p>
<p>Criterio de Yagn — Bulginski</p>	$\sigma_{\text{eq}} = 3(1 - \lambda) \sigma_m + \frac{1}{\sigma_0} [\sigma_I^2 - (\varphi\psi - 3) \times (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$	<p>Superficie de revolución de igual inclinación a los ejes principales. No tiene interpretación geométrica unívoca</p>	<p>Se emplea en los mismos casos que el criterio de Coulomb — Mohr. Cuando <math>\sigma_0^+ = \sigma_0^-</math> y <math>\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}</math>, coincide con el criterio de las tensiones tangenciales octaédricas</p>

Criterio	Expresión para la tensión equivalente $\sigma_{eq}$	Interpretación geométrica del criterio en el espacio de las tensiones	Observaciones
Criterio de Balandin	$\sigma_{eq} = 3(1 - \chi)\sigma_m + \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0}$	Paraboloide de revolución de igual inclinación a los ejes de coordenadas	Es caso particular del criterio de Yagn-Buginski (cuando $\tau_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0^+ \sigma_0^-}{3}}$ )
Criterio de Botkin-Miroliúbov	$\sigma_{eq} = 3(1 - \chi)\sigma_m + \frac{1}{2}(1 + \chi)\sigma_i$	Cono circular de igual inclinación a los ejes de coordenadas	Se emplea en los mismos casos que el criterio de Coulomb-Mohr. Cuando $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$ coincide con el criterio de las tensiones tangenciales octaédricas
Criterio de Drucker-Prager	$\sigma_{eq} = \left( \frac{1 + \chi}{1 + \sqrt{\chi}} \right)^2 \sigma_i + \frac{\sqrt{\chi} - \chi}{1 + \sqrt{\chi}} \sigma_m - 9 \left( \frac{1 - \sqrt{\chi}}{1 + \sqrt{\chi}} \right)^2 \frac{\sigma_m^2}{\sigma_0}$	Paraboloide de revolución de dos cavidades de igual inclinación a los ejes de coordenadas	Describe satisfactoriamente el estado límite de los materiales relativamente plásticos, para los cuales $\chi > 0,3$

Criterio de S. D. Vólkov

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{2}{\chi_s} \left[ C \sqrt{\sigma_1^2} + \frac{2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \beta \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \lambda\sigma_m \right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\sigma_2^2 + \sigma_3^2} \right]$$

La superficie límite no está investigada

Se obtuvo el criterio a base del análisis del modelo de un espacio microscópicamente heterogéneo suponiendo que la tensión tangencial crítica en el plano de deslizamiento depende de la tensión normal en este plano y de la tensión media  $\chi_s, \beta, \lambda, C$  son las constantes del material determinadas del experimento durante diferentes estados tensionales, por ejemplo, durante la tracción uniaxial, compresión uniaxial, deslizamiento puro y tracción biaxial uniforme

Criterio de Pisarenko—Lébedev

$$\sigma_{\text{eq}} = \lambda\sigma_1 + (1 - \lambda)\sigma_1$$

Superficie cónica circunscrita alrededor de la pirámide de Coulomb—Mohr. En la sección por el plano octaédrico es un triángulo equilátero curvilíneo

Describe bien el estado límite de una clase amplia de materiales de construcción bastante homogéneos. Cuando  $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$ , se transforma en criterio de las tensiones tangenciales octaédricas. En el caso de que  $\sigma_0^+ \leq \sigma_0^-$  (materiales muy frágiles), los resultados de los cálculos coinciden prácticamente con los datos del cálculo a base del criterio de las tensiones normales máximas

Criterio de Pisarenko—Lébedev

$$\sigma_{\text{eq}} = \lambda\sigma_1 + \frac{3\sigma_m}{1 - \lambda} \sigma_1$$

La superficie límite está inclinada igualmente a los ejes de coordenadas. En la sección por el plano octaédrico es un triángulo equilátero curvilíneo

Describe bien el estado límite de los materiales heterogéneos (composiciones frágiles de cerámica metálica, grafito, plásticos frágiles termoendurecibles, diferentes rocas, espumas sintéticas, etc.). El valor estadístico medio del parámetro  $A$  para los materiales señalados es de 0,7 a 0,8

Criterio	Expresión para la tensión equivalente $\sigma_{eq}$	Interpretación geométrica del criterio en el espacio de las tensiones	Observaciones
Criterio de V. A. Kuzmenko	$\sigma_{eq} = \frac{1}{\alpha} \sigma_1, \text{ donde}$ $\alpha = \frac{2(1-q) + q^2(3-2q) + 1,33(1-2q)(1-q)^2}{2(1-q) + q^2(3-2q) + c(1-2q)(1-q)^2 + \chi q^2(1-2q)};$ $\chi = \frac{\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2};$ $c = 1 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{ \epsilon_1  +  \epsilon_2  +  \epsilon_3 }$	<p>La superficie límite, cuando <math>q = 0,5</math>, es un cilindro circular que corresponde al criterio de la energía unitaria de variación de la forma. Al variar <math>q</math>, el cilindro se deforma</p>	<p>El estado límite se considera resultado del desarrollo del valor subcrítico de las deformaciones de deslizamiento, vinculadas con la fluencia plástica, y de tracción, vinculadas con la formación y abertura de las grietas en el material deformado.</p> <p>El criterio describe bien el estado límite de los materiales cuya plasticidad depende considerablemente de las condiciones de la deformación. El parámetro del estado <math>q</math> varía de 0 (estado frágil) a 1 (estado plástico)</p>

TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

§ 39. Cálculo de las barras a tracción (compresión) contando con el peso muerto

La tensión en cualquier sección de la barra de sección constante sometida a la acción de la fuerza exterior de tracción (fig. 103, a), tomando en consideración el peso muerto, puede determinarse a base de la hipótesis de las secciones planas por medio de la fórmula

$$\sigma = \frac{N(z)}{F}, \quad (7.1)$$

donde

$$N(z) = P + \gamma Fz,$$

siendo  $F$  el área de la sección;  $\gamma$ , el peso específico. Es obvio que

$$|N(z)|_{\text{máx}} = P + \gamma Fl;$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{|N(z)|_{\text{máx}}}{F} = \frac{P + \gamma Fl}{F} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

La condición de resistencia será

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{F} + \gamma l < [\sigma]$$

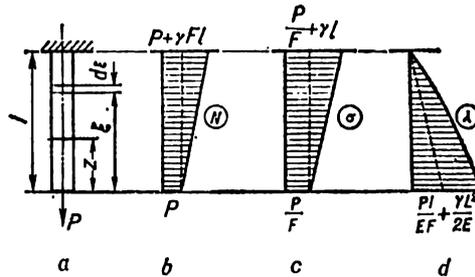


Fig. 103

o bien

$$F > \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (7.2)$$

Cuando  $P = 0$

$$\sigma_{\text{máx}} = \gamma l,$$

y la condición de resistencia toma el siguiente aspecto:

$$\gamma l < [\sigma].$$

De aquí se deduce la longitud límite, con la cual la barra no tiene que destruirse bajo la acción del peso muerto,

$$l_{\text{lim}} = \frac{[\sigma]}{\gamma},$$

y la longitud crítica, teniendo la cual la barra se descompone por la acción del peso muerto,

$$l_{\text{crit}} = \frac{\sigma_p}{\gamma}.$$

El desplazamiento de cualquier sección que se encuentra a una distancia  $z$  del extremo libre de la barra solicitado por la carga  $P$  (fig. 103, *a*) se determina mediante la fórmula

$$\lambda(z) = \int_z^l \frac{N(\xi)}{EF} d\xi = \int_z^l \frac{(P + \gamma F\xi) d\xi}{EF} = \frac{P(l-z)}{EF} + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2). \quad (7.3)$$

El desplazamiento del extremo inferior de la barra será igual, evidentemente, al alargamiento total de la barra y se determina a partir de la fórmula

$$\lambda(z)_{z=0} = \Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Teniendo en cuenta que el peso de la barra  $Q = \gamma l F$ , obtenemos

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \quad (7.4)$$

Los diagramas de las fuerzas axiales, las tensiones y los desplazamientos pueden verse en la fig. 103, *b, c, d*.

#### § 40. Barra de igual resistencia a la tracción (compresión).

##### Barra escalonada

Se entiende por *barra de igual resistencia* a la tracción (compresión) una barra, en cada sección transversal de la cual las tensiones son idénticas e iguales a la admisible. El área de la sección transversal de dicha barra (fig. 104) varía según la ley

$$F(z) = F_0 e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}, \quad (7.5)$$

siendo  $F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$  la sección mínima de la barra en el lugar de aplicación de la carga;  $\gamma$ , el peso específico;  $z$ , coordenada móvil;  $e$ , base del logaritmo natural.

El área máxima de la sección será

$$F_{\text{máx}} = F_0 e^{[\sigma]} = \frac{P}{[\sigma]} e^{[\sigma]} \quad (7.6)$$

El peso  $Q$  de la barra se determina a partir de la condición  $P + Q = [\sigma] F_{\text{máx}}$ , de donde  $Q = [\sigma] F_{\text{máx}} - P$ , o bien considerando (7.6)

$$Q = P(e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1).$$

La reducción unitaria de la barra de igual resistencia a la compresión  $\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}$ , y la reducción absoluta

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l. \quad (7.7)$$

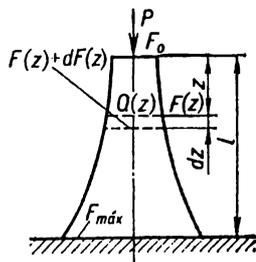


Fig. 104

La barra de igual resistencia a la acción de fuerzas axiales es óptima desde el punto de vista de utilización racional del material, lo que es importante en el caso de una barra muy larga.

La barra escalonada consta de algunos tramos (escalones) con área constante de la sección transversal dentro de cada tramo. Ocupa la posición intermedia entre la barra de sección transversal constante y la de resistencia igual.

La sección de cualquier  $n$ -ésimo tramo, cuando las longitudes de los tramos son  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n, \dots, l_m$  y las secciones, correspondientemente,  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots, F_m$  (fig. 105), puede determinarse por medio de la fórmula

$$F_n = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - \gamma l_1)([\sigma] - \gamma l_2) \dots ([\sigma] - \gamma l_n)}. \quad (7.8)$$

Si las longitudes de todos los tramos son iguales

$$l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = \dots = l_m = \frac{l}{m},$$

entonces

$$F_n = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma] - \gamma \frac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma] \left(1 - \frac{\gamma l}{[\sigma] m}\right)^n}, \quad (7.9)$$

donde  $m$  es el número de escalones en la barra;  $l$ , la longitud de la barra.

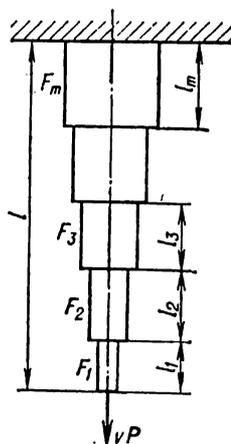


Fig. 105

#### § 41. Estructuras estáticamente indeterminadas

Las estructuras se denominan estáticamente indeterminadas (hiperestáticas) cuando los esfuerzos en sus elementos no pueden determinarse de las ecuaciones de la estática. Al resolver problemas estáticamente indeterminados es necesario utilizar también, además de las ecuaciones de la estática, ecuaciones que toman en consideración las deformaciones de los elementos de estructuras.

Todas las estructuras estáticamente indeterminadas tienen los llamados vñnan los superfluos en forma de sujeciones, barras y otros elementos. Se denomicu- así por no ser indispensables para garantizar el equilibrio de la estructura y su invariación geométrica, sino son condicionadas por las exigencias de la resistencia y rigidez de ésta. El número de incógnitas superfluas, o el grado de hiperestaticidad, se establece por la diferencia entre el número de incógnitas a determinar y el número de ecuaciones de la estática.

El sistema se llama con un grado de indeterminación estática o con un grado de hiperestaticidad si tiene una incógnita superflua. Si las tiene dos, tiene dos

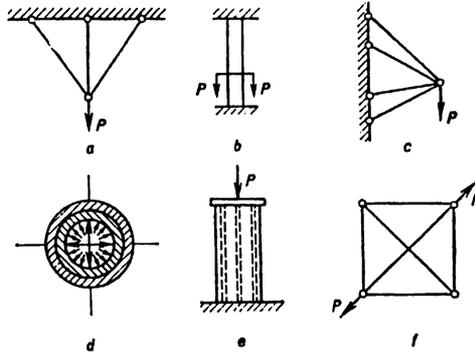


Fig. 106

grados de hiperestaticidad, etc. Las estructuras mostradas en la fig. 106, a, b, d, e, f tienen un grado de hiperestaticidad y la estructura que se da en la fig. 106, c, dos grados de hiperestaticidad.

La solución de los problemas hiperestáticos se efectúa en cuatro etapas.

1. PARTE ESTÁTICA DEL PROBLEMA. Se componen las ecuaciones de equilibrio de los elementos seccionados de la estructura que contienen esfuerzos incógnitos.

2. PARTE GEOMÉTRICA DEL PROBLEMA. Se establece la relación entre las deformaciones de distintos elementos de la estructura, partiendo de las condiciones de que las deformaciones son conjuntas. Las ecuaciones obtenidas se denominan *ecuaciones de simultaneidad de las deformaciones*.

3. PARTE FÍSICA DEL PROBLEMA. Las deformaciones de los elementos de estructuras se expresan en las ecuaciones de simultaneidad a base de la ley de Hooke por medio de los esfuerzos incógnitos que actúan en ellos.

4. SÍNTESIS. Se resuelven juntas las ecuaciones obtenidas respecto a los esfuerzos incógnitos.

A continuación se da un ejemplo de cálculo del sistema colgante de tres barras con un grado de hiperestaticidad (fig. 107, a).

1. Parte estática del problema (fig. 107, b)

$$\sum X = N_3 \operatorname{sen} \alpha - N_2 \operatorname{sen} \alpha = 0; \quad (7.10)$$

$$\sum Y = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0. \quad (7.11)$$

Hallamos a partir de (7.10)

$$N_3 = N_2; \quad (7.12)$$

obtenemos de (7.11)

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \quad (7.13)$$

2. Parte geométrica del problema (fig. 107, c)

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha. \quad (7.14)$$

3. Parte física del problema

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}; \quad (7.15)$$

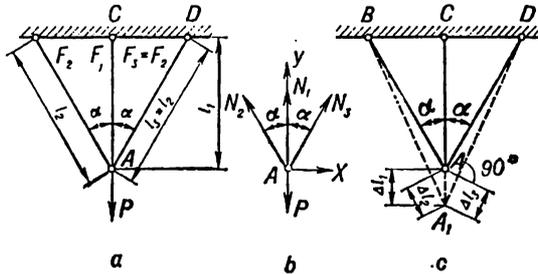


Fig. 107

4. Síntesis. Sustituyendo (7.15) en (7.14) obtenemos

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} \cos \alpha. \quad (7.16)$$

Resolviendo juntas (7.16) y (7.13) hallamos

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}; \\ N_2 &= \frac{P \frac{c_2}{c_1} \cos \alpha}{1 + 2 \frac{c_2}{c_1} \cos^2 \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

siendo

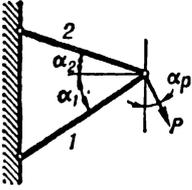
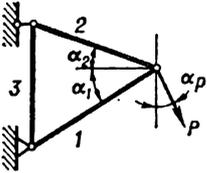
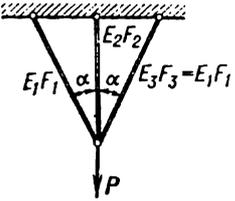
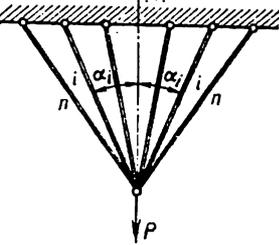
$$c_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1}; \quad c_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2}.$$

Resulta que los esfuerzos  $N_1$  y  $N_2$  dependen de la relación entre las rigideces de las barras. Por eso se puede deducirlas, durante el cálculo de proyección, proponiéndose cierta relación de las rigideces de las barras. En esto radica una de las particularidades del cálculo de los sistemas de barras hiperestáticas. Las fórmulas de cálculo para la determinación de los esfuerzos en algunos sistemas de barras más simples se dan en la tabla 13.

**Esfuerzos en los sistemas de barras más simples**

$E$  es el módulo de elasticidad del material de la barra;  $F$ , el área de la sección transversal de la barra

Tabla 13

Esquema del sistema de barras	Esfuerzos longitudinales en las barras
	$N_1 = -P \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad N_2 = P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$
	$N_1 = -P \frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$ $N_2 = P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$ $N_3 = -P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin \alpha_2$
	$N_1 = N_3 = \frac{P \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha}$ $N_2 = \frac{P}{1 + 2 \frac{E_1 F_1}{E_2 F_2} \cos^3 \alpha}$
	$N_i = P \frac{E_i F_i \cos^2 \alpha_i}{2 \sum_{i=1}^n E_i F_i \cos^3 \alpha_i}$

Esquema del sistema de barras	Esfuerzos longitudinales en las barras
	$N_1 = P \frac{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2 - aa_2 - aa_1 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)}{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)}$ $N_2 = P \frac{a_1a_2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} + a_2^2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} - aa_2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} + aa_1 \frac{E_2F_2}{E_3F_3}}{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)}$ $N_3 = P \frac{-a_1a_2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} + aa_2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right) + aa_1}{2a_1a_2 + a_1^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2 \left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)}$

§ 42. Cálculo de hilos flexibles

Se llama hilo flexible una barra capaz de contrarrestar solamente la tracción. Para el hilo flexible, de las seis componentes de las fuerzas interiores sólo la fuerza axial no es nula.

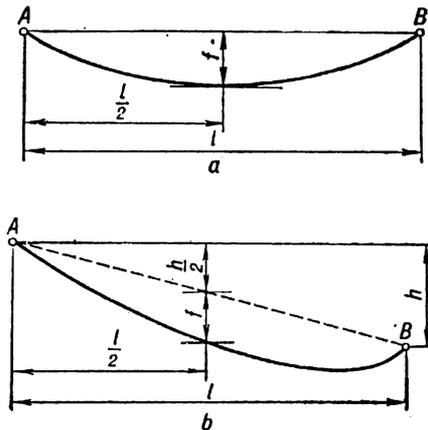


Fig. 108

A hilos flexibles pertenecen conductores de redes eléctricas y telegráficas, cadenas de puentes colgantes, cables de funicular, etc. Los puntos de suspensión de los hilos flexibles pueden encontrarse tanto a uno como a diferentes niveles (fig. 108, a, b).

La principal carga del hilo flexible del material con peso específico  $\gamma$  y área de la sección transversal  $F$  es el peso muerto del alambre de intensidad  $q_{a1} = \gamma F$ . Sin embargo, la carga en el hilo flexible puede crearse no sólo por el peso muerto del alambre, sino también mediante algunos otros factores, por ejemplo, la presión del viento, el peso del hielo al congelarse los alambres. Estas cargas también se consideran uniformemente distribuidas por la longitud del hilo. Denotemos las intensidades de estas cargas por  $q_v$  y  $q_h$ , respectivamente.

El espesor de la capa de hielo se toma, de acuerdo con la región climática, igual a 0,5–2,5 cm.

La presión del viento en el plano horizontal será

$$q_v = pd$$

o bien

$$q_v = k\alpha q_{ve1}d, \quad (7.18)$$

siendo  $p$  la presión;  $d$ , el diámetro del alambre tomado en consideración su aumento a costa de la congelación;  $k = 1,2$  es el coeficiente aerodinámico;  $\alpha = 0,85$  es el coeficiente de irregularidad del viento;  $q_{ve1}$ , la velocidad de la presión. Expresando esta última por medio de la velocidad del viento en metros por segundo y  $d$  en metros, hallamos la intensidad de la carga de viento:

$$q_v = 636 \cdot 10^{-4} v^2 d \text{ [kgf/m]}. \quad (7.19)$$

La intensidad total de la carga aplicada al hilo flexible puede determinarse por medio de la siguiente fórmula:

$$q = \sqrt{(q_{a1} + q_h)^2 + q_v^2}. \quad (7.20)$$

El plano de acción de la carga total, que coincide con el plano de combarse el alambre, no será vertical.

El hilo flexible pertenece a la clase de sistemas con un grado de hiperestaticidad.

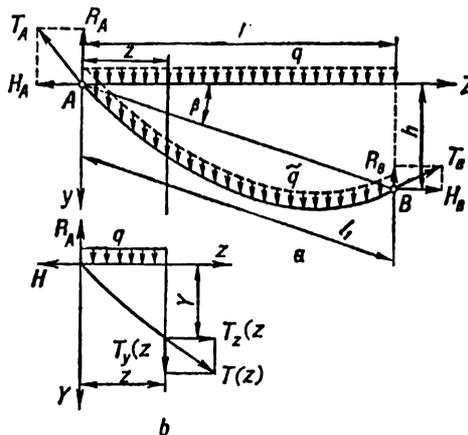


Fig. 109

Aducimos las fórmulas principales utilizadas para el cálculo del hilo flexible en el caso general, cuando los puntos de suspensión del hilo se encuentran a diferentes niveles (fig. 109, a).

Generalmente se sustituye la carga distribuida  $\tilde{q}$ , que actúa sobre el alambre, por la estáticamente equivalente  $q$  distribuida a lo largo de la luz con longitud  $l$ :

$$q = \frac{\tilde{q} l_1}{l} = \frac{\tilde{q}}{\cos \beta}.$$

Suponiendo el hilo idealmente flexible, los esfuerzos de tracción en cualquier sección del hilo pueden considerarse tangentes a la curva de comba. En los puntos de sujeción  $A$  y  $B$  los esfuerzos, que actúan en el hilo, equivalen a las reacciones de los apoyos  $T_A$  y  $T_B$ . Representando éstas en forma de las componentes horizontal ( $H$ ) y vertical ( $R$ ), hallamos del examen de la parte estática del problema:

$$\Sigma Z = -H_A + H_B = 0;$$

$$\Sigma Y = -R_A - R_B + ql = 0;$$

$$\Sigma M_B = -H_A h + R_A \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0,$$

de donde

$$H_A = H_B = H; \quad (7.21)$$

$$R_A = \frac{ql}{2} + H \frac{h}{l}; \quad (7.22)$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - H \frac{h}{l}. \quad (7.23)$$

Del examen del equilibrio de una parte del hilo (fig. 109,  $b$ ) hallamos:

$$\Sigma Z = -H + T_x(z) = 0;$$

$$\Sigma Y = -R_A + qz + T_y(z) = 0,$$

de donde

$$T_x(z) = H; \quad (7.24)$$

$$T_y(z) = H \frac{h}{l} + q \left( \frac{l}{2} - z \right). \quad (7.25)$$

$H$  es la componente horizontal del esfuerzo igual en todas las secciones llamada *tensado del hilo*.

El esfuerzo total de tracción en cualquier sección del hilo

$$T(z) = \sqrt{T_x^2(z) + T_y^2(z)} = \sqrt{H^2 + \left[ H \frac{h}{l} + q \left( \frac{l}{2} - z \right) \right]^2} \quad (7.26)$$

y es máximo cuando  $z = 0$ , es decir,

$$T_{\text{máx}} = \sqrt{H^2 + \left( \frac{ql}{2} + H \frac{h}{l} \right)^2}. \quad (7.27)$$

Para los hilos de curvatura suave (cuya longitud por la curva de comba difiere poco, pero no más que en un 10%, de la longitud de la luz) la diferencia

entre  $T_{\text{máx}}$  y  $H$  es pequeña. Por eso se realiza el cálculo del hilo a la resistencia, con suficiente precisión para la práctica, por la magnitud del tensado  $H$ .

Hallamos la ecuación de la curva de comba del hilo, igualando, a base de su flexibilidad perfecta, el momento flector a cero:

$$M(z) = R_A z - Hy - \frac{qz^2}{2} = 0,$$

de donde obtenemos, tomando en consideración (7.22),

$$y = \left( \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} \right) z - \frac{qz^2}{2H}, \quad (7.28)$$

es decir, la curva de comba del hilo tiene la expresión analítica de parábola.

Hagamos notar que si el problema se resuelve con exactitud, considerando la carga uniformemente distribuida por la longitud del hilo y no por la luz la curva de comba se convierte en *línea de cadena*. La parte derecha de la ecuación (7.28) es el primer término de desarrollo de la ecuación de la línea de cadena en la serie de Maclaurin por las potencias de  $z$ . La utilización de la fórmula aproximada (7.28) da en la práctica resultados completamente satisfactorios.

Deducimos la posición del punto inferior del hilo suspendido, cuyas coordenadas están designadas por  $z = a$ ;  $y = f'$  (fig. 110, a), igualando a cero la derivada del segundo miembro de la ecuación (7.28):

$$\frac{dy}{dz} = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qz}{H} = 0,$$

de donde

$$z = a = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \quad (7.29)$$

Sustituyendo (7.29) en (7.28), hallamos la comba máxima del hilo

$$y_{\text{máx}} = f' = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}. \quad (7.30)$$

Se distinguen tres casos característicos de la posición del punto más bajo de la curva de comba del hilo.

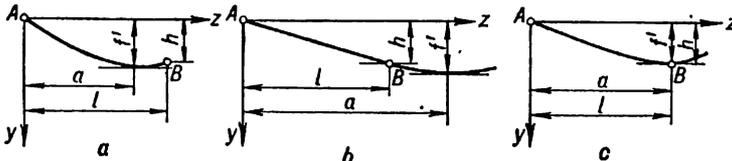


Fig. 110

1. El punto más bajo de la curva de comba se encuentra dentro de los límites de la luz, es decir,  $a < l$  (fig. 110, a). Esto tendrá lugar, de acuerdo con (7.29), cuando

$$H < \frac{ql^2}{2h}. \quad (7.31)$$

2. El punto más bajo de la curva de comba se encuentra fuera de la luz, es decir,  $a > l$  (fig. 110, b). Esto tendrá lugar si

$$H > \frac{ql^2}{2h}. \quad (7.32)$$

3. El punto más bajo de la curva de comba coincide con el punto inferior de la suspensión, es decir,  $a = l$  (fig. 110, c). Para este caso es necesario que

$$H = \frac{ql^2}{2h}. \quad (7.33)$$

En todos los tres casos las coordenadas  $a$  y  $f'$  del punto más bajo se determinan por medio de las fórmulas (7.29) y (7.30).

Establezcamos la dependencia que existe entre el tensado  $H$  y la flecha de la comba  $f$ . Sustituyendo en (7.28)  $z = \frac{l}{2}$  e  $y = \frac{h}{2} + f$  (fig. 111), hallamos

$$f = \frac{ql^2}{8H} \quad (7.34)$$

o bien

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \quad (7.35)$$

Hallamos el tensado del hilo, expresado por medio de la comba máxima  $f'$ , de la solución de la ecuación cuadrada (7.30) con respecto a  $H$ :

$$H = \frac{ql^2}{h^2} \left[ f' - \frac{h}{2} \pm \sqrt{f'(f' - h)} \right].$$

Si el punto más bajo de la curva de comba se encuentra dentro de los límites de la luz, la raíz se toma con el signo "menos", si se encuentra fuera de la luz, con el signo "más".

Examinando la parte geométrica del problema, establezcamos la relación entre la longitud del hilo suspendido  $S$ , la luz  $l$  y la magnitud de la comba  $f$ .

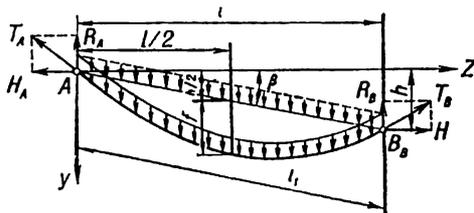


Fig. 111

La longitud del elemento del hilo, teniendo en cuenta una comba pequeña, puede expresarse por medio de la siguiente dependencia:

$$dS = \sqrt{dz^2 + dy^2} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dz \approx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (7.36)$$

Sustituyendo la derivada de la expresión (7.28)  $\frac{dy}{dz}$  en (7.36) e integrando por toda la longitud, hallamos

$$S = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} \quad (7.37)$$

o, teniendo en cuenta (7.35),

$$S = l + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l} + \frac{h^2}{2l}. \quad (7.38)$$

El alargamiento del hilo suspendido sujeto a tracción es igual a

$$\Delta S = S - L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - L, \quad (7.39)$$

siendo  $L$  la longitud del hilo no suspendido.

Del análisis de la parte física del problema se establece el cambio de la longitud del hilo en función del esfuerzo de tracción y del cambio de temperatura.

Tomando el tensado  $H$  por el esfuerzo de tracción de cálculo para los hilos de curvatura suave y sustituyendo la longitud del hilo por la distancia entre los puntos de suspensión  $l_1$ , hallamos el alargamiento del hilo por medio de la fórmula

$$\Delta S_H = \frac{H l_1}{EF} = \frac{H l}{EF \cos \beta}. \quad (7.40)$$

El alargamiento de temperatura del hilo se determina mediante la fórmula

$$\Delta S_t = \alpha l_1 (t - t_0) = \frac{\alpha l}{\cos \beta} (t - t_0), \quad (7.40 a)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal del material del hilo;  $t_0$ , la temperatura en el momento de suspensión del hilo;  $t$ , la temperatura de cálculo del hilo.

El cambio total de la longitud primitiva del hilo

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_t = \frac{H l}{EF \cos \beta} + \frac{\alpha l}{\cos \beta} (t - t_0). \quad (7.41)$$

Igualando los segundos miembros de (7.39) y (7.41) que expresan el mismo valor del alargamiento del hilo colgado, hallamos:

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - \frac{H l}{EF \cos \beta} - \frac{\alpha l}{\cos \beta} (t - t_0). \quad (7.42)$$

El examen conjunto de las ecuaciones (7.35) y (7.42) permite determinar el tensado del hilo  $H$  y la flecha de su comba  $f$ . Una vez que se ha determinado  $H$ , mediante la fórmula (7.27) puede hallarse  $T_{\text{máx}}$  y, conociendo éste, revisar la resistencia por medio de la fórmula

$$\sigma = \frac{T_{\text{máx}}}{F} \approx \frac{H}{F} < [\sigma], \quad (7.43)$$

o bien, teniendo en cuenta (7.35),

$$\sigma = \frac{ql^2}{8fF} < [\sigma]. \quad (7.44)$$

Introduciendo la noción de carga específica

$$\tilde{\gamma} = \frac{q}{F},$$

obtenemos la condición de resistencia (7.44) en forma de

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma}l^2}{8f} < [\sigma]. \quad (7.45)$$

Hagamos notar que durante el cálculo de conductores eléctricos la sección del conductor  $F$  se determina a partir de las relaciones eléctricas, realizando después el cálculo de comprobación mediante la fórmula (7.45).

Un gran interés práctico representa el caso particular del cálculo del hilo, en que los puntos de suspensión se encuentran a un mismo nivel, es decir, cuando

$$\cos \beta = \cos 0 = 1; \quad h = 0; \quad R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Se quedan vigentes las fórmulas (7.34) y (7.35), igual que para el caso general, mas la ecuación de simultaneidad de las deformaciones (7.42) obtendrá el siguiente aspecto:

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24 H^2} - \frac{Hl}{EF} - \alpha l(t - t_0). \quad (7.46)$$

Muchas veces en la práctica se tiene que tomar en consideración la influencia de los cambios de temperatura y carga sobre la tensión y la flecha de la comba del hilo. Supongamos que es necesario determinar el cambio de la tensión y de la flecha de la comba en un estado  $n$ , caracterizado por los parámetros  $t_n, q_n, f_n, H_n = \frac{q_n l^2}{8f_n}$ , en comparación con el estado inicial  $m$  en el momento de suspensión del hilo definido por los parámetros  $t_m, q_m, f_m, H_m = \frac{q_m l^2}{8f_m}$ .

La solución del problema planteado puede obtenerse, expresando la longitud  $L$  del hilo para los estados  $m$  y  $n$  de acuerdo con (7.46):

$$L = l + \frac{q_m^2 l^3}{24 H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l(t_m - t_0);$$

$$L = l + \frac{q_n^2 l^3}{24 H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l(t_n - t_0).$$

Igualando los segundos miembros de dichas ecuaciones e introduciendo la sustitución

$$\frac{q_m}{F} = \gamma_m; \quad \frac{q_n}{F} = \gamma_n; \quad \sigma_m = \frac{H_m}{F}; \quad \sigma_n = \frac{H_n}{F},$$

$$\sigma_n - \frac{\gamma_n^2 l^2 E}{24 \sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\gamma_m^2 l^2 E}{24 \sigma_m^2} + \alpha E (t_m - t_n). \quad (7.47)$$

La dependencia (7.47) se llama a veces *ecuación de estado del hilo*. Puede presentarse en forma de

$$\sigma_n^3 - \left[ \sigma_m - \frac{\gamma_m^2 l^2 E}{24 \sigma_m^2} - \alpha (t_n - t_m) \right] \sigma_n^2 - \frac{\gamma_n^2 l^2 E}{24} = 0 \quad (7.48)$$

o, teniendo en cuenta que

$$\sigma_m = \frac{\gamma_m l^2}{8 f_m}; \quad \sigma_n = \frac{\gamma_n l^2}{8 f_n},$$

en forma de

$$f_n^3 - \left[ f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 (t_n - t_m) - \frac{3}{64} \frac{\gamma_m l^4}{E f_m} \right] f_n - \frac{3}{64} \frac{\gamma_n l^4}{E} = 0. \quad (7.49)$$

Si los puntos de suspensión son diferentes, la ecuación de estado del hilo omará, respectivamente, el siguiente aspecto:

$$f_n^3 - \left[ f_m^2 + \frac{3}{8} \alpha l^2 \frac{(t_n - t_m)}{\cos \beta} - \frac{3}{64} \frac{\gamma_m l^4}{E f_m \cos \beta} \right] f_n - \frac{3}{64} \frac{\gamma_n l^4}{E \cos \beta} = 0. \quad (7.50)$$

Es cómodo resolver gráficamente la ecuación cúbica (7.49) o (7.50) respecto a  $f_n$ . Así, poniéndola en forma de  $f_n^3 - a f_n - b = 0$  ó  $f_n^3 = a f_n + b$ , donde  $a$  y  $b$  son números conocidos, se construyen los gráficos

$$y = f_n^3 \quad \text{e} \quad y = a f_n + b.$$

La abscisa del punto de intersección de la parábola cúbica obtenida con la línea recta ofrece el valor de la comba buscada  $f_n$  (fig. 112).

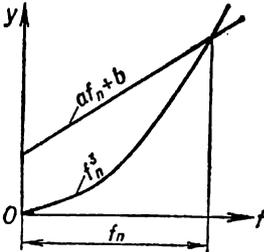


Fig. 112

Durante el cálculo del hilo a la resistencia es necesario tomar en consideración los casos de combinaciones más desfavorables del viento y la congelación que provocan en él tensiones máximas.

De la ecuación de estado (7.47) se desprende que en el caso de luces pequeñas, cuando  $l \rightarrow 0$

$$\sigma_n = \sigma_m + \alpha E (t_m - t_n),$$

es decir, el cambio de las tensiones depende, generalmente, de los cambios de temperatura.

En el caso de luces grandes, cuando  $l \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\sigma_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \sigma_m,$$

es decir, la tensión depende, generalmente, de la carga.

Por la longitud crítica del hilo  $l_{cr}$  se entiende tal longitud, para la cual la tensión en el hilo es la misma en ambos estados peligrosos (tanto durante la carga

máxima, el estado  $n$ , como durante la temperatura mínima, el estado  $m$ ), es decir, cuando

$$\sigma_n = \sigma_m = [\sigma] \quad (7.51)$$

Considerando que  $t_n$  corresponde a la temperatura de congelación (generalmente  $t_{\text{cong}} = -5^\circ\text{C}$ ), para la cual  $\gamma_n = \gamma_{\text{máx}}$ , y  $t_m$  corresponde a la temperatura mínima  $t_{\text{mín}}$ , para la cual el hilo está solicitado solamente por el peso muerto  $\gamma$ , es decir,  $\gamma_m = \gamma_1$ , hallamos la longitud crítica del hilo  $l_{\text{cr}}$  a partir de (7.48) teniendo en cuenta (7.51):

$$l_{\text{cr}} = [\sigma] \sqrt{\frac{24 \alpha (t_{\text{cong}} - t_{\text{mín}})}{\gamma_{\text{máx}}^2 - \gamma_1^2}}$$

Comparando la luz de cálculo  $l$  con el crítico  $l_{\text{cr}}$  se puede convencerse de que, cuando  $l < l_{\text{cr}}$ , las tensiones máximas serán durante la temperatura más baja, y en el caso de  $l > l_{\text{cr}}$  las tensiones máximas en el hilo serán durante las cargas máximas.

**DESLIZAMIENTO**

**§ 43. Deslizamiento. Cálculo al cizallamiento**

El rasgo característico de la deformación de desplazamiento consiste en lo siguiente: de las seis componentes del vector principal de la fuerza  $R$  y del momento principal  $M$  solamente una fuerza cortante  $Q_y$  (o  $Q_x$ ) difiere de cero, siendo las demás iguales a cero.

La deformación de una banda, al cortarla con tijeras (fig. 113, *a, b*), puede servir de ejemplo del deslizamiento o cizallamiento. Prácticamente, es difícil obtener la deformación de deslizamiento en forma pura, porque viene acompañada, generalmente, por otras deformaciones, la de flexión en su mayoría.

Durante la sollicitación según el esquema mostrado en la figura, en el tramo *bc*, evidentemente, la fuerza cortante

$$Q = P, \tag{8.1}$$

y el enlace entre las tensiones tangenciales  $\tau$  y la fuerza cortante será

$$\int_F \tau dF = Q. \tag{8.2}$$

Tomando las tensiones tangenciales  $\tau$  distribuidas uniformemente por el área de la sección transversal  $F$  (fig. 114), hallamos a base de (8.2),

$$\tau = \frac{Q}{F},$$

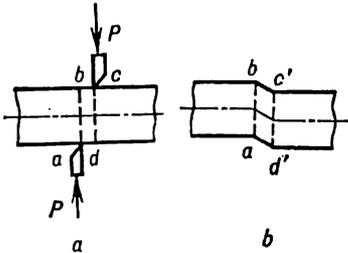


Fig. 113

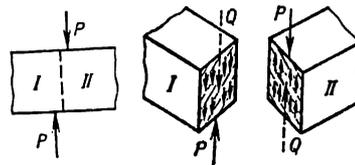


Fig. 114

o bien, tomando en consideración (8.1),

$$\tau = \frac{P}{F}. \tag{8.3}$$

La suposición sobre la uniformidad de distribución por la sección de las tensiones tangenciales es bastante convencional, porque éstas, en virtud de la ley

de reciprocidad, son iguales a cero cerca de las caras superior e inferior. Sin embargo, esta suposición se utiliza ampliamente en la práctica en el cálculo de los pernos, uniones soldadas y remachadas, chavetas, etc.

#### § 44. Deslizamiento puro

El caso del estado plano tensional, cuando por las cuatro caras del elemento separado actúan solamente las tensiones tangenciales (fig. 115), se llama *deslizamiento puro*. Hallamos la magnitud de las tensiones principales con arreglo al esquema de carga que puede verse en la fig. 115, a. Con este propósito, teniendo

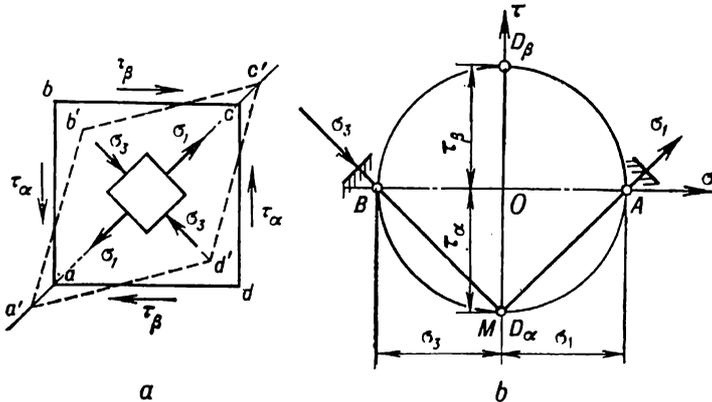


Fig. 115

en cuenta que en el caso dado  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ ;  $\tau_\alpha = -\tau$ ;  $\tau_\beta = \tau$ , construimos el círculo de las tensiones (fig. 115, b) del cual se desprende que

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau. \quad (8.4)$$

Las tensiones medias en los planos principales, que coinciden con la cara de fachada, son  $\sigma_2 = 0$ . Los planos principales están inclinados con respecto a las caras del elemento bajo un ángulo de  $45^\circ$ . El elemento  $abcd$  que tenía la forma de cuadrado de lado  $a$  se convierte, bajo la acción de las tensiones tangenciales, en rombo  $a'b'c'd'$ . La deformación de deslizamiento puro consiste en el cambio de los ángulos rectos. Representado, para más evidencia, el elemento que se encuentra en las condiciones de deslizamiento puro sujetado por una de las caras (fig. 116), hallamos

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Tomando en consideración la pequeñez del ángulo podemos tomar  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ ; entonces el deslizamiento relativo

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \quad (8.5)$$

La dependencia entre la carga y la deformación durante el deslizamiento puede verse en el diagrama de deslizamiento (fig. 117), el cual puede obtenerse, a semejanza con el diagrama de las tensiones, durante los ensayos a tracción.

Es evidente que dentro de los límites de la dependencia lineal entre  $\gamma$  y  $\tau$  es justa la correlación siguiente:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{o} \quad \tau = G\gamma, \quad (8.6)$$

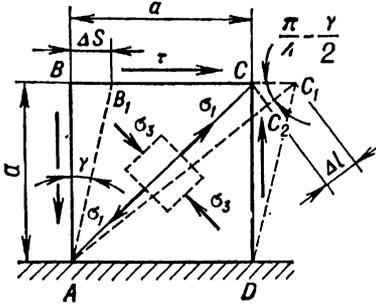


Fig. 116

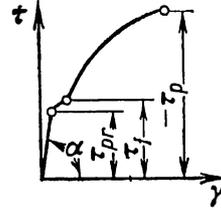


Fig. 117

siendo  $G$  el coeficiente de proporcionalidad denominado *módulo de elasticidad durante el deslizamiento* o *módulo de elasticidad de segundo género* y se mide en  $\text{kgf/cm}^2$  (o en  $\text{kgf/mm}^2$ ). Las fórmulas (8.6) expresan la ley de Hooke para el deslizamiento escrita en coordenadas relativas. De la fig. 116 se ve que el alargamiento  $\Delta l$  de la diagonal  $AC = l = a\sqrt{2}$  es igual a

$$\Delta l = CC_1 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}},$$

y el alargamiento lineal relativo de la diagonal (en la dirección de  $\sigma_1$ ),

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{2a} = \frac{\gamma}{2}$$

o bien, teniendo en cuenta (8.6),

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}. \quad (8.7)$$

Aplicando al deslizamiento puro la ley de Hooke generalizada (fig. 116) hallamos

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \tau. \quad (8.8)$$

Obtenemos de la confrontación de los segundos miembros de las igualdades (8.7) y (8.8)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.9)$$

Cuando  $\mu = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$ ,  $G = (0,375 \div 0,4) E$ .

Utilizando (8.5) expresemos el deslizamiento absoluto  $\Delta s$  por medio de  $Q = F\tau$ :

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G} a = \frac{Qa}{GF},$$

es decir,

$$\Delta s = \frac{Qa}{GF}. \quad (8.10)$$

La fórmula (8.10) expresa la ley de Hooke para el deslizamiento en unidades absolutas.

La energía potencial de la deformación durante el deslizamiento se define mediante la siguiente fórmula:

$$U = \frac{\Delta s Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF}.$$

La energía potencial unitaria de la deformación durante el deslizamiento es

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GFaF} = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (8.11)$$

donde  $V$  es el volumen del elemento.

Las tensiones principales durante el deslizamiento puro (fig. 115, a) son iguales a

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Las condiciones de resistencia durante el deslizamiento puro se escribirán del modo siguiente:

según la primera teoría de resistencia

$$\sigma_1 = \tau < [\sigma]; \quad (8.12)$$

según la segunda teoría de resistencia

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 < [\sigma].$$

Hallamos, sustituyendo los valores de las tensiones principales,

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu} = [\tau]. \quad (8.13)$$

Para los metales  $\mu = 0,25 - 0,42$ , por eso  $[\tau] = (0,7 \div 0,8) [\sigma]$ . Según la tercera teoría de resistencia

$$\sigma_1 - \sigma_3 < [\sigma].$$

De aquí

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau] \quad (8.14)$$

y la tensión admisible

$$[\tau] = 0,5 [\sigma].$$

Según la cuarta teoría de resistencia

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} < [\sigma];$$

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 [\sigma].$$

Hagamos notar que durante los cálculos de las piezas hechas de materiales plásticos (pernos, remaches, chavetas, etc.) la última fórmula es la que más sirve.

#### § 45. Algunos ejemplos del cálculo al cizallamiento

**Cálculo de empalmes emperrados y remachados.** En el cálculo al cizallamiento de los pernos (fig. 118, a) la distribución de las fuerzas exteriores que actúan sobre el perno y de las tensiones tangenciales en la sección del corte se toma convencionalmente correspondiente al esquema dado en la fig. 118, b.

La condición de resistencia del perno al cizallamiento puede escribirse en la siguiente forma:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Q}{F} < [\tau],$$

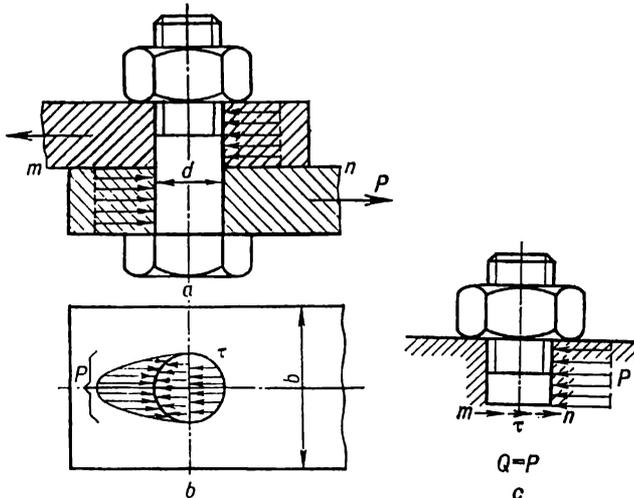


Fig. 118

o bien, tomando en consideración que  $Q = P$  (fig. 118, c) y  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ ,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4P}{\pi d^2} < [\tau].$$

De aquí determinamos el diámetro del perno,

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}}. \quad (8.15)$$

Al calcular empalmes emperrados o remachados se debe tomar en consideración que la carga aplicada a los elementos del empalme provoca, además del cizallamiento, *el aplastamiento* de las superficies de contacto. Por el aplastamiento se entiende la deformación plástica que surge en la superficie de contacto.

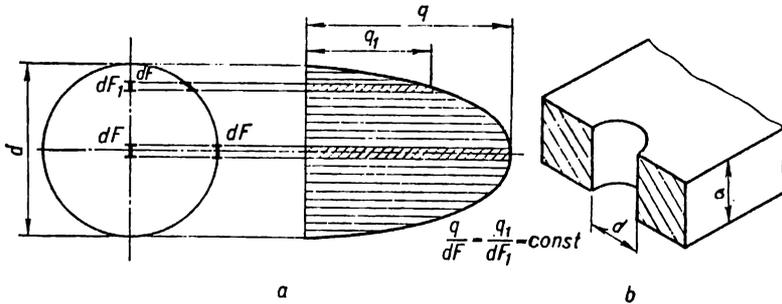


Fig. 119

El cálculo al aplastamiento se efectúa en forma aproximativa, puesto que se ignora la ley exacta de distribución de la presión por la superficie de contacto. Se toma, por regla general, la ley no lineal de distribución de la presión (fig. 119, a) considerando que la presión es proporcional a la proyección  $dF_1$  del plano  $dF$  de la superficie cilíndrica sobre el plano diametral

$$\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}.$$

La tensión máxima de aplastamiento para la superficie cilíndrica es igual a

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{F_{ap}} = \frac{P}{\delta d},$$

donde  $F_{ap} = \delta d$  es el área de la proyección de la superficie de contacto sobre el plano diametral (fig. 119, b).

La condición de resistencia al aplastamiento tiene el siguiente aspecto:

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{\delta d} < [\sigma_{ap}]. \quad (8.16)$$

Las tensiones admisibles del aplastamiento se determinan experimentalmente y se toman iguales a

$$[\sigma_{ap}] = (2 - 2,5) [\sigma_-].$$

Se puede determinar, a base de (8.16), el diámetro necesario del perno:

$$d > \frac{P}{\delta[\sigma_{ap}]} \quad (8.17)$$

De los dos diámetros hallados mediante las fórmulas (8.15) y (8.17) se debe tomar el mayor, redondeándolo hasta el valor estándar.

Como los pernos y remaches debilitan las chapas unidas, éstas se comprueban a la rotura en las secciones más debilitadas. En el caso de un solo perno la condición de resistencia tendrá el siguiente aspecto:

$$\sigma = \frac{P}{F_{\min}} = \frac{P}{\delta(b-d)} < [\sigma_+],$$

siendo  $b$  la anchura de la chapa.

Examinemos un empalme remachado, cuyos remaches experimentan el cizallamiento doble (fig. 120).

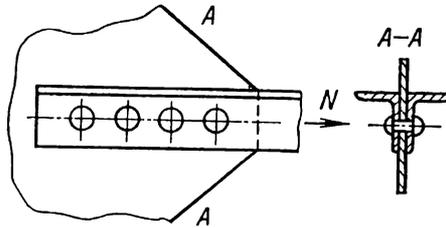


Fig. 120

Considerando que la fuerza de tracción  $N$  está distribuida uniformemente entre los remaches hallamos, designando el diámetro de los remaches por  $d$  y el espesor de la plancha por  $\delta$ , el número de los remaches  $i$  a partir de la condición de resistencia al cizallamiento:

$$\tau = \frac{N}{2i \frac{\pi d^2}{4}} < [\tau]; \quad i \geq \frac{2N}{\pi d^2 [\tau]}$$

o de la condición de resistencia al aplastamiento:

$$\sigma_{ap} = \frac{N}{i\delta d} < [\sigma_{ap}]; \quad i > \frac{N}{\delta d [\sigma_{ap}]}$$

**Cálculo de los empalmes soldados.** Se acepta (también convencionalmente) calcular al cizallamiento algunos empalmes soldados. Los más difundidos son a tope y mediante costuras angulares y de cordón. Los empalmes a tope se utilizan cuando las chapas unidas se encuentran en un mismo plano. Cuando el espesor de las chapas  $\delta < 8$  mm, sus bordes no se elaboran (fig. 121, a); cuando  $\delta = 8 \div 20$  mm, los bordes de las chapas se achaflanan y la soldadura se efectúa por un lado, obteniéndose una costura en V (fig. 121, b); cuando  $\delta > 20$  mm, los bordes se achaflanan por dos lados, obteniéndose una costura en X (fig. 121, c). Tales costuras se calculan a la rotura. El espesor de cálculo de la costura se toma igual al espesor de la chapa  $\delta$  (el metal de fusión no se toma en consideración).

Las uniones mediante costuras angulares se utilizan en los casos en que las chapas empalmadas son paralelas o perpendiculares. Comprenden uniones sola-

padas, con cubrejuntas y en T. Si la dirección de la costura es perpendicular a esfuerzo de acción, ella se llama frontal. Las costuras paralelas al esfuerzo se llaman de flanco o de costado. Se utilizan también costuras oblicuas (fig. 122) dirigidas bajo cierto ángulo con respecto a la fuerza de acción. En la fig. 123 se muestra

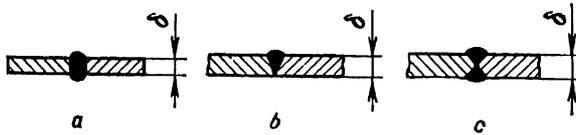


Fig. 121

la unión solapada de las chapas mediante costuras frontales, en la fig. 124, la unión con cubrejuntas soldadas mediante costuras de flanco, en la fig. 125, la unión en T.

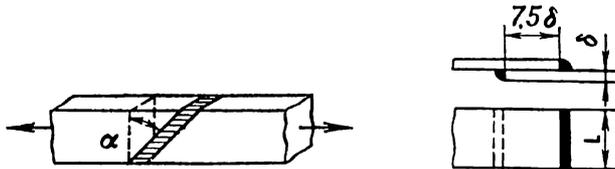


Fig. 122

Fig. 123

Generalmente durante el cálculo de las costuras soldadas el metal de fusión no se tiene en cuenta, sino se considera que la costura angular tiene en el corte la forma de triángulo rectángulo isósceles (fig. 126, a, b). La descomposición de la costura ha de suceder por su sección mínima, cuya altura

$$m = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta.$$

El área de cálculo de la sección de la costura con longitud  $l$  será

$$F = ml = 0,7\delta l.$$

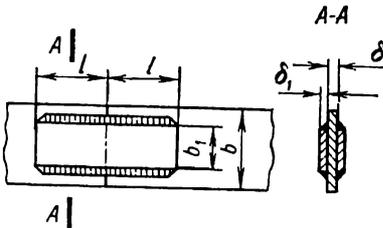


Fig. 124

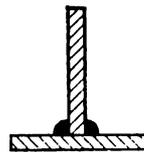


Fig. 125

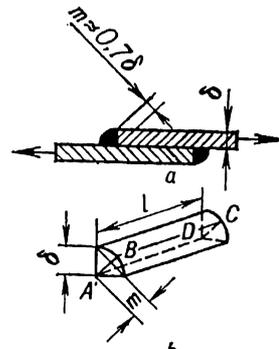


Fig. 126

El cálculo de las costuras, al igual que de los remaches, se efectúa convencionalmente suponiendo uniforme la distribución de las tensiones por la sección de la costura. Algunos valores de las tensiones admisibles durante el cálculo de los empalmes soldados de estructuras fabricadas del acero Ct. 3 se dan en la tabla 14.

Tensiones admisibles para acoplamientos soldados, kgf/cm<sup>2</sup>

Tipo de deformación	Designación	Soldadura manual (electrodos con capa fina)	Soldadura automática y manual (electrodos con capa gruesa)
Tracción	$[\sigma_s^+]$	1000	1300
Compresión	$[\sigma_s^-]$	1100	1450
Cizallamiento	$[\tau_s]$	800	1100

*Cálculo de la costura frontal.* Teniendo en cuenta que la resistencia del acero al cizallamiento es menor que la resistencia a la tracción, se prescinde de la componente de las tensiones normales en la costura frontal y su cálculo se realiza convencionalmente al cizallamiento, considerando que las tensiones tangenciales están distribuidas uniformemente por el área de la sección ABCD (fig. 126). Al calcular las costuras frontales del empalme solapado se toman en consideración ambas costuras, la superior y la inferior. Su área total es

$$F = 2ml = 2 \cdot 0,7\delta l = 1,4\delta l.$$

La condición de resistencia se escribirá del modo siguiente:

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1,4\delta l} < [\tau_s].$$

La longitud calculada de la costura de tope  $l_{cal}$  se determinará mediante la fórmula

$$l_{cal} = \frac{P}{1,4\delta [\tau_s]}.$$

La longitud calculada de la costura  $l_{cal}$  se toma, generalmente, a causa de la fusión incompleta al principio y al final, 10 mm menor que la real  $l$ , o sea,

$$l_{cal} = l - 10 \text{ mm}.$$

*Cálculo de las costuras de flanco.* Son las más difundidas en la práctica. Son menos rígidas que las frontales debido a la mayor extensión del metal en la dirección

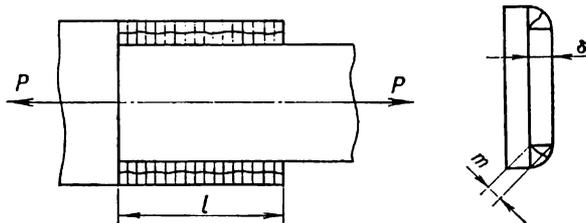


Fig. 127

de la acción de la fuerza. Las costuras de flanco siempre se hacen a pares. Trabajan al cizallamiento en las secciones bisectrices (fig. 127). El área de cizallamiento de dos costuras

$$F = 2 \cdot 0,7 \delta (l - 10 \text{ mm}) = 1,4\delta (l - 10 \text{ mm}).$$

La condición de resistencia al cizallamiento es

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1,4\delta(l - 10 \text{ mm})} < [\tau_s].$$

La longitud de la costura se determina por medio de la fórmula

$$l = \frac{P}{1,4\delta[\tau_s]} + 10 \text{ mm.}$$

**Cálculo de las ensambladuras.** Las ensambladuras que pertenecen a los acoplamientos, cuya resistencia se determina, generalmente, a partir de la condición de cizallamiento, se utilizan para la unión de los elementos de estructuras

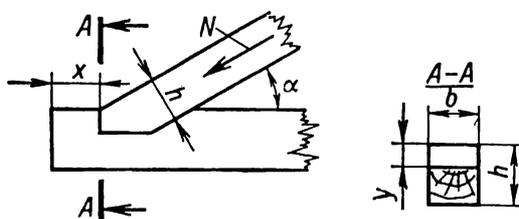


Fig. 128

de madera (fig. 128). La madera es un material anisótropo, sus propiedades mecánicas dependen de la dirección de la acción de fuerza con respecto a la orientación de las fibras.

Así, para el pino el límite de resistencia a lo largo de las fibras es igual a 400 kgf/cm<sup>2</sup>, de través de las fibras, 50 kgf/cm<sup>2</sup>; para el roble es de 500 kgf/cm<sup>2</sup> y 150 kgf/cm<sup>2</sup>, respectivamente. Se deben tomar, a causa de la diferente resistencia de la madera a lo largo y de través de las fibras, distintas tensiones admisibles para diferentes direcciones de acción de las fuerzas.

Algunos datos sobre las tensiones admisibles para el pino y el roble se dan en la tabla 15.

Examinemos, como ejemplo, el cálculo de la unión del par del tejado con el tirante (fig. 128). Denotemos el ángulo entre los ejes del par y del tirante por  $\alpha$  y la fuerza que actúa a lo largo del par, por  $N$ . La sección del par  $F = hb$ . El extremo del tirante experimenta el cizallamiento a lo largo de las fibras bajo la acción de la proyección horizontal de la fuerza  $N$

$$N_1 = N \cos \alpha.$$

La longitud  $x$  de una parte del tirante, que sale más allá de la ensambladura, se determinará a partir de la condición

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{N_1}{F_{\text{ciz}}} = \frac{N_1}{b \cdot x} < [\tau],$$

de donde

$$F_{\text{ciz}} = b \cdot x > \frac{N_1}{[\tau]},$$

y

$$x > \frac{N_1}{b[\tau]} = \frac{N \cos \alpha}{b[\tau]} .$$

El área necesaria del aplastamiento de la ensambladura

$$F_{ap} = by > \frac{N_1}{[\sigma_{ap}]} .$$

La profundidad de la ensambladura

$$y > \frac{N_1}{b[\sigma_{ap}]} = \frac{N \cos \alpha}{b[\sigma_{ap}]} .$$

Tabla 15

**Tensiones admisibles para la madera**

Tipo de la deformación	Designación	Tensión admisible, kgf/cm <sup>2</sup> , para	
		pino	roble
Tracción	$[\sigma_+]$	100	130
Compresión a lo largo de las fibras y aplastamiento del tope	$[\sigma_-]$	120	150
Aplastamiento en las ensambladuras a lo largo de las fibras	$[\sigma_{ap}]$	80	110
Aplastamiento perpendicularmente a las fibras (en una longitud mayor que 10 cm)	$[\sigma_{ap}] \frac{\pi}{2}$	24	48
Deslizamiento en las ensambladuras a lo largo de las fibras	$[\tau]$	5-10	8-14
Deslizamiento en las ensambladuras de través de las fibras	$[\tau] \frac{\pi}{2}$	6	8
Flexión	$[\sigma_{f1}]$	120	150
Deslizamiento durante la flexión	$[\tau_{f1}]$	20	28

*Observación.* Durante el aplastamiento (o deslizamiento) bajo un ángulo  $\alpha$  con respecto a la dirección de las fibras la tensión admisible tiene un valor intermedio entre  $[\sigma_{ap}]$  y  $[\sigma_{ap}] \frac{\pi}{2}$  o  $[\tau]$  y  $[\tau] \frac{\pi}{2}$  y puede determinarse mediante la

fórmula convencional

$$[\sigma]_{\alpha} = \frac{[\sigma_{ap}]}{1 + \left\{ \frac{[\sigma_{ap}]}{[\sigma_{ap}] \frac{\pi}{2}} - 1 \right\} \sin^3 \alpha} .$$

## Capítulo 9

### TORSIÓN

#### § 46. Tensiones y deformaciones durante la torsión

El estado tensional de la torsión es caracterizado por la presencia en la barra del factor interior de la fuerza único, el momento torsional  $M_x = M_{t0}$  (fig. 129), es decir, el momento que actúa en el plano de la sección transversal de la barra (las demás componentes de las fuerzas interiores son nulas):

$$Q_x = Q_y = N = 0; \quad M_x = M_y = 0.$$

La barra que trabaja a torsión se llama *árbol*. Se estableció experimentalmente que cuando un árbol está sujeto a la acción de dos momentos torsionales  $M_{tor}$  opuestos aplicados en sus extremos, éste ha de experimentar torcedura, es decir, unas secciones del árbol han de girar respecto a las otras, mientras que su longitud se mantiene invariable.

Examinando la torsión de una barra cargada según el esquema mostrado en la fig. 130, es fácil notar que el ángulo de giro  $\varphi$  de una sección que se encuentre a una distancia  $z$  del lugar del empotramiento del árbol será tanto

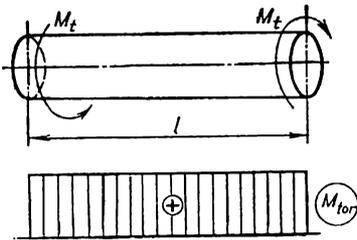


Fig. 129

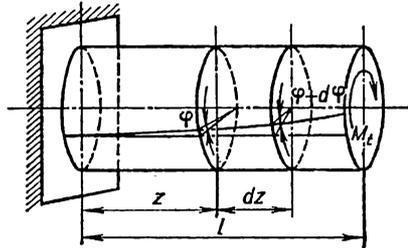


Fig. 130

mayor, cuanto mayores sean  $z$  y el momento torsional  $M_{tor}$ . Si se hace torcer el árbol hasta su destrucción, representando gráficamente la dependencia  $\varphi = f(M_{tor})$ , obtenemos *el diagrama de torsión*, cuyo aspecto para un material plástico puede verse en la fig. 131. En este diagrama, igual que en el diagrama de tracción, puede observarse una serie de tramos y puntos característicos (1, 2, 3):  $M_{pr}$  es el valor del momento torsional, hasta el cual se mantiene la dependencia lineal entre  $\varphi$  y  $M_{tor}$ ;  $M_f$  es el momento que corresponde al inicio de la fluencia;  $M_{des}$  es el valor del momento torsional que provoca la destrucción. Generalmente se interesan por las magnitudes de los momentos y las deformaciones que corresponden al tramo lineal del diagrama de torsión, para el cual es válida la ley de Hooke.

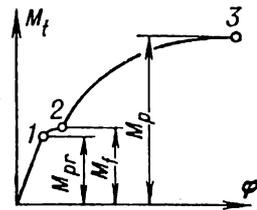


Fig. 131

El momento torsional en una sección del árbol, el cual es el momento resultante de las tensiones tangenciales  $\tau_\rho$  que actúan en los planos elementales  $dF$

situadas a una distancia  $\rho$  del centro de la sección, puede expresarse mediante la ecuación

$$M_{\text{tor}} = \int_F \rho \tau_\rho dF. \quad (9.1)$$

El carácter de distribución de las tensiones tangenciales  $\tau_\rho$  por la sección se determina a partir del cuadro geométrico de la deformación del árbol durante la torsión, representado en la fig. 132. La experiencia demuestra que las distancias

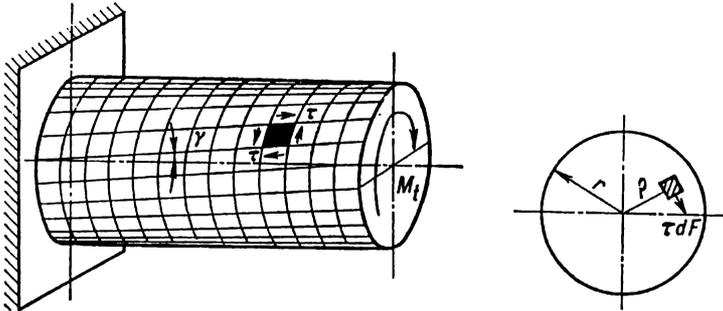


Fig. 132

entre las secciones del árbol torcido no varían, mientras que las líneas longitudinales de la red puesta de antemano adquieren el carácter espiral. Además los ángulos rectos de la red se alteran, al igual que en el caso de deslizamiento puro. La última circunstancia evidencia que el volumen elemental separado de cualquier capa del material del árbol se halla en las condiciones de deslizamiento puro. Como los radios trazados en el tope de la sección se mantienen rectos, las capas que se encuentran más abajo, a medida que se aproximan al centro, experimentan menor deformación de deslizamiento. De acuerdo con los datos experimentales, las secciones planas antes de la deformación del árbol siguen siendo planas también después de la deformación, girando una respecto a la otra un cierto ángulo  $\varphi$ . Precisamente en esto consiste la esencia de la hipótesis de las secciones planas, a base de la cual se edifica la teoría elemental de torsión de las barras.

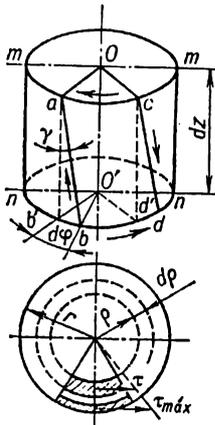


Fig. 133

Para la capa exterior del tramo elemental separado del árbol de una longitud  $dz$  (fig. 133) serán justas las correlaciones obtenidas anteriormente con arreglo al deslizamiento puro, es decir,

$$\text{tg } \gamma \approx \gamma = \frac{b'b}{ab'} = \frac{rd\varphi}{dz}.$$

El valor  $\frac{d\varphi}{dz}$  es el ángulo de torsión unitario; se mide en  $\text{cm}^{-1}$  y se denota generalmente por  $\theta$ .

La relación entre el deslizamiento unitario y el ángulo de torsión unitario tendrá el aspecto siguiente:

$$\gamma = \theta r. \quad (9.2)$$

Expresando el deslizamiento  $\gamma$  en las fibras exteriores del árbol por medio de tensiones hallamos, de acuerdo con la ley de Hooke para el deslizamiento,

el enlace entre las tensiones tangenciales en las fibras extremas  $\tau_r$  y el ángulo relativo de torsión  $\theta$

$$\tau_r = G\theta r. \quad (9.3)$$

Tomando en consideración que los radios de las secciones siguen siendo rectos se puede, por analogía con (9.3), establecer la relación entre las tensiones tangenciales en la sección de la barra que se encuentra a una distancia  $\rho$  del centro de la sección y el ángulo de torsión unitario

$$\tau_\rho = G\theta \rho. \quad (9.4)$$

Sustituyendo (9.4) en (9.1), hallamos

$$M_{\text{tor}} = G\theta \int_F \rho^2 dF = G\theta J_p.$$

De aquí obtenemos la fórmula para determinar el ángulo unitario de torsión del árbol

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\text{tor}}}{GJ_p}, \quad (9.5)$$

siendo  $GJ_p$  la rigidez de la sección transversal de la barra durante la torsión; se mide en  $\text{kgf} \cdot \text{cm}^2$ .

El ángulo total de torsión del árbol de una longitud  $l$  es igual a

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\text{tor}}}{GJ_p} dz = \theta l = \frac{M_{\text{tor}} l}{GJ_p}, \quad (9.6)$$

donde  $GJ_p/l$  es la rigidez del árbol durante la torsión; se mide en  $\text{kgf} \cdot \text{cm}$  (dimensión del momento).

Sustituyendo el valor de  $\theta$  de (9.5) en (9.4), hallamos la tensión tangencial  $\tau_\rho$  en cualquier punto de la sección de la barra,

$$\tau_\rho = \frac{M_{\text{tor}} \rho}{J_p}. \quad (9.7)$$

La tensión tangencial máxima será, evidentemente,

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_r = \frac{M_{\text{tor}} r}{J_p},$$

o bien

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_p} \quad (9.8)$$

donde  $W_p = \frac{J_p}{r}$  es el módulo polar de la sección (véase (2.38)).

Para un árbol macizo redondo de diámetro  $d$  el módulo polar de la sección se determina mediante la fórmula (2.38) y

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16M_{\text{tor}}}{\pi d^3}. \quad (9.9)$$

Para un árbol redondo tubular  $W_p$  se determina según (2.39) y

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16M_{\text{tor}}}{\pi D^3(1 - \alpha^4)}, \quad (9.10)$$

donde  $\alpha = \frac{d}{D}$  es la relación del diámetro interior del árbol al exterior.

La condición de resistencia del árbol durante la torsión se escribe así:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_p} < [\tau]. \quad (9.11)$$

De aquí el módulo de la sección del árbol durante la torsión tiene que ser

$$W_p \geq \frac{M_{\text{tor}}}{[\tau]}. \quad (9.12)$$

El diámetro del árbol redondo macizo se determinará a base de (9.9) a partir de la condición

$$d > \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{tor}}}{\pi[\tau]}}, \quad (9.13)$$

y a base de (9.10), el diámetro exterior del árbol tubular, siendo dado  $\alpha$ , mediante la condición

$$D > \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{tor}}}{\pi(1 - \alpha^4)[\tau]}}. \quad (9.14)$$

Si el momento torsional se expresa por medio de la potencia  $N$  en CV y el número de revoluciones por minuto  $n$ , entonces se tiene

$$M_{\text{tor}} = 71620 \frac{N}{n}, \text{ kgf} \cdot \text{cm}, \quad (9.15)$$

y la fórmula (9.13) tomará el siguiente aspecto:

$$d > 71,4 \sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau]}}; \quad (9.16)$$

la fórmula (9.14) se escribirá así:

$$D > 71,4 \sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau](1 - \alpha^4)}}. \quad (9.17)$$

Si la potencia  $K$  se da en kilovatios (1 CV = 0,736 kW), el momento torsional puede expresarse mediante la fórmula,

$$M_{\text{tor}} = \frac{71620 K}{0,736 n} = 97360 \frac{K}{n} \text{ kgf} \cdot \text{cm}. \quad (9.18)$$

Los árboles se calculan, además del cálculo a la resistencia, también a la rigidez limitando los ángulos unitarios de torsión a cierto valor admisible  $[\theta]$ :

$$\theta_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{GJ_p} < [\theta], \quad (9.19)$$

de donde el momento polar de inercia que garantiza la rigidez admisible se deduce por medio de la fórmula

$$J_p > \frac{M_{\text{tor}}}{G[\theta]} \quad (9.20)$$

De aquí el diámetro del árbol redondo macizo tiene que ser

$$d > \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{tor}}}{\pi G[\theta]}} \quad (9.21)$$

y el diámetro exterior  $D$  del árbol tubular, siendo dado  $\alpha$ ,

$$D > \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{tor}}}{\pi(1-\alpha^4)G[\theta]}} \quad (9.22)$$

Como en las secciones transversales del árbol actúan tensiones tangenciales distribuidas, de acuerdo con (9.7), según la ley lineal (fig. 134, a), en las secciones diametrales, con arreglo a la ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales, deben surgir tensiones tangenciales iguales por el valor, pero de signo opuesto (fig. 134, b).

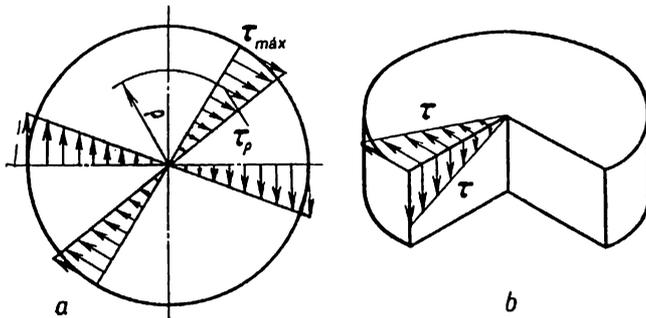


Fig. 134

En los planos orientados bajo el ángulo de  $45^\circ$  con respecto a las secciones en las cuales actúan las tensiones máximas tangenciales, actúan las tensiones normales principales, iguales de valor a las tensiones tangenciales en el punto dado de la sección como se muestra en la fig. 135. Con relación a esto el carácter

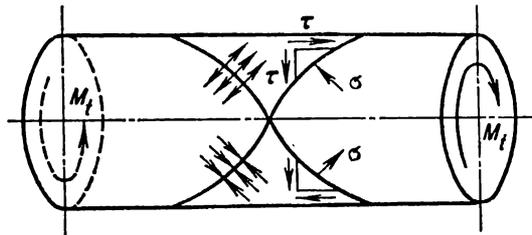


Fig. 135

de la destrucción (deslizamiento o desprendimiento) del árbol durante la torsión dependerá de la capacidad del material de contrarrestar la acción de las tensiones tangenciales o normales. Así, durante la torsión de árboles de madera con la disposición longitudinal de las fibras, éstas se descompondrán bajo la influencia de las tensiones tangenciales que actúan a lo largo de las fibras (grietas longitudinales) (fig. 136). Durante la torsión de árboles de fundición la destrucción

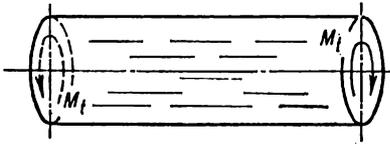


Fig. 136

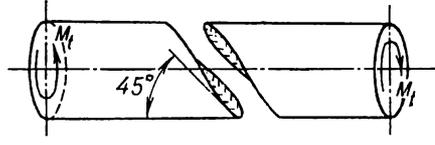


Fig. 137

llegará bajo la acción de las tensiones normales de tracción, cuyos valores máximos tienen lugar en las secciones que van por la línea helicoidal e intersecan las generatrices formando un ángulo de  $45^\circ$ , como puede verse en la fig. 137.

#### § 47. Torsión de barras de sección no circular

Durante la torsión de barras de sección no circular (rectangulares, triangulares, elípticas, etc.) no puede utilizarse la hipótesis de las secciones planas. Los cálculos exactos de torsión de tales barras pueden obtenerse mediante los métodos de la teoría de elasticidad. Las fórmulas definitivas para la determinación de las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{\text{máx}}$ , el ángulo de torsión unitario  $\theta$  y el ángulo total de torsión  $\varphi$  de una barra con longitud  $l$  tienen el siguiente aspecto:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_t}; \quad (9.23)$$

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}}}{GJ_t}; \quad (9.24)$$

$$\varphi = \frac{M_{\text{tor}} l}{GJ_t}. \quad (9.25)$$

En estas fórmulas  $J_t$  y  $W_t$  son ciertas características geométricas que se llaman convencionalmente momento de inercia y módulo de la sección en la torsión; su dimensión es  $\text{cm}^4$  y  $\text{cm}^3$ , respectivamente (véase la tabla 1).

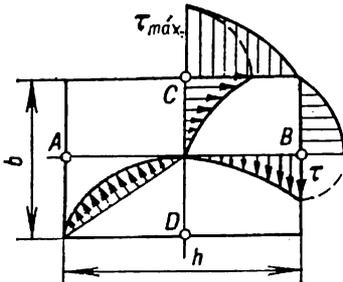


Fig. 138

La distribución de las tensiones tangenciales por la sección rectangular de la barra se da en la fig. 138. Las tensiones máximas surgen en las capas exteriores en el centro del lado largo de la sección (puntos C y D). Se determinan mediante la fórmula (9.23), donde

$$W_t = \alpha h b^2 \quad (9.26)$$

( $h$  es el lado largo;  $b$  es el lado corto de la sección rectangular).

Las tensiones en el centro del lado corto (en los puntos A y B) pueden expresarse por

medio de  $\tau_{\text{máx}}$ :

$$\tau = \gamma^* \tau_{\text{máx}}. \quad (9.27)$$

El ángulo de torsión unitario se determinará por la fórmula (9.24), siendo la expresión para el momento de inercia en la torsión igual a

$$J_t = \beta hb^3. \quad (9.28)$$

Los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma^*$ , que dependen de la relación  $\frac{h}{b}$ , se dan a continuación

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263
$\gamma^*$	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753

$\frac{h}{b}$	4,0	6,0	8,0	10	$\infty$
$\alpha$	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma^*$	0,745	0,743	0,742	0,742	0,743

Las condiciones de resistencia y rigidez durante el cálculo a torsión de una barra de sección rectangular tienen, respectivamente, el siguiente aspecto:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{\alpha hb^2} < [\tau]; \quad (9.29)$$

$$\theta_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{\beta hb^3 G} < [\theta]. \quad (9.30)$$

Durante la torsión de las barras, cuyas *secciones* no son sino *trapezios isósceles*, los valores aproximados de  $\tau_{\text{máx}}$  y  $\theta$  pueden deducirse determinando las magnitudes señaladas para una barra con sección de rectángulo equivalente que se construye según el esquema dado en la fig. 139.

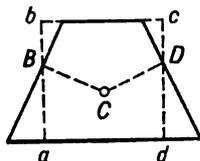


Fig. 139

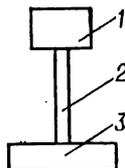


Fig. 140

Durante la torsión de la barra de sección cerrada compuesta que consta de elementos rectangulares (fig. 140), el momento de inercia es igual a

$$J_t = J_{t_1} + J_{t_2} + J_{t_3} + \dots = \sum J_{t_n}, \quad (9.31)$$

siendo  $n = 1, 2, 3, \dots$  los números de las partes simples integrantes de la sección examinada.

Como el ángulo de torsión es el mismo para toda la sección y para cada una de sus partes

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}}}{GJ_t} = \frac{M_{\text{tor}_1}}{GJ_{t_1}} = \frac{M_{\text{tor}_2}}{GJ_{t_2}} = \dots = \frac{M_{\text{tor}_n}}{GJ_{t_n}},$$

resulta que los momentos torsionales tomados por cada parte de la sección serán proporcionales a su rigidez:

$$M_{\text{tor}_1} = M_{\text{tor}} \frac{J_{t_1} G}{J_t G} = M_{\text{tor}} \frac{J_{t_1}}{J_t};$$

$$M_{\text{tor}_2} = M_{\text{tor}} \frac{J_{t_2}}{J_t}; \dots; M_{\text{tor}_n} = M_{\text{tor}} \frac{J_{t_n}}{J_t}.$$

La tensión tangencial máxima en cada  $n$ -ésimo elemento de la sección será, correspondientemente,

$$\tau_{t_n} = \frac{M_{\text{tor}_n}}{W_{t_n}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_{t_n}} \left( \frac{J_{t_n}}{J_t} \right) = \frac{M_{\text{tor}}}{J_t} \left( \frac{J_{t_n}}{W_{t_n}} \right).$$

Es evidente que

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{J_t} \left( \frac{J_{t_n}}{W_{t_n}} \right)_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_t}, \quad (9.32)$$

donde

$$W_t = \frac{J_t}{\left( \frac{J_{t_n}}{W_{t_n}} \right)_{\text{máx}}}. \quad (9.33)$$

Para una barra de *sección elíptica* (fig. 141)

$$W_t = \frac{\pi b^2 h}{16}, \quad (9.34)$$

donde  $b$  y  $h$  son dimensiones de los ejes menor y mayor de la elipse, respectivamente.

Las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{\text{máx}}$  surgen en los puntos exteriores de la sección que se encuentran sobre los semiejes menores y se determinan mediane la fórmula

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_t} = \frac{16M_{\text{tor}}}{\pi b^2 h}. \quad (9.35)$$

Las tensiones en los puntos exteriores que se encuentran sobre los semiejes mayores son iguales a

$$\tau' = \frac{\tau_{\text{máx}}}{m},$$

siendo  $m = \frac{h}{b}$ .

El momento convencional de inercia de la elipse durante la torsión

$$J_t = \frac{\pi hb}{64} (h^2 + b^2). \quad (9.36)$$

En la tabla 16 se dan las fórmulas aproximadas de cálculo para determinar la tensión tangencial máxima  $\tau_{\text{máx}}$  por medio del ángulo de torsión unitario  $\theta$  de una serie de perfiles.

Durante la torsión de *perfiles cerrados de paredes delgadas* (fig. 142), cuya pared es tan fina que las tensiones tangenciales por su espesor pueden considerarse iguales, idénticas a las tensiones en medio del espesor de la pared y dirigidas por la tangente a la línea media de ella, las tensiones tangenciales pueden determinarse mediante la *fórmula de Bredt*:

$$\tau = \frac{M_{\text{tor}}}{2\omega\delta}, \quad (9.37)$$

donde  $\omega$  es el área abarcada por la línea media de la sección de paredes delgadas;  $\delta$ , el espesor de la pared.

Si el espesor de la pared del perfil no es igual por el contorno, la tensión tangencial máxima en la barra cerrada de paredes delgadas se deduce mediante la fórmula

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{2\omega\delta_{\text{mín}}}. \quad (9.38)$$

El ángulo de torsión unitario de una barra de paredes delgadas con desigual espesor de la pared se determinará mediante la siguiente fórmula:

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}}}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}, \quad (9.39)$$

siendo  $s$ , la longitud del contorno cerrado.

El ángulo total de torsión de una barra de longitud  $l$  será

$$\varphi = \frac{M_{\text{tor}} l}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (9.40)$$

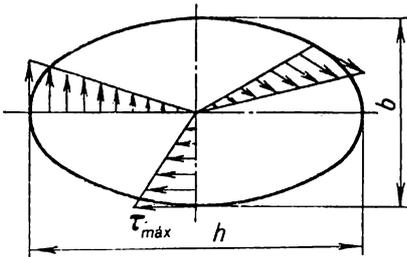


Fig. 141

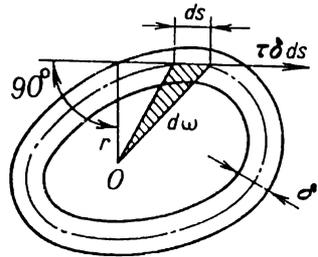


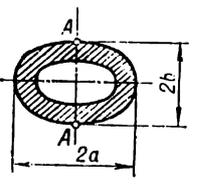
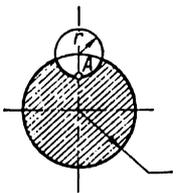
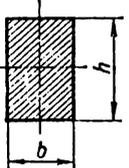
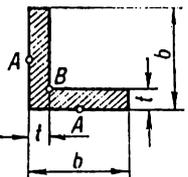
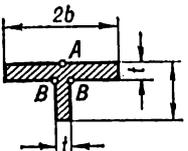
Fig. 142

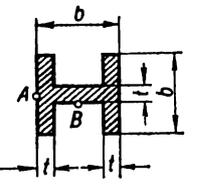
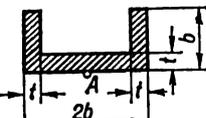
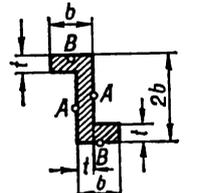
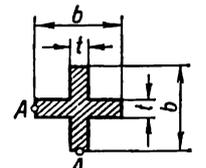
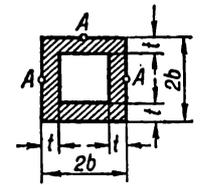
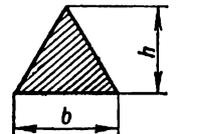
La fórmula (9.39) puede escribirse de la manera siguiente:

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}}}{GJ_t},$$

Tabla 16

Fórmulas de cálculo aproximadas para la determinación de la tensión tangencial máxima  $\tau_{\text{máx}}$  por medio del ángulo de torsión unitario  $\theta$  de las barras de sección no circular

Forma de la sección transversal de la barra	$\tau_{\text{máx}}$ en $\text{kgf/cm}^2$ y el punto donde ésta surge																												
	$2G\theta \frac{a^2b}{a^2 + b^2}$ en los puntos <i>A</i>																												
	$G\theta(2R - r)$ en el punto <i>A</i>																												
	$G\theta b k$ en el centro de los lados largos <table border="1" data-bbox="405 898 970 1092"> <tr> <td><math>h/b</math></td> <td>1,0</td> <td>1,2</td> <td>1,5</td> <td>1,8</td> <td>2,0</td> <td>2,5</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>0,6753</td> <td>0,7587</td> <td>0,8477</td> <td>0,9044</td> <td>0,9301</td> <td>0,9681</td> </tr> <tr> <td><math>h/b</math></td> <td>3,0</td> <td>4,0</td> <td>6,0</td> <td>10</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>0,9855</td> <td>0,9970</td> <td>0,9999</td> <td>1,0</td> <td>1,0</td> <td></td> </tr> </table>	$h/b$	1,0	1,2	1,5	1,8	2,0	2,5	$k$	0,6753	0,7587	0,8477	0,9044	0,9301	0,9681	$h/b$	3,0	4,0	6,0	10			$k$	0,9855	0,9970	0,9999	1,0	1,0	
$h/b$	1,0	1,2	1,5	1,8	2,0	2,5																							
$k$	0,6753	0,7587	0,8477	0,9044	0,9301	0,9681																							
$h/b$	3,0	4,0	6,0	10																									
$k$	0,9855	0,9970	0,9999	1,0	1,0																								
	$1,18 G\theta t$ en el centro de los lados largos en los puntos <i>A</i> , aproximadamente. En el ángulo entrante en el punto <i>B</i> hay concentración de las tensiones																												
	$\sim 1,13 G\theta t$ en el centro del lado largo en el punto <i>A</i> . En los ángulos entrantes en los puntos <i>B</i> hay concentración de las tensiones																												

Forma de la sección transversal de la barra	$\tau_{\text{máx}}$ en $\text{kgf/cm}^2$ y el punto donde ésta surge																																
	<p>En los puntos <math>A</math> <math>\tau_{\text{máx}} \approx 0,267G\theta t</math>. En los puntos <math>B</math> <math>\tau_{\text{máx}} \approx 0,26G\theta t</math>. En los ángulos entrantes hay concentración de las tensiones</p>																																
	<p><math>1,015G\theta t</math> en el punto <math>A</math>. En los ángulos entrantes hay concentración de las tensiones</p>																																
	<p>En los puntos <math>A</math> <math>\tau_{\text{máx}} \approx 1,04G\theta t</math>. En los puntos <math>B</math> <math>\tau_{\text{máx}} \approx 1,0G\theta t</math>. En los ángulos entrantes hay concentración de tensiones</p>																																
	<p>En los puntos <math>A</math> <math>\tau_{\text{máx}} \approx 0,782G\theta t</math> cuando <math>\frac{b}{t} &gt; 3</math> y <math>\tau_{\text{máx}} \approx 0,934G\theta t</math> cuando <math>1,5 &lt; \frac{b}{t} &lt; 3</math>. En los ángulos entrantes hay concentración de las tensiones</p>																																
	<p><math>(\gamma + 1) G\theta t</math> en los puntos <math>A</math>. En los ángulos entrantes hay concentración de tensiones.</p> <table border="1" data-bbox="405 1134 1011 1327"> <tr> <td><math>b/t</math></td> <td>1,5</td> <td>2,0</td> <td>2,5</td> <td>3,0</td> <td>3,5</td> <td>4,0</td> <td>5,0</td> </tr> <tr> <td><math>\gamma</math></td> <td>1,154</td> <td>1,681</td> <td>2,194</td> <td>2,701</td> <td>3,206</td> <td>3,709</td> <td>4,713</td> </tr> <tr> <td><math>b/t</math></td> <td colspan="2">10,0</td> <td colspan="2">20,0</td> <td colspan="3"></td> </tr> <tr> <td><math>\gamma</math></td> <td colspan="2">9,720</td> <td colspan="2">19,723</td> <td colspan="3"></td> </tr> </table>	$b/t$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	$\gamma$	1,154	1,681	2,194	2,701	3,206	3,709	4,713	$b/t$	10,0		20,0					$\gamma$	9,720		19,723				
$b/t$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0																										
$\gamma$	1,154	1,681	2,194	2,701	3,206	3,709	4,713																										
$b/t$	10,0		20,0																														
$\gamma$	9,720		19,723																														
	<p><math>\frac{1}{2} G\theta t</math> en el centro de los lados</p>																																

donde

$$J_t = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

Siendo constante el espesor de la pared por el contorno, la fórmula (9.39) se transforma en

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}} s}{4G\omega^2 \delta}. \quad (9.41)$$

En particular, para el tubo redondo de paredes delgadas con el radio  $R$  de la línea media, cuando  $\delta = \text{const}$ ,

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

De acuerdo con (9.37) y (9.41),

$$\tau = \frac{M_{\text{tor}}}{2\pi R^2 \delta};$$

$$\theta = \frac{M_{\text{tor}}}{2\pi R^3 \delta G}.$$

Durante la torsión de *barras de paredes delgadas de perfil abierto* (en U, en H, angular) (fig. 143) se puede valerse de la teoría de cálculo a la torsión de barras de sección rectangular. En este caso el perfil se divide en elementos rectangulares, cuyo espesor  $h$  es mucho menor que su longitud  $b$ . De acuerdo con los datos citados en la pág. 213  $\frac{h}{b} > 10$ ,  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ .

Entonces, a base de (9.31), para un perfil compuesto

$$J_t = \eta \frac{1}{3} \sum b^3 h_n, \quad (9.42)$$

siendo  $\eta$ , cierto coeficiente de corrección que toma en consideración la esquemización inevitable al sustituir el perfil real por rectángulos.

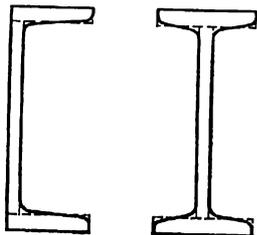


Fig. 143

A continuación se dan los valores de los coeficientes  $\eta$  para los perfiles típicos:

- para la sección angular  $\eta = 1,00$ ;
- para la sección en H  $\eta = 1,20$ ;
- para la sección en T  $\eta = 1,15$ ;
- para la sección en U  $\eta = 1,12$ .

En los perfiles abiertos de paredes delgadas se suele designar la longitud del contorno por  $s$ , y el espesor, por  $\delta$ . En este caso la fórmula (9.42) tendrá el siguiente aspecto:

$$J_t = \eta \frac{1}{3} \sum_n \delta_n^3 s_n. \quad (9.43)$$

Las tensiones tangenciales máximas en un perfil no cerrado se deducen mediante la fórmula

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}} \cdot \delta_{\text{máx}}}{J_t}, \quad (9.44)$$

donde

$$\delta_{\text{máx}} = \left( \frac{J_{t_n}}{W_{t_n}} \right)_{\text{máx}}.$$

#### § 48. Cálculo de resortes helicoidales

**Resortes cilíndricos helicoidales.** Las fórmulas aproximadas para determinar las tensiones aparecidas en un resorte helicoidal de paso pequeño durante su tracción o compresión (fig. 144) pueden obtenerse al examinar los esfuerzos interiores actuando en la sección de la espira (fig. 145) que sustituyen la acción de la parte inferior del resorte traccionado, retirada mentalmente. Bajo la acción de la fuerza cortante  $Q = P$  y el momento torsional igual al producto del esfuerzo de tracción por el radio medio  $R$  del resorte  $M_{\text{tor}} = PR$ , en la sección de la espira surgen dos grupos de tensiones tangenciales, a saber: *las tensiones de cizallamiento* tomadas convencionalmente distribuidas uniformemente e iguales a

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2},$$

y las de torsión, cuyo valor máximo

$$\tau''_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3},$$

siendo  $d$  el diámetro de la sección transversal del alambre del resorte. Fig. 144

El carácter de distribución de las tensiones  $\tau'$  y  $\tau''$  que actúan en la sección de la espira puede verse en las figuras 146, *a* y 146, *b*, respectivamente. Del cuadro de distribución de las tensiones se desprende que en las fibras exteriores

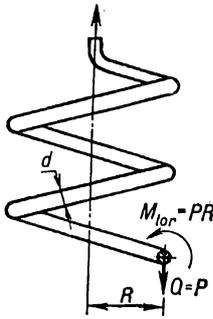
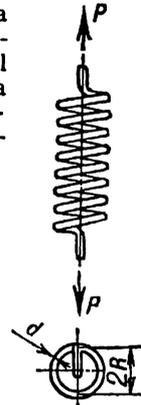


Fig. 145

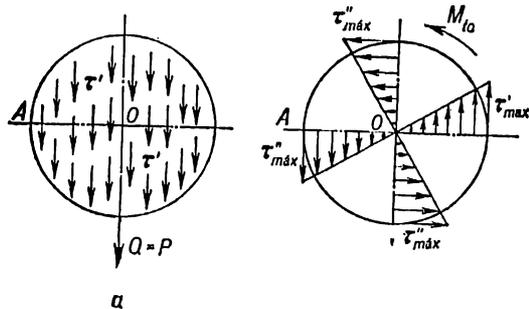


Fig. 146

de la espira que se encuentran por el lado del eje del resorte (punto *A*) las direcciones de las tensiones  $\tau'$  y  $\tau''_{\text{máx}}$  coinciden. Por eso las tensiones máximas en el resorte serán

$$\tau_{\text{máx}} = \tau' + \tau''_{\text{máx}} = \frac{4P}{\pi d^3} + \frac{16PR}{\pi d^3},$$

o bien

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (9.45)$$

Al calcular resortes de alambre fino con un radio medio *R* grande, cuando  $\frac{d}{4R} \ll 1$ , la tensión máxima puede determinarse, con suficiente grado de exactitud, mediante la fórmula

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.46)$$

En la práctica durante el cálculo de resortes en la fórmula (9.46) se introduce *el coeficiente de corrección k* que toma en consideración tanto la influencia de la fuerza cortante como algunos otros factores (flexión de la barra del resorte, deformaciones longitudinales, etc.). En este caso la fórmula (9.46) adquiere el siguiente aspecto:

$$\tau_{\text{máx}} = k \frac{M_{\text{tor}}}{W_p} = k \frac{16PR}{\pi d^3}. \quad (9.46a)$$

La magnitud del coeficiente de corrección *k* depende de la relación del radio del resorte *R* al radio de la espira *r* y se deduce mediante la fórmula

$$k = \frac{4m - 1}{4m - 4} + \frac{0,615}{m}, \quad (9.47)$$

donde  $m = \frac{R}{r}$ .

Las magnitudes del coeficiente *k* para diferentes relaciones de  $\frac{R}{r}$  se dan a continuación:

$\frac{R}{r}$	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>k</i>	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

*El alargamiento* (o *reducción* durante la compresión) *del resorte* se determina mediante la fórmula

$$\lambda = \frac{64PR^3n}{Gd^4}, \quad (9.48)$$

siendo *n* el número de las espiras del resorte.

Durante el cálculo de resortes a la resistencia, en el caso de carga estática, las tensiones admisibles de cizallamiento deben elegirse según el diámetro del alambre, del cual se hizo el resorte. Para el acero de resortes templado, siendo el diámetro del alambre  $d = 6$  mm,  $[\tau] = 50$  kgf/mm<sup>2</sup>; cuando  $d = 10$  mm,  $[\tau] = 40$  kgf/mm<sup>2</sup>; cuando  $d = 12$  mm,  $[\tau] = 35$  kgf/mm<sup>2</sup>; para el acero al cromo-níquel, cuando  $d = 12 \div 16$  mm,  $[\tau] = 70$  kgf/mm<sup>2</sup>; para el bronce fosforoso con  $G = 4,4 \cdot 10^8$  kgf/cm<sup>2</sup>, siendo  $d = 16$  mm,  $[\tau] = 13$  kgf/mm<sup>2</sup>.

En el caso de cargas variables las magnitudes señaladas de  $[\tau]$  tienen que ser reducidas aproximadamente en un 30%, y durante el trabajo incesante del resorte en las condiciones de cargas alternas, en un 60%.

Durante el cálculo de resortes de amortiguación (para suavizar golpes bruscos) se toma muchas veces como base la energía cinética  $T$  que tiene que absorber el resorte (la ballesta) durante la explotación.

Con tal enfoque (energético) el volumen del resorte, dada la tensión admisible  $[\tau]$ , se determina mediante la fórmula

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}.$$

Diseñando el resorte a base del volumen obtenido, se deben elegir sus dimensiones  $R$ ,  $d$  y  $n$  de tal manera que durante la comprobación del asentamiento  $\lambda$  no se cierren los juegos entre las espiras.

**Resortes cónicos helicoidales.** En la práctica se encuentran resortes cónicos (en forma de cono truncado). Si  $R_1$  y  $R_2$  son respectivamente el radio menor y mayor de las espiras de tope del resorte, la tensión tangencial máxima puede hallarse mediante la fórmula (9.45) o (9.46), una vez sustituido el radio  $R$  por la magnitud del radio mayor  $R_2$ :

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16PR_2}{\pi d^3}.$$

El asentamiento del resorte cónico se determina por medio de la fórmula

$$\lambda = \frac{16Pn}{d^4G} (R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2).$$

#### § 49. Concentración de las tensiones durante la torsión

La tensión máxima en la zona de los concentradores (ranuras, rebajos, agujeros, rosca, etc.) puede hallarse durante la torsión mediante la siguiente fórmula:

$$\tau_{\text{máx}} = \alpha_{\tau} \tau_n,$$

siendo  $\tau_n$  la tensión nominal calculada por medio de los métodos de resistencia de materiales, para un árbol redondo con radio  $r$ , en particular, por medio de la fórmula

$$\tau_n = \frac{M_{\text{tor}}}{J_p} r;$$

$\alpha_{\tau}$  es el coeficiente que muestra cuántas veces en el lugar del concentrador aumenta la tensión nominal. El coeficiente  $\alpha_{\tau}$  se determina mediante los métodos de la teoría de elasticidad o experimentalmente sobre modelos elásticos y se denomina, generalmente, coeficiente teórico de concentración.

En la fig 147 pueden verse los diagramas de la dependencia  $\alpha_\tau = f\left(\frac{2\rho}{d}\right)$  para diferentes relaciones  $\frac{D}{d}$  (fig. 148).

Para el caso de torsión de árboles tubulares de paredes delgadas con orificios transversales pequeños (fig. 149, a) el coeficiente de concentración cerca del orificio es igual a cuatro.

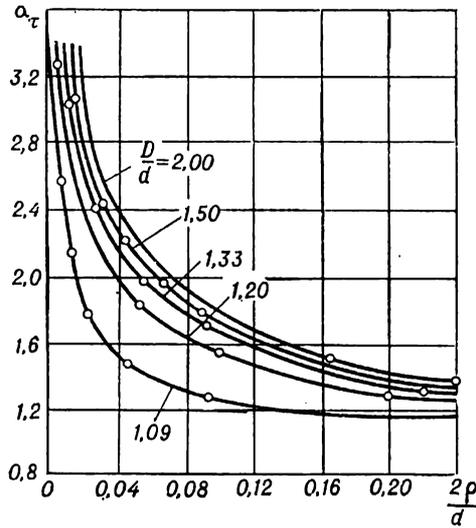


Fig. 147

En efecto, separando alrededor del orificio por medio de los planos principales, por cuyas caras han de actuar las tensiones normales  $\sigma = \tau$  (de tracción en los planos  $ab$  y  $cd$  y de compresión en los planos  $ad$  y  $bc$ ), cierto elemento

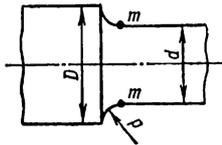


Fig. 148

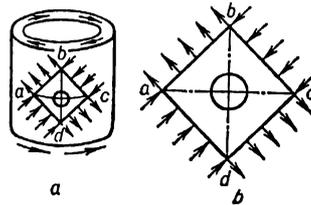


Fig. 149

(fig. 149, b) y representando el cuadro de tensiones cerca del orificio debido a las tensiones de tracción (fig 150, a) y de compresión (fig. 150, b), hallamos por separado en los puntos  $m$  (véase el § 27).

$$\sigma_{\text{máx}} = 3\sigma + \sigma = 4\sigma;$$

en los puntos  $n$ ,

$$\sigma_{\text{mín}} = -\sigma - 3\sigma = -4\sigma.$$

Como

$$\sigma_n = \tau = \tau = \frac{M_{\text{tor}}}{W_p},$$

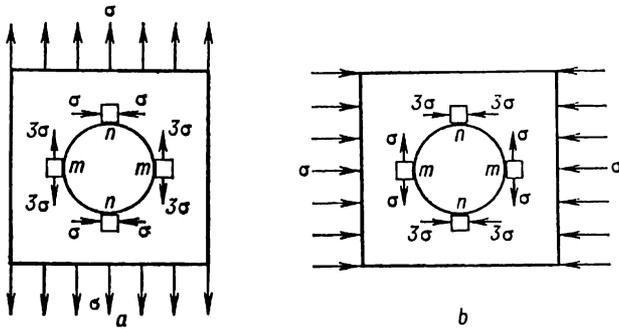


Fig. 150

resulta

$$\sigma_{\text{máx}} = 4\sigma_n = 4 \frac{M_{\text{tor}}}{W_p}.$$

Así pues, en el caso examinado el coeficiente de concentración  $\alpha_\tau = 4$

Los datos más completos sobre los coeficientes de concentración durante la torsión se dan en el APÉNDICE 2.

§ 50. Tensiones normales durante la flexión plana

Las fórmulas de cálculo para determinar las tensiones normales durante la flexión se deducen, por regla general, a partir del examen de la flexión pura plana (fig. 151, a).

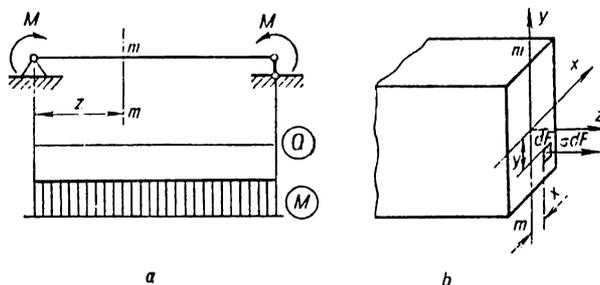


Fig. 151

En la flexión pura, y esto es su rasgo característico, de las seis componentes de los esfuerzos interiores solamente  $M_x$  no es igual a cero, siendo

$$N = Q_x = Q_y = 0, \quad M_y = M_z = 0.$$

La condición de equilibrio, que enlace las tensiones y los esfuerzos interiores de la sección transversal de la viga (fig. 151, b) (suprimiendo el índice  $x$  del momento), tendrá el siguiente aspecto:

$$\int_F \sigma y dF = M. \quad (10.1)$$

El aspecto geométrico del problema deriva del examen del cuadro de la deformación de la misma viga (fig. 152).

Observando la deformación de una red puesta de antemano sobre la viga (fig 152, a) es fácil de notar (fig. 152, b) que las líneas longitudinales de la red se tuercen durante la flexión pura por un arco circular, y los contornos de las secciones transversales siguen siendo curvas planas, intersectando las líneas longitudinales bajo ángulos rectos. Un testimonio de que durante la flexión pura las secciones transversales se mantienen planas y, al girar, se ponen normales al eje encorvado de la viga.

En la zona comprimida (arriba) las fibras se reducen, mientras que en la zona de tracción se alargan. La zona de tracción y la de compresión en la sección de la viga son separadas por la *capa neutra* con el radio de curvatura  $\rho$ . La longitud de la capa neutra durante la flexión sigue siendo invariable.

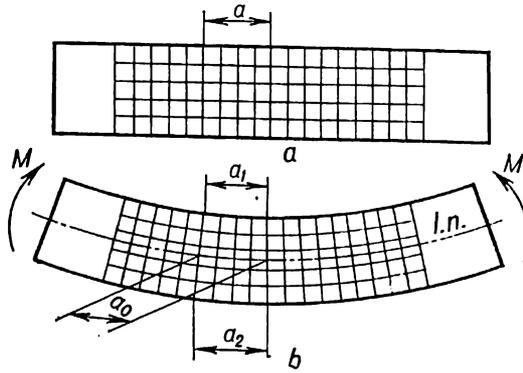


Fig. 152

El alargamiento unitario de cierta fibra que se encuentra a una distancia  $y$  de la capa neutra (fig. 153, *a*) se halla durante la flexión pura al examinar la deformación de un tramo de la viga con longitud  $dz$  (fig. 153, *b*),

$$\epsilon = \frac{(\rho + y) d\theta - dz}{dz} = \frac{(\rho + y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \quad (10.2)$$

Sustituyendo (10.2) en la ecuación física (ley de Hooke)

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (10.3)$$

expresemos la tensión normal  $\sigma$  mediante la curvatura  $\frac{1}{\rho}$ :

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (10.4)$$

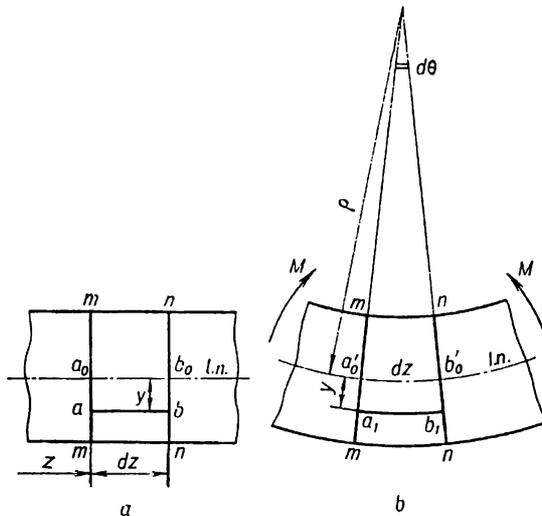


Fig. 153

Luego, sustituyendo (10.4) en (10.1), hallamos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}; \quad (10.5)$$

sustituyendo (10.5) en (10.4), hallamos la fórmula para determinar la tensión normal en cualquier capa de la sección de la viga a la distancia  $y$  del eje  $x$ :

$$\sigma = \frac{My}{J_x}. \quad (10.6)$$

Del análisis de la fórmula (10.6), llamada *fórmula de Navier*, se desprende que el cambio de las tensiones por la altura de la sección obedece a la ley lineal; las tensiones son máximas en las capas con la coordenada  $y_{máx}$ , y son mínimas (iguales a cero) cuando  $y = 0$ , es decir, en la capa neutra.

Sustituyendo  $\sigma$  de (10.6) en la condición  $N = \int_F \sigma dF = 0$ , hallamos que

$\int_F y dF = S_x = 0$ . De aquí se deduce que la línea neutra de la sección (eje  $x$ ) pasa a través de su centro de gravedad.

En el caso de una viga de sección rectangular con altura  $h$ ,

$$\sigma_{máx} = \frac{My_{máx}}{J_x} = \frac{M \frac{h}{2}}{J_x} = \frac{M}{W_x}, \quad (10.7)$$

donde  $W_x = \frac{J_x}{y_{máx}} = \frac{J_x}{\frac{h}{2}}$  se denomina *módulo de la sección en la flexión*

(véase el § 11).

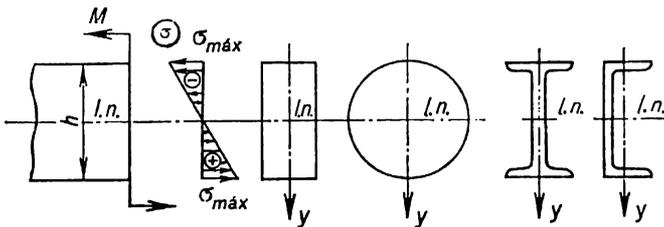


Fig. 154

Es obvio que para cualquier sección que tiene el eje de simetría horizontal (fig. 154) es posible el único módulo de la sección en el plano  $yz$ , determinado mediante la fórmula

$$W_x = \frac{J_x}{y_{máx}}.$$

Si la sección no tiene horizontal el eje de simetría (fig. 155), deben distinguirse dos módulos de la sección:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\text{máx}}} \quad \text{y} \quad W'_x = \frac{J_x}{y'_{\text{máx}}}$$

El diagrama de las tensiones normales  $\sigma$  para el último caso no será simétrico como lo es para secciones con el eje de simetría horizontal, sino tendrá la forma mostrada en las figuras 155 y 156.

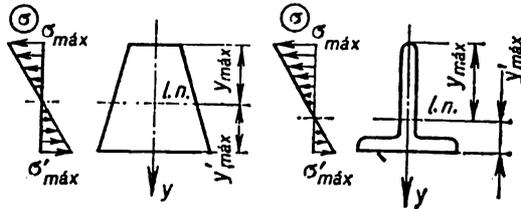


Fig. 155

Las fórmulas para la determinación de las tensiones normales, obtenida del examen de la flexión pura, son válidas, con suficiente grado de exactitud, para deducir las tensiones normales en el caso general de flexión, cuando  $Q$  no es nula.

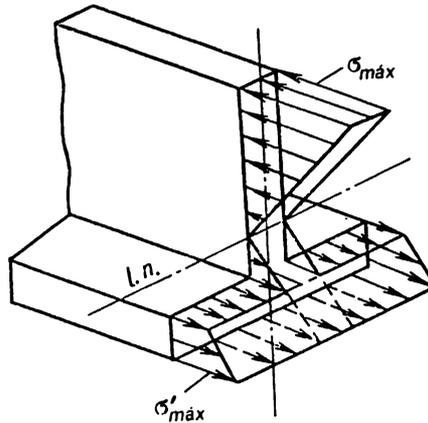


Fig. 156

### § 51. Tensiones tangenciales en la flexión

En el caso general de flexión transversal (fig. 157, a), cuando en las secciones de la barra, además del momento flector  $M$ , actúa también la fuerza cortante  $Q$ , en la sección de la viga surgen no sólo las tensiones normales  $\sigma$ , sino también las tangenciales  $\tau$ , cuya resultante es igual a  $Q$ .

La deducción de la fórmula para determinar las tensiones tangenciales en la sección se funda en el método de secciones, la dependencia diferencial entre

el momento y la fuerza cortante y la ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales.

Examinando las condiciones de equilibrio del elemento  $A_1 m_1 m_2 A_2$  (fig. 157, a, b, c, e) delimitado por las secciones  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  y  $m_1 m_2$  de una viga cargada con la fuerza concentrada  $P$  (fig. 157, a), hallamos lo siguiente:

$$N_1 + T = N_2, \quad (10.8)$$

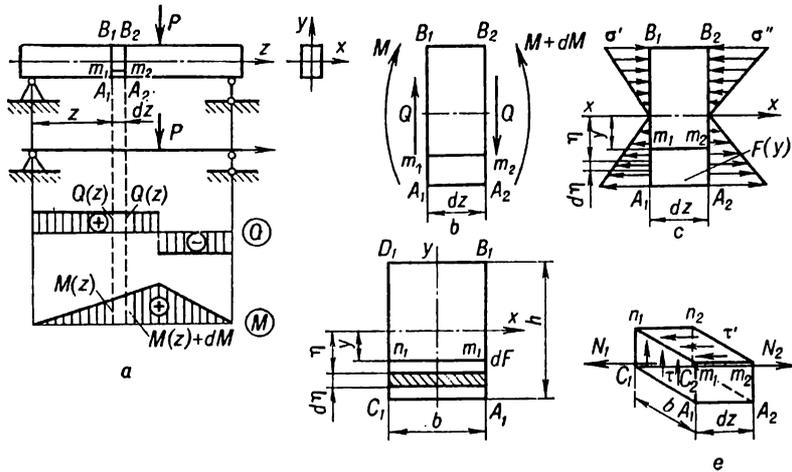


Fig. 157

donde

$$T = \tau' b dz; \quad (10.9)$$

$$N_1 = \int_F \sigma' dF = \int_F \frac{M \eta}{J_x} dF = \frac{M}{J_x} S_x(y); \quad (10.10)$$

$$N_2 = \int_F \sigma'' dF = \int_F \frac{(M + dM) \eta}{J_x} dF = \frac{M + dM}{J_x} S_x(y). \quad (10.11)$$

Introduciendo (10.9)–(10.11) en (10.8) y tomando en consideración la ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales, obtenemos la fórmula de Zhuravski para determinar las tensiones tangenciales durante la flexión transversal de la viga de sección arbitraria

$$\tau' = \tau = \frac{Q S_x(y)}{b(y) J_x}, \quad (10.12)$$

siendo  $S_x(y)$ , el momento estático respecto al eje neutro de aquella parte del área  $F(y)$  que se encuentra por abajo o arriba de la capa examinada del material a una distancia  $y$  y de la capa neutra de la viga;  $b(y)$ , el ancho de la sección en la capa examinada del material. El carácter del cambio de las tensiones tangenciales por la altura de la viga depende, en el caso general, de la forma de la sección de la viga.

Por cuanto en la sección examinada  $Q$  y  $J_x$  son constantes (también en el caso de la sección rectangular el ancho  $b$  es constante), resulta, como se ve de la fórmula (10.12), que la ley de cambio de las tensiones tangenciales en la sección se determinará por la ley de cambio del momento estático  $S_x(y)$ . En particular, examinando el momento estático del área  $C_1 m_1 m_1 A_1$  (fig. 157, d), hallamos lo siguiente:

$$S(y) = F(y) y_{c.g.} = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right), \quad (10.13)$$

es decir, el momento estático varía por la altura de la sección según la ley parabólica. Por supuesto que también las tensiones tangenciales siguen la misma ley alcanzando el máximo cuando  $y = 0$ :

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{QS_{\text{máx}}}{bJ_x} = \frac{Q \cdot \frac{bh^2}{8}}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}, \quad (10.14)$$

donde  $F = bh$  es el área de la sección de la viga.

En los puntos más alejados de la línea neutra en las fibras exteriores  $y = \pm \frac{h}{2}$  y  $\tau = 0$ .

El diagrama de las tensiones tangenciales para una viga de sección rectangular construido a base de la fórmula (10.12) contando con (10.13) puede verse en la fig. 158. En este caso

$$\tau = \frac{3Q}{2bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). \quad (10.15)$$

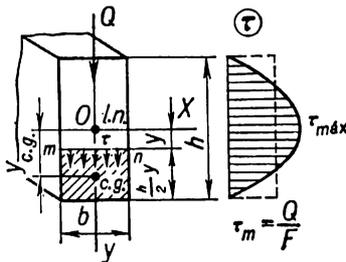


Fig. 158

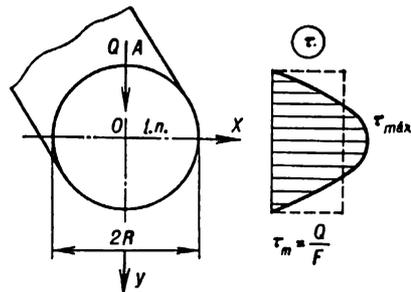


Fig. 159

De la fórmula (10.15) se ve que las tensiones tangenciales máximas en una barra de sección rectangular actuando en la capa neutra difieren una vez y media de las tensiones medias, que pudieron obtenerse mediante la fórmula  $\tau_m = \frac{Q}{F}$ , es decir,

$$\tau_{\text{máx}} = 1,5 \tau_m. \quad (10.16)$$

En caso de una sección circular (fig. 159) la fórmula de Zhuravski puede escribirse para la componente vertical de la tensión tangencial total en la forma siguiente:

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right). \quad (10.17)$$

La ley de cambio de  $\tau$  por la altura también en este caso es parabólica. En los puntos  $A$  más alejados de la línea neutra (cuando  $y = \pm R$ )  $\tau = 0$ . La tensión tangencial será máxima en los puntos de la línea neutra (cuando  $y = 0$ ):

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} = 1,33 \frac{Q}{F}.$$

El diagrama de  $\tau$  para la sección transversal circular construido a base de la fórmula (10.17) puede verse en la fig. 159.

La fórmula para la expresión de las tensiones tangenciales máximas con arreglo a la sección transversal de cualquier forma puede representarse en su aspecto general, por analogía con (10.14), del modo siguiente:

$$\tau_{\text{máx}} = k \frac{Q}{F}, \quad (10.18)$$

siendo  $k$  el coeficiente que depende de la forma de la sección. Así, por ejemplo, para el rectángulo  $k = 1,5$ , para el círculo  $k = 1,33$ .

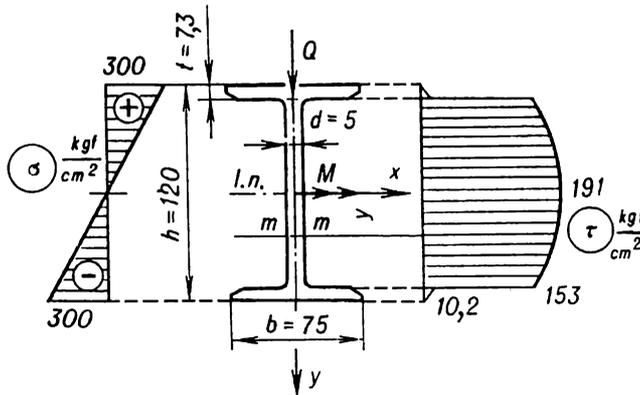


Fig. 160

Los diagramas de las tensiones normales y tangenciales construidos respectivamente a base de las fórmulas de Navier y Zhuravski para la viga de doble TN<sup>o</sup> 12 ( $J_x = 403 \text{ cm}^4$ ;  $S_{\text{máx}} = 38,5 \text{ cm}^3$ ) cuando  $M = 200 \text{ kgfm}$  y  $Q = 1 \text{ tf}$  se dan en la fig. 160. Los saltos observados en el diagrama de  $\tau$  se explican con el cambio brusco del ancho de la viga al pasar del ala al alma.

## § 52. Cálculo a la resistencia durante la flexión

Durante la flexión de la viga en el caso general, cuando  $M \neq 0$  y  $Q \neq 0$  (fig. 161, a), algunos elementos del material se encuentran, a causa de una distribución no uniforme de las tensiones normales y tangenciales, en las condiciones de diferente estado tensional (fig. 161, b). En este caso solamente las fibras exte-

riores (elementos 1, 2, 12, 13, 14) se hallan en las condiciones de estado tensional lineal (tracción o compresión) mientras que los demás elementos (3—11) separados por la altura de la viga se encuentran en las condiciones de estado tensional plano, estando los elementos (6, 7, 8) de la capa neutra en las condiciones

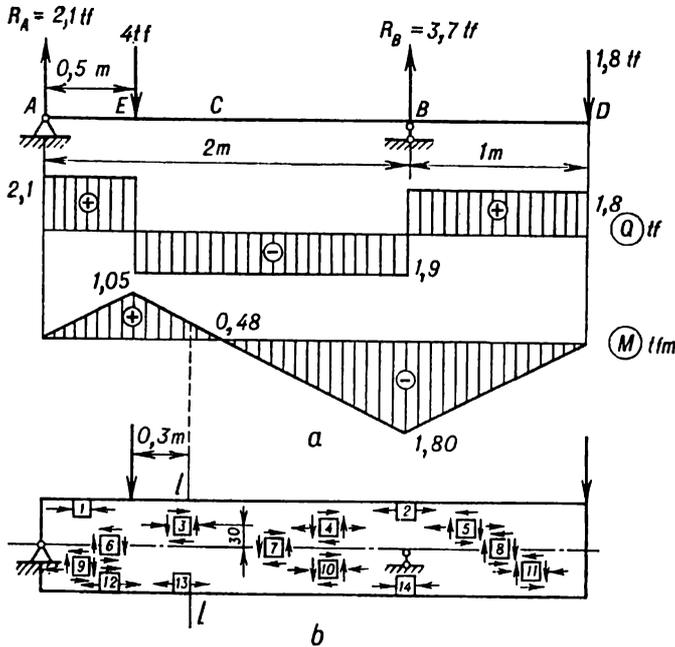


Fig. 161

de deslizamiento puro. Es característico que durante la deformación de flexión los valores máximos de las tensiones normales y tangenciales se hallan en los puntos diferentes de la sección. En los puntos donde  $\sigma$  es máxima (fibras exteriores de la viga)  $\tau = 0$ , y al revés, allí donde  $\tau$  es máxima (capa neutra)  $\sigma = 0$ .

De tal manera, es lógico examinar dos condiciones de resistencia que se refieren a diferentes puntos de la viga:

a) por las tensiones normales

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W} \leq [\sigma] \quad (10.19)$$

b) por las tensiones tangenciales

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Q_{\text{máx}} S_{\text{máx}}}{bJ} \leq [\tau]. \quad (10.20)$$

Comúnmente se determinan las dimensiones de la viga con la forma de la sección transversal aceptada a partir de la condición de resistencia por las tensiones normales (10.19),

$$W \geq \frac{M_{\text{máx}}}{[\sigma]}, \quad (10.21)$$

y luego, se comprueba si la sección elegida de la viga satisface la condición de resistencia por las tensiones tangenciales (10.20).

Sin embargo, tal concepción del cálculo de las vigas, sobre todo las de forma óptima de la sección que asegura el peso mínimo y la resistencia necesaria (de doble T, de U y otros perfiles), todavía no garantiza la resistencia de la viga. En no pocos casos en las secciones de las vigas hay puntos, en los cuales actúan a la vez grandes tensiones normales (que difieren poco de las máximas) y grandes tensiones tangenciales.

En particular, tal combinación de  $\sigma$  y  $\tau$  tiene lugar durante la flexión de la viga de doble T en la zona de transición del ala al alma (fig. 160). En estos casos surge la necesidad de comprobar la viga a la resistencia por las tensiones principales.

En el caso general de estado tensional plano experimentado por un elemento del material de la viga (por ejemplo, el elemento 5 en la fig. 161, b), sobre el cual actúan  $\sigma_\alpha = \sigma$ , determinada mediante la fórmula de Navier,  $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$ , determinada por la fórmula de Zhuravski, y cuando  $\sigma_\beta = 0$ , las tensiones principales se deducen mediante las fórmulas siguientes (véase el § 33):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2} [\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Conociendo las tensiones principales se puede, a base de diferentes teorías de resistencia, expresar las tensiones equivalentes que no deben superar las admisibles.

De tal manera, las condiciones de resistencia de acuerdo con las diferentes teorías pueden presentarse en la forma siguiente (véase el § 37):

$$\sigma_{\text{eq I}} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]; \quad (10.23)$$

$$\sigma_{\text{eq II}} = 0,35\sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (\text{siendo } \mu = 0,3); \quad (10.24)$$

$$\sigma_{\text{eq III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.25)$$

$$\sigma_{\text{eq IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (10.26)$$

$$\sigma_{\text{eq M}} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (10.27)$$

donde

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Comprobando la resistencia de las vigas por las tensiones principales, muchas veces surge la necesidad de conocer no sólo las magnitudes de las tensiones principales en uno u otro punto, sino también su dirección.

En particular, esto es necesario al diseñar vigas de hormigón armado, en las cuales se debe colocar el refuerzo de tal manera que éste contrarreste la acción

de las tensiones de tracción. En cualquier viga se puede construir una línea, cuya tangente ha de caracterizar en cada punto la dirección de las tensiones principales. Tal curva se denomina *trayectoria de las tensiones principales*. Dichas trayectorias dependen del tipo de la carga y las condiciones de sujeción de la viga.

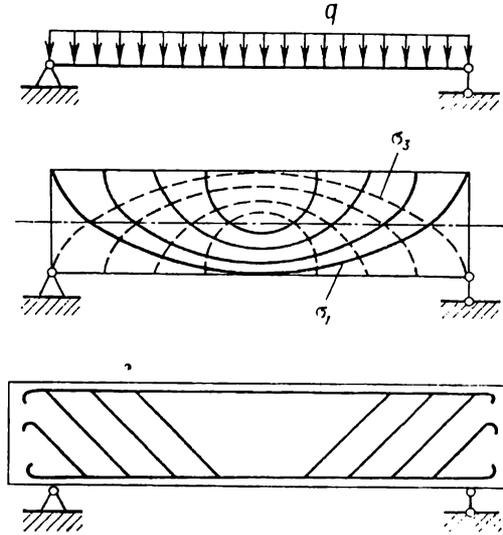


Fig. 162

Es evidente que a través de cada punto de la viga pasan dos trayectorias de las tensiones principales,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  correspondientemente, que se intersecan entre sí formando un ángulo recto. En las vigas de hormigón armado, por regla general se trata de colocar el refuerzo en la dirección de la trayectoria de las tensiones principales de tracción (fig. 162).

### § 53. Concentración de las tensiones en la flexión

Durante la flexión, al igual que en el caso de tracción o torsión, en los lugares de cambio brusco de las dimensiones o la configuración de la sección transversal surge la concentración de las tensiones. Si la carga es estática, la concentración de tensiones en las piezas fabricadas de materiales dúctiles no es peligrosa gracias a la redistribución de las tensiones en la zona de concentración a cuenta de la fluencia del material. En el caso de materiales frágiles, cuando ya no se tiene que contar con la redistribución de las tensiones ni la limitación de las tensiones máximas por el límite de fluencia, la concentración de las tensiones debe tomarse en consideración también durante cargas estáticas. Las tensiones máximas admisibles en la zona del concentrador no deben alcanzar la resistencia provisional del material, que es límite en el caso dado.

La influencia de la concentración que aparece en el lugar de cambio brusco del diámetro del árbol (fig. 163, a) puede tomarse en consideración introduciendo cierto coeficiente de concentración  $\alpha$ :

$$\sigma_{\text{máx}} = \alpha \sigma_n,$$

donde  $\sigma_n = \frac{Pl}{W}$  se halla para un árbol con el diámetro igual al diámetro menor del árbol en cuestión (fig. 163, b) cuando falta el concentrador.

Los valores del coeficiente de concentración  $\alpha$  para diferentes correlaciones de los diámetros  $\frac{D}{d}$  y los radios de redondeos  $r$  hallados por los métodos de la teoría de la elasticidad para  $\frac{D}{d} = 3$  y  $\frac{D}{d} = 1,5$  se dan en forma de un diagrama  $\alpha = f\left(\frac{r}{d}\right)$  (fig. 164).

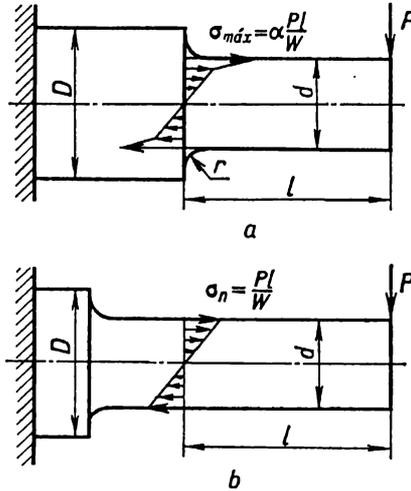


Fig. 163

Las tensiones máximas en la zona del *concentrador de una lámina con rebajo bilateral de forma hiperbólica* durante la flexión pura en el plano de dicha lámina (fig. 165) pueden determinarse mediante la siguiente fórmula hallada por medio de los métodos de la teoría de la elasticidad:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_n \frac{4 \frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho}}}{3 \left[ \sqrt{\frac{a}{\rho}} + \left( \frac{a}{\rho} - 1 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right]}$$

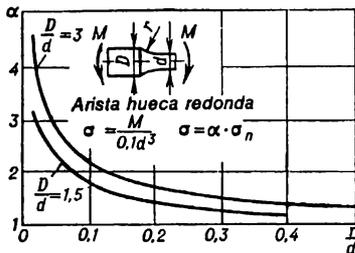


Fig. 164

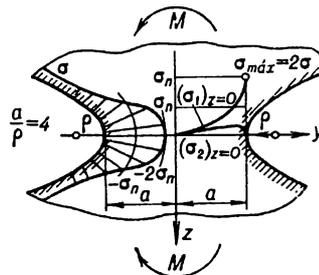


Fig. 165

$$\sigma_n = \frac{3M}{2a^2\delta} \quad (\delta \text{ es el espesor de la lámina}).$$

En la fig. 166 puede verse el diagrama de  $\sigma_{\text{máx}}$  en función de la relación  $\frac{a}{\rho}$ . En la fig. 167 se da el coeficiente teórico de concentración  $\alpha$  para diferentes relaciones del ancho de la lámina  $H$  a su ancho  $h$  en el lugar del rebajo con un radio  $\rho$  en función de la relación  $\frac{\rho}{h}$ .

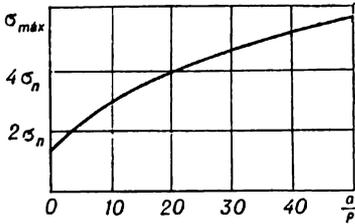


Fig. 166

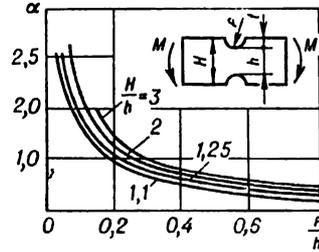


Fig. 167

En la fig. 168 se dan los diagramas de distribución de las tensiones en la zona del *concentrador en forma de un orificio elíptico en una lámina ancha durante la flexión pura en su plano para el caso cuando  $\frac{t}{\rho} = 25$* . A medida que se aleja del fondo del rebajo, al igual que en la dirección a lo largo del eje  $y$ , las tensiones disminuyen rápidamente. Con la línea de trazos se muestra la distribución de las tensiones calculadas según la teoría elemental de la flexión, tomando en consideración el debilitamiento de la sección por el orificio.

La tensión máxima que surge cerca del fondo del rebajo puede determinarse mediante la fórmula

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_n \left( 1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}} \right),$$

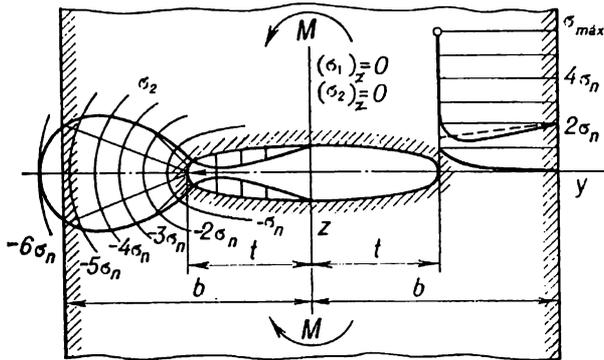


Fig. 168

donde

$$\sigma_n = \frac{3Mt}{2\delta b^3} \quad (\delta \text{ es el espesor de la lámina}).$$

$\sigma_{m\acute{a}x}$  en funci3n de la relaci3n  $\frac{t}{\rho}$  se presenta gráficamente en la fig. 169.

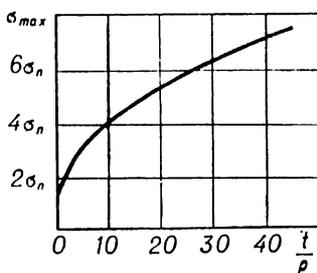


Fig. 169

Para un orificio redondo  $\sigma_{m\acute{a}x} = 2\sigma$ . Cuando  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_{m\acute{a}x} \rightarrow \sigma$ .

En el caso de un rebajo circular profundo sobre un cuerpo de revoluci3n (fig. 170), la tensi3n máxima durante la flexi3n surge cerca del fondo del rebajo donde el material se encuentra en las condiciones de estado tensional espacial. En la fig. 170 se muestra la distribuci3n de todas las tres tensiones principales ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), y en la fig. 171 se da la distribuci3n de las tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  cerca del fondo del rebajo en

funci3n de la relaci3n  $\frac{a}{\rho}$  siendo diferentes los coeficientes de Poisson.

En el caso de rebajos poco profundos sobre piezas de revoluci3n la magnitud del coeficiente de concentraci3n depende, generalmente, de la relaci3n del radio de redonde3n  $r$  al diámetro de la entalla. En la fig. 172 puede verse el diagrama de la dependencia  $\alpha = f\left(\frac{r}{d}\right)$  para este caso.

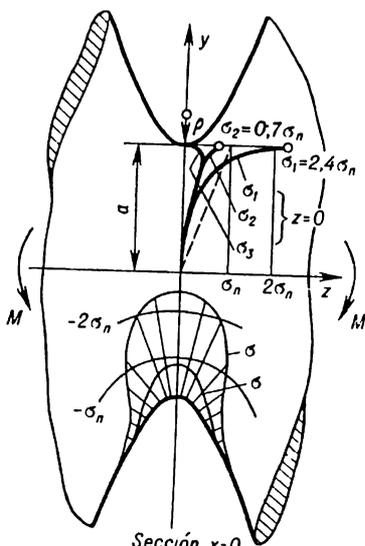


Fig. 170

En las piezas de máquinas que trabajan a flexi3n los concentradores bastante difundidos son las diferentes especies de orificios transversales. La concentraci3n en este caso depende de la relaci3n del diámetro del orificio transversal  $d$  al diámetro de la pieza  $D$ , en la cual ese orificio está hecho. El coeficiente de concentraci3n  $\alpha$  en funci3n de  $\frac{d}{D}$  se da en forma de un diagrama en la fig. 173.

Para concluir hagamos notar que durante la flexi3n es posible no s3lo la concentraci3n de las tensiones normales, sino también la de tensiones tangenciales en los lugares de transiciones bruscas, en particular, en la secci3n 1-1 de la viga de doble T (fig. 174, a b). Sin embargo, debido a los redondeos en los lugares de transici3n del alma al ala, la concentraci3n de las tensiones disminuye, y

en vez del diagrama mostrado en la fig. 174, b tiene lugar el diagrama mostrado en la fig. 174, c.

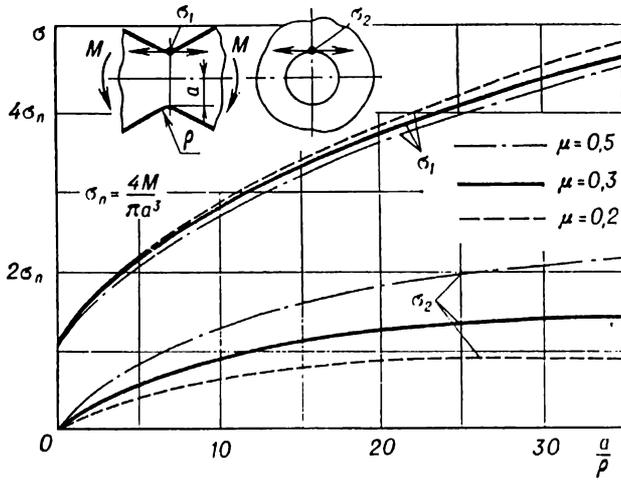


Fig. 171

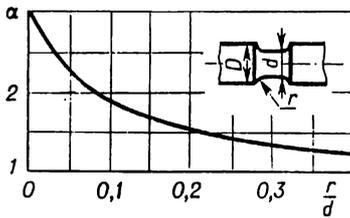


Fig. 172

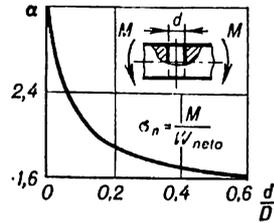


Fig. 173

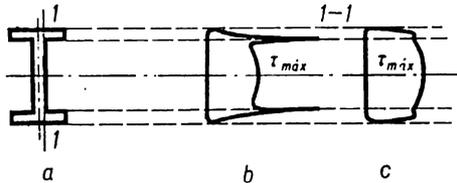


Fig. 174

#### § 54. Ecuación diferencial del eje flexionado de la viga (línea elástica)

En la práctica ingenieril se tiene que efectuar el cálculo de vigas sometidas a flexión no sólo a la resistencia, sino también a la rigidez o deformabilidad.

La *deformabilidad* de la viga en una sección dada se caracteriza por la flecha  $w$  y el ángulo de giro  $\theta$ . Se puede obtener la información sobre  $w$  y  $\theta$  como funciones del eje de coordenadas que coincide con el eje de la viga, conociendo la ecuación del eje flexionado de la viga (línea elástica).

Se llama *línea elástica* una curva plana, cuya forma toma el eje de la viga en la flexión plana. En las figs. 175 y 176 las líneas elásticas se presentan con líneas finas.

La ecuación de la línea elástica es fácil de obtenerse conociendo la expresión de la *curvatura* por medio del momento flector  $M(z)$  en la sección dada y la rigidez a la flexión  $EJ$  de la sección transversal de la viga (véase el § 50)

$$\frac{1}{\rho} = + \frac{M(z)}{EJ} . \quad (10.28)$$

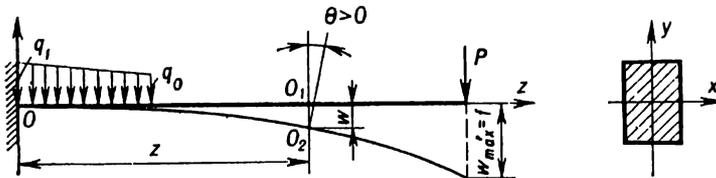


Fig. 175

así como la expresión de la curvatura a través de las coordenadas del punto en la sección dada  $w$  y  $z$ , conocida del curso de matemática superior:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} . \quad (10.29)$$

En este caso está aceptado que la curvatura  $\left(\frac{1}{\rho}\right)$  es positiva si la curva está dirigida con su concavidad hacia el lado de la dirección positiva del eje  $w$  (fig. 177). En dicho caso el signo de la curvatura coincide con el signo de la segunda derivada de  $w$ . En la fórmula (10.28) el signo «más» corresponde a la dirección del eje  $w$  hacia arriba, y el signo «menos», hacia abajo (véase la fig. 177).

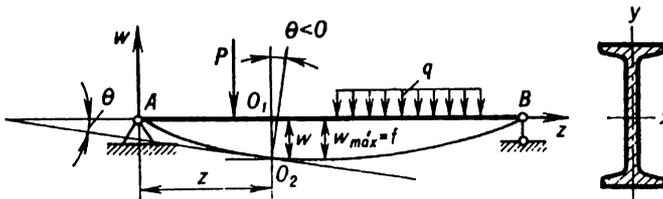


Fig. 176

Manteniendo la dirección del eje  $w$  hacia arriba aceptada anteriormente, se puede igualar los segundos miembros de las ecuaciones (10.28) y (10.29), tomando en ambos casos el signo «más». Entonces obtenemos la ecuación exacta de la línea flexionada de la viga en la siguiente forma:

$$\frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(z)}{EJ} . \quad (10.30)$$

Si el eje  $w$  estuviera dirigido hacia abajo en el segundo miembro de (10.30) se tendría que poner el signo «menos».

Debido a que las deformaciones de la viga son pequeñas [ $w_{\text{máx}} = (0,01 - 0,001) l$  y  $\theta_{\text{máx}} < 1^\circ$ ], se puede prescindir en la fórmula (10.30) del término  $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 \approx \theta^2$ . Entonces se puede volver a escribir la ecuación diferencial (10.30) del modo siguiente:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ} \quad (10.31)$$

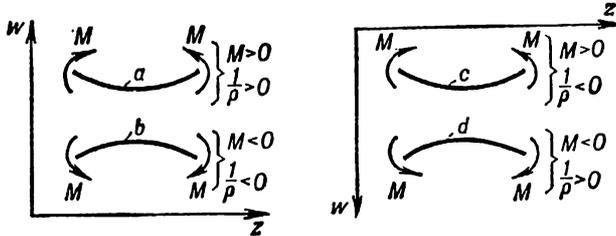


Fig. 177

Esta es precisamente aquella *ecuación diferencial inicial* (aproximada) de la línea flexionada de la viga, resolviendo la cual se puede obtener la ecuación de la línea elástica  $w = f(z)$  y la ecuación del ángulo de giro  $\theta = \frac{dw}{dz} = f_1(z)$ .

Integrando por primera vez la ecuación (10.31), hallamos

$$\theta(z) = \frac{dw}{dz} = \int \frac{M(z)}{EJ} dz + C_1 \quad (10.32)$$

Integrando por segunda vez, obtenemos

$$w(z) = \int dz \int \frac{M(z)}{EJ} dz + C_1 z + C_2 \quad (10.33)$$

siendo  $C_1$  y  $C_2$  las constantes de integración que tienen que ser halladas a partir de las condiciones de frontera (condiciones en los extremos de la viga).

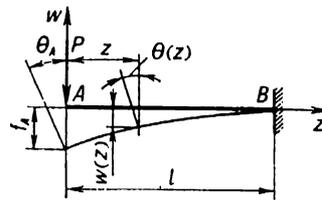


Fig. 178

Si la viga está empotrada por un extremo (fig. 178), la flecha y el ángulo de giro en el empotramiento son iguales a cero:

$$w_B = 0; \quad \theta_B = 0.$$

Para una viga sobre dos apoyos articulados (fig. 176) las flechas de esos apoyos son iguales a cero:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0.$$

Tomado en consideración la dependencia diferencial entre el momento flector  $M(z)$  y la carga distribuida (véase el § 18)

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = q(z)$$

se puede escribir la expresión de la línea elástica (10.31) en la siguiente forma:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ(z) \frac{d^2 w(z)}{dz^2} \right] = q(z). \quad (10.34)$$

En esta forma la ecuación diferencial se utiliza, generalmente, para el cálculo de vigas sobre base elástica, al igual que durante el análisis de las oscilaciones de las vigas.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar la obtención de la ecuación de la línea elástica  $w = f(z)$  y el ángulo de giro  $\theta = f'(z)$  y también para la determinación de las flechas máximas  $w_{\text{máx}}$  y los ángulos máximos  $\theta_{\text{máx}}$  (que tienen el mayor interés práctico) mediante la integración de la ecuación diferencial (10.31).

Para un voladizo de sección transversal constante durante la acción en el extremo libre de una fuerza concentrada  $P$  (fig. 178) el momento flector a una distancia  $z$  del extremo será

$$M(z) = -Pz,$$

y la ecuación diferencial del eje flexionado del voladizo (10.31) tendrá el siguiente aspecto:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{Pz}{EJ}.$$

Después de la integración doble obtendremos

$$\frac{dw}{dz} = \theta(z) = -\frac{Pz^2}{2EJ} + C_1,$$

$$w(z) = -\frac{Pz^3}{6EJ} + C_1 z + C_2.$$

Hallamos  $C_1$  y  $C_2$  de las condiciones de frontera:

$$\text{cuando } z = l, \quad w = 0;$$

$$\text{cuando } z = l, \quad \theta = 0.$$

De la segunda condición obtenemos

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EJ};$$

de la primera condición hallamos lo siguiente:

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Las ecuaciones de la flecha y del ángulo de giro son las siguientes:

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[ 2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]; \quad (10.35)$$

$$\theta(z) = \frac{Pl^2}{2EJ} \left[ 1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2 \right]. \quad (10.36)$$

Los valores máximos de  $w$  y  $\theta$  tienen lugar en el extremo libre de la viga en el punto  $A$ :

$$w_{\text{máx}} = f_A = -\frac{Pl^3}{3EJ}; \quad (10.37)$$

$$\theta_{\text{máx}} = \theta_A = \frac{Pl^2}{2EJ}. \quad (10.38)$$

El valor negativo de  $f_A$  evidencia que la flecha está dirigida hacia el lado contrario a la dirección positiva del eje  $w$ ; el valor positivo de  $\theta$  muestra que la sección gira en contra del sentido de las manecillas del reloj.

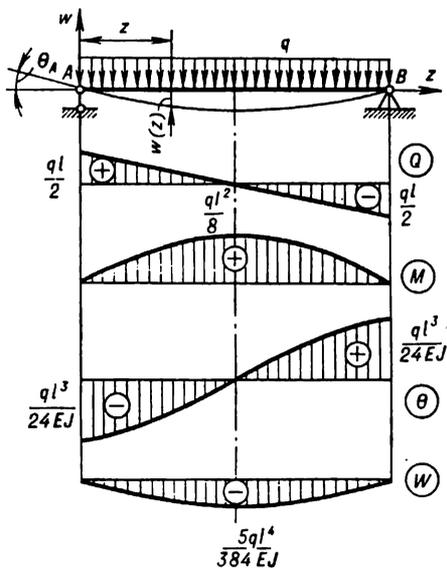


Fig. 179

En el caso de la flexión de una viga apoyada articuladamente en los extremos portando una carga uniformemente distribuida  $q$  (fig. 179), la expresión del momento flector será la siguiente:

$$M(z) = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2},$$

y la ecuación diferencial del eje flexionado de la viga (10.31) será como sigue:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right).$$

Integrando dos veces obtenemos

$$\theta(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{ql}{4EJ} z^2 - \frac{q}{6EJ} z^3 + C_1;$$

$$w(z) = \frac{ql}{12EJ} z^3 - \frac{qz^4}{24EJ} + C_1z + C_2.$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\text{cuando } z = 0, \quad w = 0;$$

$$\text{cuando } z = l, \quad w = 0.$$

Hallamos de la primera condición que  $w(0) = C_2 = 0$ ; de la segunda condición tenemos que

$$C_1 = - \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Sustituyendo los valores de  $C_1$  y  $C_2$  en las expresiones para  $w(z)$  y  $\theta(z)$ , obtenemos la ecuación de la línea elástica y la ecuación del ángulo de giro.

$$\begin{aligned} w(z) &= - \frac{ql^2z}{24EJ} \left[ 1 - 2 \left( \frac{z}{l} \right)^2 + \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right]; \\ \theta(z) &= - \frac{ql^3}{24EJ} \left[ 1 - 6 \left( \frac{z}{l} \right)^2 + 4 \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (10.39)$$

El valor máximo de la flecha será en el centro de la luz

$$w_{\text{máx}} = f = - \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}. \quad (10.40)$$

Los valores máximos del ángulo de giro serán en los apoyos

$$\theta(0) = \theta_A = - \frac{ql^3}{24EJ}; \quad (10.41)$$

$$\theta_A = - \theta_B.$$

En la tabla 20 se dan las ecuaciones del eje flexionado de la viga, los valores de las flechas y los ángulos de giro máximos de las secciones de apoyo para diferentes esquemas de sollicitación de vigas más simples.

En una serie de casos, al determinar los desplazamientos de algunas secciones de la viga, es cómodo utilizar *el método gráfico-analítico* basado en la analogía entre la ecuación diferencial de la línea elástica (10.31) y la dependencia diferencial

(3.3) que relaciona el momento flector con la intensidad de la carga distribuida. La analogía señalada permite realizar el cálculo de la flecha  $w$  conociendo  $\frac{M(z)}{EJ}$  de igual modo que la determinación de  $M(z)$  conociendo  $q(z)$ . La ordenada del diagrama real de  $M(z)$  dividida por  $EJ$  se considera como la intensidad de cierta *carga ficticia*

$$q_{fic}(z) = \frac{M(z)}{EJ}.$$

Entonces la flecha  $w(z)$  y el ángulo de giro  $\theta(z)$  incógnitos de la viga dada (real) se determinan correspondientemente, como el momento flector  $M_{fic}(z)$  y la fuerza cortante  $Q_{fic}(z)$  en la sección  $z$  de la viga ficticia (recíproca) solicitada por una carga ficticia  $q_{fic}$ .

Para una viga de sección transversal constante es más cómodo tomar por la intensidad de la carga ficticia una magnitud  $EJ$  veces mayor, es decir, la ordenada del diagrama real de  $M(z)$ ,

$$\bar{q}_{fic}(z) = M(z).$$

En este caso

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= \frac{\bar{M}_{fic}(z)}{EJ}; \\ \theta(z) &= \frac{\bar{Q}_{fic}(z)}{EJ}, \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

donde  $\bar{M}_{fic}(z)$  y  $\bar{Q}_{fic}(z)$  son, respectivamente, el momento flector y la fuerza cortante en la viga ficticia originados por la carga ficticia  $\bar{q}_{fic}(z)$  igual al diagrama  $M(z)$  de la viga real.

La viga ficticia (recíproca) tiene la longitud de los tramos igual a la de los tramos de la viga real, eligiendo los apoyos de tal manera que se satisfagan las condiciones de deformación de la viga real. Las combinaciones de las sujeciones de apoyo de las vigas real y ficticia se dan en la tabla 17.

La secuencia de la determinación de las deformaciones es la siguiente: se construye el diagrama del momento flector de la viga real; se elige el esquema correspondiente de la viga ficticia, ésta se carga por el diagrama del momento flector de la viga real; en la sección elegida de la viga ficticia se deducen el momento flector ficticio  $\bar{M}_{fic}(z)$  y la fuerza cortante ficticia  $\bar{Q}_{fic}(z)$ , y mediante las fórmulas (10.42) se calculan los valores de la flecha y del ángulo de giro en la sección elegida\*.

Al calcular  $M_{fic}(z)$  y  $Q_{fic}(z)$  en el caso de una configuración compuesta del diagrama del momento flector de la viga real que representa la carga ficticia, ésta se divide en algunas figuras elementales (véase, por ejemplo, la fig. 240) cuyas áreas y posiciones de los centros de gravedad son conocidas (tabla 23)

---

\* El método gráfico-analítico anteriormente expuesto, o *el método de Mohr*, fundado en la identidad de las ecuaciones diferenciales, no es el único posible. Recientemente fueron formuladas también otras analogías que permiten sustituir la deducción de los factores de fuerza y deformación en una barra (dada) por la deducción de los factores de deformación y fuerza en otra (ficticia, recíproca) (véase el Suplemento, pág. 608).

Esquemas de vigas reales y ficticias que corresponden a ellas

Viga real	Viga ficticia

**§ 55. Determinación de los desplazamientos en las vigas por el método de parámetros iniciales**

La determinación de los desplazamientos por el método de integración directa de la ecuación diferencial de la línea elástica para el caso de vigas con un número grande de los tramos, cada uno de los cuales se caracteriza por su propia expresión del momento flector, ofrece grandes dificultades relacionadas con la obtención de las constantes arbitrarias de integración. Durante la integración de las ecuaciones diferenciales para el número  $n$  de tramos se tiene que emplear el número doble de las constantes de integración. Agregando a las dos condiciones principales en los extremos de la viga  $2(n - 1)$  condiciones de conjugación continua y suave de todos los tramos de la línea elástica, pueden componerse  $2n$  ecuaciones para la determinación de esas constantes arbitrarias.

El problema se torna bastante voluminoso ya teniendo tres tramos. La técnica de determinación de las constantes de integración puede simplificarse sensiblemente al reducirla a la deducción de sólo dos incógnitas, a saber: la flecha y el ángulo de giro en el origen de coordenadas elegido. Este método denominado *método de parámetros iniciales*, se funda en las siguientes tesis de partida:

1. El origen de coordenadas se elige en el último punto izquierdo de la viga en cuestión, y es común para todos los tramos.
2. La expresión para el momento flector  $M(z)$  se compone mediante el cálculo de los momentos de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección examinada tomada a una distancia  $z$  desde el origen de coordenadas.
3. Al incluir en las ecuaciones el momento exterior concentrado  $M$  aplicado a cierta distancia  $a$  desde el origen de coordenadas, aquél se multiplica por el factor  $(z - a)^0$  igual a uno.

4. En el caso de la ruptura de la carga distribuida (por ejemplo, en la sección  $z = d$ , fig. 180, b), ésta se prolonga hasta el final del tramo en cuestión, introduciendo, para restablecer la carga que realmente actúa sobre la viga, la carga compensadora de dirección contraria (la carga complementaria extrapolada y la que la compensa se muestran, generalmente, con líneas de trazos).

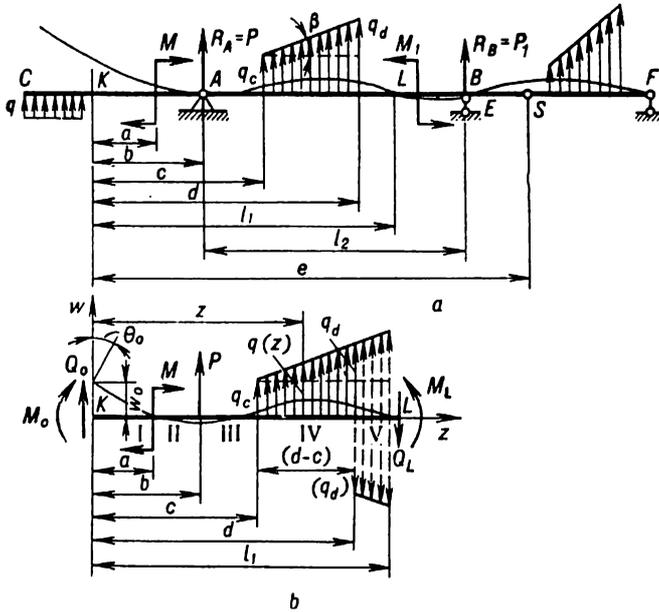


Fig. 180

5. La integración de las ecuaciones en todos los tramos se efectúa sin abrir el paréntesis.

Con este enfoque, la expresión para el momento flector en cualquier tramo se representa por medio de todos los factores de fuerza que actúan a la izquierda de la sección examinada, incluidos el momento flector  $M_0$  y la fuerza cortante  $Q_0$  actuando en la sección que coincide con el origen de coordenadas. Las magnitudes  $M_0$  y  $Q_0$ , al igual que la flecha  $w_0$  y el ángulo de giro  $\theta_0$  en el origen de coordenadas, se denominan *parámetros iniciales*. El momento flector para la viga mostrada en la fig. 180, a, eligiendo el origen de coordenadas en el punto K a una distancia  $z$  (en el cuarto tramo de la viga), será

$$M(z) = M_0 + Q_0 z + M(z-a)^0 + P(z-b) + q_c \frac{(z-c)^2}{2} + k \frac{(z-c)^3}{6},$$

donde

$$k = \text{tg } \beta = \frac{q_d - q_c}{d - c}.$$

Una vez sustituido el momento flector en la ecuación diferencial (10.31), integrándola dos veces y determinando las constantes de integración que no son sino los parámetros iniciales

$$C_1 = \theta_0 \quad \text{y} \quad C_2 = w_0,$$

las ecuaciones  $\theta(z) = f_1(z)$  y  $w(z) = f(z)$  pueden escribirse, en la forma más general, del modo siguiente:

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{z}{1!} + \sum M \frac{(z-a)}{1!} + Q_0 \frac{z^2}{2!} + \sum P \frac{(z-b)^2}{2!} + \right. \\ \left. + \sum q_c \frac{(z-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(z-d)^3}{3!} + \sum k \frac{(z-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(z-d)^4}{4!} \right]; \quad (10.43)$$

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{z^2}{2!} + \sum M \frac{(z-a)^2}{2!} + \right. \\ \left. + Q_0 \frac{z^3}{3!} + \sum P \frac{(z-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(z-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(z-d)^4}{4!} + \right. \\ \left. + \sum k \frac{(z-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(z-d)^5}{5!} \right]. \quad (10.44)$$

La ecuación obtenida (10.44) se denomina, generalmente, *ecuación universal de la línea elástica*, teniendo en cuenta que ésta puede emplearse para los esquemas de cálculo cualesquiera de vigas.

En las ecuaciones (10.43) y (10.44) se sustituyen las cargas situadas a la izquierda de la sección examinada; los signos de los sumandos se determinan por el signo de los factores de fuerza correspondientes. Así pues, la determinación de los desplazamientos por el método de parámetros iniciales se reduce, en resumidas cuentas, a la determinación de las magnitudes de los parámetros iniciales  $Q_0$ ,  $M_0$ ,  $\theta_0$  y  $w_0$ . Además los parámetros estáticos iniciales  $Q_0$  y  $M_0$  se hallan a partir de la condición de equilibrio de la viga; los parámetros geométricos iniciales  $\theta_0$  y  $w_0$ , a partir de las condiciones en los apoyos. Para deducir los parámetros iniciales  $Q_0$  y  $M_0$  pueden emplearse los datos que ofrece la tabla 7, para los parámetros  $\theta_0$  y  $w_0$ , los datos de la tabla 20.

Aprovechamos la ecuación universal obtenida para determinar las flechas del voladizo (fig. 181,  $a, b$ ) en los puntos  $z = a$  y  $z = 2a$ . La ecuación de la línea elástica en el tramo donde está aplicada la carga  $q$  tendrá la siguiente forma:

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{z^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!} \right].$$

Hallamos a partir de la condición de equilibrio de la viga

$$M_0 = M_A = - \frac{qa^2}{2};$$

$$Q_0 = R_A = qa.$$

Como el origen de coordenadas coincide con el empotramiento, los parámetros iniciales geométricos — la flecha y el ángulo de giro en el origen de coordenadas — son iguales a cero:

$$w_0 = 0; \quad \theta_0 = 0.$$

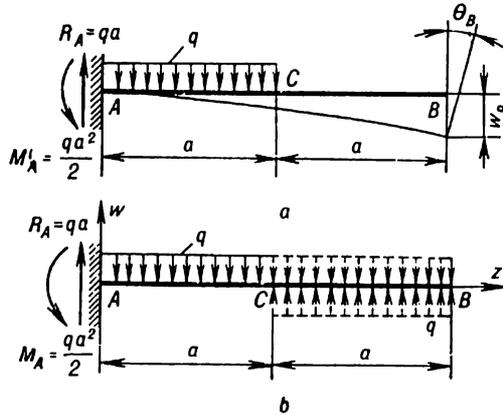


Fig. 181

La ecuación de la flecha en el primer tramo AC será la siguiente:

$$w(z) = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{qa^3}{2} \frac{z^2}{2!} + \frac{qaz^3}{3!} - \frac{qz^4}{4!} \right].$$

Cuando  $z = a$ ,

$$w_C = -\frac{qa^4}{8EJ}.$$

La ecuación de la flecha en el segundo tramo CB será como sigue:

$$w(z) = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{qa^3}{2!} \frac{z^2}{2!} + qa \frac{z^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!} + q \frac{(z-a)^4}{4!} \right].$$

Tomando  $z = 2a$ , hallamos para la flecha del extremo libre

$$w_B = -\frac{7qa^4}{24EJ}.$$

Una vez que se han determinado las flechas y los ángulos de giro, ya se puede comprobar la rigidez de la viga o elegir sus secciones a partir de la condición de rigidez:

$$w_{\text{máx}} = f < [f].$$

Las magnitudes admisibles de las flechas  $[f]$  se determinan partiendo de las condiciones de explotación o datos experimentales.

En el caso del cálculo de los desplazamientos para las vigas con articulación intermedia las ecuaciones universales (10.43) y (10.44) tienen que escribirse del modo siguiente:

$$\theta(z) = \theta_0 + \alpha(z - e)^0 + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{z}{1!} + \sum M \frac{(z - a)}{1!} + Q_0 \frac{z^2}{2!} + \right. \\ \left. + \sum P \frac{(z - b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(z - c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(z - d)^3}{3!} + \sum k \frac{(z - c)^4}{4!} - \right. \\ \left. - \sum k \frac{(z - d)^4}{4!} \right], \quad (10.45)$$

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \alpha(z - e) + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{z^2}{2!} + \sum M \frac{(z - a)^2}{2!} + \right. \\ \left. + Q_0 \frac{z^3}{3!} + \sum P \frac{(z - b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(z - c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(z - d)^4}{4!} + \right. \\ \left. + \sum k \frac{(z - c)^5}{5!} - \sum k \frac{(z - d)^5}{5!} \right], \quad (10.46)$$

siendo  $\alpha$  el ángulo en que difieren los ángulos de giro de las barras que son congruas a la articulación intermedia, es decir,

$$\theta(e)_{izq} + \alpha = \theta(e)_{der},$$

donde  $\theta(e)_{der}$  es el ángulo de giro de la barra derecha en el punto  $S$  (fig. 180);  $\theta(e)_{izq}$  es el ángulo de giro de la barra izquierda en la misma articulación  $S$ .

Los sumandos con el factor  $(z - j) < 0$ , siendo  $j = a, b, c, d$ , no se toman en consideración durante el cálculo.

El ángulo recíproco de inclinación  $\alpha$  es una incógnita complementaria en las ecuaciones (10.45) y (10.46). El ángulo  $\alpha$  se determina, al igual que los parámetros iniciales  $w_0$  y  $\theta_0$ , a partir de las condiciones en los apoyos. Según sea el esquema de cálculo de la viga son posibles dos casos principales de composición de las condiciones de apoyo.

1. El ángulo  $\alpha$  puede determinarse a partir de la condición de igualdad a cero de la flecha en el apoyo derecho (fig. 182).

2. El ángulo  $\alpha$  se determina junto con  $\theta_0$  a partir de la condición de igualdad a cero de las flechas en los apoyos  $B$  y  $C$  (fig. 183) solucionando el sistema de dos ecuaciones algebraicas.

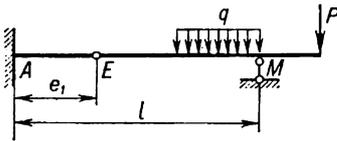


Fig. 182

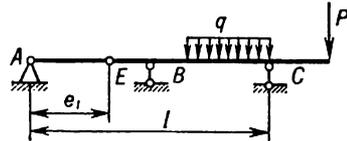


Fig. 183

## § 56. Cálculo de vigas de sección variada a la resistencia y la rigidez

**Barras escalonadas.** Durante el cálculo a la resistencia de una barra escalonada fabricada de un material plástico la condición de resistencia tiene el siguiente aspecto:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W} < [\sigma]. \quad (10.47)$$

Para una barra de material frágil hay que tomar en consideración la concentración de tensiones en los lugares de conjugación de dos secciones de diferente diámetro. En este caso la condición de resistencia tendrá que escribirse así:

$$\sigma_{\text{máx}} = \alpha \sigma_n = \alpha \frac{M}{W} < [\sigma], \quad (10.48)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente teórico de concentración de las tensiones (véase el Apéndice 2). En ambas fórmulas  $W$  es el módulo de la sección debilitada.

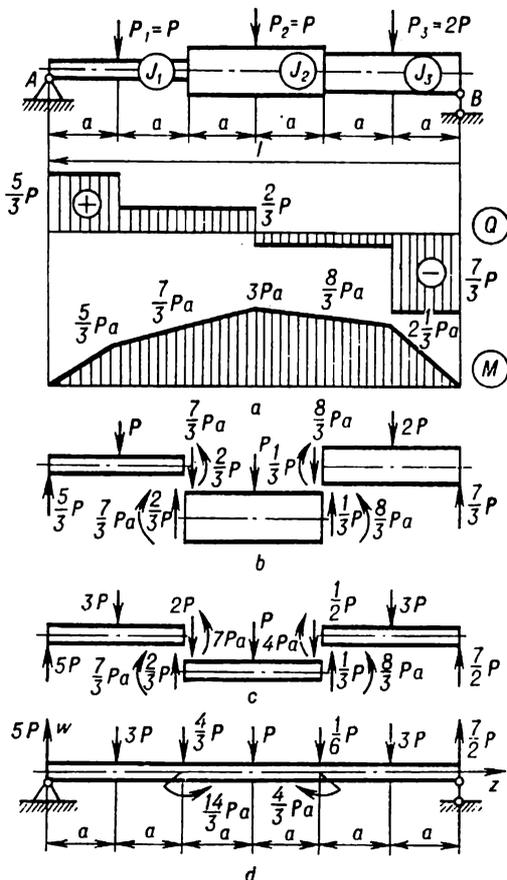


Fig. 184

Determinando las deformaciones de una viga escalonada (fig. 184, a) es necesario escribir la ecuación diferencial del eje flexionado para cada escalón, cuyas rigideces a la flexión de las secciones transversales son iguales, respectivamente a  $EJ_1; EJ_2; EJ_3; \dots$ :

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_1}; \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_2}; \quad \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_3}; \dots \quad (10.49)$$

Sustituyamos la viga escalonada por una viga equivalente de sección constante con un momento de inercia  $J_0$  igual al momento de inercia de uno de los tramos de la viga, por ejemplo, del segundo:  $J_0 = J_2$ . Multiplicando por  $J_0$  el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación diferencial (10.49) para un tramo arbitrario  $n$  obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_n} \frac{J_0}{J_0} = \frac{M(z)}{EJ_0} \frac{J_0}{J_n} = \frac{M(z)}{EJ_0} \beta_n, \quad (10.50)$$

donde  $\beta_n = \frac{J_0}{J_n}$  es el coeficiente de reducción. En el ejemplo dado en la fig. 184

$$J_1: J_2: J_3 = 1: 3: 2 \text{ y } \beta_1 = 3; \beta_2 = 1; \beta_3 = \frac{3}{2}.$$

Puesto que el momento flector es una función lineal de la carga, se puede, para cada parte de la viga, en vez de multiplicar el momento flector por el coeficiente de reducción, multiplicar por ese coeficiente todas las cargas exteriores de la parte dada junto con los esfuerzos interiores  $Q$  y  $M$  en los lugares de conjugación de diferentes escalones (fig. 184, *b, c*). Uniendo las partes individuales una con otra y sumando los esfuerzos interiores en la junta, obtendremos una viga de sección constante con una rigidez a la flexión  $EJ_0$  solicitada por las cargas exteriores reducidas (es decir, cargas cambiadas  $\beta_n$  veces). Además en los lugares de conjugación se observarán saltos de fuerzas cortantes y momentos flectores, iguales respectivamente a

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= Q_1(\beta_2 - \beta_1); & \Delta Q_2 &= Q_2(\beta_3 - \beta_2); \\ \Delta M_1 &= M_1(\beta_2 - \beta_1); & \Delta M_2 &= M_2(\beta_3 - \beta_2). \end{aligned}$$

En los lugares de unión de las partes de la viga hay que aplicar las fuerzas y los momentos concentrados complementarios determinados mediante las fórmulas dadas.

La viga equivalente obtenida de tal manera (fig. 184, *d*) tendrá una línea elástica que coincide completamente con la línea elástica de la viga escalonada dada (fig. 184, *a*).

Los desplazamientos de tal viga pueden determinarse integrando la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M_{\text{red}}(z)}{EJ_0}, \quad (10.51)$$

siendo  $M_{\text{red}}$  el momento de las cargas exteriores reducidas y las cargas complementarias  $\Delta Q$  y  $\Delta M$ , que se determina al igual que en una viga simple cargada por el esquema de la fig. 184, *d*. Para determinar  $w$  y  $\theta$  se puede hacer uso también de las ecuaciones universales (10.43) y (10.44) del método de parámetros iniciales considerando la viga reducida como una viga de sección constante con la rigidez a la flexión  $EJ_0$  de la sección transversal.

**Vigas con sección que varía continuamente por la longitud.** Si las dimensiones de la sección de la barra varían continuamente por la longitud, las fórmulas obtenidas a base de la hipótesis de las secciones transversales planas son erróneas al igual que la misma hipótesis. Sin embargo, como muestran los resultados del cálculo mediante los métodos de la teoría de la elasticidad, la distribución de las tensiones normales por la altura de la sección, en el caso de que el ángulo de inclinación de la línea generatriz de la superficie de la barra a su eje no sobrepasa 15–20°, puede tomarse como lineal. Entonces, naturalmente, podemos

utilizar la condición de resistencia corriente y la ecuación diferencial de la línea elástica

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M(z)}{W(z)} < [\sigma]; \quad (10.52)$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ(z)}. \quad (10.53)$$

Los errores al calcular las tensiones tangenciales mediante la fórmula de Zhuravski

$$\tau = \frac{QS(y)}{b(z)J(z)}, \quad (10.54)$$

en el caso dado serán mayores que durante el cálculo de las tensiones normales mediante la fórmula de Navier:

$$\sigma = \frac{M(z)y}{J(z)}. \quad (10.55)$$

La fórmula (10.53), que expresa la ecuación diferencial de la flexión de una viga de sección variada, puede escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M_{\text{red}}(z)}{EJ_0}, \quad (10.56)$$

donde  $M_{\text{red}}(z) = \frac{J_0}{J(z)} M(z)$  es el momento flector reducido, cuyo sentido difiere del de  $M_{\text{red}}$  que forma parte de la fórmula (10.51);  $J_0$  es el momento de inercia de cualquier sección, generalmente, el mayor o el menor.

La viga, cuyo módulo de la sección varía proporcionalmente al momento flector de las cargas exteriores, se denomina *de igual resistencia a la flexión*. Se calcula tal viga por la fórmula siguiente:

$$W(z) = \frac{M(z)}{[\sigma]}. \quad (10.57)$$

En la viga de igual resistencia a la flexión las tensiones máximas son análogas en cualquier sección e iguales a las admisibles  $[\sigma]$ . Un voladizo de un ancho  $b$  y una altura variable  $h(z)$  (fig. 185) determinada mediante la fórmula (10.57) puede servir de ejemplo de una viga de igual resistencia. Así:

$$W(z) = \frac{bh^2(z)}{6} = \frac{M(z)}{[\sigma]} = \frac{Pz}{[\sigma]},$$

de donde

$$h(z) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \sqrt{z}. \quad (10.58)$$

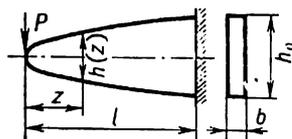


Fig. 185

Por consiguiente, la altura de la viga cambia por una ley parabólica alcanzando el máximo en el lugar del empotramiento:

$$h_0 = h(l) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \sqrt{l}.$$

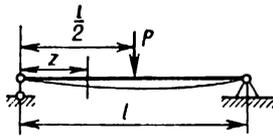
Puesto que, de acuerdo con (10.58), en el lugar de aplicación de la fuerza ( $z = 0$ )  $h(0) = 0$ , la altura de la sección de tope se determina a partir de la condición de cizallamiento:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{P}{F} = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} < [\tau],$$

de donde

$$h \geq \frac{3P}{2b[\tau]}.$$

Las vigas de configuración parabólica (bastante ventajosas desde el punto de vista de la economía del material) se utilizan raras veces por lo difícil de su fabricación. En la práctica se emplean frecuentemente vigas de igual resistencia a la flexión que tienen la altura  $h$  constante y un ancho  $b(z)$  variable (fig. 186).



Hallamos la ley de cambio del ancho  $b(z)$  de (10.57):

$$W(z) = \frac{b(z) h^2}{6} = \frac{M(z)}{[\sigma]} = \frac{Pz}{2[\sigma]},$$

de donde obtenemos la dependencia lineal

$$b(z) = \frac{3P}{h^2[\sigma]} z.$$

Cuando  $z = \frac{l}{2}$ ,

$$b_0 = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3Pl}{2h^2[\sigma]}.$$

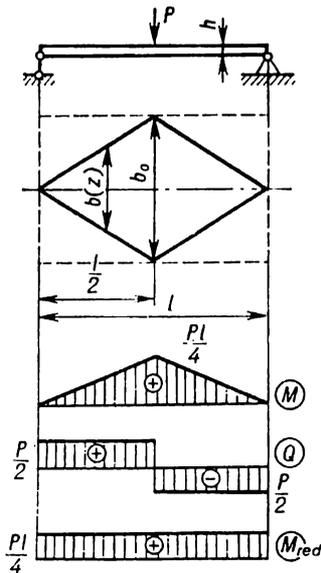


Fig. 186

La flecha máxima de tal viga de igual resistencia a la flexión se determina a base de (10.56). Conociendo  $J_0$ ,  $J(z)$  y su relación

$$J_0 = \frac{b_0 h^3}{12}; \quad J(z) = \frac{b(z) h^3}{12};$$

$$\frac{J_0}{J(z)} = \frac{b_0}{b(z)} = \frac{l}{2z},$$

se puede hallar el momento reducido

$$M_{\text{red}}(z) = \frac{M(z)}{J(z)} J_0 = \frac{Pz}{2} \frac{J_0}{J(z)} = \frac{Pl}{4}.$$

Sustituyendo  $M_{red}$  en (10.56) obtenemos

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{Pl}{4EJ_0}.$$

Integrando esta ecuación dos veces hallamos

$$\frac{dw}{dz} = \theta(z) = \frac{1}{EJ_0} \left( \frac{Pl}{4} z + C_1 \right);$$

$$w(z) = \frac{1}{EJ_0} \left( \frac{Plz^2}{8} + C_1z + C_2 \right).$$

Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  se determinan a partir de las condiciones

$$w(0) = 0; \quad \theta \left( \frac{l}{2} \right) = 0.$$

De aquí

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{8}; \quad C_2 = 0.$$

Entonces

$$w(z) = \frac{1}{EJ_0} \left( \frac{Pl}{8} z^2 - \frac{Pl^2}{8} z \right)$$

y

$$w_{m\acute{a}x} = f = w \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

De aquí se desprende que la flecha máxima de la viga de igual resistencia a la flexión es 1,5 veces mayor que la flecha de la viga de sección constante con rigidez a la flexión  $EJ_0$ .

La teoría expuesta puede utilizarse, con suficiente grado de aproximación, para el cálculo de ballestas (fig. 187, a, b, c, d).

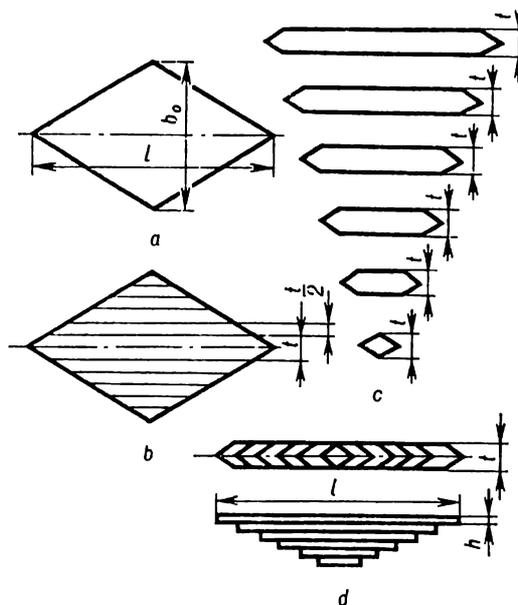


Fig. 187

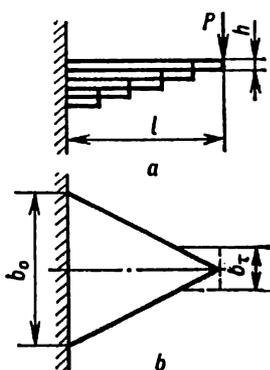


Fig. 188

El ancho de las secciones extremas de la viga se determina a partir de la condición de cizallamiento (véase la fig. 188, a, b)

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{P}{F} = \frac{P}{b_{\tau} h} < [\tau],$$

de donde

$$b_{\tau} = \frac{P}{h[\tau]}.$$

En la tabla 18 se dan las fórmulas para determinar las dimensiones de la sección transversal y la flecha máxima de vigas de igual resistencia. En la tabla 19 se insertan las ecuaciones de la línea elástica y de los ángulos de giro de las secciones transversales de una viga en voladizo de altura variada para algunos casos de su sollicitación.

### § 57. Cálculo a la flexión considerando las fuerzas de inercia

La acción de las fuerzas de inercia debe tomarse en consideración durante el cálculo de los elementos de estructuras que experimentan grandes aceleraciones. Como ejemplo puede servir el vástago  $AB$  (fig. 189) que une dos ejes, uno de los cuales ( $O_1$ ) es motriz. Cualquier elemento de la longitud del vástago que describe una circunferencia de radio  $r$  con velocidad angular  $\omega$  experimenta una aceleración centrípeta  $\omega^2 r$ . La intensidad de la carga distribuida que surge por la longitud del vástago será

$$q_i = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

siendo  $F$  el área de la sección transversal del vástago;  $\gamma$ , el peso específico del material;  $g$ , la aceleración de la gravedad.

La posición más peligrosa del vástago será la inferior extrema  $A_1 B_1$ , cuando las cargas de las fuerzas de inercia  $q_i$  se suman a las del peso muerto  $q_m$ :

$$q_{\text{máx}} = q_i + q_m = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r + \gamma F = \gamma F \left( 1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

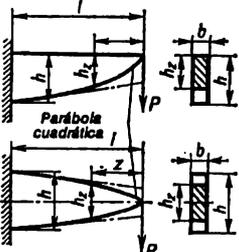
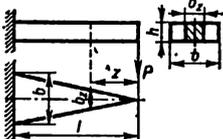
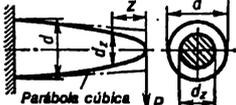
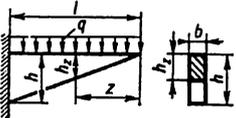
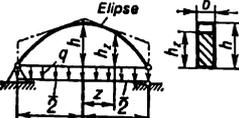
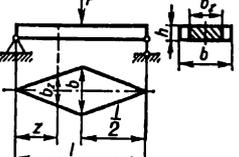
Viendo el vástago como viga sobre dos apoyos articulados, hallemos el momento flector máximo

$$M_{\text{máx}} = \frac{q_{\text{máx}} l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8} \left( 1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right)$$

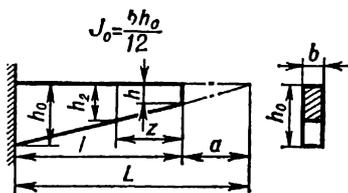
y la tensión máxima

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W} = \frac{F}{W} \frac{\gamma l^2}{8} \left( 1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right).$$

Vigas de igual resistencia a la flexión

Esquema de la viga y su sección transversal	Fórmulas para la determinación de las dimensiones de la sección transversal y de la flecha máxima
 <p>Parábola cuadrática</p>	$h_z = \sqrt{\frac{6Pz}{b[\sigma]}}; f = \frac{8P}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3$
	$b_z = \frac{6Pz}{h^2[\sigma]}; f = \frac{6P}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3$
 <p>Parábola cúbica</p>	$d_z = \sqrt[3]{\frac{32Pz}{\pi[\sigma]}}$
	$h_z = z \sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}$
 <p>Parábola cuadrática</p>	$h_z = \sqrt{\frac{6Pcz}{bl[\sigma]}}; h_{z'} = \sqrt{\frac{6Paz'}{bl[\sigma]}}$
 <p>Elipse</p>	$h_z = \sqrt{\frac{3ql^2}{4b[\sigma]} \left( 1 - 4 \frac{z^2}{l^2} \right)}; f = \frac{3ql^4}{16bEh^3}$
	$b_z = \frac{3Pz}{h^2[\sigma]}; f = \frac{3Pl^3}{8bEh^3}$

**Ecuaciones de la línea elástica y del ángulo de giro de las secciones transversales de la viga en voladizo de altura variada**



$$h_2 = h_0 \frac{a + z}{a + l}$$

Esquema de la viga y de la carga	Ecuación de la línea elástica
	$\frac{PL^3}{EJ_0} \left[ -\ln \frac{L}{a+z} + \frac{a}{2(a+z)} + \frac{2l+a}{2L^2} (l-z) - \frac{a}{2L} \right]$
	$-\frac{pL^3}{2EJ_0} \left\{ 2a \ln \frac{L}{a+z} - (a+z)[\ln(a+z) - 1] - \frac{4aL - a^2}{2L^2} (l-z) + (a+z) \ln L - \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{a+z} - \frac{1}{L} \right) - L \right\}$
	$-\frac{p_0 L^3}{6EJ_0 l} \left\{ 3a(a+z) [\ln(a+z) - 1] - 3aL \ln L - 3a^2 \ln \frac{L}{a+z} + \left( 3a \ln L + \frac{3a^2}{L} - L - \frac{a^3}{2L^2} \right) (l-z) + \frac{1}{2} [L^2 - (a+z)^2] + \frac{a^3}{2} \left( \frac{1}{a+z} - \frac{1}{L} \right) + 3aL \right\}$
	$\frac{ML^3}{EJ_0} \left[ \frac{z}{2L^2} + \frac{1}{2(a+z)} - \frac{2l+a}{2L^2} \right]$

También las fuerzas de inercia deben tomarse en consideración durante el cálculo de biela de la máquina de pistón (fig. 190). La biela está sometida a una carga distribuida de inercia que varía según una ley lineal, como puede verse en la figura. La intensidad máxima de la carga de inercia será en el punto A, cuando la manivela forma respecto a la biela un ángulo igual a 90°,

$$q_{\text{máx}} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

siendo  $r$  el radio de la manivela.

Ecuación del ángulo de giro

$$\frac{PL^3}{EJ_0} \left[ \frac{2z + a}{2(a + z)^2} - \frac{2l + a}{2L^2} \right]$$

$$- \frac{pL^3}{2EJ_0} \left[ \ln \frac{L}{a + z} - 2a \left( \frac{1}{a + z} - \frac{1}{L} \right) + a^2 \left( \frac{1}{2(a + z)^2} - \frac{1}{2L^2} \right) \right]$$

$$\frac{p_0L^3}{6EJ_0l} \left[ -3a \ln \frac{L}{a + z} + (l - z) + 3a^2 \left( \frac{1}{a + z} - \frac{1}{L} \right) - \frac{a^3}{2} \left( \frac{1}{(a + z)^2} - \frac{1}{L^2} \right) \right]$$

$$\frac{ML^3}{EJ_0} \left[ \frac{1}{2(a + z)^2} - \frac{1}{2L^2} \right]$$

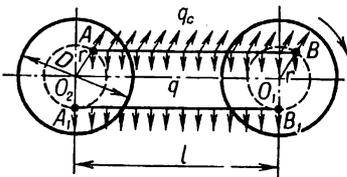


Fig. 189

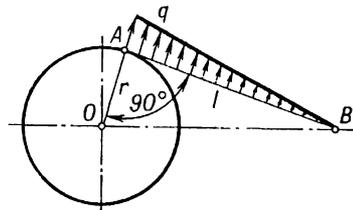


Fig. 190

El momento flector máximo en la biela (al considerarla como viga apoyada articularmente) será, como se sabe, a una distancia  $\frac{l}{\sqrt{3}}$  del punto  $B$ :

$$M_{\text{máx}} = \frac{q_{\text{máx}} l^2}{9\sqrt{3}}$$

y la tensión máxima

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{W}$$

Sustituyendo el valor de  $q_{\text{máx}}$  hallamos

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{q_{\text{máx}} l^2}{9\sqrt{3}W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3}W}$$

### § 58. Tensiones tangenciales durante la flexión de vigas de perfil de paredes delgadas. Centro de flexión

La fórmula de Zhuravski ofrece resultados verídicos en los casos en que el ancho de la viga (secciones  $mn$  en la fig. 191) es suficientemente pequeño en comparación con la altura  $h$ .

En las secciones  $m_1 n_1$  de las alas del perfil de paredes delgadas (fig. 191,  $c, d, e$ ) las tensiones  $\tau$ , paralelas al esfuerzo  $Q$ , son tan pequeñas que se puede prescindir de ellas. Pero en esas alas surgen tensiones tangenciales  $\tau_{a1a}$  perpendiculares al esfuerzo  $Q$ . Teniendo en cuenta el espesor pequeño  $t$  del ala, puede considerarse que las tensiones tangenciales  $\tau_{aa}$  están distribuidas uniformemente por su espesor. Entonces su magnitud se determinará por medio de la fórmula

$$\tau_{a1a} = \frac{QS(x)}{Jt} \quad (10.59)$$

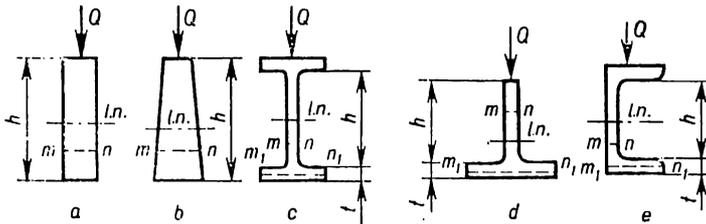


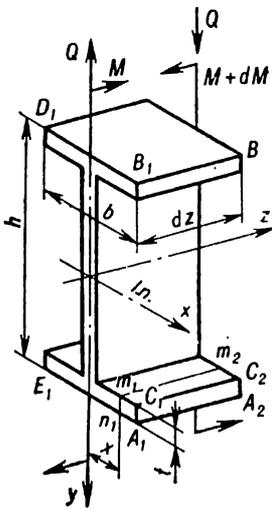
Fig. 191

hallada analizando la condición de equilibrio de una parte del ala de la sección de doble T con longitud  $dz$  (fig. 192), donde el momento estático

$$S(x) = \left(\frac{b}{2} - x\right) t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right). \quad (10.60)$$

Confrontando las fórmulas (10.59) y (10.60) se ve que la ley de distribución de las tensiones tangenciales por el ancho del ala se determina por la ley de cambio del momento estático  $S(x)$ , es decir,  $\tau_{a1a}$  se distribuyen según la ley lineal.

Los diagramas de las tensiones tangenciales construidos para la sección de doble T N° 20, cuando  $Q = 10\,000$  kgf, se dan en la fig. 193.



Las tensiones tangenciales en las alas de perfiles de paredes delgadas influyen sensiblemente en el carácter del estado tensional de la barra y el modo de su deformación.

Si la sección tiene dos ejes de simetría y el plano de fuerza pasa a través de uno de ellos (fig. 194, a), en la sección surgen esfuerzos resultantes en el alma

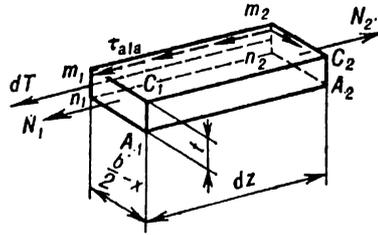


Fig. 192

$T_{alm}$  y en el ala  $T_{ala}$  (fig. 194, b). Los esfuerzos  $T_{ala}$ , en virtud de la simetría de las alas, se compensan mutuamente en cada ala.

Es diferente el asunto cuando el eje central principal, perpendicular a la línea neutra, no es de simetría (fig. 195, a). Las tensiones tangenciales en el

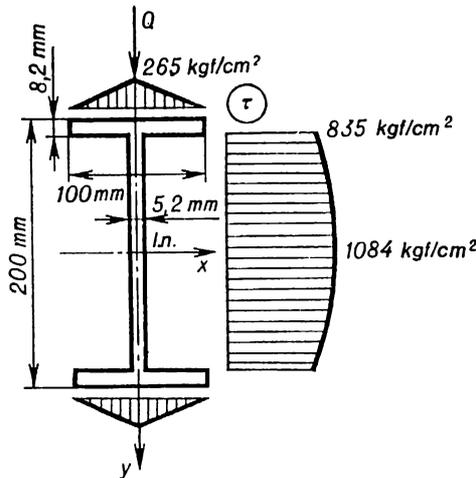


Fig. 193

alma y las alas se reducen, respectivamente, a los esfuerzos  $T_{alm}$  y  $T_{ala}$  (fig. 195, b). En este caso se prescinde de las tensiones tangenciales verticales en las alas. La fuerza cortante es

$$Q = T_{alm}$$

Pero ella no pasa a través del centro de gravedad, sino, siendo la resultante de la fuerza  $T_{alim}$  y dos fuerzas  $T_{ala}$  que forman un par, está desplazada a cierta distancia  $x_C$  (fig. 195, b) e interseca la línea neutra en el punto  $C$ .

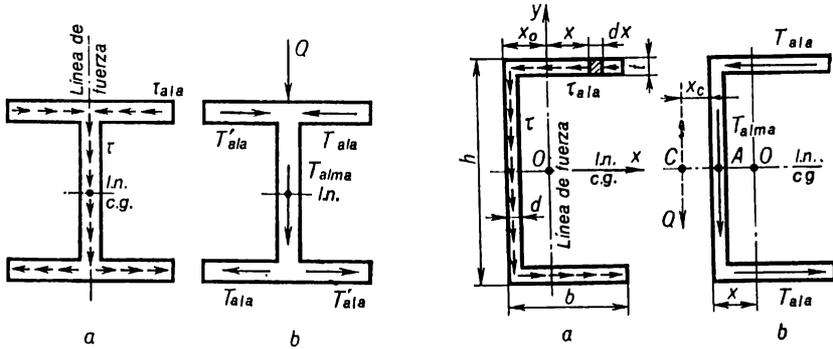


Fig. 194

Fig. 195

El desplazamiento  $x_C$  puede determinarse a partir de la condición siguiente:

$$\sum M_A = Q \left( x_C + \frac{d}{2} \right) - T_{ala} (h - t) = 0,$$

de donde

$$x_C = \frac{T_{ala}}{Q} (h - t) - \frac{d}{2}. \quad (10.61)$$

Tomando en consideración que

$$\begin{aligned} T_{ala} &= t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \tau_{ala} dx = \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \frac{QS(x)}{Jt} dx = \\ &= t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \frac{Q(b-x_0-x)t \frac{h-t}{2}}{Jt} dx = \frac{Qt(h-t)(b-d)^2}{4J}, \end{aligned}$$

podemos escribir la fórmula (10.61) en la forma definitiva:

$$x_C = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2}.$$

El desplazamiento de la resultante con respecto al centro de gravedad de la sección a una distancia  $x_C + x_0$  hace, como se ve del esquema dado en la fig. 196, a, que la carga exterior  $P$  actuando en el plano  $zy$  provoca en la sección de la viga no sólo el momento flector  $M(z) = Pz$  variable por la longitud, sino también el momento torsional (fig. 196, b)  $M_{tor} = P(x_0 + x_C)$  gracias al desplazamiento de la fuerza cortante  $Q = P$  (es la resultante de los esfuerzos  $T_{ala}$  y  $T_{alim}$ ). A consecuencia de esto, la viga no sólo va a flexionarse, sino también a torcerse (fig. 196, c).

Con el fin de prevenir la torsión en la práctica se utilizan secciones simétricas de dos perfiles en U o se desplaza el punto de aplicación de la carga fuera del plano principal de tal manera que éste pase a través del punto  $C$  (fig. 196, d).

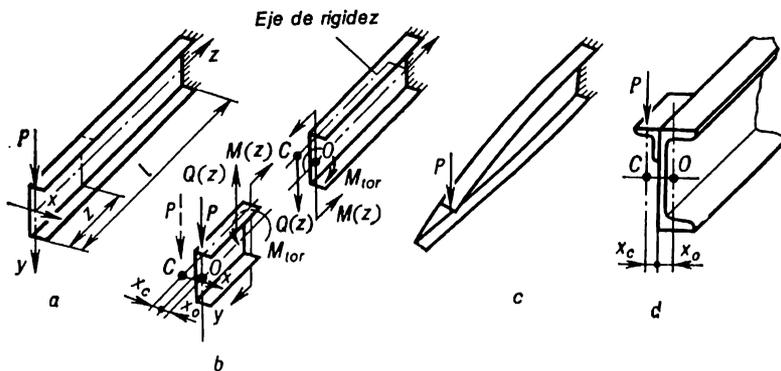


Fig. 196

En este caso el tramo de la viga de longitud  $z$  se equilibra completamente por las fuerzas  $P$ ,  $Q(z) = P$  y el momento  $M(z) = Pz$  y no habrá torsión. Por eso al punto  $C$  lo llaman *centro de flexión* o *centro de rigidez*. Los centros de flexión de todas las secciones de la viga se encuentran en una recta denominada eje de rigidez de la viga (fig. 196, b). Es obvio que para las barras de doble simetría el eje de rigidez de la viga coincide con el eje sobre el cual están situados los centros de gravedad de las secciones.

### § 59. Acerca del cálculo de vigas sobre base elástica

Al examinar una viga sobre base elástica continua (fig. 197) se supone que la reacción de la base en cada punto es proporcional a la flecha elástica  $w$  en ese punto.

Designando el coeficiente de proporcionalidad, que tiene una dimensión de  $\frac{\text{fuerza}}{(\text{longitud})^2}$ , por la letra  $\alpha$  obtenemos que la intensidad de la reacción de la base es igual a  $\alpha w$ .

Así pues, dada la carga exterior distribuida  $q(z)$ , la carga distribuida total que actúa sobre la viga será

$$p(z) = q(z) - \alpha w(z). \quad (10.62)$$

El cálculo de vigas sobre base elástica es un problema hiperestático. La intensidad de la reacción de la base es relacionada con la deformación de la viga, por eso durante la solución de los problemas es necesario hallar primeramente la línea elástica de la viga. La ecuación diferencial del eje flexionado de la viga según (10.34), teniendo en cuenta las direcciones del eje  $w$  y de la carga  $q$  tomadas en la fig. 197, puede escribirse en la siguiente forma:

$$\frac{d^4 w(z)}{dz^4} = \frac{1}{EJ} [q(z) - \alpha w(z)]. \quad (10.63)$$

Si falta la carga distribuida, o sea,  $q(z) = 0$  (fig. 198), la ecuación (10.63) tendrá el aspecto siguiente:

$$\frac{d^4 w(z)}{dz^4} = -\frac{\alpha}{EJ} w(z). \quad (10.64)$$

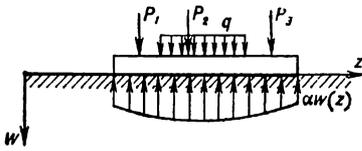


Fig. 197

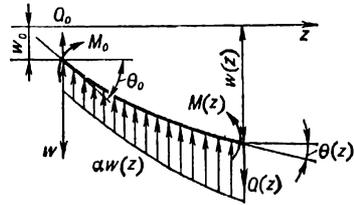


Fig. 198

Elijamos el origen de coordenadas en el extremo izquierdo del tramo examinado, donde los parámetros iniciales serán:  $w_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$  y  $Q_0$ . Introduciendo la denominación

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}}$$

( $L$  tiene la dimensión de longitud) y sustituyendo la variable independiente  $z$  por una abscisa adimensional

$$\xi = \frac{z}{L},$$

volvamos a escribir la ecuación (10.64) en la siguiente forma:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = 0.$$

La solución general de esta ecuación es:

$$w = C_1 e^{\xi} \cos \xi + C_2 e^{\xi} \sin \xi + C_3 e^{-\xi} \cos \xi + C_4 e^{-\xi} \sin \xi. \quad (10.65)$$

Tomando las derivadas correspondientes de (10.65) expresemos por medio de ellas  $Q$ ,  $M$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\xi} = \theta L = & C_1 e^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) + C_2 e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - \\ & - C_3 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + C_4 e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \end{aligned} \quad (10.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\xi^2} = -\frac{M(z)L^2}{EJ} = & -2(C_1 e^{\xi} \sin \xi - C_2 e^{\xi} \cos \xi - C_3 e^{-\xi} \sin \xi + \\ & + C_4 e^{-\xi} \cos \xi); \end{aligned} \quad (10.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{d\xi^3} = -\frac{Q(z)L^3}{EJ} = & -2[C_1 e^{\xi} (\cos \xi + \sin \xi) - C_2 e^{\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - \\ & - C_3 e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) - C_4 e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)]. \end{aligned} \quad (10.68)$$

Considerando en (10.65)–(10.68)  $\xi = 0$ , obtenemos las expresiones para los parámetros iniciales:

$$\begin{aligned}w_0 &= C_1 + C_3; \\L\theta_0 &= C_1 + C_2 - C_3 + C_4; \\M^2M_0 &= (-2C_2 + 2C_4)EJ; \\L^3Q_0 &= (2C_1 - 2C_2 - 2C_3 - 2C_4)EJ.\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de estas cuatro ecuaciones lineales respecto a las constantes de integración, obtendremos la expresión de éstas por medio de los parámetros iniciales en forma siguiente:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{w_0}{2} + \frac{L\theta_0}{4} + \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\C_2 &= \frac{L\theta_0}{4} - \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\C_3 &= \frac{w_0}{2} - \frac{L\theta_0}{4} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}; \\C_4 &= \frac{L\theta_0}{4} + \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}.\end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones de las constantes de integración en (10.65)–(10.68), hallamos

$$\begin{aligned}w(z) &= w_0Y_1(\xi) + L\theta_0Y_2(\xi) - \frac{L^2M_0}{EJ}Y_3(\xi) - \frac{L^3Q_0}{EJ}Y_4(\xi); \\ \theta(z) &= \theta_0Y_1(\xi) - \frac{LM_0}{EJ}Y_2(\xi) - \frac{L^2Q_0}{EJ}Y_3(\xi) - \frac{4w_0}{L}Y_4(\xi); \\ M(z) &= M_0Y_1(\xi) + LQ_0Y_2(\xi) + \alpha L^2w_0Y_3(\xi) + \alpha L^3\theta_0Y_4(\xi); \\ Q(z) &= Q_0Y_1(\xi) + \alpha Lw_0Y_2(\xi) + \alpha L^2\theta_0Y_3(\xi) - \frac{4}{L}M_0Y_4(\xi),\end{aligned}$$

siendo  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ , las funciones de A. N. Krilov \*

$$\begin{aligned}Y_1(\xi) &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) \cos \xi; \\ Y_2(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) = \frac{1}{4} [(e^\xi + e^{-\xi}) \operatorname{sen} \xi + \\ &\quad + (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi]; \\ Y_3(\xi) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \operatorname{sen} \xi = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^\xi - e^{-\xi}) \operatorname{sen} \xi \right]; \\ Y_4(\xi) &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \operatorname{sen} \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) = \frac{1}{8} [(e^\xi + e^{-\xi}) \operatorname{sen} \xi - \\ &\quad - (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \xi].\end{aligned}$$

\* Los valores de esas funciones pueden verse en el Apéndice 4.

Durante la diferenciación de las funciones de Krilov tienen lugar las siguientes dependencias importantes:

$$LY_1' = -4Y_4; \quad LY_2' = Y_1; \quad LY_3' = Y_2; \quad LY_4' = Y_3.$$

En el caso general (fig. 199), cuando en el tramo  $Oz$  actúa el momento concentrado  $M_i$  en el punto con la abscisa  $a_i$ , la fuerza concentrada  $P_i$  en

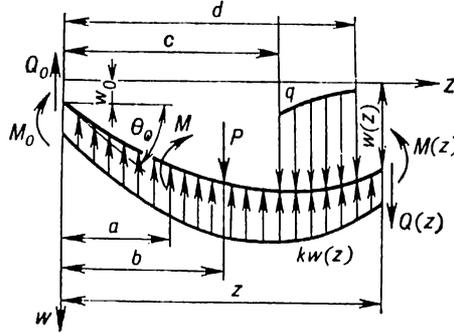


Fig. 199

el punto con la abscisa  $b_i$  y la carga distribuida uniformemente  $q_c$  en el tramo desde  $z = c$  hasta  $z = d$ , las ecuaciones generales para  $w, \theta, Q$  y  $M$  tendrán el siguiente aspecto:

$$w(z) = w_0 Y_1 \left( \frac{z}{L} \right) + \theta_0 LY_2 \left( \frac{z}{L} \right) - \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 L^2 Y_3 \left( \frac{z}{L} \right) + Q_0 L^3 Y_4 \left( \frac{z}{L} \right) + \right. \\ \left. + L^2 \sum M_i Y_3 \left( \frac{z - a_i}{L} \right) - L^3 \sum P_i Y_4 \left( \frac{z - b_i}{L} \right) + \frac{L^4}{4} \sum q_i \left[ Y_1 \left( \frac{z - c_i}{L} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - Y_1 \left( \frac{z - d_i}{L} \right) \right] \right\}; \quad (10.69)$$

$$\theta(z) = \theta_0 Y_1 \left( \frac{z}{L} \right) - \frac{1}{EJ} \left\{ M_0 LY_2 \left( \frac{z}{L} \right) + Q_0 L^2 Y_3 \left( \frac{z}{L} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4EJ}{L} w_0 Y_4 \left( \frac{z}{L} \right) + L \sum M_i Y_2 \left( \frac{z - a_i}{L} \right) - L^2 \sum P_i Y_3 \left( \frac{z - b_i}{L} \right) - \right. \\ \left. - L^3 \sum q_i \left[ Y_4 \left( \frac{z - c_i}{L} \right) - Y_4 \left( \frac{z - d_i}{L} \right) \right] \right\}; \quad (10.70)$$

$$M(z) = M_0 Y_1 \left( \frac{z}{L} \right) + Q_0 LY_2 \left( \frac{z}{L} \right) + \alpha L^2 w_0 Y_3 \left( \frac{z}{L} \right) + \alpha L^3 \theta_0 Y_4 \left( \frac{z}{L} \right) + \\ + \sum M_i Y_1 \left( \frac{z - a_i}{L} \right) - L \sum P_i Y_2 \left( \frac{z - b_i}{L} \right) + L^2 \sum q_i \left[ Y_3 \left( \frac{z - c_i}{L} \right) - \right. \\ \left. - Y_3 \left( \frac{z - d_i}{L} \right) \right]; \quad (10.71)$$

$$\begin{aligned}
 Q(z) = & Q_0 Y_1 \left( \frac{z}{L} \right) + \alpha L w_0 Y_2 \left( \frac{z}{L} \right) + \alpha L^2 \theta_0 Y_3 \left( \frac{z}{L} \right) - \frac{4M_0}{L} Y_4 \left( \frac{z}{L} \right) - \\
 & - \frac{4}{L} \sum M_i Y_2 \left( \frac{z - a_i}{L} \right) - \sum P_i Y_1 \left( \frac{z - b_i}{L} \right) + \\
 & + L \sum q_i \left[ Y_2 \left( \frac{z - c_i}{L} \right) - Y_2 \left( \frac{z - d_i}{L} \right) \right]. \quad (10.72)
 \end{aligned}$$

De tal manera, cuando son conocidos los parámetros iniciales  $w_0$ ,  $\theta_0$ ,  $M_0$  y  $Q_0$ , las magnitudes de  $w(z)$ ,  $\theta(z)$ ,  $M(z)$  y  $Q(z)$  pueden determinarse mediante las fórmulas (10.69)–(10.72) en cualquier sección con coordenada  $z$ .

Los parámetros iniciales en cada caso concreto pueden deducirse a partir de las condiciones en los extremos de la viga. Esas condiciones para diferentes casos de sujeción de la viga coincidiendo el origen de coordenadas con su extremo izquierdo se dan a continuación.

Condiciones de los extremos de la viga		Extremo izquierdo ( $z=0$ )		Extremo derecho ( $z=l$ )					
Extremo izquierdo	Extremo derecho	$w$	$\theta$	$M$	$Q$	$w$	$\theta$	$M$	$Q$
Libre	Libre	—	—	$M_0$	$Q_0$	—	—	$M_l$	$Q_l$
Libre	Apoyado	—	—	$M_0$	$Q_0$	0	—	$M_l$	—
Libre	Empotrado	—	—	$M_0$	$Q_0$	0	0	—	—
Apoyado	Apoyado	0	—	$M_0$	—	0	—	$M_l$	—
Apoyado	Empotrado	0	—	$M_0$	—	0	0	—	—
Empotrado	Empotrado	0	0	—	—	0	0	—	—

$M_l$  y  $Q_l$  son el momento y la fuerza concentrados exteriores en el apoyo derecho, respectivamente.

Elijiendo el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la viga de una luz, dos parámetros iniciales siempre son conocidos. Para determinar otros dos parámetros es necesario resolver el sistema de dos ecuaciones algebraicas compuesto de las condiciones de sujeción del extremo derecho de la viga.

## § 60. Flexión de vigas cuyo material no sigue la ley de Hooke

Los diagramas de tracción y compresión para los materiales que no siguen la ley de Hooke (fundición, piedra, etc.) demuestran que las tensiones crecen más lentamente que las deformaciones, y el atraso del crecimiento de las tensiones respecto a las deformaciones es más grande durante la tracción que durante la compresión (fig. 200). En este caso la línea neutra no pasa a través del centro de gravedad de la sección transversal, sino se desplaza hacia el centro de curvatura del eje de la viga (fig. 201). Conociendo el radio de curvatura de la capa neutra  $\rho$ , el alargamiento unitario de la fibra situada a una distancia  $y$  de la capa neutra se determina, igual que antes, a base de la hipótesis de las secciones planas mediante la fórmula conocida

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (10.73)$$

Por eso deben hallarse, ante todo, la posición y el radio de curvatura de la capa neutra.

Veamos una viga de sección rectangular hecha de un material que no sigue la ley de Hooke (fig. 202). Teniendo en cuenta que para muchos materiales las

dependencias  $\varepsilon = f(\sigma)$  durante la tracción y compresión pueden presentarse en la forma de

$$\varepsilon_{tr} = k_{tr} \sigma_{tr}^n; \quad \varepsilon_{com} = k_{com} \sigma_{com}^m, \quad (10.74)$$

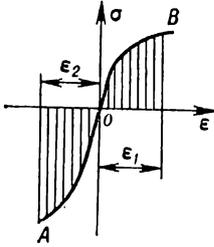


Fig. 200

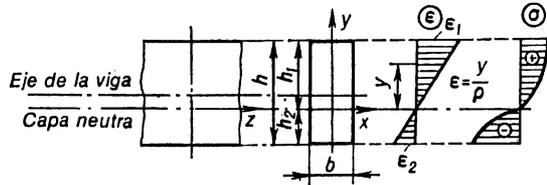


Fig. 201

donde  $k_{tr}$ ,  $k_{com}$ ,  $n$  y  $m$  son las magnitudes que caracterizan las propiedades físicas del material, la posición de la capa neutra puede determinarse a partir de las siguientes condiciones:

$$\sum Z = \int_F \sigma dF = 0;$$

$$\sum M_x = \int_F \sigma y dF - M = 0$$

o bien

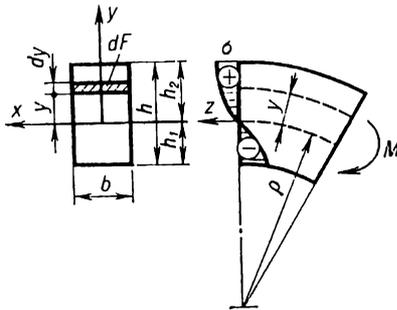


Fig. 202

$$b \left( \int_0^{h_1} \sigma_{tr} dy - \int_0^{h_2} \sigma_{com} dy \right) = 0; \quad (10.75)$$

$$b \left( \int_0^{h_1} \sigma_{tr} y dy + \int_0^{h_2} \sigma_{com} y dy \right) = M. \quad (10.76)$$

A base de (10.74) y (10.73)

$$\sigma_{tr} = \left( \frac{\varepsilon_{tr}}{k_{tr}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left( \frac{y}{k_{tr} \rho} \right)^{\frac{1}{n}};$$

$$\sigma_{com} = \left( \frac{\varepsilon_{com}}{k_{com}} \right)^{\frac{1}{m}} = \left( \frac{y}{k_{com} \rho} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (10.77)$$

Sustituyendo (10.77) en (10.75) y (10.76) e integrando obtenemos, respectivamente,

$$\frac{n}{n+1} \left( \frac{h_1}{k_{tr} \rho} \right)^{\frac{1}{n}} h_1 - \frac{m}{m+1} \left( \frac{h_2}{k_{com} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} h_2 = 0; \quad (10.78)$$

$$\frac{n}{2n+1} b \left( \frac{h_1}{k_{tr} \rho} \right)^{\frac{1}{n}} h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \left( \frac{h_2}{k_{com} \rho} \right)^{\frac{1}{m}} h_2^2 = M. \quad (10.79)$$

Tomando en consideración que  $h_1 + h_2 = h$ , de las dos últimas ecuaciones hallamos  $\rho$ ,  $h_1$  y  $h_2$  y, luego, mediante las fórmulas (10.77), las tensiones  $\sigma_{tr}$  y  $\sigma_{com}$

Se puede resolver también el problema inverso: determinar el momento flector máximo admisible por medio de las tensiones admisibles de tracción  $[\sigma_{tr}]$  o compresión  $[\sigma_{com}]$ . Además valiéndose de las fórmulas (10.77) se hallan las tensiones en las fibras extremas

$$(\sigma_{tr})_{m\acute{a}x} = \sigma_1 = \left( \frac{h_1}{k_{tr}\rho} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad (\sigma_{com})_{m\acute{a}x} = \sigma_2 = \left( \frac{h_2}{k_{com}\rho} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (10.80)$$

A base de (10.80) las expresiones (10.78) y (10.79) pueden presentarse en la forma siguiente:

$$\frac{n}{n+1} \sigma_1 h_1 - \frac{m}{m+1} \sigma_2 h_2 = 0, \quad (10.81)$$

$$\frac{n}{2n+1} b \sigma_1 h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b \sigma_2 h_2^2 = M. \quad (10.82)$$

Además de la ecuación (10.80) se desprende que

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_1^n k_{tr}}{\sigma_2^m k_{com}}. \quad (10.83)$$

Haciendo uso de las relaciones (10.81)–(10.83) y tomando en consideración que  $h_1 + h_2 = h$ , se puede, siendo conocidas  $[\sigma_{tr}]$  o  $[\sigma_{com}]$ , determinar la posición del eje neutro y el valor admisible del momento flector  $[M]$ .

En el caso de que el material sigue la ley de Hooke, pero los módulos de elasticidad en la tracción  $E_{tr}$  y en la compresión  $E_{com}$  no son iguales (de ordinario  $E_{com} > E_{tr}$ ), el diagrama de las tensiones normales tendrá el aspecto mostrado en la fig. 203; las tensiones máximas para la barra de sección rectangular, siendo conocido el momento flector actuante  $M$ , se determinarán por las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{tr} &= \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_{tr}}{E_{com}}} \right); \\ \sigma_{com} &= \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{E_{com}}{E_{tr}}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.84)$$

En el caso de que las tensiones se determinan por medio de las deformaciones unitarias en las fibras extremas halladas mediante los extensómetros, es mejor presentar las fórmulas (10.84) en la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{tr} &= \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{com}}{\varepsilon_{tr}} \right); \\ \sigma_{com} &= \frac{3M}{bh^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{com}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.85)$$

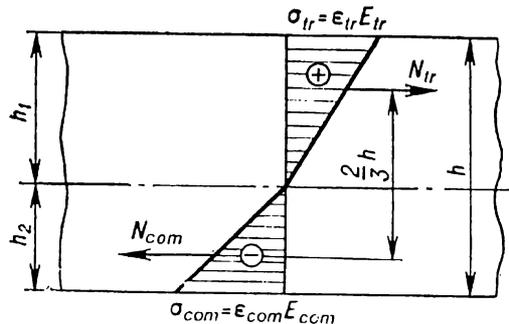
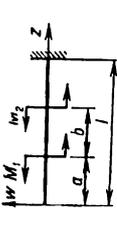
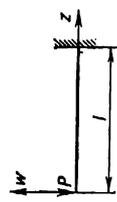
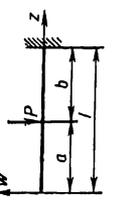
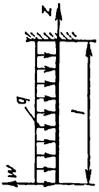
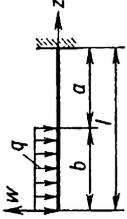


Fig. 203

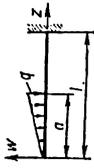
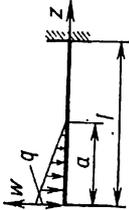
Ecuaciones de la línea elástica, flechas máximas y ángulos de giro de las secciones de extremo y de apoyo en las vigas isostáticas de sección transversal constante

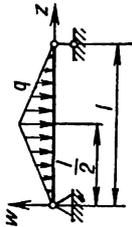
Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{M_0 l^2}{2EJ} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ $f = -\frac{M_0 l^2}{2EJ} \text{ para } z=0$	$\theta = \frac{M_0 l}{EJ}$ <p>para <math>z=0</math></p>
	$0 \leq z \leq a$ $w_z = -\frac{1}{2EJ} [(M_1 + M_2)(1-z)^2 - M_1(a-z)^2 - M_2(a+b-z)^2]$ $a \leq z \leq a+b$ $w_z = -\frac{1}{2EJ} [(M_1 + M_2)(l-z)^2 - M_2(a+b-z)^2]$ $w_z = -\frac{(M_1 + M_2) l^2}{2EJ} \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ $f = -\frac{1}{2EJ} [(M_1 + M_2) l^2 - M_1 a^2 - M_2(a+b)^2]$ <p>para <math>z=0</math></p>	$\theta = \frac{1}{EJ} [(M_1 + M_2) l - M_1 a - M_2(a+b)]$ <p>para <math>z=0</math></p>

	$0 \leq z \leq l$ $w_1 = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[ 2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3 \right]$ $f = -\frac{Pl^3}{3EJ} \text{ para } z=0$	$\theta = \frac{Pl^2}{2EJ}$ <p>para <math>z = 0</math></p>
	$0 \leq z \leq a$ $w_2 = \frac{Pb^3}{6EJ} \left( 1 - 3\frac{-z}{b} \right) = -\frac{Pb^3}{6EJ} \left( 3\frac{a-z}{b} + 2 \right)$ $a \leq z \leq l$ $w_2 = \frac{Pb^3}{6EJ} \left( \frac{l-z}{b} - 3 \right) \left( \frac{l-z}{b} \right)^2$ $f = \frac{Pb^3}{6EJ} \left( 1 - 3\frac{l}{b} \right) = -\frac{Pb^3}{6EJ} \left( 2 + 3\frac{a}{b} \right)$ <p>para <math>z = 0</math></p>	$\theta = \frac{Pb^2}{2EJ}$ <p>para <math>z = 0</math></p>

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 \leq z \leq l$ $w_z = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ 3 - 4\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \right]$ $f = -\frac{ql^4}{8EJ} \text{ para } z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ}$ <p>para <math>z = 0</math></p>
	$0 \leq z \leq b$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ 3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} - 4\left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4} \right]$ $b \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ 3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} - \right]$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ} \left( 1 - \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p>para <math>z = 0</math></p>

	$-4 \left( 1 - \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4} - \frac{(z-b)^4}{l^4}$ $f = -\frac{ql^4}{24EJ} \left( 3 - 4 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>	$\theta = \frac{ql^3}{24EJ}$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>
	$0 \leq z \leq l$ $w_{(z)} = -\frac{ql^4}{120EJ} \left( 4 - 5 \frac{z}{l} + \frac{z^6}{l^5} \right)$ $f = -\frac{ql^4}{30EJ} \text{ para } z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{8EJ}$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>
	$0 \leq z \leq l$ $w_{(z)} = -\frac{ql^4}{120EJ} \left( 11 - 15 \frac{z}{l} + 5 \frac{z^4}{l^4} - \frac{z^6}{l^5} \right)$ $f = -\frac{11}{120} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \text{ para } z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{8EJ}$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>

Esquema de la viga.	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 \leq z \leq a$ $w_{(z)} = -\frac{qal^3}{120EJ} \left[ 4 \left( 5 - 5 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} \right) - \right. \\ \left. - 5 \left( 6 - 8 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} + \frac{z^5}{a^2 l^3} \right] \\ f = -\frac{qal^3}{30EJ} \left( 5 - 5 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} \right)$	$\theta = \frac{qal^2}{24EJ} \left( 6 - 8 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>
	$0 \leq z \leq a$ $w_{(z)} = -\frac{qal^3}{120EJ} \left[ 20 - 10 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} - \right. \\ \left. - 5 \left( 6 - 4 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} + 5 \frac{z^4}{al^3} - \frac{z^5}{a^2 l^3} \right] \\ f = -\frac{qal^3}{120EJ} \left( 20 - 10 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>	$\theta = \frac{qal^2}{24EJ} \left( 6 - 4 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p>



$$0 < z < \frac{l}{2}$$

$$w(z) = -\frac{109ql^4}{1920EJ} \left[ 1 - \frac{140}{109} \frac{z}{l} + \frac{32}{109} \frac{z^5}{l^5} \right]$$

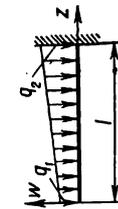
$$\theta = \frac{7}{96} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

para  $z = 0$

$$\frac{l}{2} < z < l$$

$$w(z) = -\frac{109ql^4}{1920EJ} \left[ 1 - \frac{140}{109} \cdot \frac{z}{l} + \frac{32}{109} \cdot \frac{z^5}{l^5} - \frac{64}{109} \cdot \frac{\left( z - \frac{l}{2} \right)^5}{l^5} \right]$$

$$f = -\frac{10,9ql^4}{192 EJ} \text{ para } z = 0$$



$$0 < z < l$$

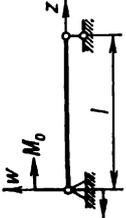
$$w(z) = -\frac{l^4}{120EJ} \left[ 11q_1 + 4q_2 - 5(3q_1 + q_2) \frac{z}{l} + 5q_1 \frac{z^4}{l^4} + (q_2 - q_1) \frac{z^5}{l^5} \right]$$

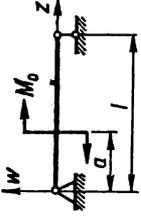
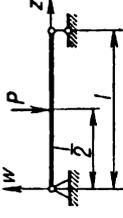
$$f = -\frac{11q_1 + 4q_2}{120EJ} l^4$$

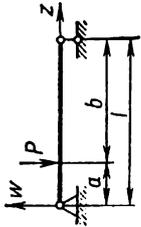
para  $z = 0$

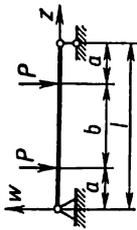
$$\theta = \frac{3q_1 + q_2}{24EJ} l^3$$

para  $z = 0$

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{M_0 l^2}{6EJ} \left( 2 \frac{z}{l} - 3 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $w = -\frac{M_0 l^3}{16EJ} \quad \text{para } z = \frac{l}{2}$ $f = -0,0642 \frac{M_0 l^3}{EJ} \quad \text{para } z = 0,422 l$	$\theta = -\frac{M_0 l}{3EJ} \quad \text{para } z = 0$ $\theta = \frac{M_0 l}{6EJ} \quad \text{para } z = l$
	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{l^2}{6EJ} \left[ (2M_1 + M_2) \frac{z}{l} - 3M_1 \frac{z^2}{l^2} + (M_1 - M_2) \frac{z^3}{l^3} \right]$ $w = -\frac{M_1 + M_2}{16EJ} l^2 \quad \text{para } z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\left( \frac{M_1 l}{3EJ} + \frac{M_2 l}{6EJ} \right) \quad \text{para } z = 0$ $\theta = \frac{M_1 l}{6EJ} + \frac{M_2 l}{3EJ} \quad \text{para } z = l$

	$0 < z < a$ $w(z) = \frac{M_0 l^2}{6EJ} \left[ \left( 6 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} - 2 \right) \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right]$ $w = \frac{M_0 l^2}{6EJ} \left( 3 \frac{a^3}{l^3} - \frac{a}{l} - \frac{13 a^2}{8 l^2} \right) \text{ para } z = \frac{a}{2}$ $w = \frac{M_0 l^2}{3EJ} \left( 3 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - 2 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ para } z = a$	$\theta = -\frac{M_0 l}{6EJ} \left( 2 - 6 \frac{a}{l} + 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ para } z = 0$ $\theta = -\frac{M_0 l}{EJ} \left( \frac{1}{3} - \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ cuando } z = a$ $\theta = \frac{M_0 l}{6EJ} \left( 1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ cuando } z = l$
	$0 < z < l/2$ $w(z) = -\frac{P l^3}{48EJ} \left( 3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = -\frac{P l^3}{48EJ} \text{ para } z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{P l^2}{16EJ} \text{ para } z = 0$ $\theta = \frac{P l^2}{16EJ} \text{ para } z = l$

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 < z < a$ $w(z) = -\frac{Pa^2b^3}{6EJl} \left( 2\frac{z}{a} + \frac{z}{b} - \frac{z^3}{a^2b} \right)$ $a < z < l$ $w(z) = -\frac{Pa^2b^3}{6EJl} \left[ \frac{l-z}{2} + \frac{l-z}{b} - \frac{l-z}{a} - \frac{(l-z)^3}{ab^2} \right]$ $w = -\frac{Pb}{48EJ} (3l^2 - 4b^2) \text{ para } z = \frac{l}{2}$ $w = -\frac{Pl^3}{3EJ} \left( \frac{ab}{l^2} \right)^2 \text{ para } z = a$ $f = -\frac{Pbl^{2\sqrt{3}}}{27EJ} \sqrt{\left( 1 - \frac{b^2}{l^2} \right)^3}$ $\text{para } z = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$	$\theta = -\frac{Pba}{6EJ} (a + 2b) =$ $= -\frac{Pl^3}{6EJ} \left( \frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p> $\theta = \frac{Pa}{6EJ} (l^2 - a^2) \text{ para } z = l$



$$0 \leq z < a$$

$$w(z) = -\frac{Pa^3}{6EJ} \left[ 3 \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} \right]$$

$$a \leq z \leq a + b$$

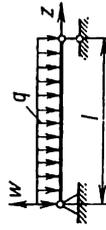
$$w(z) = -\frac{Pa^3}{6EJ} \left[ 3 \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} + \frac{(z-a)^3}{a^3} \right]$$

$$w = -\frac{Pa^3}{6EJ} \left( 2 + 3 \frac{b}{a} \right) \text{ para } z = a$$

$$f = -\frac{Pl^3}{24EJ} \left( 3 \frac{a}{l} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \text{ para } z = \frac{l}{2}$$

$$\theta = -\frac{Pa(a+b)}{2EJ} \text{ para } z = 0$$

$$\theta = \frac{Pa(a+b)}{2EJ} \text{ para } z = l$$



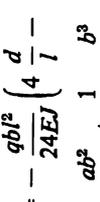
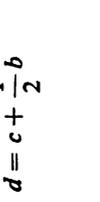
$$0 \leq z \leq l$$

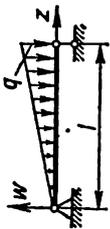
$$w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ \frac{z}{l} - 2 \left( \frac{z}{l} \right)^3 + \left( \frac{z}{l} \right)^4 \right]$$

$$f = -\frac{5ql^4}{384EJ} \text{ para } z = \frac{l}{2}$$

$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \text{ para } z = 0$$

$$\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \text{ para } z = l$$

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 < z < a$ $w(z) = -\frac{qb^3}{48EJ} \left[ 8 \left( \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) - \frac{z}{l} \left( 8 \frac{d^3}{l^3} - \frac{2ab^3}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2 \frac{b^2}{l^2} \right) \right]$ $a < z < a + b$ $w(z) = -\frac{qb^3}{48EJ} \left[ 8 \left( \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) - \frac{z}{l} \left( 8 \frac{d^3}{l^3} - \frac{ab^2}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2 \frac{b^2}{l^2} \right) + 2 \frac{(z-a)^4}{bl^3} \right]$	$\theta = -\frac{qb^3}{24EJ} \left( 4 \frac{d}{l} - \frac{d^3}{l^3} + \frac{ab^2}{l^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^3}{l^3} - \frac{b^2}{l^2} \right)$ <p>para <math>z = 0</math></p> $d = c + \frac{1}{2} b$
	$0 < z < a$ $w(z) = -\frac{qa^3}{24EJ} \left[ 4 \left( 1 - \frac{a}{2l} \right)^2 \frac{z}{a} - 4 \frac{\left( \frac{a}{2} + b \right) z^3}{a^3 l^3} + \frac{z^4}{a^3 l} \right] \quad a < z < l$ $w(z) = -\frac{qa^3}{24EJ} \left[ 4 \left( 1 - \frac{a}{2l} \right)^3 \frac{z}{a} - 4 \frac{\left( \frac{a}{2} + b \right) z^3}{a^3 l^3} + \frac{z^4}{a^3 l} - \frac{(z-a)^4}{a^3 l} \right] \quad \text{para } z = a$	$\theta = -\frac{qa^3}{6EJ} \left( 1 - \frac{a}{2l} \right)^2$ <p>para <math>z = 0</math></p> $\theta = \frac{qa^3}{12EJ} \left( 1 - \frac{a}{2l} \right)^2$ <p>para <math>z = l</math></p>



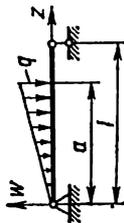
$$0 < z < l$$

$$w(z) = -\frac{ql^6}{360EJ} \left( 7\frac{z}{l} - 10\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{z^5}{l^5} \right)$$

$$f = -0,00652 \frac{ql^6}{EJ} \quad \text{para } z = 0,5193l$$

$$\theta = -\frac{7ql^5}{360EJ} \quad \text{para } z = 0$$

$$\theta = \frac{8ql^5}{360EJ} \quad \text{para } z = l$$



$$0 < z < a$$

$$w(z) = -\frac{qa^2l}{360EJ} \left[ \left( 40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{a} - \right.$$

$$\left. - 10 \left( 3 - 2\frac{a}{l} \right) \frac{z^3}{a^2l} + 3\frac{z^5}{a^4l} \right]$$

$$a < z < l$$

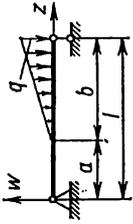
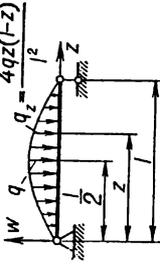
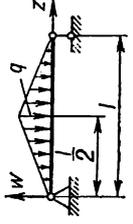
$$w(z) = -\frac{qa^2l}{90EJ} \left[ \left( 5 - 3\frac{a^2}{l^2} \right) \frac{l-z}{a} - 5\frac{(l-z)^3}{a^2l^2} \right]$$

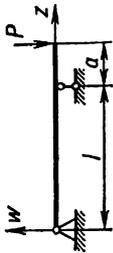
$$w = -\frac{qa^2l}{45EJ} \left( 5 - 9\frac{a}{l} + 4\frac{a^3}{l^3} \right) \quad \text{para } z = a$$

$$\theta = -\frac{qa^2l}{360EJ} \left( 40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$\text{para } z = 0$$

$$\theta = \frac{qa^2l}{90EJ} \left( 5 - 3\frac{a^2}{l^2} \right) \quad \text{para } z = l$$

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 \leq z \leq a$ $w(z) = -\frac{qab^2l}{360EJ} \left[ \left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2}\right) \frac{z}{a} - 10 \frac{z^3}{a l^2} \right] \quad a \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{qab^2l}{360EJ} \left[ \left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2}\right) \frac{z}{a} - 10 \frac{z^3}{a l^2} + 3 \frac{(z-a)^5}{b^3 a l} \right]$ $w = -\frac{qab^2l}{360EJ} \left( 20 \frac{b}{l} - 13 \frac{b^2}{l^2} \right) \quad \text{para } z = a$	$\theta = -\frac{qb^2l}{360EJ} \left( 10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \quad \text{para } z = 0$ $\theta = \frac{qb^2l}{360EJ} \left( 20 - 15 \frac{b}{l} + 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \quad \text{para } z = l$
	$f = -\frac{6l}{5760} \cdot \frac{ql^4}{EJ} \quad \text{para } z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{ql^3}{30EJ} \quad \text{para } z = 0$ $\theta = \frac{ql^3}{30EJ} \quad \text{para } z = l$
	$0 \leq z \leq l/2$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ} \left( \frac{5}{8} \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{z^5}{l^5} \right)$ $f = -\frac{ql^4}{120EJ} \quad \text{para } z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{5}{192} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \quad \text{para } z = 0$ $\theta = \frac{5}{192} \cdot \frac{ql^3}{EJ} \quad \text{para } z = l$



$$0 \leq z \leq l$$

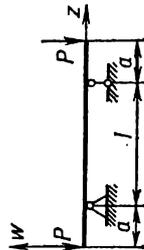
$$w(z) = \frac{Pal^3}{6EJ} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$$

$$l < z \leq l + a$$

$$w(z) = \frac{Pal^2}{6EJ} \left[ \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} + \frac{(l+a)(z-l)^3}{al^3} \right]$$

$$w_{\max} = 0,0642 \frac{Pal^3}{EJ} \quad \text{para } z = 0,578l$$

$$w = -\frac{Pa^2}{3EJ}(l+a) \quad \text{para } z = l+a$$



$$0 \leq z \leq a$$

$$w(z) = -\frac{Pa^2}{6EJ} \left[ (3l+2a) - 3(l+a) \frac{z}{a} + \frac{z^3}{a^2} \right]$$

$$a < z \leq l$$

$$w(z) = -\frac{Pa^2}{6EJ} \left[ (3l+2a) - 3(l+a) \frac{z}{a} + \frac{z^3}{a^2} - \frac{(z-a)^3}{a^2} \right]$$

$$w = -\frac{Pa^2}{6EJ}(3l+2a) \quad \text{para } z=0 \quad \text{y } z=l+2a$$

$$f = \frac{Pal^2}{8EJ} \quad \text{para } z = a + \frac{l}{2}$$

$$\theta = \frac{Pal}{6EJ} \quad \text{para } z=0$$

$$\theta = -\frac{Pal}{3EJ} \quad \text{para } z=l$$

$$\theta = -\frac{Pa}{6EJ}(2l+3a) \quad \text{para } z=l+a$$

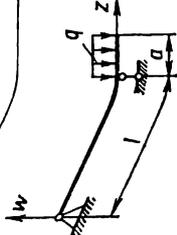
$$\theta = \frac{Pal}{2EJ} \quad \text{para } z=a$$

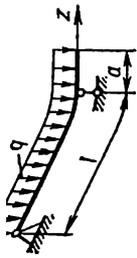
$$\theta = -\frac{Pal}{2EJ} \quad \text{para } z=a+l$$

$$\theta = \frac{Pa(a+l)}{2EJ} \quad \text{para } z=0$$

$$\theta = -\frac{Pa(a+l)}{2EJ} \quad \text{para } z=2a+l$$

Continuación de la tabla 20

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$0 < z < l$ $w(z) = \frac{qa^2l^2}{12EJ} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right)$	$\theta = -\frac{qa^2l}{12EJ} \text{ para } z = 0$ $\theta = -\frac{qa^2l}{6EJ} \text{ para } z = l$
	$l < z < l + a$ $w(z) = -\frac{qa^3l}{24EJ} \left[ \left( 4 + 3 \frac{a}{l} \right) - 4 \left( 1 + \frac{l}{a} \right) \left( 1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right) + \frac{l^3}{a^2} \left( 1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right)^4 \right]$	$\theta = -\frac{qa^2}{6EJ} (a + l)$ <p>para <math>z = l + a</math></p>
	$w = -\frac{qa^2l^2}{32EJ} \text{ para } z = \frac{l}{2}$ $w_{\text{máx}} = 0,0321 \frac{qa^2l^2}{EJ} \text{ para } z = 0,577l$ $w = -\frac{qa^3}{24EJ} (4l + 3a) \text{ para } z = l + a$	



$$0 < z < l$$

$$w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ \left( 1 - 2 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{z}{l} - 2 \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4} \right]$$

$$l < z < l + a$$

$$w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ \left( 4 \frac{a^3}{l^3} - \frac{a}{l} + 3 \frac{a^4}{l^4} \right) - \left( 4 \frac{a^2}{l^2} - 1 + 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \left( 1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right) + \left( 1 + \frac{a}{l} - \frac{z}{l} \right)^4 \right]$$

$$w = -\frac{ql^4}{384EJ} \left( 5 - 12 \frac{a^2}{l^2} \right) \text{ para } z = \frac{l}{2}$$

$$w = -\frac{qa^4}{24EJ} \left( 3 + 4 \frac{l}{a} - \frac{l^3}{a^3} \right)$$

$$\text{para } z = l + a$$

$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \left( 1 - 2 \frac{a^3}{l^3} \right)$$

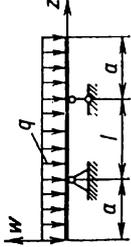
$$\text{para } z = 0$$

$$\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \left( 1 + \frac{a^3}{l^3} \right)$$

$$\text{para } z = l$$

$$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ} \left( 4 \frac{a^3}{l^3} + 4 \frac{a^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$\text{para } z = l + a$$

Esquema de la viga	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ y la flecha máxima $f$	Angulo de giro $\theta$
	$w(z) = \frac{ql^4}{24EJ} \left[ \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 3 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{a}{l} - \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{z}{l} - \frac{z^4}{l^4} \right]$ <p style="text-align: center;"><math>a &lt; z &lt; a + l</math></p> $w(z) = \frac{ql^4}{24EJ} \left[ \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 3 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{a}{l} - \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right) \frac{z}{l} + 2 \left( 1 + 2 \frac{a}{l} \right) \frac{(z-a)^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4} \right]$ $w = \frac{qal^3}{24EJ} \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 3 \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math> y <math>z = l + 2a</math></p> $w = - \frac{ql^4}{16EJ} \left( \frac{5}{24} - \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = a + \frac{l}{2}</math></p>	$\theta = - \frac{ql^3}{24EJ} \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = 0</math></p> $\theta = - \frac{ql^3}{4EJ} \left( \frac{1}{6} - \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = a</math></p> $\theta = \frac{ql^3}{4EJ} \left( \frac{1}{6} - \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = a + l</math></p> $\theta = \frac{ql^3}{24EJ} \left( 1 - 6 \frac{a^2}{l^2} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p style="text-align: center;">para <math>z = l + 2a</math></p>

Se entienden por *resistencia compuesta* las diferentes combinaciones de estados tensionales simples (tracción, compresión, deslizamiento, torsión, flexión). En el caso general de sollicitación de una barra (fig. 204, a) en sus secciones transversales actúan seis componentes de esfuerzos interiores ( $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{tor}$ ) (fig. 204, b) relacionadas con cuatro deformaciones simples de la barra: tracción o compresión, deslizamiento, torsión o flexión.

El estado tensional de una barra rígida se determina, a base de la hipótesis sobre la acción independiente de las fuerzas, sumando los estados tensionales originados por cada tipo de sollicitación simple por separado.

Por analogía, las deformaciones (desplazamientos) pueden determinarse sumando las deformaciones (desplazamientos) provocados por cada componente de carga por separado.

El principio de suma de la acción de las fuerzas o el principio de superposición se aplica en todos los casos en que las deformaciones son pequeñas y el material obedece a la ley de Hooke. En la práctica son pocos los casos en que en la barra surgen todas las seis componentes de esfuerzos interiores; ordinariamente, se trata de sus diferentes combinaciones.

### § 61. Flexión compuesta y desviada

La flexión compuesta o no plana es originada por las fuerzas exteriores que actúan en diferentes planos pasados a través del eje de la viga (fig. 205, a). El eje flexionado de la viga en este caso no es curva plana.

Si todas las cargas que provocan la flexión actúan en un plano que no coincide con ninguno de los planos principales, la flexión se denomina *desviada* (fig. 206, a).

De ordinario, la flexión compuesta o desviada se reduce a dos flexiones planas, descomponiendo con este fin las cargas que actúan en los planos longitudinales arbitrarios en componentes que se encuentran en los planos principales  $zy$  y  $zx$  (figs. 205, b, 206, b). En este caso en la sección surgen cuatro componentes de esfuerzos interiores, a saber:  $Q_x, Q_y, M_x$  y  $M_y$ .

Las tensiones en los puntos de cualquier sección situados en el primer cuadrante del sistema de coordenadas  $xy$  (fig. 207, a), cuando actúan simultáneamente  $M_x$  y  $M_y$ , se determinan mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y} \quad (11.1)$$

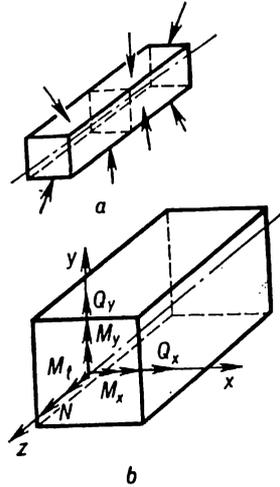


Fig. 204

Al utilizar esta fórmula en el caso general, se deben tomar en consideración los signos de las coordenadas  $x$  e  $y$ .

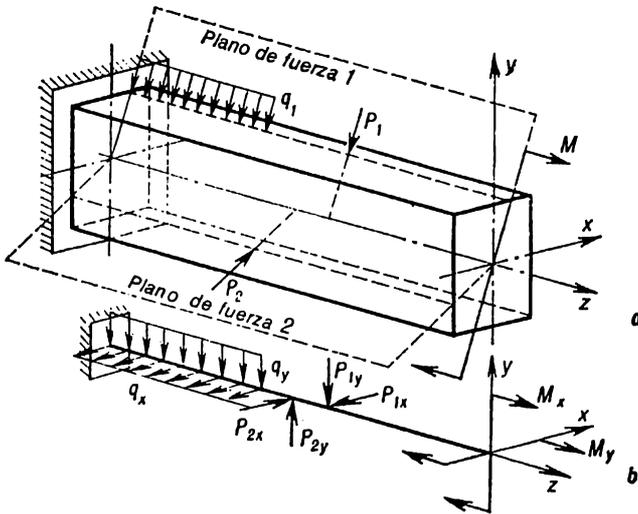


Fig. 205

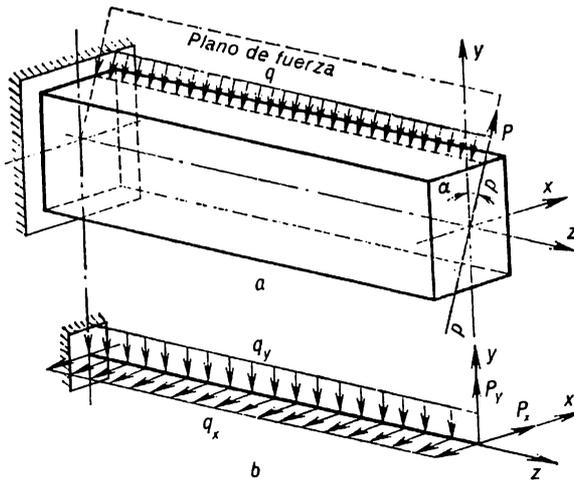


Fig. 206

Durante la flexión desviada (fig. 208) tienen lugar las siguientes dependencias:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha; \\ M_y &= M \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

siendo  $M$  el momento flector en la sección dada en el plano de fuerza  $pp$  (fig. 207,  $b$ ).

La fórmula (11.1) puede escribirse así:

$$\sigma = M \left( \frac{y \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \sin \alpha}{J_y} \right). \quad (11.3)$$

Obtendremos la ecuación de la línea neutra de (11.1), tomando  $\sigma = 0$ :

$$\sigma = \frac{M_x y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{J_y} = 0. \quad (11.4)$$

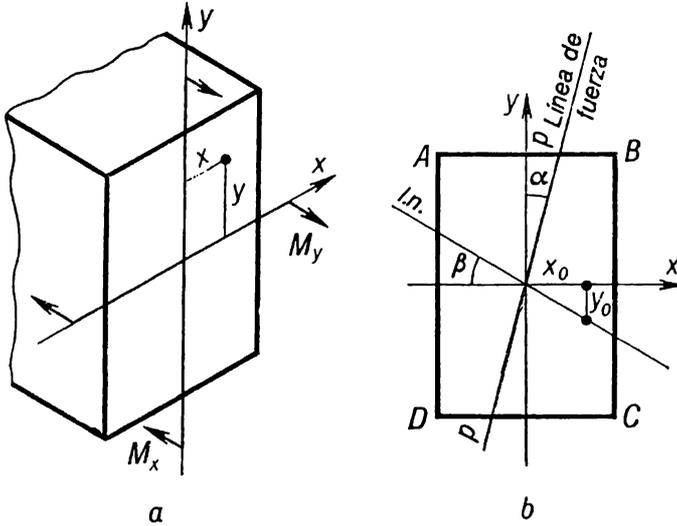


Fig. 207

La ecuación (11.4) es una ecuación de la línea recta que pasa a través del origen de coordenadas. La posición de la línea neutra se determina por la tangente del ángulo de su inclinación  $\beta$  (fig. 207, b) al eje principal  $x$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y}. \quad (11.5)$$

Construyendo el diagrama vectorial de los momentos (fig. 208) se determina el ángulo  $\alpha$  de inclinación del plano de fuerza  $pp$  (plano de acción del momento)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x}. \quad (11.6)$$

Entonces, el ángulo de inclinación de la línea neutra (11.5) puede representarse mediante la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha, \quad (11.7)$$

de la cual se ve que en el caso general de la flexión compuesta, cuando  $J_x \neq J_y$ , la línea neutra no es perpendicular a la línea de fuerza.

Puesto que durante la flexión desviada la relación de  $M_y$  al  $M_x$  caracterizada por  $\operatorname{tg} \alpha$  (11.6) es constante por toda la longitud de la barra, también el ángulo

de inclinación de la línea neutra  $\beta$  es constante, es decir, la línea elástica está situada en un plano  $n - n$  (fig. 208) llamado *plano de flexión*.

La comprobación de la resistencia durante el estado tensional complejo se efectúa a base de los datos sobre la tensión total máxima. Es evidente que durante la flexión compuesta las  $\sigma_{\text{máx}}$  serán en los puntos más alejados de la línea neutra (puntos  $A$  y  $B$  en la fig. 209). En el caso dado en el punto  $A$

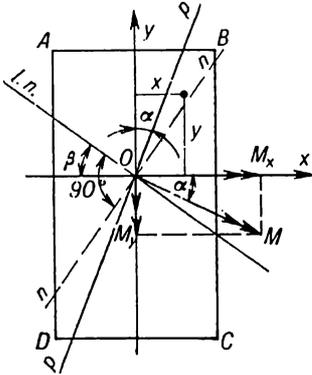


Fig. 208

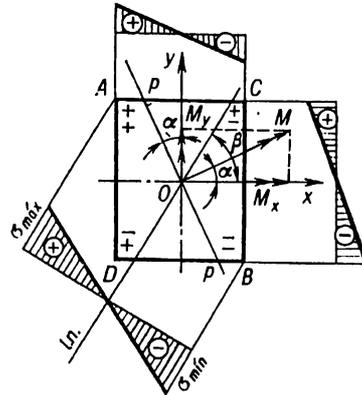


Fig. 209

surgen las tensiones máximas de tracción, en el punto  $B$ , las tensiones máximas de compresión. Las condiciones de resistencia tendrán el siguiente aspecto:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_A = \frac{M_x y_A}{J_x} + \frac{M_y x_A}{J_y} < [\sigma_+]; \quad (11.8)$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_B = -\frac{M_x y_B}{J_x} - \frac{M_y x_B}{J_y} < [\sigma_-]. \quad (11.9)$$

En el caso de flexión desviada (fig. 207, b) las condiciones de resistencia se escribirán así:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_B = M_{\text{máx}} \left( \frac{x_B \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_B \cos \alpha}{J_x} \right) < [\sigma_+]; \quad (11.10)$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_D = -M_{\text{máx}} \left( \frac{x_D \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_D \cos \alpha}{J_x} \right) < [\sigma_-]. \quad (11.11)$$

En particular, para una sección rectangular, cuando

$$\frac{J_y}{x_D} = \frac{J_y}{x_B} = W_y; \quad \frac{J_x}{y_B} = \frac{J_x}{y_D} = W_x,$$

las fórmulas (11.10) y (11.11) pueden representarse así:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_B = M_{\text{máx}} \left( \frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_x} \right) < [\sigma_+]; \quad (11.12)$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_D = -M_{\text{máx}} \left( \frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_x} \right) < [\sigma_-]. \quad (11.13)$$

La determinación del tamaño de la sección en el caso de la flexión no plana se realiza mediante el método de comprobación, tomando diferentes relaciones de los módulos de la sección. Las tensiones tangenciales pueden determinarse mediante la fórmula de Zhuravski

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x}{J_x b}; \quad \tau_x = \frac{Q_x S_y}{J_y h}.$$

Los desplazamientos se determinan de acuerdo con el principio de independencia de acción de las fuerzas. Si  $w$  es la flecha en la dirección del eje principal  $y$ ;  $v$ , la flecha en la dirección del eje principal  $x$  (fig. 210), las ecuaciones diferenciales de flexión en los planos  $yOz$  y  $xOz$  tendrán el siguiente aspecto:

$$EJ_x \frac{d^2 w}{dz^2} = M_x; \quad EJ_y \frac{d^2 v}{dz^2} = M_y. \quad (11.14)$$

Las ecuaciones (11.14) se resuelven mediante cualquier método conocido igual que para la flexión simple.

La magnitud de la flecha total en cualquier sección de la viga puede obtenerse sumando geoméricamente las flechas en diferentes planos de acuerdo con la fórmula

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (11.15)$$

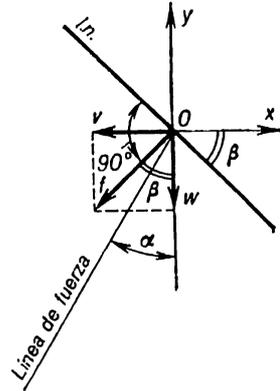


Fig. 210

## § 62. Flexión con tracción

La acción combinada de flexión y tracción (compresión) tiene lugar cuando: las cargas actúan en la dirección longitudinal y transversal; la tracción (compresión) es excéntrica.

**Flexión compuesta con tracción (compresión) de la barra recta.** En el caso general (fig. 211, a), cuando sobre la barra actúan fuerzas longitudinales y trans-

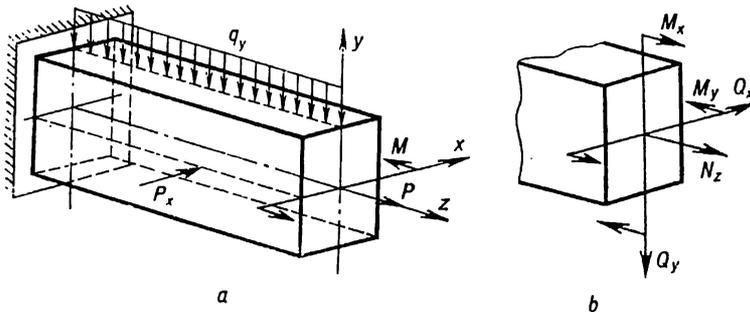


Fig. 211

versales que intersecan el eje de ésta, en la sección surgen los esfuerzos  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  al igual que el esfuerzo longitudinal  $N_z$  en dirección del eje  $z$  (fig. 211, b). Las tensiones normales en un punto arbitrario se determinan mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \quad (11.16)$$

Considerando lineal el estado tensional en el punto peligroso (prescindimos aquí de las tensiones tangenciales), escribamos la condición de resistencia en la forma corriente:

$$\sigma_{\text{máx}} < [\sigma]. \quad (11.17)$$

Para la sección de doble simetría la fórmula (11.16) tendrá el siguiente aspecto:

$$\sigma_{\pm} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

En el caso de la flexión en el plano  $zy$

$$\sigma_{\pm} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x}. \quad (11.18)$$

Estas fórmulas se utilizan también durante el cálculo a la resistencia de pórticos planos y de arcos de pequeña curvatura.

**Tracción (compresión) excéntrica de la barra recta. Núcleo central de la sección.** En la práctica la flexión se combina, a menudo, con tracción (compresión), lo que está determinado por la aplicación excéntrica de la carga paralela al eje de la barra, cuando la resultante  $P$  no coincide con el eje de la viga (fig. 212). Denotemos las coordenadas del punto de aplicación de la resultante por  $x_P$  e  $y_P$ , y la distancia desde ese punto hasta el eje  $z$ , llamada excentricidad, por  $e$ . Los esfuerzos interiores en cualquier sección son iguales a:

$$N = P; \quad M_y = Px_P; \quad M_x = Py_P,$$

y las tensiones en un punto arbitrario de la sección se determinan mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y \quad (11.19)$$

o bien

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_P F}{J_y} x + \frac{y_P F}{J_x} y \right). \quad (11.20)$$

Esta fórmula también se puede expresar por medio de los radios de giro,

$$\sigma_z = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_P}{i_y^2} x + \frac{y_P}{i_x^2} y \right). \quad (11.21)$$

La ecuación de la línea neutra  $\sigma = 0$  la hallamos de (11.21):

$$\frac{x_P}{i_y^2} x_0 + \frac{y_P}{i_x^2} y_0 = -1. \quad (11.22)$$

Hallamos de (11.22) los segmentos seccionados por la línea neutra en los ejes  $y$  y  $x$  (fig. 213), considerando  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,

$$x_n = -\frac{i_y^2}{x_P}; \quad y_n = -\frac{i_x^2}{y_P}. \quad (11.23)$$

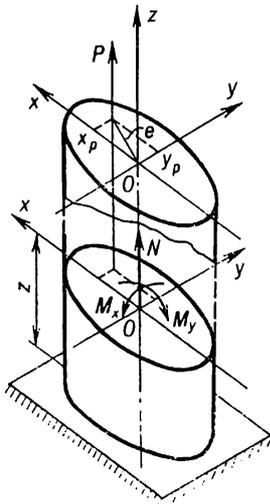


Fig. 212

De (11.23) se desprende que la línea neutra interseca los ejes de coordenadas en los puntos que pertenecen al cuadrante opuesto a aquel en que se encuentra el punto de aplicación de la fuerza  $P$ .

Las condiciones de resistencia para los puntos donde las tensiones de tracción y de compresión son máximas (puntos  $A$  y  $B$  en la fig. 213, respectivamente) pueden escribirse en la siguiente forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_A = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{x_P}{i_y^2} x_A + \frac{y_P}{i_x^2} y_A \right) < [\sigma_+]; \quad (11.24)$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma_B = \frac{P}{F} \left( 1 - \frac{x_P}{i_y^2} x_B - \frac{y_P}{i_x^2} y_B \right) < [\sigma_-]. \quad (11.25)$$

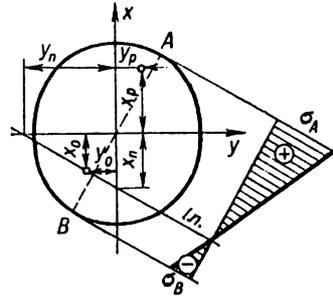


Fig. 213

Los diagramas de las tensiones  $\sigma_x$  se dan en la fig. 213.

Es cómodo representar la condición de resistencia para la barra de sección rectangular de la siguiente manera:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} < [\sigma]. \quad (11.26)$$

Las fórmulas (11.24)–(11.26) también son justas en el caso de que la fuerza  $P$  es de compresión, a condición de que no haya peligro de pérdida de estabilidad.

Tanto la distancia de la línea neutra del centro de gravedad como las magnitudes de las zonas de la sección que experimentan tracción o compresión dependen de la excentricidad  $e$ . Es evidente que una de las zonas puede faltar (durante la tracción es la zona de compresión, durante la compresión, la de tracción), y la línea neutra no atravesará la sección.

Es de gran interés práctico, sobre todo durante la compresión excéntrica de columnas de materiales que resisten mal la tracción (por ejemplo, mampostería de ladrillo), saber aquel valor máximo de la excentricidad, con el cual en la sección no aparecerán las tensiones de tracción, es decir, la línea neutra será tangente a la sección.

La zona alrededor del centro de gravedad de la sección, dentro de la cual la aplicación de la fuerza  $P$  origina en todos los puntos de la sección transversal tensiones de un signo, se llama NÚCLEO CENTRAL DE LA SECCIÓN. Para determinar el núcleo central de la sección es necesario comprobar diferentes posiciones de la línea neutra, trazándola tangencialmente al contorno sin intersecarlo en ningún punto (fig. 214) y calcular las coordenadas de los puntos correspondientes de aplicación de la fuerza mediante las siguientes fórmulas que se desprenden de (11.23):

$$y_P = -\frac{i_x^2}{y_n}; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{x_n}. \quad (11.27)$$

Los puntos calculados de tal manera son los que determinan el contorno del núcleo central de la sección.

Al girar la línea neutra respecto a cierto punto inmóvil del contorno de la sección, por ejemplo, el punto  $A$ , el punto de aplicación de la fuerza se desplaza a lo largo de cierta recta, por ejemplo 2–3.

Para construir el núcleo central de la sección de alguna figura, por ejemplo, un rectángulo (fig. 215), es necesario examinar una serie de posiciones de la línea neutra que coincidan con los lados de la sección. Haciendo coincidir la línea neutra con el lado  $CD$  (posición 1-1) obtenemos:

$$y_n = \frac{b}{2}; \quad x_n = \infty; \quad \text{entonces a base de (11.27),}$$

$$y_P = -\frac{i_x^2}{y_n} = -\frac{b}{6}; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0,$$

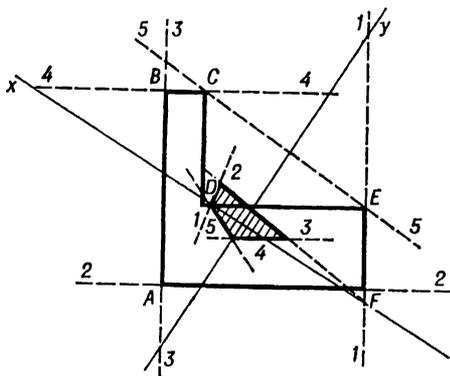


Fig. 214

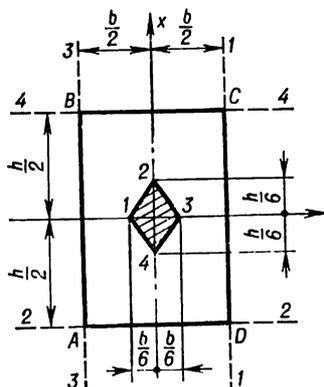


Fig. 215

donde

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}.$$

De tal manera determinaremos la coordenada del punto 1 del núcleo central de la sección. Haciendo coincidir la posición de la línea neutra con el lado  $AD$  (posición 2-2), obtenemos por analogía

$$y_n = \infty; \quad x_n = -\frac{h}{2},$$

y las coordenadas del punto 2 del núcleo central serán las siguientes:

$$y_P = 0; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{x_n} = -\frac{h^2}{12 \left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6}.$$

Tomando las posiciones correspondientes de la línea neutra 3-3 y 4-4, determinamos, por analogía, las coordenadas de los puntos 3 y 4 del núcleo central.

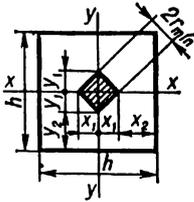
En la tabla 21 se dan la forma y dimensiones del núcleo central de la sección para diferentes secciones de barras.

Forma y dimensiones del núcleo central de la sección

Sección transversal; núcleo central de la sección (sombreado)

Dimensiones del núcleo central de la sección

Cuadrado



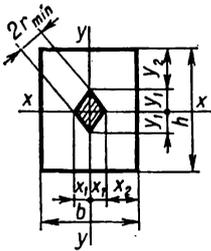
$$x_1 = y_1 = \frac{h}{6} ;$$

$$x_2 = y_2 = \frac{h}{3} ;$$

$$r_{\min} = 0,0589 h$$

El núcleo central es un cuadrado

Rectángulo



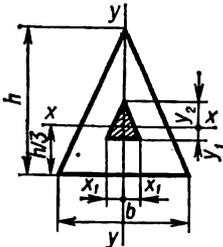
$$x_1 = \frac{b}{6} ; \quad y_1 = \frac{h}{6} ;$$

$$x_2 = \frac{b}{3} ; \quad y_2 = \frac{h}{3} ;$$

$$r_{\min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$$

El núcleo central es un rombo

Triángulo isósceles



$$x_1 = \frac{b}{8} ; \quad y_1 = \frac{h}{12} ; \quad y_2 = \frac{h}{6} .$$

Cuando  $h = \frac{\sqrt{3}}{2} b$  (triángulo equilátero)

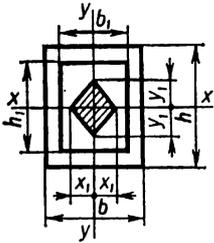
$$x_1 = \frac{b}{8} ; \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{24} b ; \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} b$$

El núcleo central es semejante a la sección transversal

Sección transversal; núcleo central de la sección (sombreado)

Dimensiones del núcleo central de la sección

Rectángulo hueco



$$x_1 = \frac{1}{6} \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{b(bh - b_1h_1)} ;$$

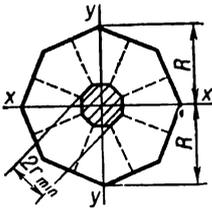
$$y_1 = \frac{1}{6} \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{h(bh - b_1h_1)} .$$

Cuando  $h = b$  y  $h_1 = b_1$  (cuadrado hueco)

$$r_{\min} = 0,0589 h \left[ 1 + \left( \frac{h_1}{h} \right)^2 \right]$$

El núcleo central es un rombo

Octágono



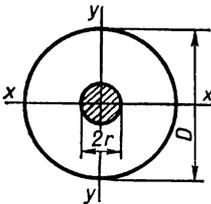
$$r_{\min} = 0,2256 R$$

Si el octágono es hueco (radio de la circunferencia circunscrita exterior es  $R_2$ , de la interior,  $R_1$ ; el espesor de la pared es igual a  $0,924(R_2 - R_1)$ ), se tiene

$$r_{\min} = 0,2256R_2 \left[ 1 + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]$$

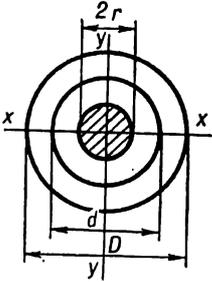
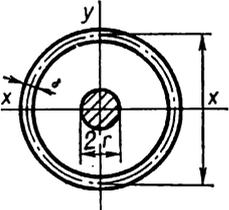
El núcleo central es un octágono

Círculo



$$r = \frac{D}{8}$$

El núcleo central es un círculo

Sección transversal; núcleo central de la sección (sombreado)	Dimensiones del núcleo central de la sección
<p>Círculo hueco</p>  <p>El núcleo central es un círculo</p>	$r = \frac{D}{8} \left[ 1 + \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]$
<p>Tubo de paredes delgadas</p>  <p>El núcleo central es un círculo</p>	$r = \frac{D}{4}$

§ 63. Flexión con torsión

**Arbol circular.** La acción combinada de flexión y torsión es un caso más característico de sollicitación de los árboles. En este estado tensional tienen lugar las cinco componentes de esfuerzos interiores:

$$M_{tor} = M_z; \quad M_y; \quad M_x; \quad Q_y \text{ y } Q_x.$$

Para el cálculo de los árboles se construyen primeramente los diagramas de los momentos flectores  $M_x$  y  $M_y$ , del momento resultante  $M$ , así como de los momentos torsionales  $M_{tor}$  y se determina la sección peligrosa (fig. 216, a, b, c, d, e). El momento flector resultante se halla mediante la fórmula

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \tag{11.28}$$

Siendo conocidos  $M$  y  $M_{tor}$ , en la sección peligrosa se determinan las tensiones normales y tangenciales máximas en los puntos peligrosos de la sección (fig. 217) mediante las siguientes fórmulas:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}; \tag{11.29}$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{M_{tor}}{W_p}. \tag{11.30}$$

Las tensiones principales en el punto más peligroso (punto *B* en la fig. 218) serán (véase el § 52)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (11.31)$$

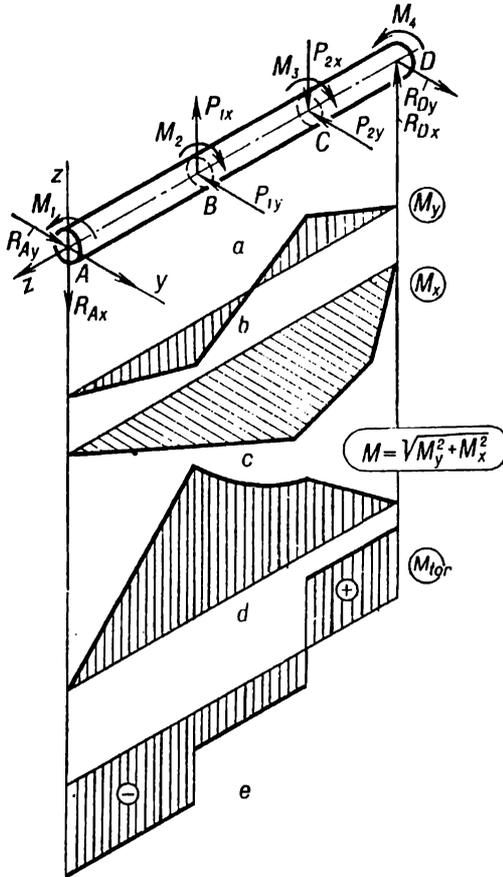


Fig. 216

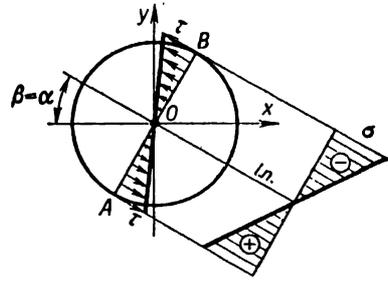


Fig. 217

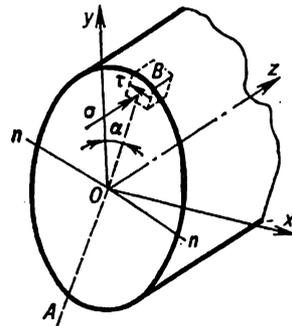


Fig. 218

Con el fin de comprobar la resistencia de un elemento separado cerca del punto peligroso se debe utilizar una de las fórmulas de la teoría correspondiente de resistencia:

$$\sigma_{\text{eq}M} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < [\sigma]; \quad (11.32)$$

$$\sigma_{\text{eq}IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \quad (11.33)$$

donde

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

La fórmula (11.32) sirve para los materiales frágiles cuando  $m < 1$ , y para los materiales plásticos cuando  $m = 1$ .

Sustituyendo en las fórmulas (11.32) y (11.33) las expresiones para las tensiones y teniendo en cuenta que  $W_p = 2W$ , hallamos

$$\sigma_{\text{eq } M} = \frac{1}{W} \left[ \frac{1-m}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{tor}}^2 + M_x^2 + M_y^2} \right] \leq [\sigma]; \quad (11.34)$$

$$\sigma_{\text{eq } IV} = \frac{1}{W} \sqrt{0,75 M_{\text{tor}}^2 + M_x^2 + M_y^2} < [\sigma]. \quad (11.35)$$

Los segundos factores en estas fórmulas son los momentos reducidos  $M_{\text{red}}$ , cuya acción equivale a la acción conjunta de los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{\text{tor}}$  de acuerdo con las teorías de resistencia aceptadas

$$M_{\text{red } M} = \frac{1-m}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{tor}}^2 + M_x^2 + M_y^2}; \quad (11.36)$$

$$M_{\text{red } IV} = \sqrt{0,75 M_{\text{tor}}^2 + M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,75 M_{\text{tor}}^2 + M^2}. \quad (11.37)$$

Obtenemos, por analogía, para las demás teorías de resistencia:

$$M_{\text{red } I} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{tor}}^2} \right]; \quad (11.38)$$

$$M_{\text{red } II} = 0,35 \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + 0,65 \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{tor}}^2} \quad (11.39)$$

(siendo  $\mu = 0,3$ );

$$M_{\text{red } III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{tor}}^2} \quad (11.40)$$

Las condiciones de resistencia (11.34) y (11.35) pueden expresarse mediante una fórmula

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{M_{\text{red}}}{W} < [\sigma]. \quad (11.41)$$

De aquí

$$W > \frac{M_{\text{red}}}{[\sigma]}; \quad (11.42)$$

determinamos el diámetro del árbol de la siguiente condición:

$$d > \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{red}}}{\pi [\sigma]}} \approx \sqrt[3]{10 \frac{M_{\text{red}}}{[\sigma]}}. \quad (11.43)$$

Las fórmulas dadas son totalmente aplicables también para el cálculo de árboles de sección anular.

**Vigueta de sección rectangular.** Al solicitar una vigueta de sección rectangular por el sistema de las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$  (fig. 219, a) que originan en la sección los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{\text{tor}}$ , el cálculo se realiza de acuerdo con el siguiente esquema: se descomponen las fuerzas exteriores en componentes, reduciéndolos al eje de la vigueta. Para hallar la sección peligrosa se construyen los diagramas

de  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{tor}$  (fig. 219, b). Una vez determinada en los diagramas la sección peligrosa  $I-I$  situada a la izquierda del punto de aplicación de la fuerza  $P_2$ , se halla en ésta el punto peligroso, construyendo con este fin los diagramas de las tensiones de todos los factores de fuerza (fig. 220, a, b, c, d, e, f):

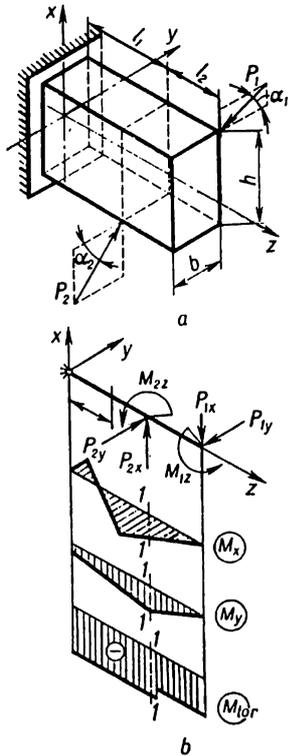


Fig. 219

correspondientes a los puntos  $M$  o  $K$  del rectángulo. Así, para los puntos  $C$ ,  $L$ ,  $K$  tendremos:

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} < [\sigma]; \quad (11.44)$$

$$\tau_L = \frac{M_{tor}}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2} \frac{Q_x}{bh}; \quad (11.45)$$

$$\tau_K = \gamma \frac{M_{tor}}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh}. \quad (11.46)$$

Por regla general, las tensiones tangenciales debidas a las fuerzas cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  son pequeñas y se puede prescindir de ellas.

Las tensiones equivalentes en los puntos  $L$  y  $K$  de acuerdo con la IV teoría de resistencia y la teoría de Coulomb-Mohr son iguales a:

$$\sigma_{eq IV} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_{tor}}{\alpha hb^2}\right)^2} < [\sigma]; \quad (11.47)$$

$$\sigma_{eq M} = \frac{1-m}{2} \frac{M_x}{W_x} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4 \left(\frac{M_{tor}}{\alpha hb^2}\right)^2} < [\sigma]; \quad (11.48)$$

en el punto  $K$

$$\sigma_{\text{eq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_{\text{tor}}}{\alpha h b^2}\right)^2} < [\sigma]. \quad (11.49)$$

$$\sigma_{\text{eq M}} = \frac{1-m}{2} \frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_{\text{tor}}}{\alpha h b^2}\right)^2} < [\sigma]. \quad (11.50)$$

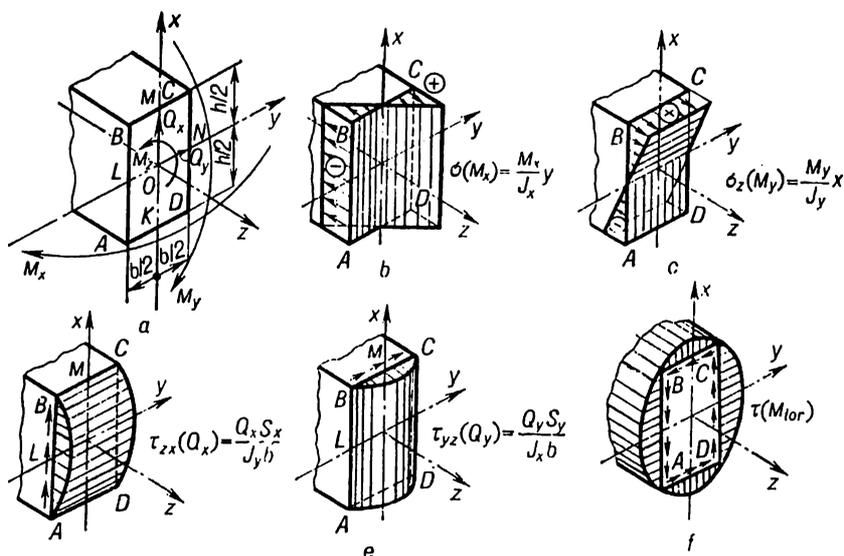


Fig. 220

Así pues, el punto más peligroso se determina solamente como resultado del cálculo de las tensiones equivalentes en todos los tres puntos ( $C$ ,  $L$  y  $K$ ) mediante las fórmulas (11.44), (11.47)–(11.50). En cada caso concreto la posición del punto más peligroso depende de la relación de los momentos  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_{\text{tor}}$ .

Caso general de acción de las fuerzas sobre la viga. Si en la sección de la barra actúan la fuerza axial  $N_z$ , los momentos flectores en los planos principales  $M_x$  y  $M_y$ , al igual que el momento torsional  $M_{\text{tor}}$ , la condición de resistencia, por ejemplo, según la IV teoría de resistencia en el punto  $K$  (fig. 220,  $a$ ) será

$$\sigma_{\text{eq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_{\text{tor}}}{\alpha h b^2}\right)^2} < [\sigma]; \quad (11.51)$$

por analogía, en el punto  $L$

$$\sigma_{\text{eq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{\text{tor}}}{\alpha h b^2}\right)^2} < [\sigma]. \quad (11.52)$$

**TEOREMAS GENERALES SOBRE SISTEMAS ELÁSTICOS.  
MÉTODOS GENERALES DE DETERMINACIÓN  
DE LOS DESPLAZAMIENTOS**

**§ 64. Fuerzas y desplazamientos generalizados**

Las cargas exteriores que se encuentran en los problemas de resistencia de materiales y mecánica de construcción son muy variadas y representan, generalmente, un grupo de fuerzas. El trabajo de un grupo de fuerzas constantes puede representarse en forma de producto de dos magnitudes

$$A = P\Delta_P, \quad (12.1)$$

donde el factor  $P$  depende solamente de las fuerzas del grupo y se llama *fuerza generalizada*, y  $\Delta_P$  depende de los desplazamientos y se llama *desplazamiento generalizado*.

De este modo, por la fuerza generalizada se entenderá cualquier carga (fuerzas concentradas, momentos concentrados, cargas distribuidas) que es capaz de realizar trabajo en el desplazamiento generalizado correspondiente.

Así, al examinar el trabajo de un sistema de fuerzas actuando sobre la barra (fig. 221), tendremos

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P(\Delta_1 - \Delta_2) = P\Delta_P,$$

siendo  $P$  la fuerza generalizada;  $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$ , el desplazamiento generalizado.

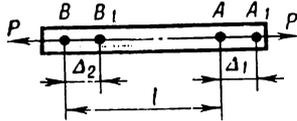


Fig. 221

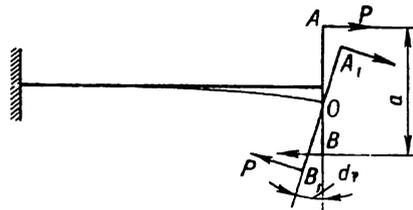


Fig. 222

El trabajo del sistema de fuerzas (fig. 222)

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P(OA + OB) d\theta = Pad\theta = M d\theta.$$

Aquí el momento  $M=Pa$  no es sino la fuerza generalizada, y el ángulo de giro  $d\theta$ , el desplazamiento generalizado correspondiente.

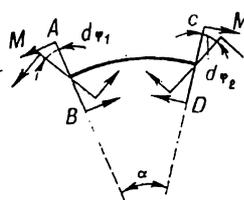


Fig. 223

Para el sistema de fuerzas (fig. 223) el momento  $M$  es la fuerza generalizada, y el cambio del ángulo  $\alpha$  entre los elementos  $AB$  y  $CD$ , el desplazamiento generalizado, es decir,

$$\Delta_P = d\theta_1 + d\theta_2.$$

Se acostumbra denotar los desplazamientos generalizados (tanto lineales como angulares) por las letras  $\Delta$  y  $\delta$  con doble índice correspondiente. El primero

señala el punto y la dirección del desplazamiento, mientras que el segundo, el factor de fuerza que provocó ese desplazamiento. Por ejemplo,  $\Delta_{PP}$  significa el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza  $P$  en la dirección de su acción provocado por la misma fuerza  $P$  (fig. 224, a);  $\Delta_{MM}$ , el desplazamiento del punto de aplicación del momento  $M$  en la dirección de acción del momento provocado por ese momento (fig. 224, b).

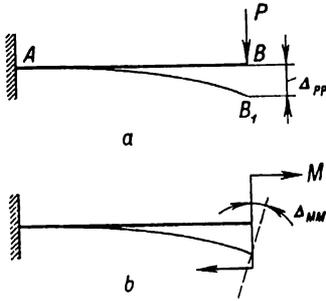


Fig. 224

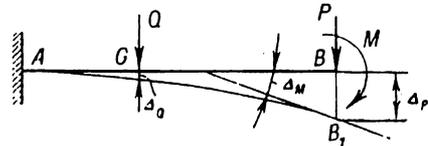


Fig. 225

Para designar el desplazamiento total provocado por varios factores de fuerza, se conserva solamente el primer índice de  $\Delta$ . Así, la flecha total y el ángulo de giro del extremo de la viga (fig. 225) se expresan, respectivamente, mediante las siguientes fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_P &= \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \\ \Delta_M &= \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM}. \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

Los desplazamientos originados por la fuerza unitaria ( $\bar{P} = 1$ ) o el momento unitario ( $\bar{M} = 1$ ) se denotan, ordinariamente, por la letra  $\delta$  y se llaman *desplazamiento unitario*. Si la fuerza unitaria  $P = 1$  originó el desplazamiento  $\delta_P$ , entonces el desplazamiento total  $\Delta_P$  originado por la fuerza  $P$  será

$$\Delta_P = P\delta_P. \quad (12.3)$$

De aquí se desprende la dimensión del desplazamiento unitario:

$$[\delta] = \frac{\text{dimensión del desplazamiento generalizado}}{\text{dimensión de la fuerza generalizada}}. \quad (12.4)$$

Si los factores de fuerza que actúan sobre el sistema se denotan correspondientemente por  $X_1, X_2, X_3$ , etc. (fig. 226), los desplazamientos por la dirección de cada uno de ellos pueden expresarse mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

donde

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} &= \Delta_{11}; & X_2\delta_{12} &= \Delta_{12}; & X_3\delta_{13} &= \Delta_{13}; & \dots \\ X_i\delta_{mi} &= \Delta_{mi}. \end{aligned}$$

Es posible determinar la dimensión de los desplazamientos  $\delta_{mi}$  multiplicando la última igualdad por  $X_m$ . La expresión  $X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$  tiene la dimensión del trabajo (kgf·cm), de donde hallamos

$$[\delta_{mi}] = \frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{[X_m] [X_i]}.$$

Por ejemplo, en la fórmula (12.5) la dimensión de

$$[\delta_{13}] = \frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{[X_1] [X_3]} = \frac{\text{kgf} \cdot \text{cm}}{\text{kgf} \cdot \text{kgf} \cdot \text{cm}} = \frac{1}{\text{kgf}}.$$

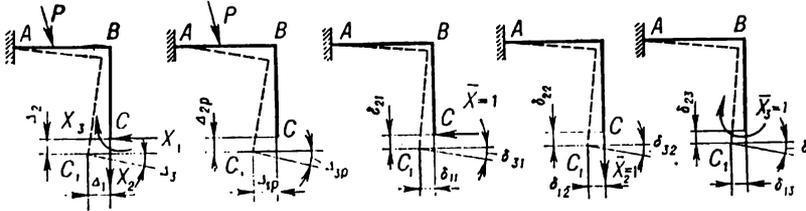


Fig. 226

### § 65. Trabajo de las fuerzas exteriores

Del examen del cuadro de deformación del elemento elástico (fig. 227, a) dentro de los límites de la ley de Hooke, representado en las siguientes coordenadas: fuerza generalizada  $P$  — desplazamiento generalizado  $\Delta$  (fig. 227, b), se desprende que el incremento de la fuerza  $dP$  origina un desplazamiento infinitamente pequeño  $d\Delta$ . En este caso el trabajo de las fuerzas exteriores, si se prescinde de las magnitudes infinitamente pequeñas de segundo orden, es igual a

$$dA = (P + dP) d\Delta \approx Pd\Delta.$$

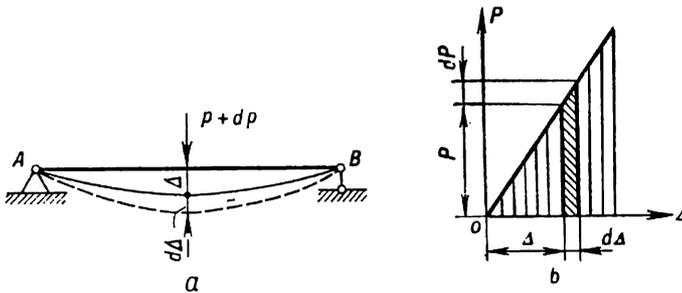


Fig. 227

El trabajo total realizado por la fuerza generalizada  $P$  aplicada estáticamente que provocó el desplazamiento generalizado  $\Delta = P\delta_{PP}$ , se expresa mediante la fórmula

$$A = \int_{\Delta} Pd\Delta = \int_0^P Pd(P\delta_{PP}) = \int_0^P P\delta_{PP} dP = \frac{\delta_{PP} P^2}{2};$$

$$A = \frac{\delta_{PP} P^2}{2} = \frac{\Delta^2}{2\delta_{PP}} = \frac{P\Delta}{2}. \quad (12.6)$$

Así pues, el trabajo real durante la acción estática de la fuerza generalizada sobre el sistema elástico es igual a la mitad del producto del valor definitivo de la fuerza por el valor definitivo del desplazamiento correspondiente.

Cuando el sistema elástico se somete a la acción de varias fuerzas generalizadas  $P_1, P_2, \dots, P_i$  (fig. 228), el trabajo de deformación es igual a la semisuma

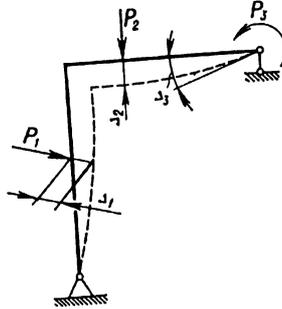


Fig. 228

de los productos de valores definitivos de las fuerzas generalizadas por los desplazamientos generalizados totales definitivos correspondientes

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \quad (12.7)$$

y no depende del orden de sollicitación del sistema.

### § 66. Trabajo de las fuerzas interiores

Durante la deformación elástica en los elementos del cuerpo deformado se desarrollan fuerzas interiores llamadas *fuerzas de resistencia elástica* (fig. 229) Esas fuerzas también realizan trabajo. Puesto que las direcciones de las fuerzas

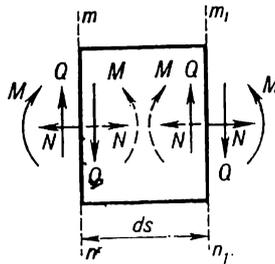


Fig. 229

elásticas (mostradas con líneas de trazos) son contrarias a los desplazamientos (en los cuales éstas realizan trabajo) originados por las fuerzas exteriores (mostradas con líneas llenas), *el trabajo de las fuerzas interiores siempre es negativo*.

El trabajo de las fuerzas interiores  $N, Q$  y  $M$ , que surgen en un elemento de la barra de longitud  $ds$  (fig. 229), realizado por la fuerza axial  $N$  en el desplazamiento

$$A(ds) = \frac{N ds}{EF},$$

por el momento  $M$  en el desplazamiento

$$d\theta = \frac{M ds}{EJ}$$

y por la fuerza cortante  $Q$  en el desplazamiento

$$\gamma ds = k \frac{Q ds}{GF}, \quad (12.8)$$

puede expresarse mediante la siguiente fórmula:

$$dW = - \frac{M^2 ds}{2EJ} - \frac{N^2 ds}{2EF} - k \frac{Q^2 ds}{2GF} \quad (12.9)$$

Integrando (12.9) dentro de los límites de cada barra y sumando los resultados por todas las barras del sistema, obtendremos la fórmula para el trabajo de las fuerzas interiores en el caso de flexión plana:

$$W = - \sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum k \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}. \quad (12.10)$$

Conviene hacer notar que la expresión (12.8) se obtuvo de la condición

$$\gamma ds = - \frac{dW_Q}{Q},$$

donde

$$\begin{aligned} dW_Q &= - \int_F \frac{1}{2} \tau \gamma ds dF = - \int_F \frac{\tau^2 ds}{2G} dF = \\ &= - \frac{Q^2 ds}{2GJ_x^2} \int_F \frac{S_x^2}{b^2} dF = - k_y \frac{Q^2 ds}{2GF}. \end{aligned}$$

$k_y = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_x^2}{b^2} dF$  es el coeficiente que depende de la forma de la sección.

En particular, para una sección rectangular  $b \times h$  se tiene

$$F = bh; \quad J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad S_x = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right);$$

$$k_y = \frac{9}{2h} \int_0^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) dy = 1, 2;$$

para una sección circular,  $k = \frac{32}{27}$ ; para perfiles laminados aproximadamente,

$k = \frac{F}{F_p}$ , siendo  $F_p$  = el área del alma;  $F$ , el área total de la sección.

Para el deslizamiento puro, cuando

$$\tau = \frac{Q}{F},$$

$$dW_Q = -\frac{1}{2} \int_F \tau \gamma ds dF = -\frac{1}{2} \tau F \gamma ds = -\frac{Q \gamma ds}{2} = -\frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

En el caso de que en la barra actúa el momento torsional  $M_{tor}$ , haciendo girar el tramo elemental de la barra un ángulo

$$d\varphi = \frac{M_{tor} ds}{GJ_t},$$

donde  $GJ_t$  es la rigidez de la sección transversal de la barra a la torsión, el trabajo elemental de las fuerzas interiores a cuenta de la torsión es igual a

$$dW_{tor} = -\frac{1}{2} M_{tor} d\varphi = -\frac{M_{tor}^2 ds}{2GJ_t},$$

y el trabajo total de las fuerzas interiores en la barra de longitud  $l$  será

$$W_{tor} = -\int_l \frac{1}{2} \frac{M_{tor}^2 ds}{GJ_t}. \quad (12.11)$$

En el caso general (fig. 230), cuando en la sección de la barra actúan todos los seis factores de fuerza ( $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z = M_{tor}$ ), el trabajo de las

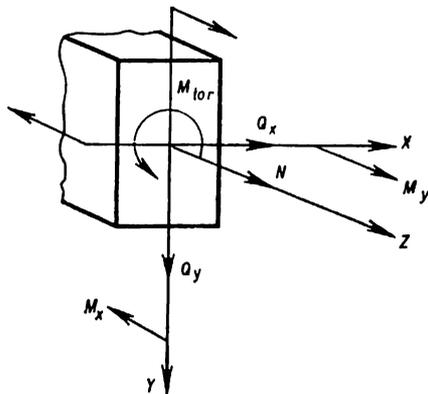


Fig. 230

fuerzas interiores (fuerzas de elasticidad) se determinará de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$W = -\int_s \frac{M_x^2 ds}{2EJ_x} - \int_s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - \int_s \frac{M_{tor}^2 ds}{2GJ_t} - \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} - \int_s k_x \frac{Q_x^2 ds}{2GF} - \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{2GF}. \quad (12.12)$$

La fórmula (12.12) es válida también para las barras de curvatura pequeña.

**§ 67. Aplicación del principio de desplazamientos posibles a los sistemas elásticos**

El principio de desplazamientos posibles, con arreglo a los sistemas elásticos, puede formularse así: *si el sistema se halla en equilibrio bajo la acción de la carga aplicada, la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores en los desplazamientos infinitamente pequeños posibles de los puntos del sistema es igual a cero*

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0, \quad (12.13)$$

donde  $P_i$  son las fuerzas exteriores;  $\Delta_{im}$ , los desplazamientos posibles de los puntos de aplicación de esas fuerzas;  $\sum P_i \Delta_{im}$ , el trabajo de las fuerzas exteriores;  $W_{im}$ , el trabajo de las fuerzas interiores.

En el proceso de realización por el sistema del desplazamiento posible, la magnitud y la dirección de las fuerzas exteriores e interiores siguen invariables. Por eso, al calcular los trabajos, se debe tomar no la mitad, sino la magnitud total del producto de las fuerzas y los desplazamientos correspondientes.

Tomando en consideración la pequeñez de las deformaciones y su dependencia lineal de las cargas, pueden tomarse en calidad de *desplazamientos posibles los desplazamientos elásticos originados por cualquier tipo de carga y pasados sin infringir los vínculos*. El trabajo de las fuerzas exteriores e interiores en los desplazamientos posibles se llama *trabajo posible o virtual*.

Analicemos dos estados de un sistema plano que se halla en equilibrio, a saber: el estado *a*, cuando el sistema se deforma por la fuerza generalizada  $P_a$  (fig. 231, *a*) y el estado *b* del sistema deformado por la fuerza  $P_b$  (fig. 231, *b*).

Los desplazamientos del estado *b* pueden considerarse como posibles para el estado *a*, y al revés, los desplazamientos del estado *a* son posibles para el estado *b*.

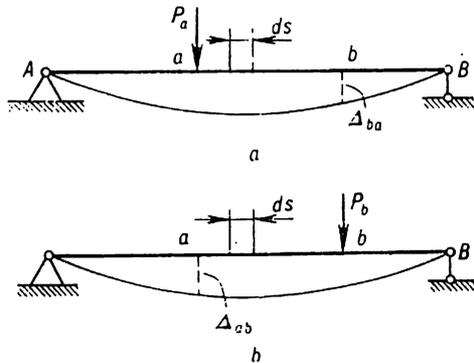


Fig. 231

Por eso el trabajo  $A_{ab}$  de las fuerzas del estado *a* en los desplazamientos del estado *b*, y el trabajo  $A_{ba}$  del estado *b* en los desplazamientos del estado *a* son iguales, respectivamente, a

$$A_{ab} = P_a \Delta_{ab}; \quad (12.14)$$

$$A_{ba} = P_b \Delta_{ba}. \quad (12.15)$$

El trabajo de las fuerzas interiores del estado *a* (fig. 232, *a*, líneas de trazos) en los desplazamientos originados por la carga del estado *b* (fig. 232, *a*, *b*) puede

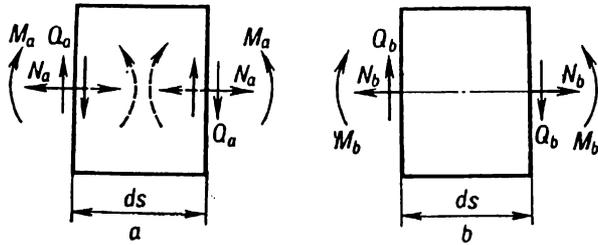


Fig. 232

hallarse al examinar el trabajo de las fuerzas interiores durante la deformación de un elemento de la barra de longitud *ds* (fig. 233).

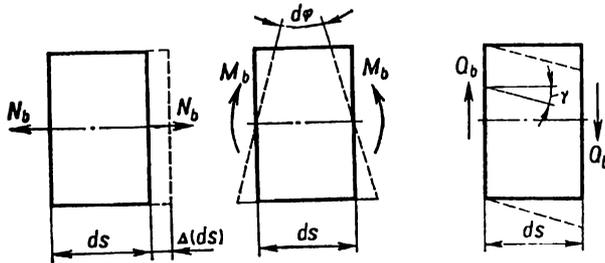


Fig. 233

A continuación se da el esquema para determinar el trabajo de las fuerzas interiores.

Esfuerzo exterior que actúa sobre el elemento (fig. 232, <i>b</i> )	Deformación del elemento (fig. 233)	Trabajo de la fuerza interior del estado <i>a</i> en los desplazamientos del estado <i>b</i>	Trabajo de la fuerza interior del estado <i>a</i> en el sistema de barras
$N_b$	$(\Delta ds)_b = \frac{N_b ds}{EF}$	$- N_a (\Delta ds)_b =$ $= - \frac{N_a N_b ds}{EF}$	$- \sum \int_s \frac{N_a N_b ds}{EF}$
$Q_b$	$(\gamma ds)_b = k \frac{Q_b ds}{GF}$	$- Q_a (\gamma ds)_b =$ $= - k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}$	$- \sum \int_s k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}$
$M_b$	$(d\theta)_b = \frac{M_b ds}{EJ}$	$- M_a (d\theta)_b =$ $= - \frac{M_a M_b ds}{EJ}$	$- \sum \int_s \frac{M_a M_b ds}{EJ}$

Así pues, el valor total del trabajo posible de las fuerzas interiores del sistema de barras será

$$W_{ab} = - \sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} - \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (12.16)$$

Sustituyendo (12.14) y (12.16) en (12.13), obtendremos la expresión general del principio de posibles desplazamientos para un sistema de barras elástico plano

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[ \sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a Q_b ds}{GF} \right] = 0. \quad (12.17)$$

Si en calidad de desplazamientos posibles se toman los desplazamientos reales  $\Delta_a$  originados por la carga dada  $P_a$ , la expresión (12.17) tendrá el siguiente aspecto:

$$\sum P_a \Delta_a - \left[ \sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0 \quad (12.18)$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum P_a \Delta_a - \frac{1}{2} \left[ \sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0. \end{aligned} \quad (12.19)$$

De tal manera

$$A + W = 0, \quad (12.20)$$

donde

$$A = \frac{1}{2} \sum P_a \Delta_a, \quad (12.21)$$

representa el trabajo real de las fuerzas exteriores en el proceso de la deformación estática, y

$$W = - \frac{1}{2} \left[ \sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] \quad (12.22)$$

no es sino el trabajo de las fuerzas interiores en el proceso de la deformación estática.

De la ecuación (12.20) se desprende que los valores reales del trabajo de las fuerzas exteriores e interiores son iguales por la magnitud y contrarios por el signo.

### § 68. Teoremas de reciprocidad de los trabajos y los desplazamientos

Veamos un sistema elástico en dos estados, el 1 (fig. 234, a) y el 2 (fig. 234, b). A base del principio de desplazamientos posibles hallamos para el primer estado

$$P_1 \Delta_{12} - \sum_s \left[ \int \frac{M_1 M_2 ds}{EJ} + \int \frac{N_1 N_2 ds}{EF} + \int k \frac{Q_1 Q_2 ds}{GF} \right] = 0; \quad (12.23)$$

para el segundo estado

$$P_1 \Delta_{21} - \sum \left[ \int \frac{M_2 M_1 ds}{EJ} + \int \frac{N_2 N_1 ds}{EF} + \int k \frac{Q_2 Q_1 ds}{GF} \right] = 0. \quad (12.24)$$

Puesto que las expresiones para los trabajos de las fuerzas interiores en ambas fórmulas son iguales, hallamos de (12.23) y (12.24) la igualdad

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (12.25)$$

La fórmula (12.25) expresa el teorema de reciprocidad de los trabajos (teorema de Betti) que reza: *el trabajo posible de las fuerzas exteriores (o interiores) del estado*

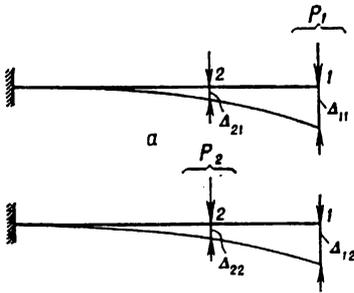


Fig. 234

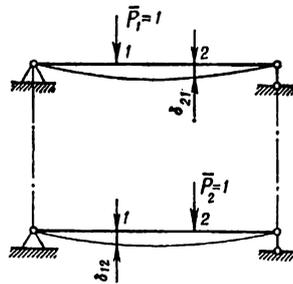


Fig. 235

*1 en los desplazamientos del estado 2 es igual al trabajo posible de las fuerzas exteriores (o interiores) del estado 2 en los desplazamientos del estado 1.*

En el caso particular, cuando  $\bar{P}_1 = 1$ ;  $\bar{P}_2 = 1$  (fig. 235), obtendremos a base de (12.15) la relación

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad (12.26)$$

que expresa el teorema de reciprocidad de los desplazamientos (teorema de Maxwell): *el desplazamiento del punto de aplicación de la primera fuerza unitaria por su dirección debido a la acción de la segunda fuerza unitaria es igual al desplazamiento del punto de aplicación de la segunda fuerza unitaria por su dirección debido a la acción de la primera fuerza unitaria.*

### § 69. Fórmulas generales para determinar los desplazamientos. Procedimiento de Mohr

Es fácil obtener fórmulas generales para determinar los desplazamientos valiéndose del principio de desplazamientos posibles, si en calidad de estado auxiliar se toma el sistema cargado en el punto, cuyo desplazamiento nos interesa, por la fuerza generalizada correspondiente  $\bar{X}_i = 1$  que debe realizar el trabajo en el desplazamiento posible, como lo es el desplazamiento  $\Delta_{iP}$ , que nos interesa a nosotros, bajo la acción de las fuerzas exteriores.

Denotando los esfuerzos originados por el sistema de fuerzas exteriores  $\sum P$  (fig. 236, a) por  $M_P, N_P, Q_P$ , y los esfuerzos originados por la fuerza unitaria  $X_i = 1$  (fig. 236, b), por  $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ , se puede escribir el principio de despla-

mientos posibles para el estado auxiliar (tomando el desplazamiento real en cantidad del posible) en la forma siguiente:

$$1 \cdot \Delta_{iP} = \sum \left[ \int_s \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \int_s \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \int_s k \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF} \right]. \quad (12.27)$$

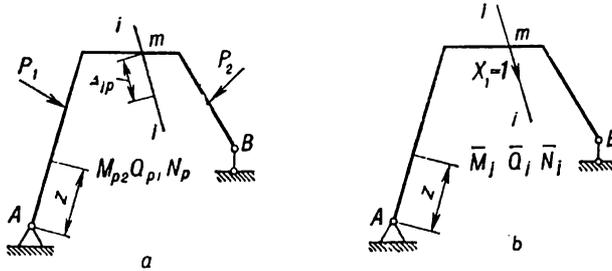


Fig. 236

Es evidente que en el caso más general, siendo presentes todas las seis componentes de las fuerzas interiores, la fórmula (12.27) puede escribirse así:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \left[ \frac{\bar{M}_i^x M_P^x}{EJ_x} + \frac{\bar{M}_i^y M_P^y}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_i^{\text{tor}} M_P^{\text{tor}}}{GJ_t} + k_x \frac{\bar{Q}_i^x Q_P^x}{GF} + k_y \frac{\bar{Q}_i^y Q_P^y}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} \right] ds. \quad (12.28)$$

La fórmula (12.28) es la más general y puede aplicarse también para el cálculo de barras de pequeña curvatura. La determinación de los desplazamientos según las fórmulas (12.27) y (12.28) se llama *procedimiento de Mohr* o *método de multiplicación de los diagramas*.

En la mayoría de los casos en la fórmula (12.27), durante la determinación de los desplazamientos en vigas, pórticos y arcos según el método de Mohr, se puede prescindir de la influencia de las deformaciones longitudinales y el deslizamiento, tomando en consideración tan sólo los desplazamientos originados por la flexión. Entonces la fórmula (12.27) para el sistema plano puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (12.29)$$

Para la sollicitación estérea la fórmula de Mohr adquiere el aspecto

$$\Delta_{iP} = \sum \left[ \int_s \frac{\bar{M}_i^x M_P^x ds}{EJ_x} + \int_s \frac{\bar{M}_i^y M_P^y ds}{EJ_y} + \int_s \frac{\bar{M}_i^{\text{tor}} M_P^{\text{tor}} ds}{GJ_t} \right]. \quad (12.30)$$

Durante el cálculo de vigas de celosía articuladas formadas de barras rectas, en la fórmula de Mohr se conserva el término que contiene solamente la fuerza a longitudinal

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} l. \quad (12.31)$$

La fórmula (12.31) se denomina *fórmula de Maxwell*.

El orden de determinación de los desplazamientos según el procedimiento de Mohr.

1. Se construye el sistema auxiliar y se le aplica la carga unitaria en el punto en que se necesita determinar el desplazamiento. Al determinar desplazamientos lineales en la dirección dada se aplica la fuerza unitaria, al determinar desplazamientos angulares, el momento unitario.

2. Para cada tramo del sistema se escriben las expresiones de los factores de fuerza en la sección arbitraria del sistema dado ( $M_P, N_P, Q_P$ ) y auxiliar ( $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ ).

3. Se calculan por todos los tramos del sistema las integrales de Mohr. Durante el cálculo de vigas, pórticos y arcos planos se hace uso de la fórmula (12.29), durante el cálculo de vigas de celosía, de la fórmula (12.31).

4. Si el desplazamiento calculado tiene el signo positivo, esto quiere decir que su dirección coincide con la de la fuerza unitaria. El signo negativo señala que el desplazamiento real es contrario a la dirección de la fuerza unitaria.

En la tabla 22 se dan las expresiones de la integral de Mohr para los casos más difundidos de combinación de los diagramas de  $M_i$  y  $M_P$  durante la flexión.

### § 70. Desplazamientos originados por el cambio de temperatura

Supongamos que el elemento  $ds$  de una barra está calentado por abajo hasta una temperatura  $t_i$ , y por arriba, hasta  $t_s$  (fig. 237, *a, b*), y además, que por la longitud de la sección la temperatura cambia según una ley lineal. Entonces los alargamientos de las fibras superiores e inferiores del elemento en cuestión son

$$\left. \begin{aligned} \Delta_s(ds) &= \alpha t_s ds; \\ \Delta_i(ds) &= \alpha t_i ds, \end{aligned} \right\} \quad (12.32)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación térmica lineal.

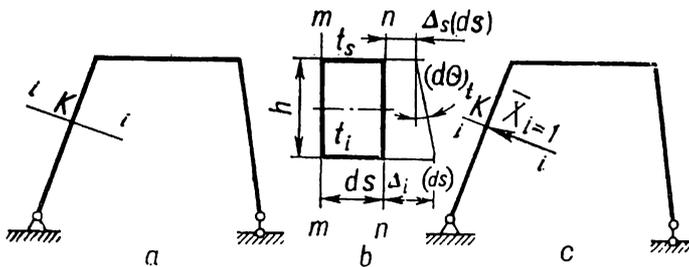


Fig. 237

El alargamiento por el eje del elemento calentado no uniformemente y el ángulo de giro recíproco de sus secciones extremas de altura  $h$  son iguales a

$$(\Delta ds)_t = \alpha \frac{t_s + t_i}{2} ds; \quad (12.33)$$

$$(d\theta)_t = \frac{\Delta_i(ds) - \Delta_s(ds)}{h} = \alpha \frac{t_i - t_s}{h} ds. \quad (12.34)$$

Para determinar el desplazamiento de cualquier punto  $K$  del sistema en cualquier dirección  $i - i$ , originado por la diferencia de temperaturas, hallamos

un sistema auxiliar y lo cargamos con la carga unitaria generalizada correspondiente  $\bar{X}_i = 1$  (fig. 237, c). Tomando el desplazamiento que nos interesa por el posible, escribamos de acuerdo con (12.27) la fórmula de desplazamientos posibles con arreglo al caso examinado:

$$\Delta_{it} = \sum_s \int \bar{M}_i(d\theta)_i + \sum_s \int \bar{N}_i(\Delta ds)_i. \quad (12.35)$$

Tomando en consideración (12.33) y (12.34), obtenemos

$$\Delta_{it} = \sum_l \int \bar{N}_i \alpha \frac{t_1 + t_3}{2} ds + \sum_l \int \bar{M}_i \alpha \frac{t_1 - t_3}{h} ds. \quad (12.36)$$

La fórmula (12.36) es utilizable también para el cálculo de viguetas de pequeña curvatura.

En las vigas de celosía donde actúan solamente esfuerzos longitudinales, los desplazamientos térmicos se determinan mediante la fórmula

$$\Delta_{it} = \sum \bar{N}_i \alpha t l, \quad (12.37)$$

donde  $t = \frac{t_1 + t_3}{2}$  es la temperatura por el eje de la barra.

### § 71. Cálculo de la integral de Mohr por el procedimiento de Vereschaguin

Resultó que era más cómodo determinar la integral de Mohr  $\int \bar{M}_i M_P dz$  para el caso en que el diagrama de la carga dada tiene una configuración arbitraria, y de la unitaria, rectilínea (fig. 238), mediante el método gráfico-analítico ofrecido por A. N. Vereschaguin.

Aceptemos las siguientes denotaciones:  $\Omega$  es el área del diagrama de  $M_P$  debido a la carga exterior;  $C$ , el centro de gravedad del diagrama;  $\bar{M}_C$ , la ordenada del diagrama debido a la carga unitaria debajo del centro de gravedad del diagrama de  $M_P$ .

Es obvio que

$$M_P dz = d\Omega$$

(diferencial del área del diagrama);

$$\bar{M}_i = z \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\int_l \bar{M}_i M_P dz = \operatorname{tg} \alpha \int_l z d\Omega;$$

$$\int_l z d\Omega = z_C \Omega; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot z_C = \bar{M}_C;$$

$$\int_l \bar{M}_i M_P dz = \Omega \bar{M}_C.$$

La fórmula general de desplazamientos para los sistemas que constan de elementos rectangulares

$$\Delta_{IP} = \sum_i \int \frac{\bar{M}_i M_P dz}{EJ}$$

se escribirá así:

$$\Delta_{IP} = \sum \frac{\Omega \bar{M}_C}{EJ} \quad (12.38)$$

Esta es la fórmula de Vereschaguin. El cálculo según esta fórmula se realiza por tramos, en cada uno de los cuales el diagrama rectangular debe ser sin inflexiones (fig. 239).

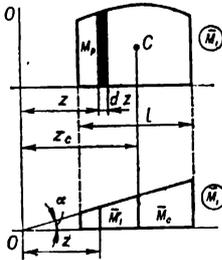


Fig. 238

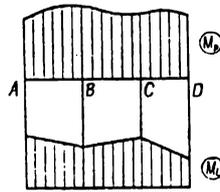


Fig. 239

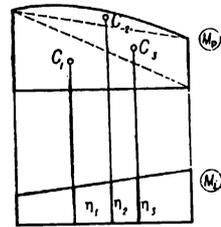


Fig. 240

En los casos de que ambos diagramas ( $\bar{M}_i$  y  $M_P$ ) son rectilíneos, se puede multiplicar el área de uno de ellos por la ordenada del otro situada bajo el centro de gravedad del primero. El diagrama compuesto de  $M_P$  puede ser dividido en figuras simples (fig. 240), para cada una de las cuales es fácil determinar la coordenada del centro de gravedad. El área de cada figura se multiplica por la ordenada del diagrama unitario bajo su centro de gravedad denotada por  $\eta_k$  (en vez de  $M_{Ck}$ ). En este caso la fórmula de Vereschaguin será

$$\Delta_{IP} = \sum_{k=1, 2, 3 \dots} \frac{\Omega_k \cdot \eta_k}{EJ} \quad (12.39)$$

En la tabla 23 se dan las áreas y las coordenadas de los centros de gravedad de algunas figuras elementales.

Si se toma en consideración la torsión, la rigidez a la torsión  $GJ_t$  ha de formar parte del término correspondiente de la fórmula general (12.38). Si los diagramas de  $M_P$  y  $\bar{M}_i$  son contrarios de signo, el resultado de su multiplicación tiene el signo «menos».

La fórmula general de Vereschaguin es aplicable también para el cálculo de barras de sección variada. En este caso la integral de Mohr se escribe así:

$$\Delta_{IP} = \sum_i \int \frac{\bar{M}_i M_P dz}{EJ(z)} = \sum_i \int \frac{M_P \frac{J_0}{J(z)}}{EJ_0} \bar{M}_i dz,$$

donde  $J(z)$  es el momento de inercia de área de una sección arbitraria;  $J_0$ , el momento de inercia de una sección determinada (característica).

Llamemos la magnitud

$$M_{red} = M_P \frac{J_0}{J(z)}$$

*momento flector reducido en la sección corriente.* Ahora la integral de Mohr puede escribirse en la siguiente forma:

$$\Delta_{IP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_{red}}{EJ_0} dz,$$

y la fórmula de Vereschaguin:

$$\Delta_{IP} = \sum \frac{\Omega_{red} \bar{M}_C}{EJ_0}, \quad (12.40)$$

siendo  $\Omega_{red}$  el área del diagrama de  $M_{red}$ ;  $\bar{M}_C$ , la ordenada del diagrama unitario bajo el centro de gravedad del diagrama reducido.

## § 72. Energía potencial de la deformación

De acuerdo con el principio de conservación de la energía el trabajo de las fuerzas exteriores al deformar un sistema elástico no desaparece, sino se transforma en la energía potencial de la deformación que puede revelarse en forma de trabajo realizado por las fuerzas interiores durante la descarga. Así, durante la descarga parcial (fig. 241) la viga, enderezándose un poco y levantando la parte restante de la carga, realiza cierto trabajo.

Prescindiendo, durante la sollicitación estática, de la energía cinética, al igual que de las pérdidas de energía para el rozamiento interno, cambio de temperatura, fenómenos magnéticos y eléctricos que tienen lugar durante la deformación, puede afirmarse que la disminución de la energía potencial de la carga es igual al cambio de la energía potencial de la deformación acumulada por la estructura elástica, es decir,

$$U = U_P,$$

siendo  $U$  el incremento de la energía potencial de la deformación;  $U_P$ , la disminución de la energía potencial de la carga.

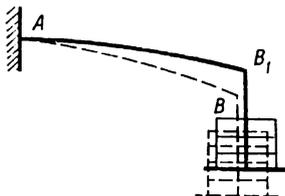


Fig. 241

La disminución de la energía potencial de la carga es igual numéricamente al trabajo real de las fuerzas exteriores al cargar el cuerpo. Por lo tanto, la energía potencial de la deformación es igual numéricamente al trabajo de las fuerzas exteriores al cargar el sistema o al trabajo de las fuerzas interiores realizado

durante el proceso de descarga. La energía potencial de la deformación en el caso general puede determinarse de acuerdo con (12.12) mediante la fórmula

$$U = A = \frac{1}{2} \int_s \frac{M_x^2 ds}{EJ_x} + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_y^2 ds}{EJ_y} + \frac{1}{2} \int_s \frac{M_{\text{tor}}^2 ds}{GJ_t} + \frac{1}{2} \int_s \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2} \int_s k_x \frac{Q_x^2 ds}{GF} + \frac{1}{2} \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{GF}. \quad (12.41)$$

Puesto que la energía potencial de la deformación es función cuadrática de las fuerzas generalizadas (o desplazamientos generalizados), ésta siempre es positiva.

### § 73. Teorema de Castigliano. Teorema de Lagrange

Veamos un sistema elástico (fig. 242) solicitado estáticamente por una carga arbitraria  $Q$  y cierta fuerza generalizada  $P$ . El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza  $P$  por su dirección y debido a su acción será  $\Delta_{PP}$ , y el desplazamiento del mismo punto bajo la acción de las fuerzas  $Q$  será  $\Delta_{PQ}$ . La energía potencial del sistema elástico, siendo el desplazamiento del punto en cuestión total e igual a  $\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ}$ , se expresará mediante la fórmula

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ},$$

siendo  $U_{QQ}$  la energía acumulada debido a la deformación del sistema solamente por las fuerzas  $Q$  y numéricamente igual al trabajo de las fuerzas  $Q$  en los desplazamientos originados por éstas.

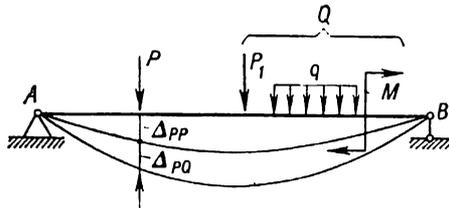


Fig. 242

Como  $\Delta_{PP} = P \delta_{PP}$ , la fórmula anterior puede escribirse así:

$$U = \frac{1}{2} P^2 \delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}. \quad (12.42)$$

Diferenciando esta expresión respecto a la fuerza  $P$ , hallamos

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P \delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_P.$$

Así pues,

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}. \quad (12.43)$$

El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza generalizada en dirección a su acción es igual a la derivada parcial de la energía potencial respecto a esta fuerza. Esta es la esencia del teorema de Castigliano.

Conviene hacer notar que la segunda derivada de la energía potencial respecto a la fuerza (generalizada) de acuerdo con la fórmula (12.42) es igual a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial P} = \delta_{PP}, \quad (12.44)$$

y tiene esencialmente la magnitud positiva.

Para el sistema de barras plano la fórmula (12.41) toma el aspecto:

$$U = \int_s \frac{M^2(s)ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2(s) ds}{2EF} + \int_s k \frac{Q^2(s)ds}{2GF}, \quad (12.45)$$

donde  $M(s)$ ,  $N(s)$ ,  $Q(s)$  son los esfuerzos en la sección de la barra.

Utilizando la regla de diferenciación respecto al parámetro, hallamos

$$\begin{aligned} \Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_s \frac{M(s)ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial P} + \int_s \frac{N(s)ds}{EF} \cdot \frac{\partial N(s)}{\partial P} + \\ + \int_s k \frac{Q(s)ds}{GF} \cdot \frac{\partial Q(s)}{\partial P} \end{aligned} \quad (12.46)$$

o bien, despreciando la influencia de las fuerzas axiales y transversales sobre las magnitudes de los desplazamientos, tendremos

$$\Delta_P = \int_s \frac{M(s)ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial P}. \quad (12.47)$$

Si al determinar los desplazamientos del punto las condiciones del problema no prevén fuerza generalizada, ésta se introduce como ficticia. La expresión compuesta para la energía potencial de la deformación se somete a la diferenciación respecto a esa fuerza, igualándola después a cero.

Si se representa la energía potencial de la deformación como una función cuadrática de los desplazamientos independientes  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , resulta que la derivada parcial de la energía potencial respecto a cualquier desplazamiento es igual a la fuerza que actúa en dirección del desplazamiento, es decir,

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \quad (12.48)$$

En esto consiste *el teorema de Lagrange*.

#### § 74. Teorema sobre el mínimo de la energía potencial

Sustituyamos en el sistema hiperestático (fig. 243, *a*) los vínculos superfluos por las reacciones correspondientes  $X_1, X_2, X_3 \dots$  (fig. 243, *b*), considerándolas como cargas exteriores independientes unas de otras, y calculemos mediante el método de Castigliano los desplazamientos correspondientes  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$

Sabiendo de antemano que dichos desplazamientos son iguales a cero, tenemos derecho a escribir

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \dots,$$

donde  $U = U(X_1, X_2, X_3, \dots, P)$  es la energía potencial total de la deformación del sistema.

Es fácil convencerse de que las igualdades

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \dots \quad (12.49)$$

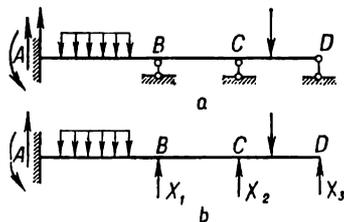


Fig. 243

expresan las condiciones del extremo de la función  $U$ . No es difícil ver que ese extremo es el mínimo. En prueba de esto sirve el signo positivo de las segundas derivadas, las cuales según (12.44) expresan los desplazamientos  $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}, \dots$  que son magnitudes esencialmente positivas:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33}.$$

En definitiva, en los sistemas hiperestáticos los esfuerzos incógnitos superfluos toman tales valores que la energía potencial de la deformación tenga el valor mínimo (teorema de Menabrea). Está conocido también como teorema de trabajo mínimo, porque en vez de la energía potencial se puede hablar del trabajo de las fuerzas exteriores numéricamente igual a ésta. De ello se desprende que al añadir al sistema elástico algunos vínculos, la energía potencial del sistema siempre disminuye.

Tabla 22

Expresiones de la integral de Mohr  $\int \bar{M}_i M_p dz$  para diferentes combinaciones de los diagramas de  $\bar{M}_i$  y  $M_p$  (l es la base del área del diagrama)

Diagrama de $\bar{M}_i$	Diagrama de $M_p$								
		$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} h (\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} h (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} h (2\bar{h}_1 - \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} (1 + \bar{\alpha}) l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} (1 + \bar{\beta}) l$
		$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) + h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) + h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [h_1(\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1) + h_2(2\bar{h}_2 - \bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [h_1(\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1) + h_2(2\bar{h}_2 - \bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [(1 + \bar{\beta}) h_1 + (1 + \bar{\alpha}) h_2] \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [(1 + \bar{\beta}) h_1 + (1 + \bar{\alpha}) h_2] \bar{h} l$
		$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (1 + \alpha) h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (1 + \beta) h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [(1 + \beta) \bar{h}_1 + (1 + \alpha) \bar{h}_2] h l$	$\frac{1}{6} [(1 + \alpha) \bar{h}_2 - (1 + \beta) \bar{h}_1] h l$	$\frac{1}{6} [(1 + \alpha) \bar{h}_2 - (1 + \beta) \bar{h}_1] h l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} (1 + \bar{\alpha}) l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} (1 + \bar{\beta}) l$

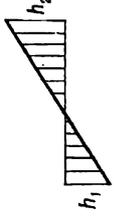
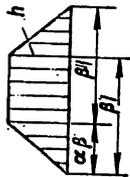
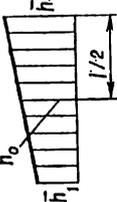
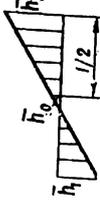
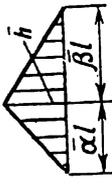
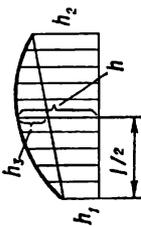
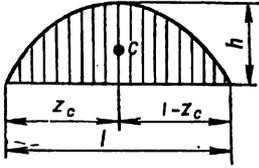
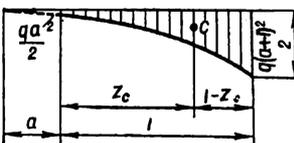
	$\frac{1}{2} (h_2 - h_1) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (2h_2 - h_1) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1) - h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2)] l$	$\frac{1}{6} [h_2(2\bar{h}_2 - \bar{h}_1) - h_1(\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1)] l$	$\frac{1}{6} [(1 + \bar{\alpha}) h_2 - (1 + \bar{\beta}) h_1] \bar{h} l$
	$h \bar{h} \beta l$	$\frac{1}{2} h \bar{h} \beta l$	$\frac{1}{2} h(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \beta l$	$\frac{1}{2} h(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) \beta l$	$\frac{h \bar{h}}{6\beta} (3 - 3\alpha - \frac{\bar{\alpha}^2}{\alpha}) l$ cuando $\bar{\alpha} < \alpha; \frac{h \bar{h}}{6} (3 - \frac{\bar{\alpha}^2}{\alpha\beta}) l$ cuando $\bar{\alpha} > \alpha$
	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{4} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h(\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h(3\bar{h}_2 - \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} (1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) l$
	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h(3\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h(\bar{h}_2 - 3\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} (1 + \bar{\beta} + \bar{\beta}^2) l$

Diagrama de $\bar{M}_i$		$\bar{h}$				
Diagrama de $M_P$		$\frac{2}{3} \frac{h\bar{h}l}{3}$	$\frac{1}{3} \frac{h\bar{h}l}{3}$	$\frac{1}{3} h(\bar{h}_1 + \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{3} h(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{3} (1 + \bar{\alpha}\bar{\beta}) h\bar{h}l$
		$\frac{2}{3} \frac{h\bar{h}l}{3}$	$\frac{5}{12} \frac{h\bar{h}l}{12}$	$\frac{1}{12} h(3\bar{h}_1 + 5\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h(5\bar{h}_2 - 3\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} (5 - \bar{\beta} - \bar{\beta}^2) h\bar{h}l$
		$\frac{2}{3} \frac{h\bar{h}l}{3}$	$\frac{1}{4} \frac{h\bar{h}l}{4}$	$\frac{1}{12} h(5\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) l$	$\frac{1}{12} h(3\bar{h}_2 - 5\bar{h}_1) l$	$\frac{1}{12} (5 - \bar{\alpha} - \bar{\alpha}^2) h\bar{h}l$
		$\frac{1}{6} \bar{h}(h_1 + h_2 + 4h) l$	$\frac{1}{6} \bar{h}(h_2 + 2h) l$	$\frac{1}{6} (\bar{h}_1 h_1 + 4h\bar{h}_0 + h_2 \bar{h}_2) l$	$\frac{1}{6} (h_2 \bar{h}_2 + 4h\bar{h}_0 - h_1 \bar{h}_1) l$	$\frac{1}{6} [h_1(1 + \bar{\beta}) + h_2(1 + \bar{\alpha}) + 2h_3(1 + \bar{\alpha}\bar{\beta})] \bar{h}l$

Áreas y coordenadas de los centros de gravedad de algunas figuras elementales

Diagrama de $M$	Area $\Omega$	Coordenadas del centro de gravedad	
		$z_c$	$l-z_c$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{2}{3} l$	$\frac{1}{3} l$
	$\frac{(h_1 + h_2)}{2} l$	$\frac{h_1 + 2h_2}{3(h_1 + h_2)} l$	$\frac{h_2 + 2h_1}{3(h_1 + h_2)} l$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{a + l}{3}$	$\frac{b + l}{3}$
<p>Parábola cuadrática</p>	$\frac{lh'}{3}$	$\frac{3}{4} l$	$\frac{1}{4} l$
<p>Parábola cúbica</p>	$\frac{lh}{4}$	$\frac{4}{5} l$	$\frac{1}{5} l$
<p>Mitad de la parábola cuadrática</p>	$\frac{2}{3} lh$	$\frac{5}{8} l$	$\frac{3}{8} l$

Diagrama de $M$	Area $\Omega$	Coordenadas del centro de gravedad	
		$z_c$	$l-z_c$
<p>Parábola cuadrática</p> 	$\frac{2}{3} lh$	$\frac{1}{2} l$	$\frac{1}{2} l$
<p>Parábola cuadrática</p> 	$\frac{ql}{6} [l^2 + 3a(a+l)]$	$z_c = \frac{l}{4} \cdot \frac{6a^2l + 8al^2 + 3l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3};$	$l - z_c = \frac{l}{4} \cdot \frac{6a^2l + 4al^2 + l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3}.$

**SISTEMAS HIPERESTÁTICOS**

**§ 75. Etapas principales del cálculo de sistemas hiperestáticos**

Se llaman hiperestáticos los sistemas, en cuyos elementos los factores de fuerza no pueden hallarse sólo a partir de las condiciones de equilibrio del sólido. Tales sistemas poseen más vínculos que se necesita para el equilibrio. Así pues, una parte de los vínculos, en este sentido, aparece como si fuera superflua, y los esfuerzos correspondientes son *incógnitos superfluos*. Por el número de los vínculos o los esfuerzos incógnitos superfluos se determina *el grado de hiperestaticidad*.

En la fig. 244, *a* se da un sistema isostático, en la fig. 244, *b*, con un grado de hiperestaticidad. En la fig. 245, *a* se muestra una viga de doble grado de

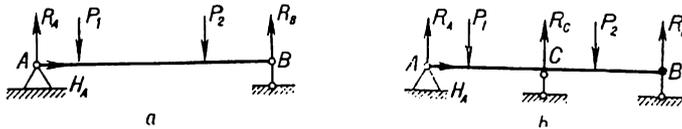


Fig. 244

hiperestaticidad obtenida del sistema isostático (245, *b*) imponiendo dos apoyos articulados en los puntos *B* y *C*. En la figura 246 puede verse un pórtico plano de dos grados de hiperestaticidad.

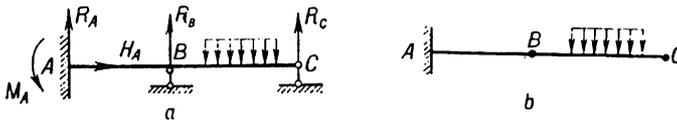


Fig. 245

La indeterminación estática puede ser resultado no sólo de la introducción de vínculos complementarios, sino también la condición de formación del sistema. De ejemplo puede servir el pórtico (fig. 247, *a*), en que las reacciones de apoyos  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$  se determinan fácilmente de las condiciones de equilibrio, pero éstas no permiten hallar todos los factores de fuerza en sus elementos. Seccionando el pórtico en dos partes y examinando el equilibrio de una de ellas (fig. 247, *b*), determinamos que éste representa un sistema con el grado de indeterminación estática igual a seis, porque cada contorno cerrado (sin articulaciones) tiene el grado de indeterminación estática igual a tres.

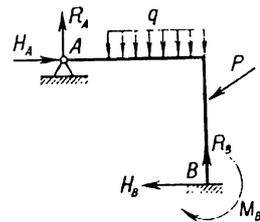


Fig. 246

La introducción de la articulación en el eje de la barra (fig. 248, *a*) (articulación unitaria) reduce a cero el momento flector en esa sección y, por consiguiente, disminuye el grado de indeterminación estática en una unidad. La articulación incluida en el nudo (articulación general) donde se cruzan  $n$  barras

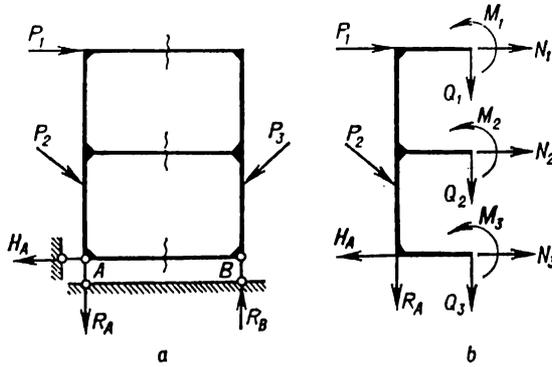


Fig. 247

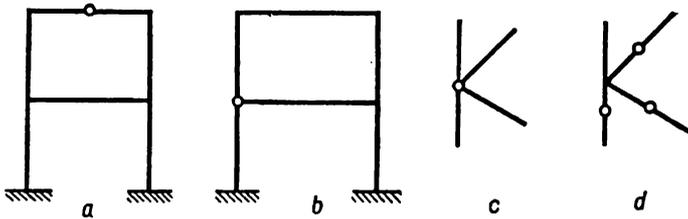


Fig. 248

(véase, por ejemplo, la fig. 248, *b, c*) disminuye el grado de hiperestaticidad en  $n - 1$ , porque sustituye igual número de articulaciones unitarias (fig. 248, *d*). El grado de hiperestaticidad de sistemas planos ( $s$ ) puede determinarse mediante la fórmula

$$s = 3c - a, \quad (13.1)$$

siendo  $c$  el número de contornos cerrados;  $a$ , el número de articulaciones contadas como unitarias. La base (tierra) se considera como barra de rigidez infinita ( $EJ = \infty$ ).

Durante el cálculo de sistemas hiperestáticos se puede tomar en calidad de incógnitas tanto las fuerzas o los factores de fuerza como los desplazamientos o los factores de deformación. En el primer caso se tiene el llamado *método de fuerzas*, en el segundo, *el método de desplazamientos*.

El cálculo por el método de fuerzas se efectúa en la siguiente secuencia:

1. Se determina el grado de indeterminación estática.
2. Eliminando los vínculos superfluos, se sustituye el sistema inicial por el estáticamente determinado llamado *sistema básico*. Se puede construir unos cuantos de tales sistemas, conservando la condición de su invariancia geométrica.
3. El sistema básico se carga con fuerzas exteriores dadas y esfuerzos incógnitos superfluos que sustituyen la acción de los vínculos eliminados obteniéndose, en consecuencia, *un sistema equivalente*.

4. Para asegurar la equivalencia de los sistemas inicial y básico los esfuerzos incógnitos tienen que elegirse de tal manera que las deformaciones del sistema básico no difieran de las deformaciones del sistema inicial hiperestático. Con este fin se igualan a cero los desplazamientos de los puntos de aplicación de las incógnitas superfluas en dirección de su acción. De las ecuaciones así obtenidas se determinan los valores de los esfuerzos incógnitos superfluos. La determinación de las traslaciones de los puntos correspondientes puede realizarse mediante cualquier método; sin embargo, es mejor utilizar el método más general de Mohr o el procedimiento de Vereschaguin.

5. Una vez que se han determinado los valores de los esfuerzos incógnitos superfluos, se efectúa la deducción de las reacciones y la construcción de los diagramas de esfuerzos interiores, la elección de las secciones y comprobación de la resistencia mediante un método corriente.

Veamos un ejemplo de cálculo de un sistema estáticamente indeterminado (fig. 249, a). Tomando la reacción del apoyo  $B$  por la incógnita superflua  $X_1$ , obtendremos el sistema básico en forma de voladizo, y cargándolo con carga distribuida  $q$  y el esfuerzo  $X_1$  llegaremos al sistema equivalente (fig. 249, b). La ecuación complementaria de los desplazamientos será la igualdad a cero de la flecha en el punto  $B$ :

$$\Delta_1 = 0. \quad (13.2)$$

La flecha total  $\Delta_1$  puede presentarse como la suma de flechas de la carga exterior (fig. 249, c)

$$\Delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EJ} \quad (13.3)$$

y de la reacción incógnita  $X_1$  (fig. 249, d)

$$\Delta_{11} = \frac{X_1 l^3}{3EJ}. \quad (13.4)$$

Podemos escribir la ecuación (13.2) en la siguiente forma:

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0 \quad (13.5)$$

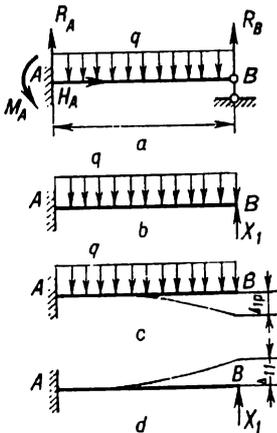


Fig. 249

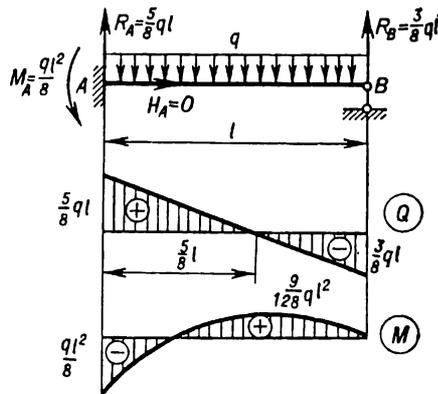


Fig. 250

o bien

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{X_1 l^3}{3EJ} = 0.$$

De aquí hallamos la reacción incógnita

$$X_1 = \frac{3}{8} ql. \quad (13.6)$$

De la ecuación de la estática es fácil hallar las demás reacciones y, luego, mediante el método corriente construir los diagramas de  $Q$  y  $M$ , como se muestra en la fig. 250.

En la tabla 24 se dan las fórmulas de cálculo para determinar las reacciones de apoyo, la fuerza cortante  $Q$ , el momento flector  $M$  y los desplazamientos para los casos principales de sollicitación de vigas hiperestáticas de una luz, y en la tabla 25, para los casos de dislocación de los apoyos o el calentamiento no uniforme de las vigas.

### § 76. Ecuaciones canónicas del método de fuerzas

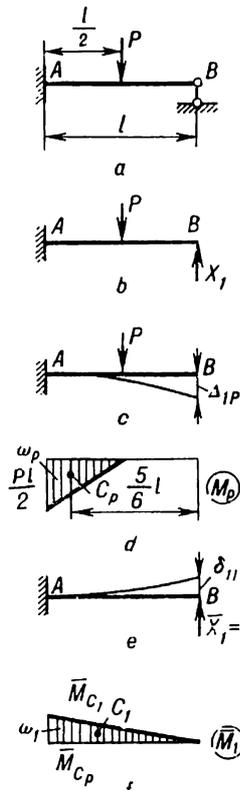


Fig. 251

Es cómodo componer las ecuaciones complementarias de los desplazamientos que expresan la igualdad a cero de éstos en dirección de las incógnitas superfluas, en la llamada *forma canónica*, es decir, según una ley bien determinada. Mostrémoslo en un ejemplo de solución de un sistema hiperestático elemental (fig. 251, a).

Elijamos el voladizo en calidad del sistema básico; en calidad del sistema equivalente obtendremos un voladizo cargado con la fuerza exterior  $P$  y la incógnita superflua  $X_1$  (fig. 251, b). La ecuación complementaria de los desplazamientos que expresa la igualdad a cero del desplazamiento del punto  $B$  debido a la acción de las fuerzas  $P$  y  $X_1$  será

$$\Delta_1 = \Delta(P, X_1) = 0. \quad (13.7)$$

Escribamos a base del principio de superposición de fuerzas

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11}, \quad (13.8)$$

donde  $\Delta_{1P}$  es el desplazamiento debido a la carga dada  $P$  (fig. 251, c);  $\Delta_{11}$ , el desplazamiento debido a la fuerza  $X_1$ . Denotando el desplazamiento debido a  $\bar{X}_1 = 1$  en dirección de ella por  $\delta_{11}$  (fig. 251, e), obtenemos

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1.$$

La ecuación de los desplazamientos (13.8) tendrá el aspecto siguiente:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13.9)$$

Esta es la forma canónica de la ecuación de los desplazamientos para el sistema con un grado de hiperestaticidad. De la fórmula (13.9) se tiene

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \quad (13.10)$$



(12.29) hallamos

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad \Delta_{2P} = \int_s \frac{\bar{M}_2 M_P ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \Delta_{nP} = \int_s \frac{\bar{M}_n M_P ds}{EJ}. \quad (13.13)$$

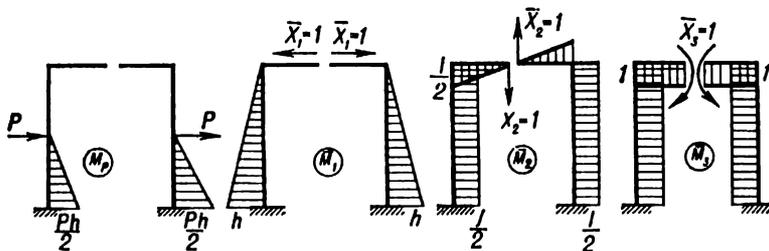


Fig. 254

Los desplazamientos unitarios que tienen iguales índices (coeficientes principales de las ecuaciones canónicas) se determinan mediante las fórmulas

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}; \quad \delta_{22} = \int_s \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{nn} = \int_s \frac{\bar{M}_n \bar{M}_n ds}{EJ}. \quad (13.14)$$

Los desplazamientos unitarios que tienen diferentes índices (coeficientes secundarios) se determinan por las fórmulas

$$\delta_{12} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \delta_{13} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{ik} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}. \quad (13.15)$$

Esos desplazamientos pueden ser tanto positivos, como negativos o también iguales a cero.

A base del teorema de reciprocidad de los desplazamientos

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Para los sistemas constituidos por elementos rectilíneos es cómodo efectuar el cálculo de los desplazamientos mediante el procedimiento de Vereschaguin. Por ejemplo, para un sistema hiperestático (fig. 251, a) se tiene (véase la fig. 251, c, d, e, f)

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{\omega_P \bar{M}_{C_P}}{EJ}; & \delta_{11} &= \frac{\omega_1 \bar{M}_{C_1}}{EJ}; \\ \omega_P &= \frac{Pl^3}{8}; & \bar{M}_{C_P} &= \frac{5}{6} l; \\ \omega_1 &= \frac{l^3}{2}; & \bar{M}_{C_1} &= \frac{2}{3} l. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

De la fórmula (13.10) deducimos

$$X_1 = - \frac{A_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} P.$$

Si se toma en consideración el influjo de la diferencia de temperaturas, el orden del cálculo sigue siendo como antes, pero los términos libres de las ecuaciones canónicas representarán desplazamientos en el sistema básico no sólo debido a la carga dada, sino también al cambio de temperatura, es decir,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + A_{1P} + A_{1t} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + A_{nP} + A_{nt} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

donde  $A_{it}$  es el desplazamiento en el sistema básico en dirección de la fuerza  $X_i$  debido a la diferencia de temperaturas.

Una vez que se han determinado los coeficientes  $\delta_{ij}$  y los términos libres  $A_{iP}$  y  $A_{it}$ , resolvemos el sistema de las ecuaciones canónicas (13.16) y deducimos las incógnitas superfluas  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Luego construimos por el método corriente los diagramas de las fuerzas interiores ( $N, Q$  y  $M$ ). Es cómodo hacer las construcciones por el método de suma según el siguiente esquema:

$$\left. \begin{aligned} M &= \bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \dots + M_P; \\ Q &= \bar{Q}_1X_1 + \bar{Q}_2X_2 + \dots + Q_P; \\ N &= \bar{N}_1X_1 + \bar{N}_2X_2 + \dots + N_P. \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

Conviene hacer notar que el aspecto de las ecuaciones canónicas se queda invariable para cualquier variante posible del sistema básico, cambiándose solamente el sentido de las incógnitas superfluas y el sentido geométrico de los desplazamientos.

En las tablas 26, 27, 28 se dan las fórmulas de cálculo para determinar el momento flector en las secciones características de algunas variedades de pórticos hiperestáticos para los casos elementales de su sollicitación.

### § 77. Vigas continuas. Ecuación de los tres momentos

Se llaman *continuas* las vigas que descansan sobre más de dos apoyos (véase, por ejemplo, la fig. 255, a). El número de vínculos superfluos en una viga continua y, por consiguiente, de reacciones superfluas es igual al número de apoyos inter-

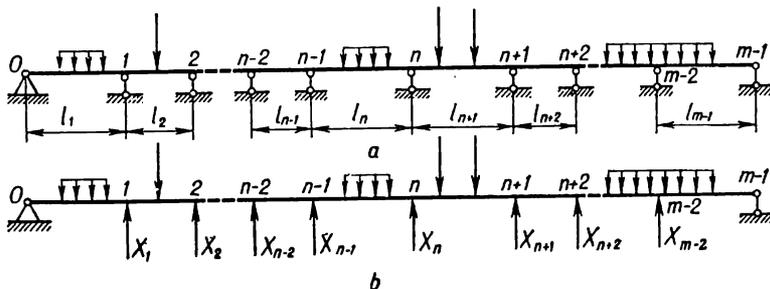


Fig. 255

medios. A veces el apoyo extremo se hace empotrado. En este caso el grado de hiperestaticidad aumenta en uno.

Al elegir el sistema básico es racional tomar en calidad de vínculos superfluos no los apoyos intermedios y reacciones incógnitas en ellos (fig. 255, b) — lo que llevaría a los cálculos excesivamente voluminosos al determinar las incógnitas superfluas —, sino los momentos flectores en las secciones de apoyo. En este caso, evidentemente, el sistema básico será un sistema de vigas de un solo tramo unidas en los apoyos mediante articulaciones. Entonces el sistema equivalente, al calcular valiéndose del método de fuerzas, representará una serie de vigas simples apoyadas articuladamente y solicitadas por carga dada y los momentos flectores incógnitos en los extremos (fig. 256):

$$M_1 = X_1; \quad M_2 = X_2; \dots; \quad M_{n+1} = X_{n+1} \dots$$

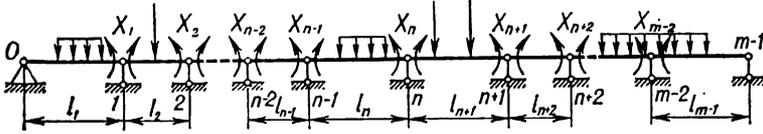


Fig. 256

La ecuación complementaria de los desplazamientos para cada apoyo intermedio tiene que expresar la igualdad a cero del ángulo de giro recíproco de las secciones de apoyo de las vigas contiguas. Puesto que cada una de las dos vigas de apoyo del sistema básico se deforma independientemente una de la otra bajo la acción de las cargas exteriores en el tramo y los momentos de extremo, los toques de dos vigas vecinas que son adyacentes a un apoyo, por ejemplo,  $n$ -ésimo (fig. 257), pueden girar cierto ángulo  $\Delta_n^{izq}$  y  $\Delta_n^{der}$ . Como en la viga continua hiperestática inicial cada par de tales secciones es una sola sección, de las condiciones de continuidad se desprende que su ángulo de giro recíproco tiene que ser igual a cero. De aquí, para cada apoyo intermedio se tiene

$$\Delta_n = \Delta_n^{izq} + \Delta_n^{der} = 0. \quad (13.18)$$

Como el sistema básico consta de vigas aisladas de un solo tramo que no son unidas entre sí, al interpretar la condición (13.18) basta con examinar dos tramos  $l_n$  y  $l_{n+1}$  que son adyacentes al  $n$ -ésimo apoyo. Entonces la condición (13.18) puesta en la forma canónica tendrá el siguiente aspecto:

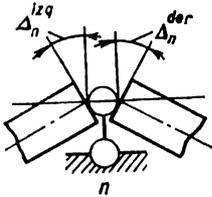


Fig. 257

$$\delta_{n, n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n, n+1} X_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \quad (13.19)$$

De acuerdo con las construcciones dadas en la fig. 258, a, b, c, d

$$\Delta_{nP} = \frac{1}{EJ_n} \cdot \omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EJ_{n+1}} \cdot \omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \quad (13.20)$$

$$\delta_{n, n-1} = \frac{1}{EJ_n} \cdot \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EJ_n}; \quad (13.21)$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{EJ_n} \cdot \frac{l_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}; \quad (13.22)$$

$$\delta_{n, n+1} = \frac{1}{EJ_{n+1}} \cdot \frac{l_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \quad (13.23)$$

Sustituyendo (13.20)–(13.23) en (13.19), hallamos

$$\begin{aligned} X_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2X_n \left( \frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + X_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left( \frac{\omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (13.24)$$

Sustituyendo la designación de las incógnitas superfluas  $X_i$  por  $M_i$ , obtenemos la ecuación de los tres momentos

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2M_n \left( \frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left( \frac{\omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (13.25)$$

Durante el cálculo de vigas hiperestáticas se componen tantas ecuaciones de los tres momentos, como apoyos intermedios hay. Una vez que se ha resuelto el sistema de ecuaciones obtenido, se determinan los momentos incógnitos superfluos  $M_i$  en los apoyos. Conociendo los momentos de extremo del sistema equivalente, todos los cálculos posteriores se efectúan por el método corriente igual que para el cálculo de cualquier sistema estáticamente determinado.

Para las vigas de sección constante ( $J = \text{const}$ ) la ecuación de los tres momentos (13.25) se simplifica:

$$\begin{aligned} M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = \\ = -6 \left( \frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (13.26)$$

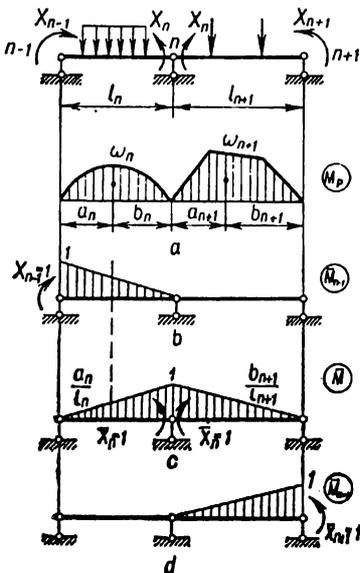


Fig. 258

Las ecuaciones de los tres momentos para los apoyos segundo y penúltimo de la viga continua tendrán, evidentemente, sólo dos momentos.

Las ecuaciones de los tres momentos se utilizan para el cálculo de una viga continua, uno de cuyos extremos es rígidamente empotrado. En este caso se compone la ecuación de los tres momentos también para el extremo empotrado,

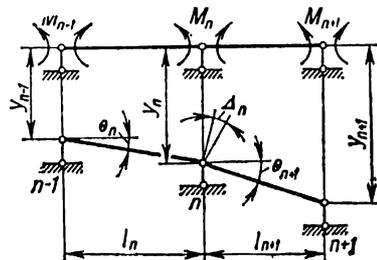


Fig. 259

como si se pusiera allí un apoyo intermedio, introduciendo por el lado del empotramiento un tramo ficticio. Si es empotrado el extremo izquierdo de la viga, en la ecuación de los tres momentos  $M_{n-1}$ ,  $l_n$  se consideran iguales a cero y faltará el término  $6 \frac{\omega_n a_n}{l_n}$ . Si no todos los apoyos de la viga continua se encuentran a un nivel, sino tiene lugar el desplazamiento de algunos de ellos, en la viga pueden surgir tensiones iniciales considerables. Estas dependen de la diferencia entre los niveles de los apoyos y la rigidez de la viga, aumentando proporcionalmente a las magnitudes señaladas.

La influencia del desplazamiento de los apoyos sobre el estado tensional de la viga puede evaluarse del modo siguiente. Supongamos que tiene lugar el cuadro de desplazamiento de los apoyos dado en la fig. 259. Los ángulos de giro de los tramos izquierdo y derecho con respecto al apoyo  $n$  serán

$$\theta_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n}; \quad \theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}.$$

Consideramos positivo el ángulo de giro si la sección gira en el sentido de las manecillas del reloj. Es obvio que el ángulo de giro recíproco de las secciones de tope en el apoyo  $n$

$$\Delta_n = \theta_{n+1} - \theta_n. \quad (13.27)$$

Ahora la ecuación canónica durante el cálculo al desplazamiento de los apoyos, donde el papel de  $\Delta_{nP}$  lo juega  $\Delta_n$ , tendrá el siguiente aspecto:

$$\delta_{n, n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n, n+1} X_{n+1} + \Delta_n = 0. \quad (13.28)$$

En el caso de viga de constante rigidez, la ecuación de los tres momentos (13.28), tomando en consideración (13.21)–(13.23), la podemos escribir definitivamente así:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6EJ(\theta_{n+1} - \theta_n). \quad (13.29)$$

Si además de los desplazamientos de los apoyos actúan cargas exteriores, en el segundo miembro de la ecuación (13.29) tienen que conservarse los términos que integran el segundo miembro de la ecuación (13.26).

## § 78. Cálculo de barras curvilíneas hiperestáticas

En el cálculo de sistemas elásticos estáticamente indeterminados que contienen barras curvilíneas se recomienda, al igual que para el cálculo de cualquier sistema estáticamente indeterminado, valerse de las ecuaciones canónicas del método de fuerzas. Sin embargo, en este caso los desplazamientos que forman parte de las ecuaciones canónicas deben calcularse no por el método de Vereschaguin, sino por el de Mohr.

Veamos, como ejemplo, un anillo circular de sección transversal constante traccionado por dos fuerzas  $P$  iguales y contrarias de dirección (fig. 260, *a*). Ese sistema, al igual que cualquier contorno cerrado, tiene el grado tres de hiperestaticidad. Elijamos el sistema básico cortando el anillo por la sección  $A_2$  (fig. 260, *b*). De la condición de simetría se desprende que la fuerza transversal en esa sección  $X_2 = 0$ . Cortando el anillo por el diámetro  $A_1 - A_2$  (fig. 260, *c*), hallamos a partir de las condiciones de equilibrio de la parte seccionada el valor de la fuerza normal  $X_3 = \frac{P}{2}$ . El momento flector incógnito  $X_1$  lo hallamos al examinar el sistema equivalente (fig. 260, *d*).

La ecuación canónica de los desplazamientos que expresa la condición de igualdad a cero del ángulo de giro recíproco de las caras en la sección  $A_2$  será

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (13.30)$$

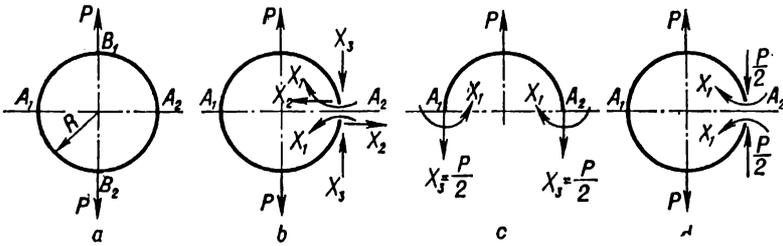


Fig. 260

donde

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad (13.31)$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ}. \quad (13.32)$$

Además,  $M_P$  y  $\bar{M}_1$  de acuerdo con la fig. 261,  $a, b$  pueden expresarse mediante las siguientes fórmulas:

$$M_P = -\frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\bar{M}_1 = -1.$$

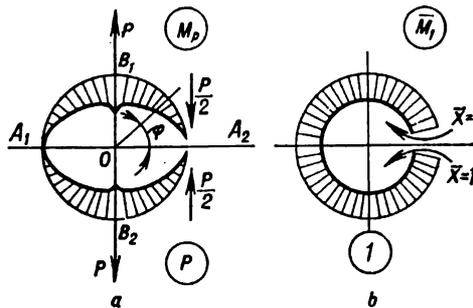


Fig. 261

Introduciendo las expresiones para  $M_p$  y  $\bar{M}_1$  en (13.31) y (13.32), hallamos:

$$\Delta_{1P} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^2(1 - \cos \varphi) d\varphi}{2EJ} = \frac{2PR^2}{EJ} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$\delta_{11} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Rd\varphi}{EJ} = \frac{2\pi R}{EJ}.$$

Ahora la ecuación (13.30) puede escribirse así:

$$\frac{2\pi R}{EJ} X_1 + \frac{2PR^2}{EJ} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 0,$$

de donde

$$X_1 = - \frac{2PR^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{2\pi R} = -0,182PR. \quad (13.33)$$

Así pues, el momento flector en la sección  $A$

$$M_A = 0,182PR$$

y está dirigido hacia el lado contrario al del aceptado anteriormente.

El momento flector en una sección arbitraria puede expresarse mediante la fórmula

$$M(\varphi) = - \frac{PR}{2} (1 - \cos \varphi) + M_A;$$

el momento máximo

$$M_{\max} = M_B = -0,318PR.$$

La fuerza transversal en cualquier sección se expresa mediante la fórmula  $Q(\varphi) = 0,5P \sin \varphi$ ; la fuerza axial  $N(\varphi) = 0,5P \cos \varphi$ . En la fig. 262 pueden verse los diagramas de  $M$ ,  $Q$  y  $N$ .

En la tabla 29 se dan las fórmulas de cálculo para determinar los esfuerzos y desplazamientos para diferentes casos de sollicitación del anillo.

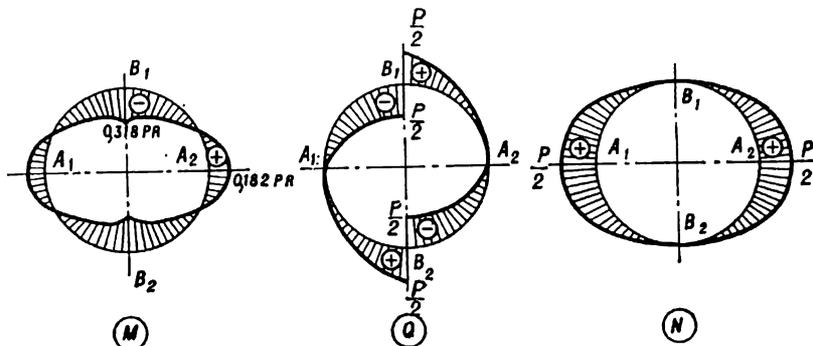


Fig. 262

### § 79. Determinación de los desplazamientos en los sistemas hiperestáticos

Una vez determinados los valores de las incógnitas superfluas y construidos los diagramas, los desplazamientos en los sistemas hiperestáticos pueden determinarse por los métodos corrientes. Mas en cada caso concreto se debe utilizar aquel método que con más facilidad da el resultado. Por ejemplo, las flechas y los ángulos de giro de las secciones de vigas hiperestáticas que portan carga compuesta se recomienda determinarlos por el método de parámetros iniciales. El método de Mohr, que es universal, se utiliza, de ordinario al determinar desplazamientos en vigas, pórticos y vigas de celosía.

Haciendo uso de la fórmula de Mohr

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF}, \quad (13.34)$$

se debe examinar los diagramas definitivos de  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  debidos a los factores de fuerza del sistema hiperestático así como los diagramas de  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{Q}_i$  debidos al factor de fuerza unitario que corresponde al desplazamiento incógnito. Para determinar los diagramas de  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_i$  y  $\bar{Q}_i$  es racional aplicar la carga unitaria al sistema básico estáticamente determinado.

Como ejemplo calculemos los desplazamientos recíprocos de los puntos  $A_1-A_2$  y  $B_1-B_2$  en la dirección horizontal y vertical, respectivamente, para un sistema hiperestático que representa un pórtico de un solo contorno, bajo la acción de las fuerzas  $P$  aplicadas según el esquema dado en la fig. 263, *a*. Ante todo determinemos las incógnitas superfluas de ese sistema con el grado tres de indeterminación estática. Elijamos el sistema básico seccionando una de las columnas por el eje de simetría (fig. 263, *b*). A causa de la simetría de la carga en el lugar del corte la fuerza transversal  $X_2 = 0$ . Hallamos del examen de las condiciones de equilibrio de una mitad del pórtico (fig. 263, *c*)

$$2X_3 = P; \quad X_3 = \frac{P}{2}.$$

El momento incógnito superfluo  $X_1$  se determinará a partir de la siguiente ecuación canónica:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13.35)$$

Aquí  $\Delta_{1P}$  es el desplazamiento en dirección de la acción del esfuerzo  $X_1$  debido a las fuerzas  $P$  y  $X_3 = \frac{P}{2}$ .

Con el fin de determinar los desplazamientos  $\Delta_{1P}$  y  $\delta_{11}$  construimos los diagramas correspondientes (fig. 263, *d*, *e*) y hallamos, utilizando el procedimiento de Vereschaguin,

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = \frac{2}{EJ_1} \cdot \frac{Pl_1^2}{8} = \frac{Pl_1^2}{4EJ_1}; \quad (13.36)$$

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ} = \frac{2l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{EJ_2}. \quad (13.37)$$

Sustituyendo (13.36) y (13.37) en (13.35), se tiene:

$$\frac{2}{E} \left( \frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) X_1 + \frac{Pl_1^2}{4EJ_1} = 0;$$

$$X_1 = - \frac{Pl_1^2}{4J_1} \left[ 2 \left( \frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) \right]^{-1}.$$

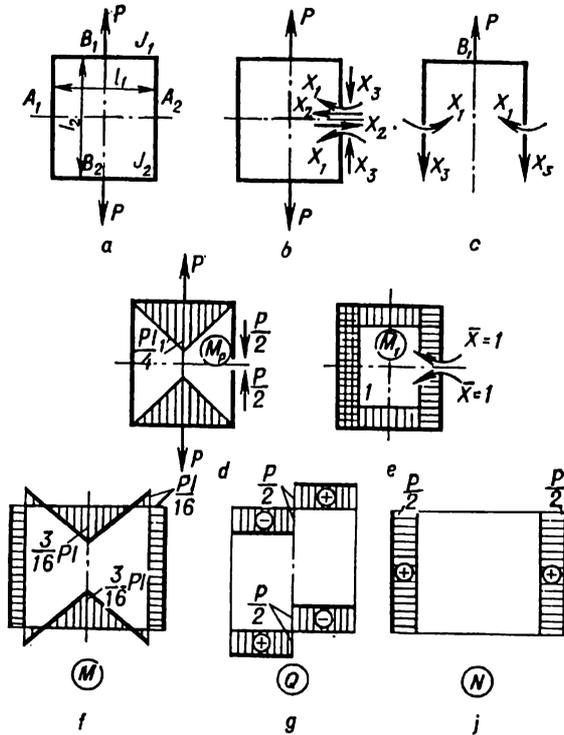


Fig. 263

Cuando  $l_1 = l_2 = l$  y  $J_1 = J_2 = J$ ,

$$X_1 = - \frac{Pl}{16}.$$

En la fig. 263, *f*, *g*, *h* están contruidos los diagramas para el pórtico examinado.

Para determinar el desplazamiento recíproco de los puntos  $A_1-A_2$  en la dirección horizontal aplicamos al sistema básico en esos puntos las fuerzas unitarias (264, *b*)  $\bar{X}_i = 1$ . Multiplicando el diagrama de  $M_p$ , que es más cómodo representar en la forma mostrada en la fig. 264, *a*, por el de  $\bar{M}_i$ , hallamos

(cuando  $l_1 = l_2 = l$  y  $J_1 = J_2 = J$ )

$$\Delta_{A_1-A_2} = \Delta_t = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + \right. \\ \left. + \frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} - 2 \frac{Pl^2}{32} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl^3}{64EJ}.$$

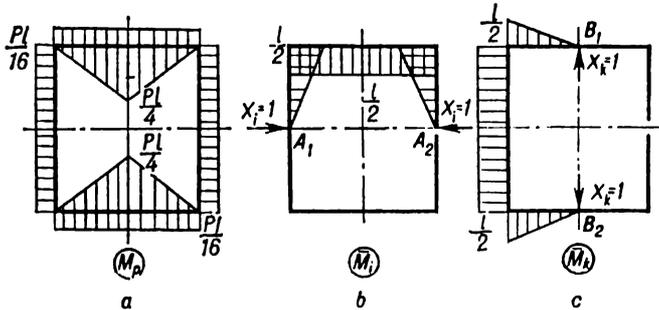


Fig. 264

Con el fin de determinar el desplazamiento recíproco vertical de los puntos  $B_1-B_2$  aplicamos al sistema básico en esos puntos las fuerzas unitarias  $\bar{X}_k = 1$  (fig. 264, c). Multiplicando los diagramas de  $M_P$  y  $\bar{M}_k$ , hallamos

$$\Delta_{B_1-B_2} = \Delta_k = \sum_s \int \frac{\bar{M}_k M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \right. \\ \left. - \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{6} \cdot 2 + \frac{l^2}{8} \cdot \frac{Pl}{16} \cdot 2 \right) = \frac{5}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

En el caso de que sobre el sistema hiperestático actúa la temperatura, se debe añadir a los desplazamientos del sistema básico cargado con incógnitas superfluas, los desplazamientos de temperatura. Entonces, la fórmula (13.34), teniendo en cuenta (12.36), tendrá el siguiente aspecto:

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_t ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\bar{N}_i N_t ds}{EF} + \sum_s \int k \frac{\bar{Q}_i Q_t ds}{GF} + \\ + \sum_s \int \bar{N}_i \alpha \frac{(t_1 + t_3)}{2} ds + \sum_s \int \bar{M}_i \alpha \frac{(t_1 - t_3)}{h} ds, \quad (13.38)$$

donde  $M_t$ ,  $N_t$ ,  $Q_t$  son los diagramas de las incógnitas superfluas debidas al cambio de temperatura.

En las tablas 24, 25, 29 se dan las expresiones para los desplazamientos en vigas hiperestáticas de un solo tramo y en anillo para diferentes casos de su sollicitación.

## § 80. Sobre el cálculo de sistemas de pórtico espaciales

Como es sabido, en el caso más general en la sección de una barra actúan seis factores de fuerza interiores, o sea:  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  y  $M_z$ .

Para una sujeción fija de la sección hace falta imponer seis vínculos, cuyos esfuerzos pueden hallarse a partir de seis ecuaciones de equilibrio del sólido.

El número de vínculos en un sistema espacial que supera el número señalado da el grado de indeterminación estática. Así, el pórtico espacial mostrado en la fig. 265, *a* es un sistema con el grado de hiperestaticidad igual a seis, porque de las ecuaciones de equilibrio pueden determinarse solamente las reacciones de un apoyo rígido. Una de las variantes del sistema básico para dicho pórtico puede verse en la fig. 265, *b*. Para hallar seis esfuerzos incógnitos es necesario resolver seis ecuaciones canónicas de tipo corriente.

El pórtico espacial mostrado en la fig. 266, *a* es un sistema con el grado de hiperestaticidad igual a 24. El sistema básico (fig. 266, *b*) contiene cuatro cortes, en cada uno de los cuales figuran seis esfuerzos incógnitos.

En las estructuras se encuentran pórticos planos sometidos a la acción de cargas espaciales. En los pórticos planos solicitados perpendicularmente a su plano (fig. 267, *a*) los factores de fuerza que caracterizan el trabajo del pórtico en su propio plano son iguales a cero. Por consiguiente, de las seis incógnitas (fig. 267, *b*) tres son iguales a cero, es decir,  $X_4 = X_5 = X_6 = 0$  (fig. 267, *c*). Esta circunstancia simplifica el cálculo de pórticos planos.

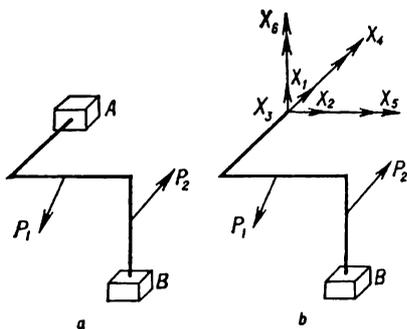


Fig. 265

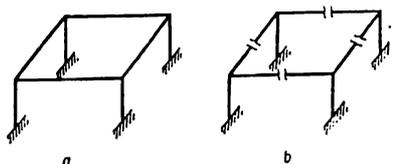


Fig. 266

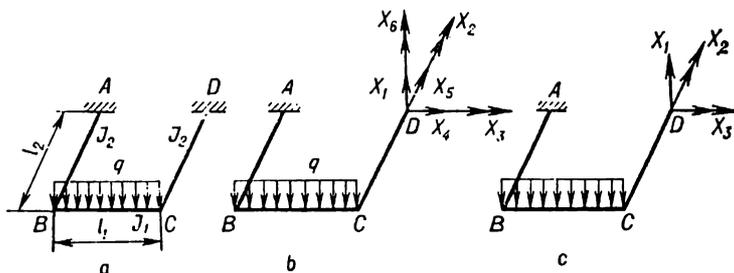


Fig. 267

En el cálculo de pórticos planos las cargas espaciales se descomponen en componentes que actúan tanto en el plano del pórtico como perpendicularmente a él y, utilizando el principio de superposición de las fuerzas, se calcula el sistema para cada una de las cargas que actúan en diferentes planos por separado.

Demos, en calidad de ejemplo, el cálculo por el método de fuerzas del pórtico mostrado en la fig. 267, a. Elijamos, por razones de la simetría, el sistema básico en la forma dada en la fig. 268. Esta variante es más cómoda que la expuesta en la fig. 267, c, porque el momento torsional  $X_2$  y la fuerza cortante  $X_3$ , es decir, los factores de fuerza inversamente iguales, son iguales a cero. El momento flector incógnito  $X_1$  es fácilmente determinado a partir de la ecuación canónica

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (13.39)$$

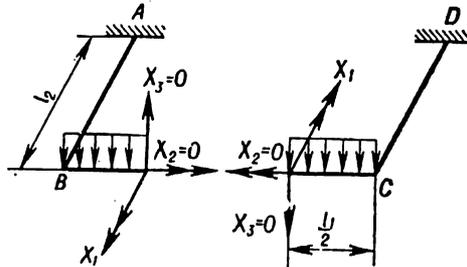


Fig. 268

Para determinar los desplazamientos  $\Delta_{1P}$  y  $\delta_{11}$  construimos los diagramas de los momentos flectores y torsionales para los estados  $P$ -ésimo (fig. 269, a) y unitario  $\bar{X}_1 = 1$  (fig. 269, b). Los diagramas de los momentos torsionales se muestran con líneas de trazos.

Prescindiendo de la influencia de las fuerzas axiales y transversales, escribamos las fórmulas de Mohr para determinar los desplazamientos así:

$$\Delta_{1P} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP} ds}{EJ_x} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP} ds}{EJ_y} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{zP} ds}{GJ_t}; \quad (13.40)$$

$$\delta_{11} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x1} ds}{EJ_x} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1} ds}{EJ_y} + \sum_s \int \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{z1} ds}{GJ_t}. \quad (13.41)$$

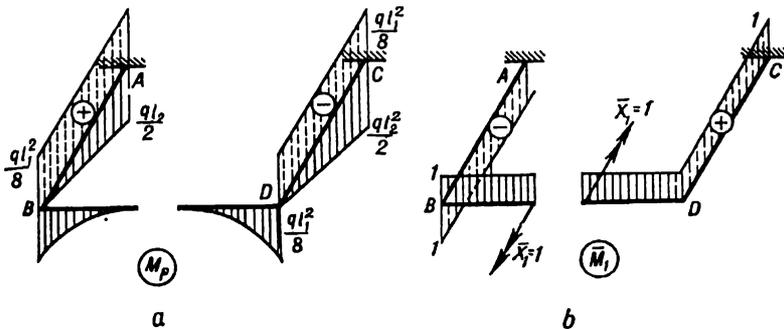


Fig. 269

Tomando en consideración que los diagramas unitarios son limitados por líneas rectas, podemos determinar los desplazamientos  $\Delta_{1P}$  y  $\delta_{11}$  mediante el procedimiento de Vereschaguin:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\frac{1}{EJ_1} \cdot \frac{ql_1^2}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{GJ_t} \cdot \frac{ql_1^2}{8} \cdot l_2 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -\frac{ql_1^3}{24EJ_1} \left( 1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_t} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right); \\ \delta_{11} &= \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{GJ_t} = \frac{l_1}{EJ_1} \left( 1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_t} \cdot \frac{l_2}{l_1} \right). \end{aligned}$$

A base de (13.39) hallamos

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql_1^2}{24} \cdot \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_t} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_t} \cdot \frac{l_2}{l_1}} = \beta \frac{ql_1^2}{24},$$

donde

$$\beta = \frac{1 + 6 \frac{EJ_1}{GJ_t} \cdot \frac{l_2}{l_1}}{1 + 2 \frac{EJ_1}{GJ_t} \cdot \frac{l_2}{l_1}}.$$

Los diagramas definitivos de  $M$ ,  $M_{tor}$  y  $Q$  pueden verse en la fig. 270

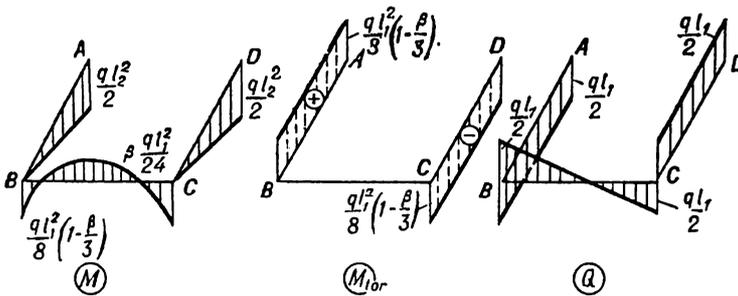
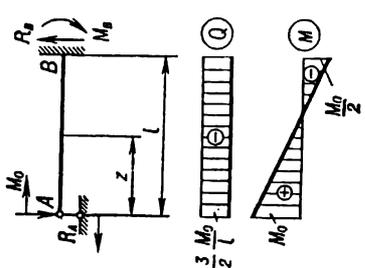


Fig. 270

Reacciones de apoyo, fuerzas transversales, momentos flectores y desplazamientos en vigas hiperestáticas de un solo tramo

<p>Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de <math>Q</math> y <math>M</math></p>	<p>Reacciones de apoyo, fuerza cortante <math>Q</math>, momento flector <math>M</math>, coordenada de la sección peligrosa <math>z_0</math>, momento máximo <math>M_{\text{máx}}</math></p>	<p>Ecuaciones de la línea elástica <math>w(z)</math>, ángulo de giro <math>\theta</math> de la sección de extremo, flecha máxima <math>f</math> (siendo constante <math>EJ</math>)</p>
 <p>The diagram shows a beam of length <math>l</math> supported at both ends (A and B). A uniformly distributed load <math>q</math> is applied downwards. Reaction forces are <math>R_A</math> (up), <math>R_B</math> (up), <math>R_A'</math> (down), and <math>R_B'</math> (down). The shear force diagram <math>Q</math> is a linear function starting at <math>3M_0/2l</math> at A and ending at <math>-M_0/2</math> at B. The bending moment diagram <math>M</math> is a parabolic curve starting at <math>M_0</math> at A and ending at <math>M_0/2</math> at B.</p>	$R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{M_0}{l};$ $M_B = \frac{1}{2} M_0$ $0 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{3}{2} \frac{M_0}{l};$ $M = M_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{z}{l} \right)$ $z_0 = 0$ $M_{\text{máx}} = M_0$	$w(z) = -\frac{M_0 l^2}{4EJ} \left( \frac{z^3}{l^3} - 2 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z}{l} \right)$ $f = -\frac{M_0 l^2}{27EJ}$ <p>cuando</p> $z = \frac{1}{3} l$ $\theta = -\frac{M_0 l}{4EJ}$ <p>cuando</p> $z = 0$

Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo, fuerza cortante $Q$ , momento flector $M$ , coordenada de la sección peligrosa $z_0$ , momento máximo $M_{\text{máx}}$	Ecuaciones de la línea elástica $w(z)$ , ángulo de giro $\theta$ de la sección de extremo, flecha máxima $f$ (siendo constante $EJ$ )
	$R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{M_0}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right);$ $M_B = \frac{M_0}{2} \left( 1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $0 < z \leq l \quad Q = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M_0}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$ $0 < z \leq a \quad M = -\frac{3}{2} \cdot \frac{M_0}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) z$ $a \leq z \leq l \quad M = M_0 \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \frac{z}{l} \right]$ $z'_0 = a \quad M'_{\text{máx}} = -\frac{3}{2} \frac{M_0}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right)$ $M''_{\text{máx}} = M_0 \left[ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \right]$ $z''_0 = l \quad M'''_{\text{máx}} = -\frac{1}{2} M_0 \left( 1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p>cuando <math>a &lt; 0,275 l</math>,  <math> M'_{\text{máx}}  &lt;  M'''_{\text{máx}} </math></p> <p>cuando <math>a = 0,577 l</math>, <math>M'''_{\text{máx}} = 0</math></p>	$0 < z \leq a$ $w(z) = -\frac{M_0 l^2}{EJ} \left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \times \right.$ $\times \left. \left( \frac{z^3}{l^3} - 3 \frac{z}{l} \right) + \left( 1 - \frac{a}{l} \right) \frac{z}{l} \right]$ $a \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{M_0 l^2}{EJ} \left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \times \right.$ $\times \left. \left( \frac{z^3}{l^3} - 3 \frac{z}{l} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{l^2} + \frac{a^2}{l^2} \right) + \frac{z}{l} \right]$ $\theta = \frac{M_0 l}{EJ} \left( \frac{a}{l} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2}{l^2} \right)$ <p>cuando <math>z = 0</math></p>

$$R_A = \frac{5}{16} P; \quad R_B = \frac{11}{16} P;$$

$$M_B = \frac{3}{16} Pl$$

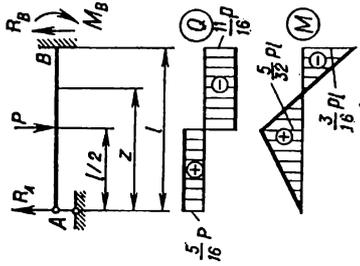
$$0 < z < l/2$$

$$Q = \frac{5}{16} P; \quad M = \frac{5}{16} Pz$$

$$l/2 < z < l$$

$$Q = -\frac{11}{16} P; \quad M = Pl \left( \frac{l}{2} - \frac{11}{16} z \right)$$

$$z_0 = l \quad M_{\text{máx}} = -\frac{3}{16} Pl$$



$$0 < z < \frac{l}{2}$$

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{96EJ} \left( 3 \frac{z}{l} - 5 \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$\frac{l}{2} < z < l$$

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{96EJ} \left[ 3 \frac{z}{l} - 5 \frac{z^2}{l^2} + \right.$$

$$\left. \left( z - \frac{l}{2} \right)^3 \right] = -\frac{Pl^3}{96EJ} \left( 15 \frac{z}{l} - 24 \frac{z^2}{l^2} + 11 \frac{z^3}{l^3} - 2 \right)$$

$$f = -0,0093 \frac{Pl^3}{EJ},$$

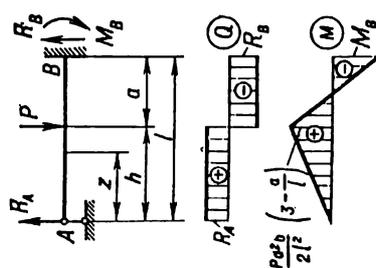
$$\text{cuando } z = 0,447 l$$

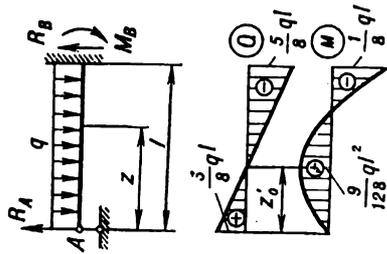
$$\theta = -\frac{Pl^2}{32EJ},$$

$$\text{cuando } z = 0$$

$$w = -\frac{7Pl^3}{768EJ},$$

$$\text{cuando } z = \frac{l}{2}$$

<p>Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de <math>Q</math> y <math>M</math></p>	<p>Reacciones de apoyo, fuerza cortante <math>Q</math>, momento flector <math>M</math>, coordenada de la sección peligrosa <math>z_0</math>, momento máximo <math>M_{\text{máx}}</math></p>	<p>Ecuaciones de la línea elástica <math>w(z)</math>, ángulo de giro <math>\theta</math> de la sección de extremo, flecha máxima <math>f</math> (siendo constante <math>EJ</math>)</p>
	$R_A = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left( 3 - \frac{a}{l} \right);$ $R_B = \frac{P}{2} \cdot \frac{b^2}{l^2} \left( 3 - \frac{b}{l} \right);$ $M_B = \frac{Pab}{2l^2} (l + b) \quad 0 < z < b$ $Q = -\frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left( 3 - \frac{a}{l} \right);$ $M = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^3}{l^2} \left( 3 - \frac{a}{l} \right) z \quad b < z < l$ $Q = P \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2} \left( 3 - \frac{a}{l} \right) - 1 \right];$ $M = Pa \left[ \frac{az}{2l^2} \left( 3 - \frac{a}{l} \right) - \frac{z-b}{a} \right]$ $z'_0 = b \quad M'_{\text{máx}} = \frac{Pa^2b}{2l^2} \left( 3 - \frac{a}{l} \right)$ <p>cuando <math>a = 0,634 l</math>, el valor máximo de <math>M'_{\text{máx}} = 0,174 Pl</math></p> $z''_0 = l \quad M''_{\text{máx}} = -\frac{Pab}{2l^2} (l + b)$ <p>cuando <math>a = 0,423 l</math>, el valor máximo de <math>M''_{\text{máx}} = -0,193 Pl</math></p>	$0 < z < b$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[ \frac{R_A}{P} \left( 3 \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) - 3 \frac{a^2 z}{l^3} \right]$ $w = -\frac{Pa^3 b^3 (3a + 4b)}{12l^3 EJ}$ <p>cuando <math>z = b \quad b &lt; z &lt; l</math></p> $w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ} \left[ \frac{R_A}{P} \left( 3 \frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} \right) - 3 \frac{a^2 z}{l^3} + \left( \frac{z}{l} - \frac{b}{l} \right)^3 \right]$ <p>siendo <math>a = 0,586 l</math> la flecha máxima es cuando <math>z = b</math></p> $f = -0,0098 \frac{Pl^3}{EJ}$ $\theta = \frac{Pl^3}{4EJ} \left( \frac{a^2}{l^3} - \frac{a^3}{l^3} \right)$ <p>cuando <math>z = 0</math></p>



$$R_A = \frac{3}{8} ql;$$

$$R_B = \frac{5}{8} ql;$$

$$M_B = \frac{1}{8} ql^2$$

$$0 < z < l$$

$$Q = ql \left( \frac{3}{8} - \frac{z}{l} \right);$$

$$M = qlz \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{l} \right)$$

$$z_0 = l$$

$$M_{\text{máx}} = -\frac{1}{8} ql^2$$

$$z'_0 = \frac{3}{8} l$$

$$M'_{\text{máx}} = \frac{9}{128} ql^2$$

$$w(z) = -\frac{ql^4}{48EJ} \left( 2 \frac{z^4}{l^4} - 3 \frac{z^3}{l^3} + \frac{z}{l} \right)$$

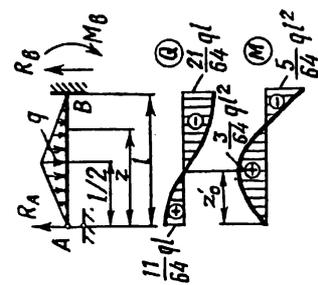
$$0 < z < l$$

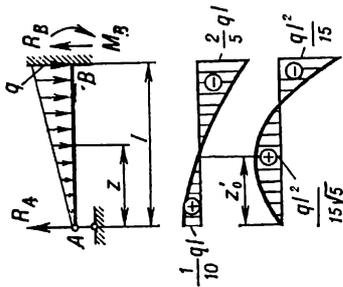
$$f = -\frac{ql^4}{185EJ}$$

$$\text{cuando } z = 0,421 l$$

$$\theta = \frac{ql^3}{48EJ}$$

$$\text{cuando } z = 0$$

Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo, fuerza cortante $Q$ , momento flector $M$ , coordenada de la sección peligrosa $z_0$ , momento máximo $M_{\text{máx}}$	Ecuaciones de la línea elástica $w(z)$ , ángulo de giro $\theta$ de la sección de extremo, flecha máxima $f$ (siendo constante $EJ$ )
	$R_A = \frac{11}{64} ql; \quad R_B = \frac{21}{64} ql;$ $M_B = \frac{5}{64} ql^2$ $0 < z < l/2$ $Q = ql \left( \frac{11}{64} - \frac{z^2}{l^2} \right);$ $M = ql^2 \left( \frac{11}{64} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{l^2} \right)$ $l/2 < z < l$ $Q = ql \left[ \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{64} \right]$ $M = ql^2 \left[ \frac{11}{64} \cdot \frac{z}{l} - \frac{1}{4} \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{l} - \frac{1}{2} \right)^3 \right]$ $z_0 = l \quad M_{\text{máx}} = -\frac{5}{64} ql^2$ $z'_0 = 0,415 l \quad M'_{\text{máx}} \approx \frac{3}{64} ql^2$	$f = -\frac{ql^4}{289,8EJ}$ <p>cuando <math>z = 0,5l</math></p>



$$R_A = \frac{1}{10} q l; \quad R_B = \frac{2}{5} q l; \quad M_B = \frac{1}{15} q l^2$$

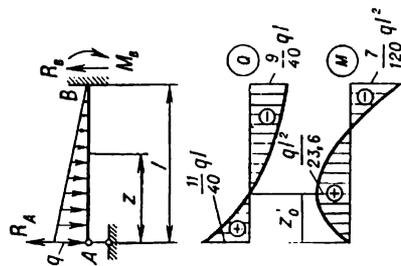
$$0 < z < l$$

$$Q = \frac{q l^2}{10} \left( 1 - 5 \frac{z^2}{l^2} \right);$$

$$M = \frac{q l z}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$z_0 = l \quad M_{\text{máx}} = -\frac{q l^2}{15}$$

$$z'_0 = 0,447 l \quad M'_{\text{máx}} = \frac{q l^2}{15\sqrt{5}}$$



$$R_A = \frac{11}{40} q l; \quad R_B = \frac{9}{40} q l; \quad M_B = \frac{7}{120} q l^2$$

$$0 < z < l$$

$$Q = q l \left( \frac{11}{40} - \frac{z}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{l^2} \right);$$

$$M = \frac{q l z}{2} \left( \frac{11}{20} - \frac{z}{l} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$z_0 = l \quad M_{\text{máx}} = -\frac{7}{120} q l^2$$

$$z'_0 = 0,329 l \quad M'_{\text{máx}} = \frac{q l^2}{23,6}$$

$$f = -\frac{q l^4}{419 E J}$$

$$\text{cuando } z = 0,447 l$$

$$w = -\frac{q l^4}{426,6 E J}$$

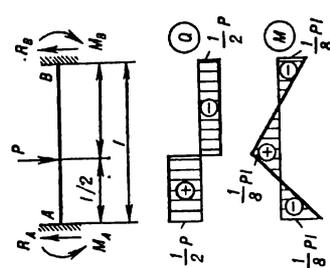
$$\text{cuando } z = \frac{l}{2}$$

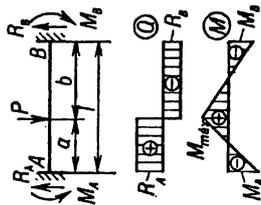
$$f = -\frac{q l^4}{327,8 E J}$$

$$\text{cuando } z = 0,402 l$$

$$w = -\frac{q l^4}{349 E J}$$

$$\text{cuando } z = \frac{l}{2}$$

Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de $Q$ y $M$	Reacciones de apoyo, fuerza cortante $Q$ , momento flector $M$ , coordenada de la sección peligrosa $z_0$ , momento máximo $M_{\text{máx}}$	Ecuaciones de la línea elástica $w(z)$ , ángulo de giro $\theta$ de la sección de extremo, flecha máxima $f$ (siendo constante $EJ$ )
	$R_A = R_B = \frac{1}{2} P;$ $M_A = M_B = \frac{1}{8} Pl$ $0 < z < \frac{l}{2}$ $Q = \frac{1}{2} P;$ $M = \frac{1}{8} P(4z - l)$ $Q = -\frac{1}{2} P; \quad M = \frac{1}{8} P(3l - 4z)$ $z'_0 = \frac{l}{2} \quad M'_{\text{máx}} = \frac{1}{8} Pl$ $z''_0 = 0; \quad z'''_0 = l$ $M''_{\text{máx}} = M'''_{\text{máx}} = -\frac{1}{8} Pl$	$0 < z < \frac{l}{2}$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{48EJ} \left( 3 \frac{z^2}{l^2} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = -\frac{Pl^3}{192EJ}$ <p>cuando <math>z = \frac{l}{2}</math></p>



$$R_A = P \frac{b^2(3a + b)}{l^3}; \quad R_B = P \frac{a^2(3b + a)}{l^3};$$

$$M_A = Pa \frac{b^2}{l^2}; \quad M_B = Pb \frac{a^2}{l^2}$$

$$0 \leq z < a$$

$$Q = P \frac{b^2(3a + b)}{l^3}; \quad M = Pa \frac{b^2}{l^2} \left( \frac{3a + b}{al} \cdot z - 1 \right)$$

$$a \leq z < l$$

$$Q = -P \frac{a^2(3b + a)}{l^3};$$

$$M = Pa \frac{b^2}{l^2} \left[ \frac{3a + b}{al} z - \frac{l^2(z - a)}{b^2 a} - 1 \right]$$

$$z'_0 = 0 \quad M'_{\max} = -P \frac{ab^2}{l^2}$$

$$z''_0 = a \quad M''_{\max} = 2P \frac{a^2 b^2}{l^3}$$

$$z'''_0 = l \quad M'''_{\max} = -P \frac{ba^2}{l^2}$$

si  $a < b$ ,  $|M'_{\max}| > |M''_{\max}| > |M'''_{\max}|$ ;

si  $a > b$ ,  $|M'''_{\max}| > |M''_{\max}| > |M'_{\max}|$

el valor máximo de  $|M'_{\max}| = \frac{4}{27} Pl$

cuando  $a = \frac{l}{3}$

$$0 \leq z < a$$

$$w(z) = -\frac{Pab^2}{6EJ} \cdot \frac{z^2}{l^2} \left( 3 - 3 \frac{z}{l} - \frac{z^2}{a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{z}{l} \right)$$

$$a > b$$

$$f = -\frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \cdot \frac{a^2 b^3}{(3a + b)^2}$$

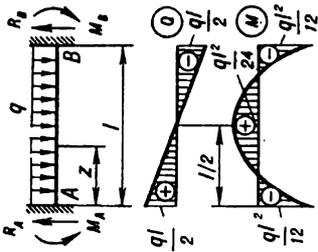
$$\text{cuando } z = \frac{2al}{3a + b}$$

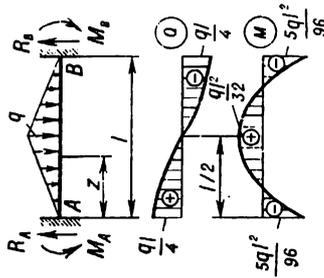
$$a < b$$

$$f = -\frac{2}{3} \frac{P}{EJ} \cdot \frac{a^2 b^3}{(3b + a)^2}$$

$$\text{cuando } z = l - \frac{2bl}{3b + a}$$

$$w = -\frac{Pa^2 b^3}{3EJl^3} \text{ cuando } z = a$$

<p>Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de <math>Q</math> y <math>M</math></p>	<p>Reacciones de apoyo, fuerza cortante <math>Q</math>, momento flector <math>M</math>, coordenada de la sección peligrosa <math>z_0</math>, momento máximo <math>M_{\text{máx}}</math></p>	<p>Ecuaciones de la línea elástica <math>w(z)</math>, ángulo de giro <math>\theta</math> de la sección de extremo, flecha máxima <math>f</math> (siendo constante <math>EJ</math>)</p>
	$R_A = R_B = \frac{ql}{2};$ $M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $0 < z < l$ $Q = \frac{ql}{2} \left( 1 - 2 \frac{z}{l} \right);$ $M = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{6} \right)$ $z'_0 = 0;$ $z''_0 = l$ $M'_{\text{máx}} = M''_{\text{máx}} = -\frac{ql^2}{12}$ $z'''_0 = \frac{l}{2}$ $M'''_{\text{máx}} = \frac{ql^3}{24}$	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{ql^2 z^2}{24EJ} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)^2$ $f = -\frac{ql^4}{384EJ}$ <p>cuando <math>z = \frac{l}{2}</math></p>



$$f = -\frac{7ql^4}{3840EJ}$$

cuando  $z = \frac{l}{2}$

$$R_A = R_B = \frac{ql}{4};$$

$$M_A = M_B = \frac{5}{96} ql^2$$

$$0 < z < l/2$$

$$Q = ql \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{l^2} \right);$$

$$M = \frac{ql^2}{4} \left( \frac{z}{l} - \frac{4}{3} \frac{z^3}{l^3} - \frac{5}{24} \right)$$

$$\frac{l}{2} < z < l$$

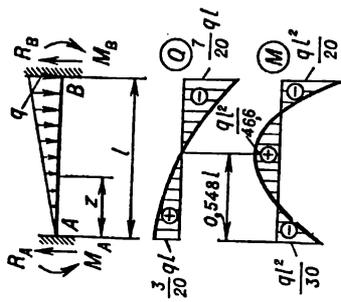
$$Q = ql \left[ \frac{(l-z)^2}{l^2} - \frac{1}{4} \right];$$

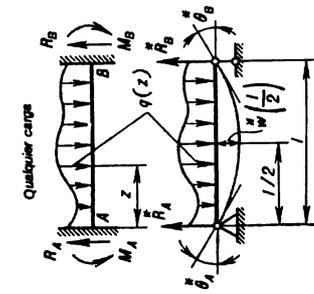
$$M = ql^2 \left[ \frac{1}{32} - \frac{(z - \frac{l}{2})^2}{2l^2} + \frac{(z - \frac{l}{2})^3}{3l^3} \right]$$

$$z'_0 = 0; \quad z''_0 = l;$$

$$M'_{\max} = M''_{\max} = -\frac{5}{96} ql^2$$

$$z'''_0 = \frac{l}{2}; \quad M'''_{\max} = \frac{ql^2}{32}$$

<p>Esquema de sollicitación de la viga. Diagramas de <math>Q</math> y <math>M</math></p> 	<p>Reacciones de apoyo, fuerza cortante <math>Q</math>, momento flector <math>M</math>, coordenada de la sección peligrosa <math>z_0</math>, momento máximo <math>M_{\text{máx}}</math></p>	<p>Ecuaciones de la línea elástica <math>w(z)</math>, ángulo de giro <math>\theta</math> de la sección de extremo, flecha máxima <math>f</math> (siendo constante <math>EJ</math>)</p>
	<p> <math>R_A = \frac{3}{20} ql</math>;  <math>R_B = \frac{7}{20} ql</math>;  <math>M_A = \frac{ql^2}{30}</math>;  <math>M_B = \frac{ql^2}{20}</math>  <math>0 &lt; z &lt; l</math>  <math>Q = \frac{1}{2} ql \left( \frac{3}{10} - \frac{z^2}{l^2} \right)</math>;  <math>M = ql^2 \left( \frac{3}{20} \frac{z}{l} - \frac{1}{6} \frac{z^3}{l^3} - \frac{1}{30} \right)</math>  <math>z'_0 = 0</math>    <math>M'_{\text{máx}} = -\frac{ql^2}{30}</math>;  <math>z''_0 = l</math>    <math>M''_{\text{máx}} = -\frac{ql^2}{20}</math>  <math>z'''_0 = 0,548l</math>    <math>M'''_{\text{máx}} = \frac{ql^2}{46,6}</math> </p>	<p> <math>f = -\frac{ql^4}{764EJ}</math>                      cuando <math>z = 0,525l</math>  <math>w = -\frac{ql^4}{768EJ}</math>                      cuando <math>z = \frac{l}{2}</math> </p>



$$R_A = R_A^* - \frac{M_A - M_B}{l};$$

$$R_B = R_B^* + \frac{M_A - M_B}{l}$$

$$M_A = \frac{2EJ}{l} (2\theta_A^* - \theta_B^*);$$

$$M_B = \frac{2EJ}{l} (2\theta_B^* - \theta_A^*)$$

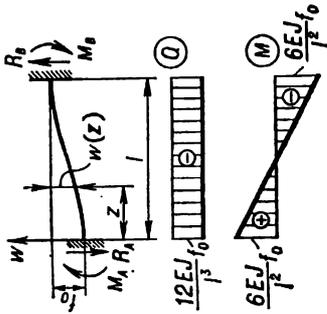
$$w = w^* \left( \frac{z}{l} \right) + \frac{(M_A + M_B) l^3}{16EJ}$$

$$\text{cuando } z = \frac{l}{2}$$

Los parámetros con el asterisco \* corresponden a una viga estáticamente determinada sobre dos apoyos (véase la figura)

Fórmulas de cálculo que toman en consideración los desplazamientos de los apoyos y cambios de temperatura en vigas hiperestáticas ( $EJ$  es constante)

Esquema de viga	Reacciones de apoyo, fuerza cortante $Q$ y momento flector $M$ , coordenada de la sección peligrosa $z_0$ y magnitud del momento máximo $M_{m\acute{a}x}$	Ecuación de la línea elástica $w(z)$ , ángulo de giro $\theta$ de la sección de extremo y flecha máxima $f$
	$R_A = \frac{3EJf_0}{l^3}; R_B = \frac{3EJf_0}{l^3}; M_B = \frac{3EJf_0}{l^2}$ $0 < z < l$ $Q = -\frac{3EJf_0}{l^3}; M = -\frac{3EJf_0}{l^3} z$ $z_0 = l \quad M_{m\acute{a}x} = -\frac{3EJf_0}{l^2}$	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{f_0}{2} \left( 2 - 3 \frac{z}{l} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = -f_0 \quad \text{cuando } z = 0$ $\theta = \frac{3f_0}{2l} \quad \text{cuando } z = 0$
	$R_A = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}; R_B = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}; M_A = \frac{3EJ\theta_0}{l}$ $0 < z < l$ $Q = -\frac{3EJ\theta_0}{l^2}; M = \frac{3EJ\theta_0}{l^2} (l - z)$ $z_0 = 0 \quad M_{m\acute{a}x} = \frac{3EJ\theta_0}{l}$	$0 < z < l$ $w(z) = -\theta_0 \frac{l}{2} \left( 2 \frac{z}{l} - 3 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = -0,193 \theta_0 l \quad \text{cuando } z = 0,422 l$ $\theta = -\theta_0 \quad \text{cuando } z = 0$ $\theta = \frac{1}{2} \theta_0 \quad \text{cuando } z = l$



$$R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3} f_0; \quad M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2} f_0$$

$$0 < z < l$$

$$Q = -\frac{12EJ}{l^3} f_0 z$$

$$M = \frac{6EJ}{l^2} f_0 \left(1 - 2\frac{z}{l}\right)$$

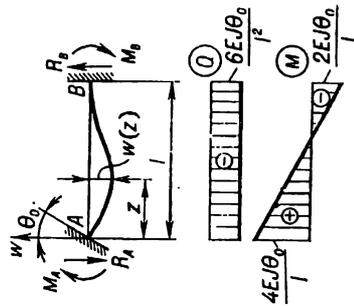
$$z'_0 = 0 \quad M'_{\max} = \frac{6EJ}{l^2} f_0$$

$$z''_0 = l \quad M''_{\max} = -\frac{6EJ}{l^3} f_0$$

$$0 < z < l$$

$$w(z) = -f_0 \left[ 1 - \left( 3 - 2\frac{z}{l} \right) \frac{z^2}{l^2} \right]$$

$$f = -f_0 \quad \text{cuando } z = 0$$



$$R_A = R_B = \frac{6EJ\theta_0}{l^2};$$

$$M_A = \frac{4EJ\theta_0}{l}; \quad M_B = \frac{2EJ\theta_0}{l}$$

$$0 < z < l$$

$$Q = -\frac{6EJ\theta_0}{l^2} z; \quad M = \frac{6EJ\theta_0}{l} \left( 2 - 3\frac{z}{l} \right)$$

$$z'_0 = 0 \quad M'_{\max} = \frac{4EJ\theta_0}{l}$$

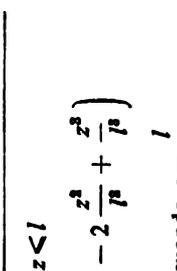
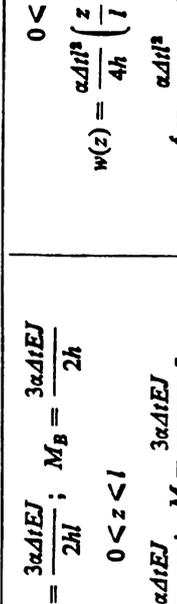
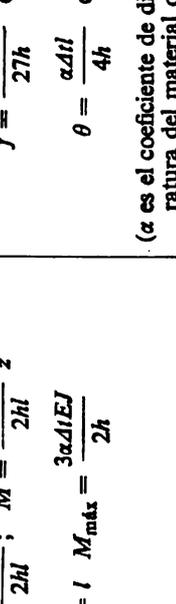
$$z''_0 = l \quad M''_{\max} = -\frac{2EJ\theta_0}{l}$$

$$0 < z < l$$

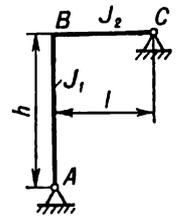
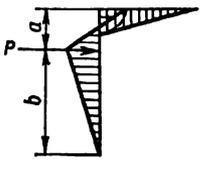
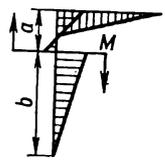
$$w(z) = -\theta_0 l \left( \frac{z^3}{l^3} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z}{l} \right)$$

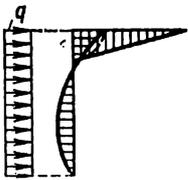
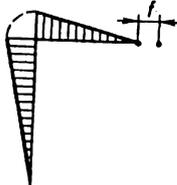
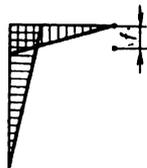
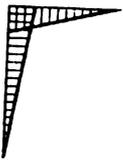
$$f = -\frac{4\theta_0}{27} l \quad \text{cuando } z = \frac{l}{3}$$

$$\theta = -\theta_0 \quad \text{cuando } z = 0$$

<p>Esquema de viga</p> <p>Por la altura de la sección de la viga la temperatura cambia linealmente</p> 	<p>Reacciones de apoyo, fuerza cortante Q y momento flector M, coordenada de la sección peligrosa z<sub>0</sub> y magnitud del momento máximo M<sub>máx</sub></p>	<p>Ecuación de la línea elástica w(z), ángulo de giro θ de la sección de extremo y flecha máxima f</p>
<p>Por la altura de la sección de la viga la temperatura cambia linealmente</p> 	$R_A = R_B = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h l}; \quad M_B = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h}$ $0 < z < l$ $Q = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h l}; \quad M = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h l} z$ $z_0 = l \quad M_{máx} = \frac{3\alpha\Delta t E J}{2h}$	$0 < z < l$ $w(z) = \frac{\alpha\Delta t l^3}{4h} \left( \frac{z}{l} - 2 \frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$ $f = \frac{\alpha\Delta t l^3}{27h} \quad \text{cuando } z = \frac{l}{3}$ $\theta = \frac{\alpha\Delta t l}{4h} \quad \text{cuando } z = 0$ <p>(α es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura del material de la viga; Δt es la diferencia de temperaturas de las fibras superior e inferior de la viga)</p>
<p>Por la altura de la sección de la viga la temperatura cambia linealmente</p> 	$R_A = R_B = 0;$ $M_A = M_B = \frac{\alpha\Delta t E J}{h}$ $0 < z < l$ $Q = 0; \quad M = \frac{\alpha\Delta t E J}{h} = \text{const}$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = 0$ <p>(α es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura del material de la viga; Δt es la diferencia de temperaturas de las fibras superior e inferior de la viga)</p>

Momentos flectores en el pórtico en  $\Gamma\left(k = \frac{J_2 h}{J_1 l}\right)$

Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
<p>El cabezal y la columna son apoyados articuladamente</p> $n = 1 + k$	
	$M_B = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{2n} aP$ $M_P = \alpha \left[ 1 - \frac{\alpha(1 + \alpha)}{2n} \right] aP$ $\alpha = \frac{b}{l}$
	$M_B = \frac{ql^2}{8n}$
	$M_B = \frac{\alpha(2 - \alpha) kb}{2n} P$ $\alpha = \frac{a}{h}$
	$M_B = [3\alpha(2 - \alpha) - 2] \frac{kM}{2n};$ $\alpha = \frac{a}{h}$

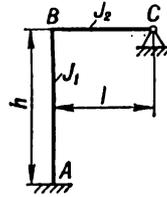
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_B = \frac{qkh^2}{8n}$
 <p data-bbox="156 697 382 747">Desplazamiento horizontal del apoyo C</p>	$M_B = 3 \frac{EJ_2 f}{nhl}$
 <p data-bbox="156 1008 382 1058">Desplazamiento vertical del apoyo C</p>	$M_B = 3 \frac{EJ_2 f}{nl^2}$
<p data-bbox="156 1100 382 1150">Desplazamiento vertical del apoyo A</p>	<p data-bbox="429 1100 1017 1150">Los valores de <math>M</math> son iguales a los del desplazamiento vertical del apoyo C, pero con signos opuestos</p>
<p data-bbox="156 1201 382 1234">Calentamiento en <math>\Delta t</math></p>  <p data-bbox="156 1436 382 1512"><math>\alpha</math> es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura</p>	$M_B = 3 \frac{EJ_2}{nh} \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$

Esquema de sollicitación  
y diagrama de  $M$

Momento flector  $M$  en secciones características

El cabezal se apoya articuladamente,  
la columna es empotrada

$$n = 4 + 3k$$

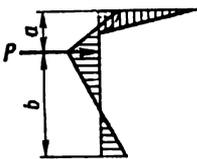


$$M_A = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{n} aP; \quad M_B = \frac{2\alpha(1 + \alpha)}{n} aP$$

$$M_P = \alpha \left[ 1 - \frac{2(1 + \alpha)}{n} \right] aP; \quad \alpha = \frac{b}{l}$$



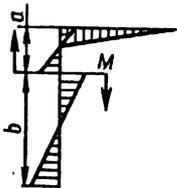
$$M_A = \frac{qt^2}{4n}; \quad M_B = \frac{qt^2}{2n}$$



$$M_A = [2 + (2 + 3k)\alpha] \frac{ab}{n} \cdot P$$

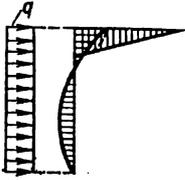
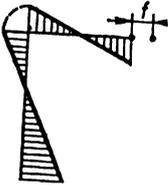
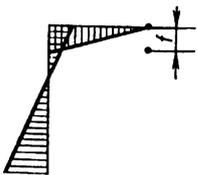
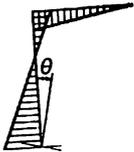
$$M_B = \frac{3\alpha k(1 - \alpha)b}{n} P; \quad \alpha = \frac{a}{h}$$

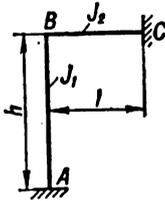
$$M_P = abP - \alpha M_A - (1 - \alpha) M_B$$

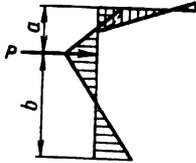
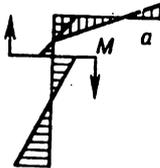
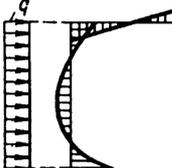
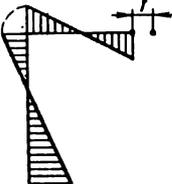


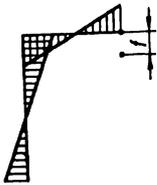
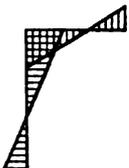
$$M_A = \left[ \alpha(2 - 3\alpha) - \frac{2}{n} (1 - \alpha)(3\alpha - 1) \right] M$$

$$M_B = 3(1 - \alpha)(3\alpha - 1) \frac{kM}{n}; \quad \alpha = \frac{a}{h}$$

Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_A = \frac{q(2+k)h^2}{4n}; \quad M_B = \frac{qkh^2}{4n}$
<p>Desplazamiento horizontal del apoyo C</p> 	$M_A = 6(2+3k) \frac{EJ_1 f}{nh^2}; \quad M_B = 18 \frac{EJ_2 f}{nhl}$
<p>Desplazamiento vertical del apoyo C</p> 	$M_A = 6 \frac{EJ_2 f}{nl^2}; \quad M_B = 12 \frac{EJ_2 f}{nl^2}$
<p>Desplazamiento vertical del apoyo A</p>	<p>Los valores de <math>M</math> son iguales a los del desplazamiento vertical del apoyo C, pero con signos opuestos</p>
<p>Giro del apoyo A en ángulo <math>\theta</math></p> 	$M_A = 12(1+k) \frac{EJ_1}{nh} \theta; \quad M_B = 6 \frac{EJ_2}{nl} \theta$

Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
<p>Calentamiento en <math>\Delta t</math></p>  <p><math>\alpha</math> es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura</p>	$M_A = 6 \frac{EJ_2}{nh} \left( 3 + \frac{2}{k} + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$ $M_B = 6 \frac{EJ_2}{nh} \left( 3 + 2 \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$
<p>El cabezal y la columna son empotrados</p> $n = 1 + k$	
	$M_A = \frac{\alpha^2 a}{2n} P; \quad M_B = \frac{\alpha^2 a}{n} P$ $M_C = [(2 - \alpha)k + 2(1 - \alpha)] \frac{\alpha a}{2n} P$ $M_P = \alpha a P - \alpha M_B - (1 - \alpha) M_C; \quad \alpha = \frac{b}{l}$
	$M_A = \frac{ql^2}{24n}; \quad M_B = \frac{ql^2}{12n}$ $M_C = (2 + 3k) \frac{ql^2}{24n}$

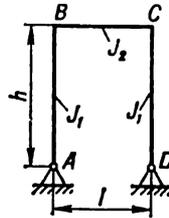
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_A = [1 + \alpha(1 + 2k)] \frac{\alpha b}{2n} P$ $M_B = \frac{\alpha k(1 - \alpha) b}{n} P$ $M_C = \frac{\alpha k(1 - \alpha) b}{2n} P; \quad \alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = \left[ \alpha(2 - 3\alpha) - \frac{(1 - \alpha)(3\alpha - 1)}{2n} \right] M$ $M_B = (1 - \alpha)(3\alpha - 1) \frac{kM}{n}$ $M_C = (1 - \alpha)(3\alpha - 1) \frac{kM}{2n}; \quad \alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = \frac{q(3 + 2k) h^2}{24n}; \quad M_B = \frac{qkh^2}{12n}$ $M_C = \frac{qkh^2}{24n}$
 <p data-bbox="157 1429 373 1480">Desplazamiento horizontal del apoyo C</p>	$M_A = 3(1 + 2k) \frac{EJ_1 f}{nh^2}; \quad M_B = 6 \frac{EJ_2 f}{nhl}$ $M_C = 3 \frac{EJ_2 f}{nhl}$

Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
 <p>Desplazamiento vertical del apoyo C</p>	$M_A = 3 \frac{EJ_2 f}{nl^2}; \quad M_B = 6 \frac{EJ_2 f}{nl^2}$ $M_C = 3(2 + k) \frac{EJ_2 f}{nl^2}$
<p>Desplazamiento vertical del apoyo A</p>	<p>Los valores de <math>M</math> son iguales a los del desplazamiento vertical del apoyo C, pero con signos opuestos</p>
<p>Giro del apoyo A en ángulo <math>\theta</math></p> 	$M_A = (3 + 4k) \frac{EJ_1}{nh} \theta; \quad M_B = 2 \frac{EJ_2}{nl} \theta$ $M_C = \frac{EJ_2}{nl} \theta$
<p>Calentamiento en <math>\Delta t</math></p>  <p><math>\alpha</math> es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura</p>	$M_A = \frac{3EJ_2}{nh} \left( 2 + \frac{1}{k} + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$ $M_B = \frac{6EJ_2}{nh} \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \alpha \Delta t$ $M_C = \frac{3EJ_2}{nh} \left[ 1 + (2 + k) \frac{h^2}{l^2} \right] \alpha \Delta t$

Momentos flectores en el pórtico en  $\Pi \left( k = \frac{J_2 h}{J_1 l} \right)$

Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
--	--

Las columnas se apoyan articuladamente



$$n = 3 + 2k$$



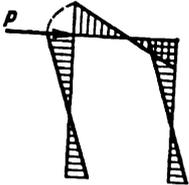
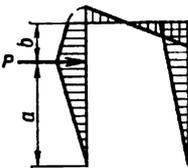
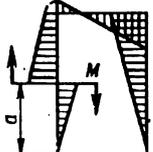
$$M_B = M_C = \frac{3ab}{2nl} P$$

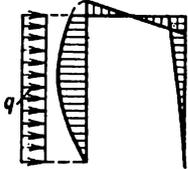
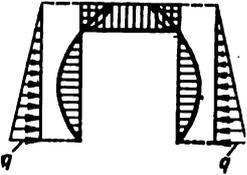
$$M_P = \frac{(3 + 4k) ab}{2nl} P$$



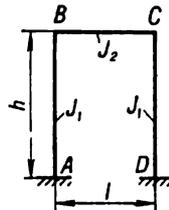
$$M_B = M_C = \frac{(3 - 2\alpha) \alpha^2 q l^2}{4n}$$

$$\alpha = \frac{a}{l}$$

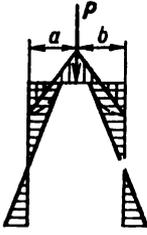
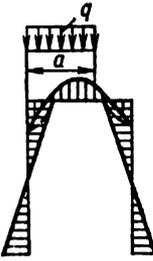
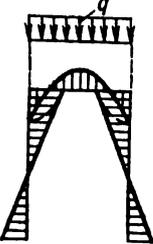
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_B = M_C = \frac{ql^2}{4n}$ $M_{m\acute{a}x} = (1 + 2k) \frac{ql^2}{8n}$
	$M_B = M_C = \frac{1}{2} hP$
	$M_B = \left[ 1 - \frac{(2 - \alpha) \alpha k}{n} \right] \frac{a}{2} P$ $M_C = \left[ 1 + \frac{(2 - \alpha) \alpha k}{n} \right] \frac{a}{2} P$ $M_P = (1 - \alpha) (Pb + M_B)$ $\alpha = \frac{b}{h}$
	$M_B = \frac{3 + (1 + 3\alpha^2) k}{2n} M$ $M_C = \frac{3[1 + (1 - \alpha^2) k]}{2n} M$ $\alpha = \frac{a}{h}$

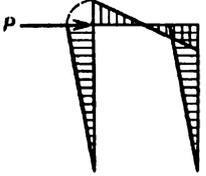
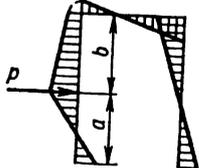
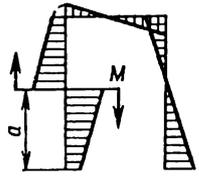
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_B = (2 + k) \frac{3qh^2}{8n}$ $M_C = (6 + 5k) \frac{qh^2}{8n}$
	$M_B = M_C = \frac{7kqh^2}{60n}$
<p data-bbox="157 740 373 769">Calentamiento en <math>\Delta t</math></p>  <p data-bbox="157 1026 415 1102"><math>\alpha</math> es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura</p>	$M_B = M_C = \frac{3EJ_2 \alpha \Delta t}{nh}$

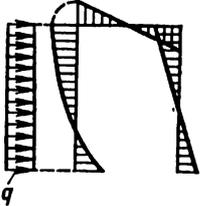
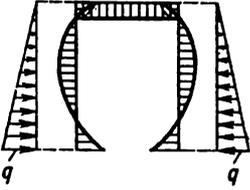
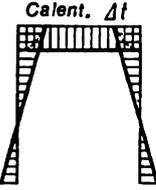
Las columnas son empotradas



$$n_1 = 2 + k \quad n_2 = 1 + 6k$$

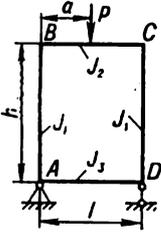
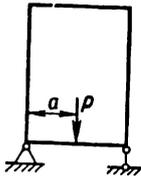
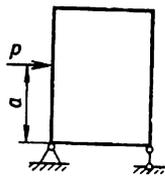
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_A = \left( \frac{1}{2n_1} - \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$ $M_B = \left( \frac{1}{n_1} + \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$ $M_C = \left( \frac{1}{n_1} - \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$ $M_D = \left( \frac{1}{2n_1} + \frac{2\alpha - 1}{2n_2} \right) \alpha a P$ $\alpha = \frac{b}{l}$
	$M_A = \alpha^2 \left[ \frac{3 - 2\alpha}{n_1} - \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$ $M_D = \alpha^2 \left[ \frac{3 - 2\alpha}{n_1} + \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$ $M_C = \alpha^2 \left[ \frac{2(3 - 2\alpha)}{n_1} - \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$ $M_B = \alpha^2 \left[ \frac{2(3 - 2\alpha)}{n_1} + \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2} \right] \frac{ql^2}{12}$ $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12n_1}$ $M_B = M_C = \frac{ql^2}{6n_1}$ $M_{\text{máx}} = \frac{2 + 3k}{24n_1} ql^2$

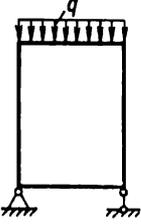
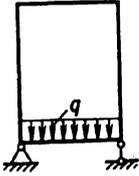
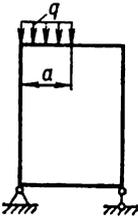
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_A = M_D = \frac{1 + 3k}{2n_2} hP$ $M_B = M_C = \frac{3}{2} \frac{k}{n_2} hP$
	$M_A = \left\{ 1 - \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} + \frac{\alpha[1+\alpha(1+k)]}{n_1} \right\} \frac{a}{2} P$ $M_B = \left[ \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} - \frac{\alpha(1-\alpha)k}{n_1} \right] \frac{a}{2} P$ $M_D = \left\{ 1 - \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} - \frac{\alpha[1+\alpha(1+k)]}{n_1} \right\} \frac{a}{2} P$ $M_C = \left[ \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} + \frac{\alpha(1-\alpha)k}{n_1} \right] \frac{a}{2} P$ $\alpha = \frac{b}{h}$
	$M_A = \left[ -\frac{3\alpha(2-\alpha)}{2} + 1 - \frac{\alpha(2-3\alpha)k}{2n_1} - \left( \frac{6\alpha k}{n_2} - 1 \right) \right] \frac{M}{2}$ $M_B = \alpha k \left( -\frac{2-3\alpha}{2n_1} + \frac{3}{n_2} \right) M$ $M_C = \alpha k \left( \frac{2-3\alpha}{2n_1} + \frac{3}{n_2} \right) M$ $M_D = \left[ \frac{3\alpha(2-\alpha)}{2} - 1 + \frac{\alpha(2-3\alpha)k}{2n_1} - \left( \frac{6\alpha k}{n_2} - 1 \right) \right] \frac{M}{2}$ $\alpha = \frac{a}{h}$

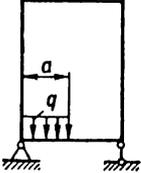
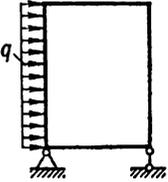
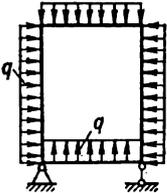
Esquema de sollicitación y diagrama de $M$	Momento flector $M$ en secciones características
	$M_A = \left( \frac{k+3}{6n_1} + \frac{1+4k}{n_2} \right) \frac{qh^3}{4}$ $M_B = \left( \frac{2}{n_2} - \frac{1}{6n_1} \right) k \frac{qh^3}{4}$ $M_C = \left( \frac{1}{6n_1} + \frac{2}{n_2} \right) k \frac{qh^3}{4}$ $M_D = \left( \frac{1+4k}{n_2} - \frac{3+k}{6n_1} \right) \frac{qh^3}{4}$
	$M_A = M_D = \frac{8+3k}{n_1} \cdot \frac{qh^3}{60}$ $M_B = M_C = \frac{qh^3}{30n_1}$
<p>Calentamiento en <math>\Delta t</math></p>  <p><math>\alpha</math> es el coeficiente de dilatación lineal de temperatura</p>	$M_A = M_D = \frac{3(1+k)EJ_2\alpha\Delta t}{kn_1h}$ $M_B = M_C = \frac{3EJ_2\alpha\Delta t}{n_1h}$

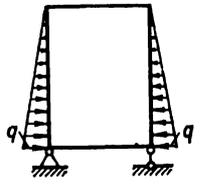
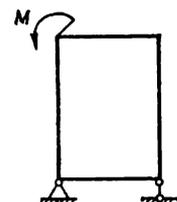
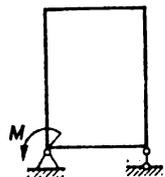
Momentos flectores en el pórtico cerrado

$$k = \frac{J_2 h}{J_1 l}; \quad p = \frac{J_3}{J_2}; \quad n = 1 + p + 6k; \quad m = (2 + k) + \frac{p}{k} (3 + 2k)$$

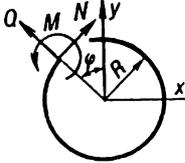
Esquema de sollicitación	Momentos flectores en los nudos del pórtico (momentos positivos originan tracción en la parte interior del pórtico)
	$M_{A, D} = \alpha(1 - \alpha) \left( \frac{1}{m} \mp \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2};$ $M_{B, C} = -\alpha(1 - \alpha) \left( \frac{2k + 3p}{km} \pm \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2}$ $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A, D} = \alpha(1 - \alpha) p \left( \frac{3 + 2k}{km} \pm \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2};$ $M_{B, C} = -\alpha(1 - \alpha) p \left( \frac{1}{m} \mp \frac{1 - 2\alpha}{n} \right) \frac{Pl}{2}$ $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A, D} = \alpha \left\{ \frac{1 - \alpha}{m} [\alpha(1 + k) - (2 + k)] \mp \right.$ $\left. \mp \frac{1}{n} [1 + 3k(2 - \alpha)] \right\} \frac{Ph}{2}$ $M_{B, C} = \alpha \left\{ -\frac{1 - \alpha}{m} [\alpha(k + p) + p] \pm \right.$ $\left. \pm \frac{1}{n} (3\alpha k + p) \right\} \frac{Ph}{2}$ $\alpha = \frac{a}{h}$

Esquema de sollicitación	Momentos flectores en los nudos del pórtico (momentos positivos originan tracción en la parte interior del pórtico)
	$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12m};$ $M_B = M_C = -\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{2k + 3p}{km}$
	$M_A = M_D = \frac{3 + 2k}{km} p \frac{ql^2}{12};$ $M_B = M_C = -\frac{p}{m} \cdot \frac{ql^2}{12}$
	$M_{A, D} = \alpha^2 \left[ \frac{3 - 2\alpha}{m} \pm \frac{3(1 - \alpha)^2}{n} \right] \frac{ql^2}{12}$ $M_{B, C} = -\alpha^2 \left[ \frac{1}{km} (3 - 2\alpha)(2k + 3p) \pm \frac{3}{n} (1 - \alpha)^2 \right] \frac{ql^2}{12}$ $\alpha = \frac{a}{l}$

Esquema de sollicitación	Momentos flectores en los nudos del pórtico (momentos positivos originan tracción en la parte interior del pórtico)
	$M_{A, D} = \alpha^2 p \left[ \frac{1}{km} (3 - 2\alpha) (2k + 3) \pm \frac{3}{n} (1 - \alpha)^2 \right] \frac{ql^3}{12}$ $M_{B, C} = -\alpha^2 p \left[ \frac{3 - 2\alpha}{m} \pm \frac{3(1 - \alpha)^2}{n} \right] \frac{ql^3}{12}$ $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A, D} = -\left( \frac{3 + k}{6m} \pm \frac{1 + 4k}{n} \right) \frac{qh^3}{4}$ $M_{B, C} = -\left( \frac{k + 3p}{6m} \pm \frac{2k + p}{n} \right) \frac{qh^3}{4}$
	$M_A = M_B = M_C = M_D = -\frac{1 + k \frac{h^2}{l^2}}{1 + k} \frac{ql^3}{12} \quad \text{cuando } J_2 = J_3$

Esquema de sollicitación	Momentos flectores en los nudos del pórtico (momentos positivos originan tracción en la parte interior del pórtico)
	$M_A = M_D = - \frac{8 + 3k}{m} \cdot \frac{qh^3}{60}$ $M_B = M_C = - \frac{7 + 2k}{m} p \frac{qh^3}{60}$
	$M_{A, D} = - \left( \frac{1}{m} \mp \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$ $M_{B, C} = \left( \frac{3p + 2k}{km} \pm \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$
	$M_{A, D} = - p \left( \frac{3 + 2k}{km} \pm \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$ $M_{B, C} = - p \left( \frac{2 + k}{km} \mp \frac{1}{n} \right) \frac{M}{2}$

**Esfuerzos y desplazamientos del anillo cargado en su plano**



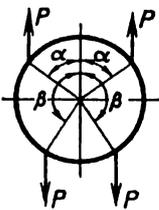
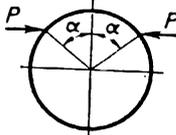
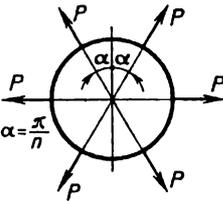
$N, Q, M$  son las fuerzas normal y cortante y el momento muestran las direcciones positivas para los esfuerzos que  $\varphi$ ;  $\delta_x, \delta_y$  son los cambios del diámetro del anillo en  $x, y$  es el módulo de elasticidad del material;  $F, J$  son el

Esquema	$N$	$Q$
	$qR$	0
	$\frac{1}{2} P \operatorname{sen} \varphi$	$\frac{1}{2} P \operatorname{csc} \varphi$
	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $P(0,3183 \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $P \cdot 0,3183 \cdot \cos \varphi$	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $-P(0,3183 \operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $-P \cdot 0,3183 \operatorname{sen} \varphi$
	$0 < \varphi < \alpha$ $P(0,3183 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi)$ $\alpha < \varphi < \pi$ $P \cdot 0,3183 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \varphi$	$0 < \varphi < \alpha$ $P(\cos \varphi - 0,3183 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \varphi)$ $\alpha < \varphi < \pi$ $-P \cdot 0,3183 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen} \varphi$

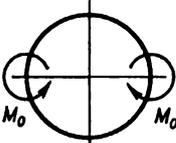
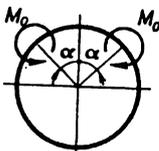
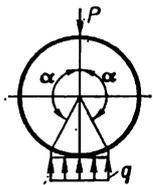
Tabla 29

mento flector en la sección del anillo determinada por el ángulo  $\varphi$  (en la figura actúan sobre la sección anterior del anillo en dirección del aumento del ángulo rección de los ejes  $x$  e  $y$  (valor positivo corresponde al aumento del diámetro); área y el momento de inercia de la sección del anillo.

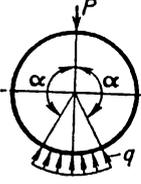
$M$	$\delta$
0	$\delta_x = \delta_y = \frac{qR^3}{EF}$
$-PR \left( 0,3183 - \frac{1}{2} \text{sen } \varphi \right)$	$\delta_x = -0,137 \frac{PR^3}{EJ}$ $\delta_y = 0,149 \frac{PR^3}{EJ}$
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $PR(0,3183 \cos \varphi + \text{sen } \varphi - 0,8183)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $PR(0,1817 + 0,3183 \cos \varphi)$	$\delta_x = -0,1366 \frac{PR^3}{EJ}$ $\delta_y = 0,1488 \frac{PR^3}{EJ}$
$0 < \varphi < \alpha$ $PR[0,3183(\alpha \text{sen } \alpha + \cos \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cos \varphi - 1) - \text{sen } \alpha + \text{sen } \varphi]$ $\alpha < \varphi < \pi$ $PR[0,3183(\alpha \text{sen } \alpha + \cos \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cos \varphi - 1)]$	$\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\text{sen}^2 \alpha + 2) + 0,6366(\alpha \text{sen } \alpha + \cos \alpha - 1) - 2 \text{sen } \alpha \right]$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\text{sen } \alpha \cos \alpha + \alpha) + 0,6366(\alpha \text{sen } \alpha + \cos \alpha - 1) - \text{sen } \alpha \right]$

Esquema	N	Q
	$0 < \varphi < \alpha$ $P[0,3183 \cos \varphi(\text{sen}^2 \beta - \text{sen}^2 \alpha)]$ $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ $P[0,3183 \cos \varphi(\text{sen}^2 \beta - \text{sen}^2 \alpha) + \text{sen} \varphi]$ $\beta < \varphi < \pi$ $P[0,3183 \cos \varphi(\text{sen}^2 \beta - \text{sen}^2 \alpha)]$	$0 < \varphi < \alpha$ $P[0,3183 \text{sen} \varphi(\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta)]$ $\alpha < \varphi < \beta$ $P[0,3183 \text{sen} \varphi(\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta) + \cos \varphi]$ $\beta < \varphi < \pi$ $P[0,3183 \text{sen} \varphi(\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta)]$
	$0 < \varphi < \alpha$ $P[0,3183(\alpha - \text{sen} \alpha \cos \alpha) - 1] \cos \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi$ $P \cdot 0,3183(\alpha - \text{sen} \alpha \cos \alpha) \cos \varphi$	$0 < \varphi < \alpha$ $P[0,3183(\text{sen} \alpha \cos \alpha - \alpha) + 1] \text{sen} \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi$ $P \cdot 0,3183(\text{sen} \alpha \cos \alpha - \alpha) \text{sen} \varphi$
	$0 < \varphi < \alpha$ $\frac{P}{2 \text{sen} \alpha} \cos \alpha$	$0 < \varphi < \alpha$ $\frac{P}{2 \text{sen} \alpha} \text{sen} \varphi$

$M$	$\delta$
$0 < \varphi < \alpha$ $PR[0,3183(\beta \operatorname{sen} \beta + \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} \alpha -$ $-\cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \varphi +$ $+ \operatorname{sen}^2 \beta \cos \varphi) - \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha]$ $\alpha < \varphi < \beta$ $PR[0,3183(\beta \operatorname{sen} \beta + \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} \alpha -$ $-\cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \varphi +$ $+ \operatorname{sen}^2 \beta \cos \varphi) - \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \varphi]$ $\beta < \varphi < \pi$ $PR[0,3183(\beta \operatorname{sen} \beta + \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} \alpha +$ $+ \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \varphi + \operatorname{sen}^2 \beta \cos \varphi)$	$\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta) + \right.$ $\left. + 0,6366(\beta \operatorname{sen} \beta + \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} \alpha - \right.$ $\left. - \cos \alpha) + 1 - 2 \operatorname{sen} \beta \right]$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \beta \cos \beta + \beta - \right.$ $\left. - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \alpha) + 0,6366(\beta \operatorname{sen} \beta + \right.$ $\left. + \cos \beta - \alpha \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) + \right.$ $\left. + \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta \right]$
$0 < \varphi \leq \alpha$ $PR[0,3183(\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi -$ $- \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \varphi) - \cos \varphi + \cos \alpha]$ $\alpha < \varphi < \pi$ $PR \cdot 0,3183(\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi -$ $- \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \cos \varphi)$	$\delta_x = \frac{PR^3}{EJ} \left[ 0,6366(\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha) + \right.$ $\left. + \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \alpha) \right];$ $\delta_y = \frac{PR^3}{EJ} \left[ 0,6366(\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha) + \right.$ $\left. + \cos \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 \right]$
$0 < \varphi < \alpha$ $\frac{PR}{2} \left( \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$ cuando $\varphi = 0, 2\alpha, 4\alpha, \dots$ $M_{\max}^{(+)} = \frac{PR}{2} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$ cuando $\varphi = \alpha, 3\alpha, \dots$ $M_{\max}^{(-)} = -\frac{PR}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right)$	<p>Desplazamiento radial del punto de aplicación de la fuerza dirigida desde el centro</p> $\frac{PR^3}{2EJ} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} \right) - \frac{1}{\alpha} \right]$ <p>Desplazamiento radial en los puntos <math>\varphi = 0, 2\alpha, 4\alpha, \dots</math> (hacia el centro)</p> $\frac{PR^3}{4EJ} \left( \frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \right)$

Esquema	$N$	$Q$
	$0 < \varphi < \pi$ $\frac{M_0}{R} 0,6366 \cos \varphi$	$0 < \varphi < \pi$ $- \frac{M_0}{R} 0,6366 \sin \varphi$
	$0 < \varphi < \pi$ $\frac{M_0}{R} 0,6366 \sin \alpha \cos \varphi$	$0 < \varphi < \pi$ $- \frac{M_0}{R} 0,6366 \sin \alpha \sin \varphi$
<p data-bbox="205 966 364 999"><math>P = 2qR \sin \alpha</math></p> 	$0 < \varphi < \alpha$ $- qR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi \right)$ $\alpha < \varphi < \pi$ $- qR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cos \varphi + \sin^2 \varphi \right)$	$0 < \varphi < \alpha$ $qR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi \right)$ $\alpha < \varphi < \pi$ $qR \left( \frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \sin \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right)$

M	$\delta$
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $M_0 \left( 0,6366 \cos \varphi - \frac{1}{2} \right)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $M_0 \left( 0,6366 \cos \varphi + \frac{1}{2} \right)$	$\delta_x = 0$ $\delta_y = 0$
$0 < \varphi < \alpha$ $M_0 [0,3183(2 \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha + \alpha) - 1]$ $\alpha < \varphi < \pi$ $M_0 [0,3183(2 \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha + \alpha)]$	$\delta_x = \frac{M_0 R^2}{EJ} (0,6366\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$ $\delta_y = \frac{M_0 R^2}{EJ} (0,6366\alpha + \cos \alpha - 1)$
$0 < \varphi < \alpha$ $M(0) - qR^2 \left[ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi - \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen}^3 \alpha (1 - \cos \varphi) \right]$ $\alpha < \varphi < \pi$ $M(0) + qR^2 \left[ \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen}^3 \alpha (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \varphi) \right]$ $M(0) = qR^2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{3} - \frac{3}{4} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{4} \right) \right]$	$\delta_x = \frac{2qR^4}{EJ} \left[ \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{12} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha}{4} - \operatorname{sen} \alpha + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \right]$ $\delta_y = - \frac{2qR^4}{EJ} \left[ \frac{1}{12} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{4} - \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha}{4} - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha}{12} - \frac{\cos \alpha}{6} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha \operatorname{sen}^2 \alpha}{2} + \frac{3}{4} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\alpha}{4} - \operatorname{sen} \alpha \right) \right]$

Esquema	$N$	$Q$
<p data-bbox="209 332 364 356"><math>P = 2qR \operatorname{sen} \alpha</math></p> 	$0 < \varphi < \alpha$ $- qR[\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \varphi + (1 + \cos \alpha)\cos \varphi] -$ $- N(\pi) \cos \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi$ $- qR(1 + \cos \alpha) -$ $- N(\pi) \cos \varphi$ $N(\pi) = -\frac{qR}{\pi} (\pi - \operatorname{sen} \alpha +$ $+ \alpha \cos \alpha)$	$0 < \varphi < \alpha$ $- qR[\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \varphi -$ $- (1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \varphi] +$ $+ N(\pi) \operatorname{sen} \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi$ $qR \operatorname{sen} \varphi + N(\pi) \operatorname{sen} \varphi$
	$0 < \varphi < \alpha$ $- qR \operatorname{sen}^2 \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$ $- qR \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \varphi$	$0 < \varphi < \alpha$ $qR \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$ $qR \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi$

M	δ
$0 < \varphi < \alpha$ $qR^2 \left[ \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \varphi + (1 + \cos \alpha) \cos \varphi - \right.$ $\left. - \frac{1}{\pi} (\pi - \alpha + \text{sen } \alpha) \right] +$ $+ N(\pi) \cdot R \cdot \cos \varphi$ $\alpha < \varphi < \pi$ $qR^2 \left[ \cos \varphi - \frac{1}{\pi} (\text{sen } \alpha - \alpha) \right] +$ $- N(\pi) \cdot R \cdot \cos \varphi$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\delta_x = - \frac{qR^4}{EJ} \left( 2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \right.$ $+ \frac{2 \text{sen } \alpha}{\pi} - \frac{3 \text{sen } \alpha}{2} -$ $\left. - \frac{\pi \cos \alpha}{2} + \frac{\alpha \cos \alpha}{2} \right)$ $0 < \alpha < \pi$ $\delta_y = \frac{qR^4}{EJ} \left( 2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \right.$ $+ \frac{2 \text{sen } \alpha}{\pi} - \frac{\alpha \text{sen } \alpha}{2} - \cos \alpha \left. \right)$
$0 < \varphi < \alpha$ $M(0) - \frac{qR^2}{2} \text{sen}^2 \varphi$ $\alpha \leq \varphi < \pi - \alpha$ $M(0) - qR^2 \left( \text{sen } \alpha \text{sen } \varphi - \right.$ $\left. - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha \right)$ $M(0) = qR^2 \left[ \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha}{2} + \right. \right.$ $\left. + \alpha \text{sen}^2 \alpha + \frac{3}{2} \text{sen } \alpha \cos \alpha \right) -$ $\left. - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \alpha \right]$	$\delta_x = \frac{qR^4}{EJ} \left[ - \text{sen } \alpha - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{3} + \right.$ $+ \frac{1}{\pi} (\alpha + 3 \text{sen } \alpha \cos \alpha +$ $\left. + 2 \alpha \text{sen}^2 \alpha) \right]$ $\delta_y = - \frac{qR^4}{EJ} \left[ \text{sen}^2 \alpha - \right.$ $- \frac{\text{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{3} - \alpha \text{sen } \alpha -$ $- \frac{2 \cos \alpha}{3} + \frac{2}{3} + \frac{\pi \text{sen } \alpha}{2} -$ $- \frac{1}{\pi} (2\alpha \text{sen}^2 \alpha +$ $\left. + 3 \text{sen } \alpha \cos \alpha + \alpha) \right]$

CÁLCULO DE VIGUETAS PLANAS CURVAS

§ 81. Determinación de las tensiones en las viguetas de curvatura grande

Los ganchos portacarga, ojales, eslabones de cadena, llantas de poleas y ruedas, arcos, etc. son los que pertenecen a las viguetas curvas. Los ejes de dichas viguetas son curvas planas. En las secciones transversales de la vigueta plana curva, dado el caso general, actúan tres factores interiores de fuerza  $M$ ,  $Q$  y  $N$ ; la regla de su determinación es análoga a la de las viguetas de eje recto. Las dependencias diferenciales entre  $M$ ,  $Q$  y  $q$  fueron dadas en el § 21.

Representan gran interés práctico las viguetas curvas que tienen el plano de simetría longitudinal (fig. 271,  $a, b$ ), en el cual actúan, ordinariamente, las cargas exteriores.

La distribución de las tensiones normales en las secciones transversales de viguetas curvas es otra que en las viguetas de eje recto. Esa diferencia, siendo iguales las demás condiciones, es tanto mayor, cuanto mayor es la curvatura de la vigueta caracterizada por la relación de la altura de la sección transversal  $h$  de la barra curva al radio de curvatura  $R$  de su eje. Dado esto, se acostumbra diferenciar *vigueta de curvatura pequeña* que tienen  $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ , y las de

*curvatura grande* que tienen  $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$ .

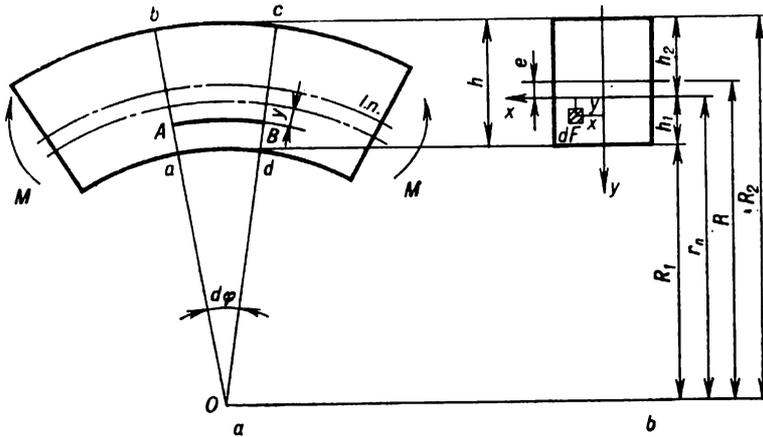


Fig. 271

Durante la flexión de viguetas de curvatura pequeña las tensiones normales pueden determinarse, con suficiente grado de precisión, mediante la fórmula de Navier (10.6) deducida para las vigas de eje recto. Las tensiones máximas calculadas por la fórmula de Navier para una vigueta de sección rectangular

con relación  $\frac{h}{R} = \frac{1}{15}$  difieren un 2% de las tensiones deducidas por medio de las fórmulas para vigueta de curvatura grande; cuando  $\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$ , difieren en un 3,5%; cuando  $\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$ , en un 7%.

Veamos el caso de flexión pura de una vigueta de curvatura grande  $\left(\frac{h}{R} \geq \frac{1}{5}\right)$  (fig. 271). Supongamos que el radio  $r_n$  de la capa neutra es desconocido y no coincide con el radio  $R$  del eje de la barra.

Al hallar la fórmula para la determinación de las tensiones normales en la vigueta de curvatura grande se parte de las mismas hipótesis que en la deducción de la fórmula de Navier, es decir, se valen de la hipótesis de las secciones planas y de la que dice que las fibras longitudinales del material no hacen presión una sobre la otra. Elijamos la dirección de los ejes de la sección  $x$  e  $y$  como se muestra en la fig. 271 (considerando que el eje  $x$  coincide con la línea neutra, cuya posición todavía es desconocida). La dirección de  $y$  hacia el centro de curvatura se considera positiva.

Examinemos la parte estática del problema y escribamos la condición de equilibrio con arreglo al elemento de la vigueta (fig. 272, a) que se quedó después de retirar las partes seccionadas. Para nuestro caso, cuando en la sección actúa un factor de fuerza  $M_x$ , se tendrá

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad (14.1)$$

$$\int_F \sigma y dF = M. \quad (14.2)$$

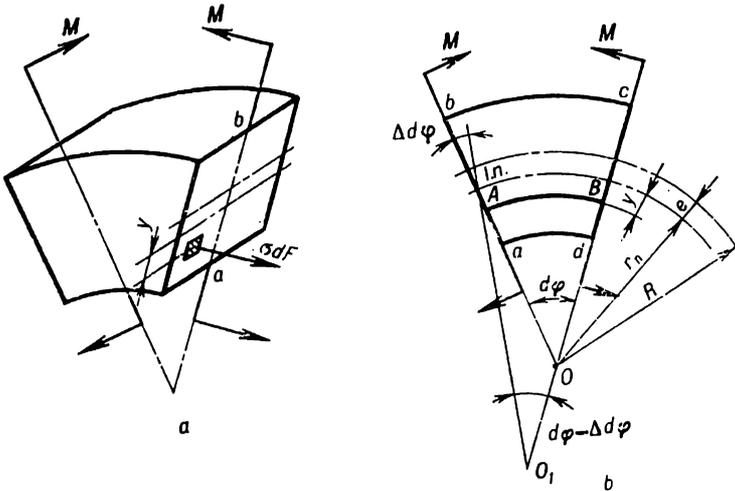


Fig. 272

Debido a la simetría

$$M_y = \int_F \sigma x dF = 0.$$

Veamos la parte geométrica del problema. El alargamiento unitario de un tramo elemental  $AB$  separado arbitrariamente que se encuentra a una distancia  $y$  de la línea neutra (fig. 272, b) y obtuvo como resultado de la deformación el alargamiento  $y\Delta d\varphi$  es igual a

$$\varepsilon = \frac{y\Delta d\varphi}{(r_n - y) d\varphi}, \quad (14.3)$$

donde  $(r_n - y) d\varphi$  es la longitud del elemento antes de la deformación.

Del examen de la parte física del problema determinada por la ley de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r_n - y}, \quad (14.4)$$

podemos escribir la condición (14.1) en la siguiente forma:

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0.$$

Puesto que

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \neq 0,$$

resulta

$$\int_F \frac{y dF}{r_n - y} = 0. \quad (14.5)$$

Hallamos de (14.2)

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = M. \quad (14.6)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} &= \int_F \frac{y^2 + r_n y - r_n y}{r_n - y} dF = - \int_F \left( y - \frac{r_n y}{r_n - y} \right) dF = \\ &= - \int_F y dF + r_n \int_F \frac{y dF}{r_n - y} = - S_x + 0 \end{aligned}$$

o bien

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = - S_x = -(-e) F = eF, \quad (14.7)$$

podemos representar (14.6) del modo siguiente:

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} eF = M.$$

De aquí

$$\frac{E\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{eF}, \quad (14.8)$$

siendo  $e$  la distancia desde la línea neutra hasta el centro de gravedad;  $F$ , el área de la sección transversal.

Sustituyendo (14.8) en (14.4) hallamos la fórmula para determinar las tensiones normales en la flexión

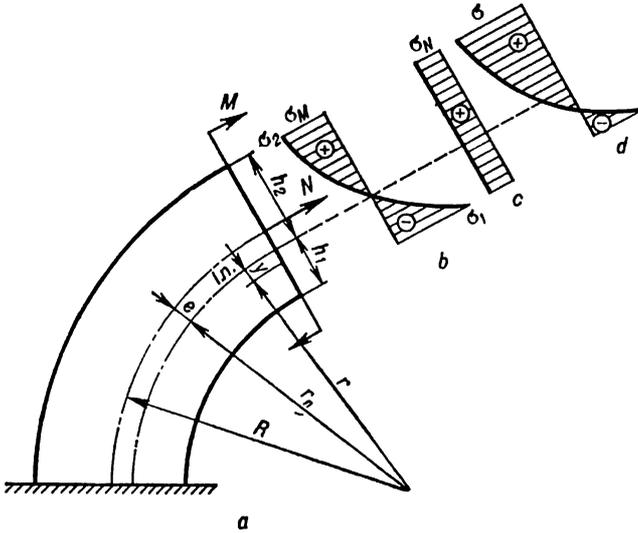


Fig. 273

$$\sigma = \frac{My}{eF(r_n - y)}, \quad (14.9)$$

o bien

$$\sigma = - \frac{My}{S_x(r_n - y)}, \quad (14.10)$$

siendo  $M$  el momento flector en la sección;  $S_x$ , el momento estático del área de la sección de la viga curva con respecto a la línea neutra.

Del análisis de (14.9) o (14.10) se ve que las tensiones normales se distribuyen por la altura según una ley hiperbólica (fig. 273, b). Las magnitudes absolutas de las tensiones en las fibras extremas de la sección de la viga se determinan de acuerdo con (14.9) mediante las fórmulas

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{FeR_1}; \quad \sigma_2 = \frac{Mh_2}{FeR_2}, \quad (14.11)$$

siendo  $R_1$  y  $R_2$  los radios de curvatura de las fibras interiores y exteriores de la viga curva, respectivamente;  $h_1$  y  $h_2$ , las distancias desde la línea neutra hasta dichas fibras. El signo de la tensión se determina por la dirección del momento flector en la sección.

Las fórmulas (14.9)–(14.11) pueden utilizarse si se conoce la magnitud  $e$  que forma parte de esas fórmulas o bien el radio de la capa neutra  $r_n$ , porque

$$e = R - r_n, \quad (14.12)$$

siendo  $R$  el radio de la capa en la cual están situados los centros de gravedad de las secciones de la viga. El radio  $r_n$  lo determinamos de la ecuación (14.5).

Haciendo la sustitución de las variables:  $r = r_n - y$  o bien  $y = r_n - r$ , escribamos la ecuación (14.5) en la siguiente forma:

$$\int_F \frac{y \, dF}{r_n - y} = \int_F \frac{r_n - r}{r} \, dF = 0$$

o bien

$$r_n \int \frac{dF}{r} - F = 0.$$

De aquí

$$r_n = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \quad (14.13)$$

Puesto que para la sección rectangular  $F = bh$  ( $h$  es la altura de la sección;  $b$ , el ancho de la sección) y  $dF = b \, dr$ , la fórmula (14.13) puede escribirse así:

$$r_n = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b \, dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \log \frac{R_2}{R_1}}. \quad (14.14)$$

Haciendo uso de la serie

$$\begin{aligned} \ln \frac{R_2}{R_1} &= \ln \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} = \ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}} = \\ &= \frac{h}{R} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

se tendrá

$$e = R - r_n = R - \frac{R}{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2R} \right)^4 + \dots}.$$

En la primera aproximación

$$e = R \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2} \right) \approx \frac{h^2}{12R}. \quad (14.15)$$

En la segunda aproximación

$$e = \frac{h^2}{12R} \left[ 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 \right]. \quad (14.16)$$

A base de (14.13) puede obtenerse, por analogía, la expresión para  $e$  en el caso de otras formas de la sección transversal. En la tabla 30 se dan los radios de curvatura  $r_n$  de la capa neutra para las secciones de diferente forma. A partir de (14.12), siendo conocidos  $r_n$ , pueden determinarse las magnitudes  $e$ . Para algunas formas de la sección transversal se puede determinar  $e$  por la tabla 31.

## § 82. Cálculo a la resistencia

La condición de resistencia para una barra de curvatura pequeña cuando en su sección actúan el momento flector y la fuerza normal (fig. 273, *a*) tiene el aspecto

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (14.17)$$

siendo  $F$  el área de la sección;  $W$ , el módulo de la sección (véase el § 11).

Para una barra de curvatura grande a base de (14.9) la condición de resistencia será

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{My}{Fe(r_n - y)} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (14.18)$$

En este caso se deben examinar los puntos de la sección, en los cuales las tensiones totales de flexión o tracción serán máximas (fig. 273, *b, c, d*). Para esos puntos se debe sustituir en la fórmula (14.18)  $y = h_1$  o bien  $y = h_2$  y, respectivamente,  $r_n - y = R_1$  o bien  $r_n - y = R_2$ .

Si la vigueta de curvatura grande está hecha de un material, para el cual las tensiones admisibles de tracción  $[\sigma_+]$  y compresión  $[\sigma_-]$  son diferentes (algunas clases de fundición, plásticos, etc.), las condiciones de resistencia tienen que cumplirse para los puntos extremos de la sección tanto en la zona traccionada como en la comprimida.

## § 83. Determinación de los desplazamientos

Para determinar los desplazamientos en las barras de cualquier curvatura es cómodo valerse del método de Mohr (§ 69).

En las barras de curvatura pequeña se puede prescindir de la deformación longitudinal y de deslizamiento, y en el caso de flexión plana utilizar la fórmula de Mohr en la siguiente forma:

$$\Delta_{iP} = \int_S \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \quad (14.19)$$

Durante la flexión plana de la vigueta de curvatura grande la deformación del elemento debida a la acción de los esfuerzos  $M_P$  y  $N_P$  consta del alargamiento  $\Delta(ds)$  del segmento  $ds$  del eje y el giro relativo  $d\theta$  de las secciones que delimitan el elemento (fig. 274, a, b). El ángulo recíproco de giro de las secciones  $\Delta d\varphi = d\theta_1$  debido al momento flector puede determinarse de (14.8), donde  $eF = |S_x| = S$ ,

$$d\theta_1 = \frac{M_P d\varphi}{ES} = \frac{M_P ds}{ESR_0}.$$

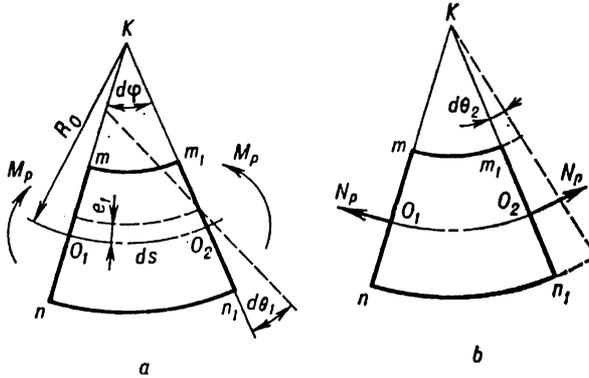


Fig. 274

El ángulo de giro de las secciones originado por las fuerzas axiales a causa de una longitud no igual de las fibras del elemento (fig. 274, b) es

$$d\theta_2 = \frac{N_P ds}{EFR_0}.$$

El ángulo de giro completo es

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_P ds}{ESR_0} + \frac{N_P ds}{EFR_0}. \quad (14.20)$$

El alargamiento del elemento a causa de la acción de las fuerzas axiales es

$$\Delta(ds)_1 = \frac{N_P ds}{EF}.$$

El alargamiento debido al giro de la sección en un ángulo  $d\theta_1$  es

$$\Delta(ds)_2 = e d\theta_1 = \frac{M_P ds}{ESR_0} e = \frac{M_P ds}{EFR_0}.$$

El alargamiento completo de la fibra axial es

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{N_P ds}{EF} + \frac{M_P ds}{EFR_0}. \quad (14.21)$$

Sustituyendo (14.20) y (14.21) en la fórmula de los posibles desplazamientos, hallamos la fórmula general para determinar los desplazamientos de la vigueta de curvatura grande

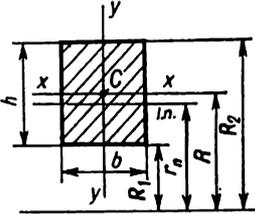
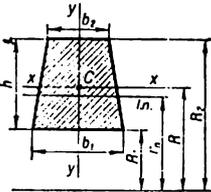
$$\Delta_{iP} = \int_S \left[ \frac{\bar{M}_i M_P}{ESR_0} + \frac{\bar{N}_i M_P + \bar{M}_i N_P}{EFR_0} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF} + k \frac{\bar{Q}_i Q_P}{GF} \right] ds. \quad (14.22)$$

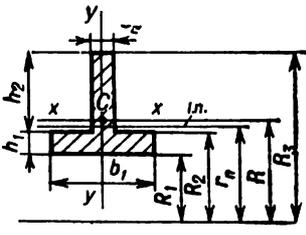
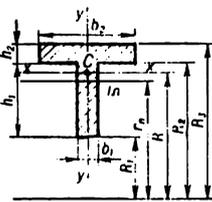
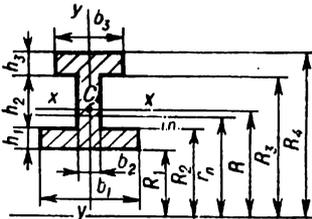
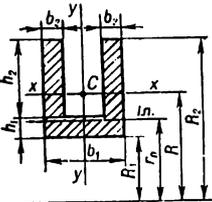
En la práctica, generalmente, se prescinde de la influencia de la fuerza transversal, a causa de lo cual en (14.22) falta el último sumando.

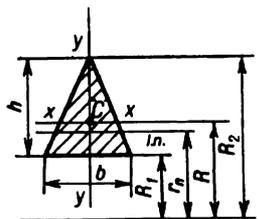
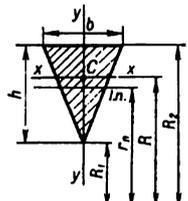
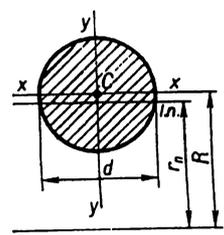
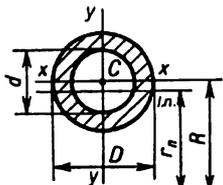
En las tablas 32 y 33 se dan las expresiones para determinar los desplazamientos del extremo libre de la barra circular en voladizo de sección transversal constante para diferentes esquemas de su sollicitación, y en la tabla 34, los valores de las integrales definidas que se encuentran con frecuencia al determinar los desplazamientos en las barras curvas.

Tabla 30

Radio de curvatura de la capa neutra  $r_n$  para las secciones de diferente forma

Sección (C es el centro de gravedad)	$r_n$
<p data-bbox="162 757 279 782">Rectángulo</p> 	$r_n = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{\ln \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}}$ $\ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{h}{R} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right]$
<p data-bbox="162 1211 256 1236">Trapezio</p> 	$r_n = \frac{h(b_2 + b_1)}{2 \left[ \frac{b_1 R_2 - b_2 R_1}{h} \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2) \right]}$

Sección (C es el centro de gravedad)	$r_n$
<p>en T</p> 	$r_n = \frac{b_2 h_2 + b_1 h_1}{b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$
<p>en T</p> 	$r_n = \frac{b_2 h_2 + b_1 h_1}{b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$
<p>Doble T</p> 	$r_n = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_4}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3}}$
<p>Sección canal</p> 	$r_n = \frac{b_1 h_1 + 2b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_2 - h_2}{R_1} + 2b_2 \ln \frac{R_2}{R_2 - h_2}}$

Sección (C es el centro de gravedad)	$r_n$
<p>Triángulo</p> 	$r_n = \frac{h}{2 \left[ \frac{R_2}{h} \ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right]}$
<p>Triángulo</p> 	$r_n = \frac{h}{2 \left[ 1 - \frac{R_1}{R_2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right]}$
<p>Círculo</p> 	$r_n = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$
<p>Sección anular</p> 	$r_n = \frac{\sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R^2 - D^2}}{4} = \frac{D^2 - d^2}{4(\sqrt{4R^2 - d^2} - \sqrt{4R^2 - D^2})}$

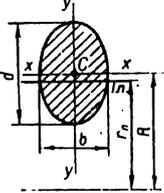
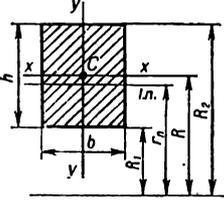
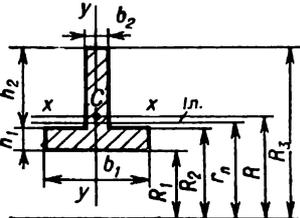
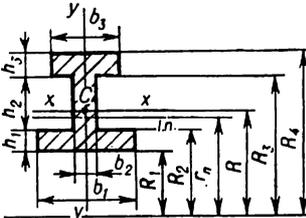
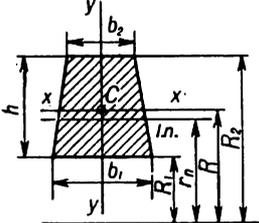
Sección (C es el centro de gravedad)	$r_n$
<p>Sección ovalada</p> 	$r_n = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$

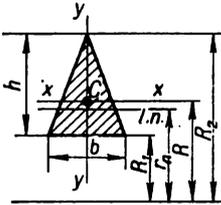
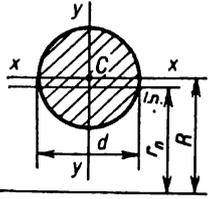
Tabla 31

Valor del coeficiente  $k$  en la fórmula  $e = kR$

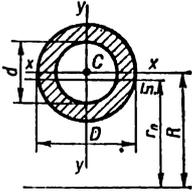
Sección	$\frac{R}{a}$	$k$
<p>Rectángulo .</p>  $a = R - R_1 = \frac{h}{2}$	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,305 0,204 0,149 0,112 0,090 0,077 0,065 0,055 0,047 0,041 0,028 0,021 0,0093 0,0052 0,0033</p>
<p>en T</p> 	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0</p>	<p>0,418 0,299 0,229 0,183 0,149 0,125 0,106 0,091 0,079 0,069</p>

Sección	$\frac{R}{a}$	$k$
$b_1 = 4b_2; h_1 = 1,5b_2;$ $h_2 = 4,5b_2;$ $a = R - R_1 = 2,04b_2$	3,5	0,052
	4,0	0,040
	6,0	0,018
	8,0	0,010
	10,0	0,0065
<p>Doble T</p>  <p>a) <math>b_1 = 6b_2; b_3 = 4b_2;</math>  <math>h_1 = 2b_2; h_2 = 3b_2;</math>  <math>h_3 = b_2;</math>  <math>a = R - R_1 = 2,34b_2</math></p> <p>b) <math>b_1 = b_3 = 3b_2;</math>  <math>h_1 = h_3 = b_2; h_2 = 4b_2;</math>  <math>a = R - R_1 = 3b_2</math></p>	1,2	0,409
	1,4	0,292
	1,6	0,224
	1,8	0,178
	2,0	0,144
	2,2	0,120
	2,4	0,103
	2,6	0,089
	2,8	0,077
	3,0	0,067
	3,5	0,049
	4,0	0,038
	6,0	0,018
	8,0	0,010
	10,0	0,0065
	1,2	0,408
	1,4	0,285
	1,6	0,208
	1,8	0,160
	2,0	0,127
2,2	0,104	
2,4	0,088	
2,6	0,077	
2,8	0,067	
3,0	0,058	
3,5	0,041	
4,0	0,030	
6,0	0,013	
8,0	0,0076	
10,0	0,0048	

Sección	$\frac{R}{a}$	$k$	
c) $b_1 = b_2 = 6b_3$ $h_1 = h_2 = b_2; h_3 = 4b_2$ y $a = R - R_1 = 3b_2$	1,2	0,453	
	1,4	0,319	
	1,6	0,236	
	1,8	0,183	
	2,0	0,147	
	2,2	0,122	
	2,4	0,104	
	2,6	0,090	
	2,8	0,078	
	3,0	0,067	
	3,5	0,048	
	4,0	0,036	
	6,0	0,016	
	8,0	0,0089	
	10,0	0,0057	
Trapecio 	1,2	0,336	
	1,4	0,229	
	1,6	0,168	
	1,8	0,128	
	2,0	0,102	
	2,2	0,084	
	2,4	0,071	
	2,6	0,061	
	2,8	0,053	
	3,0	0,046	
	3,5	0,033	
	4,0	0,024	
	6,0	0,011	
	8,0	0,0060	
	10,0	0,0039	
	a) $b_1 = 2b_2;$ $h = (1 \div 3) b_2;$ $a = R - R_1 = \frac{4}{9} h$	1,2	0,352
		1,4	0,243
		1,6	0,179
		1,8	0,138
		2,0	0,110
		2,2	0,092
2,4		0,078	
2,6		0,067	
2,8		0,058	
3,0		0,050	
3,5		0,037	
4,0		0,028	
6,0		0,012	
8,0		0,0060	
10,0		0,0039	
b) $b_1 = 4b_2; h = 5b_2;$ $a = R - R_1 = 2b_2 =$ $= 0,4h$	1,2	0,352	
	1,4	0,243	
	1,6	0,179	
	1,8	0,138	
	2,0	0,110	
	2,2	0,092	
	2,4	0,078	
	2,6	0,067	
	2,8	0,058	
	3,0	0,050	
	3,5	0,037	
	4,0	0,028	
	6,0	0,012	
	8,0	0,0060	
	10,0	0,0039	

Sección	$\frac{R}{a}$	k
<p>Triángulo que tiene</p> $h = \frac{3}{5} b \text{ y } a = R - R_1 =$ $= \frac{h}{3} = \frac{b}{5}$ 	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,361 0,251 0,186 0,144 0,116 0,096 0,082 0,070 0,060 0,052 0,038 0,029 0,013 0,0060 0,0039</p>
<p>Círculo</p>  $a = \frac{d}{2}$	<p>1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0</p>	<p>0,224 0,151 0,108 0,084 0,069 0,058 0,049 0,042 0,036 0,030 0,022 0,016 0,0070 0,0039 0,0025</p>

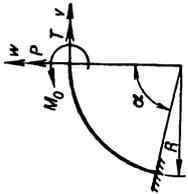
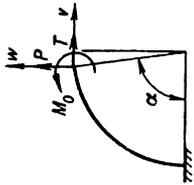
Sección	$\frac{R}{a}$	$k$
<b>Sección anular</b>	1,2	0,269
	1,4	0,182
	1,6	0,134
	1,8	0,104
	2,0	0,083
	2,2	0,068
	2,4	0,057
	2,6	0,049
	2,8	0,043
	3,0	0,038
	3,5	0,028
	4,0	0,020
	6,0	0,0087
	8,0	0,0049
	10,0	0,0031

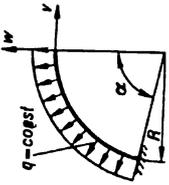
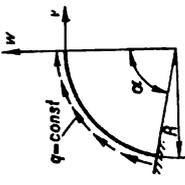
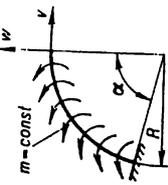


$$D = 2d \text{ y } a = \frac{D}{2} = d$$

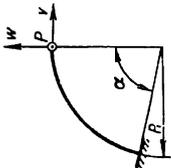
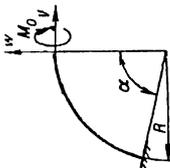
Tabla 32

Desplazamientos del extremo libre de la barra circular en voladizo de sección constante al solicitarla en su plano  
 ( $w, v, \theta$  son los desplazamientos vertical, horizontal y angular, respectivamente)

Esquema	$w$	$v$	$\theta$
	$\frac{R^3}{EJ} \left[ M_0(1 - \cos \alpha) + PR \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - TR \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2} \right]$	$\frac{R^2}{EJ} \left[ -M_0(\alpha - \sin \alpha) - PR \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2} + TR \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \right]$	$\frac{R}{EJ} \left[ M_0 \alpha + PR(1 - \cos \alpha) - TR(\alpha - \sin \alpha) \right]$
	$\frac{R^3}{EJ} \left[ M_0(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + PR \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \sin 2\alpha \right) - TR \left( \cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) \right]$	$\frac{R^2}{EJ} \left[ -M_0(\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) - PR \left( \cos \alpha - \frac{3}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \right) + TR \left( \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha + \frac{3}{4} \sin 2\alpha - 2 \sin \alpha \right) \right]$	$\frac{R}{EJ} \left[ M_0 \alpha + PR(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - TR(\alpha \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) \right]$

Esquema	w	v	θ
	$\frac{qR^4}{EJ} \frac{(1 - \cos \alpha)^3}{2}$	$-\frac{qR^4}{EJ} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{qR^3}{EJ} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$
	$\frac{qR^4}{EJ} \left( \frac{\alpha}{2} + \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{qR^4}{EJ} \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2} \right)$	$\frac{qR^3}{EJ} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right)$
	$\frac{mR^3}{EJ} (\operatorname{sen} \alpha - \alpha \cos \alpha)$	$\frac{mR^3}{EJ} (1 - \cos \alpha - \alpha \operatorname{sen} \alpha)$	$\frac{mR^2}{EJ} \cdot \frac{\alpha^2}{2}$

Desplazamientos del extremo libre de la barra circular en voladizo de sección constante al soportarla en el plano perpendicular ( $\lambda$  es la relación de las rigideces de la sección a la flexión  $EJ$  y la torsión  $GJ_t$ )

Esquema	Desplazamiento perpendicular al plano $w$	Angulo de giro alrededor del eje $v$	Angulo de giro alrededor del eje $w$
	$\frac{PR^3}{EJ} \left( \frac{1+3\lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda-1}{4} \text{sen } 2\alpha - 2\lambda \text{sen } \alpha \right)$	$\frac{PR^2}{EJ} \left( \frac{\lambda-1}{2} \text{sen } 2\alpha + \frac{1+\lambda}{2} \alpha - \lambda \text{sen } \alpha \right)$	$\frac{PR^2}{EJ} \left[ \frac{\lambda-1}{2} \text{sen}^2 \alpha + \lambda(1 - \cos \alpha) \right]$
	$\frac{M_0 R^2}{EJ} \left( \frac{\lambda-1}{4} \text{sen } 2\alpha + \frac{1+\lambda}{2} \alpha - \lambda \text{sen } \alpha \right)$	$\frac{M_0 R}{EJ} \left( \frac{1+\lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda-1}{2} \text{sen } 2\alpha \right)$	$\frac{M_0 R}{EJ} \cdot \frac{\lambda-1}{2} \text{sen}^2 \alpha$

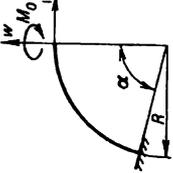
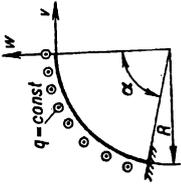
Esquema	Desplazamiento perpendicular al plano $w$	Angulo de giro alrededor del eje $\nu$	Angulo de giro alrededor del eje $w$
	$\frac{M_0 R^3}{EJ} \left[ \frac{\lambda - 1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha + \lambda(1 - \cos \alpha) \right]$	$\frac{M_0 R}{EJ} \cdot \frac{\lambda - 1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha$	$\frac{M_0 R}{EJ} \left( \frac{1 + \lambda}{2} \alpha - \frac{\lambda - 1}{4} \operatorname{sen} 2\alpha \right)$
	$\frac{q R^4}{EJ} \left[ (1 - \cos \alpha)^2 + \lambda(\alpha - \operatorname{sen} \alpha)^2 \right]$	$\frac{q R^3}{EJ} \left[ (\lambda + 1)(1 - \cos \alpha) - \frac{\lambda - 1}{4}(1 - \cos 2\alpha) - \lambda \alpha \operatorname{sen} \alpha \right]$	$\frac{q R^3}{EJ} \left[ (\lambda + 1) \left( \operatorname{sen} \alpha - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\lambda - 1}{4} \operatorname{sen} 2\alpha - \lambda \alpha \cos \alpha \right]$

Tabla 34

Valores de las integrales definidas que se encuentran frecuentemente al determinar los desplazamientos en barras curvas

Integral	Límites de integración			
	de 0 a $\alpha$	de 0 a $\frac{\pi}{4}$	de 0 a $\frac{\pi}{2}$	de 0 a $\pi$
$\int \text{sen } \varphi \, d\varphi$	$1 - \cos \alpha$	0,293	1	2
$\int \cos \varphi \, d\varphi$	$\text{sen } \alpha$	0,707	1	0
$\int \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi$	$-\frac{1}{4} \text{sen } 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,143	0,785	1,571
$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4} \text{sen } 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,643	0,785	1,571
$\int \text{sen}^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{\text{sen}^3 \alpha}{3}$	0,118	0,333	0
$\int \cos^2 \varphi \text{sen } \varphi \, d\varphi$	$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{3}$	0,216	0,333	0,667
$\int \text{sen } 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\int \cos 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2} \text{sen } 2\alpha$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\int \text{sen } \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{2}$	0,25	0,5	0
$\int \varphi \text{sen } \varphi \, d\varphi$	$\text{sen } \alpha - \alpha \cos \alpha$	0,152	1	3,141
$\int \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\cos \alpha + \alpha \text{sen } \alpha - 1$	0,262	0,571	-2
$\int \varphi \text{sen}^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4} (\alpha^2 - \alpha \text{sen } 2\alpha) - \frac{1}{8} (\cos 2\alpha - 1)$	0,0833	0,868	2,47
$\int \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4} (\alpha^2 + \alpha \text{sen } 2\alpha) + \frac{1}{8} (\cos 2\alpha - 1)$	0,226	0,368	2,47

Integral	Límites de integración			
	de 0 a $\alpha$	de 0 a $\frac{\pi}{4}$	de 0 a $\frac{\pi}{2}$	de 0 a $\pi$
$\int \varphi \operatorname{sen} 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$	0,25	0,785	-1,571
$\int \varphi \cos 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4} (\cos 2\alpha - 1) + \frac{\alpha \operatorname{sen} 2\alpha}{2}$	0,143	-0,5	0
$\int \operatorname{sen}(\alpha - \varphi) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$	$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} - \frac{\alpha \cos \alpha}{2}$	0,076	0,5	1,571
$\int \cos(\alpha - \varphi) \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$	$\frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha}{2}$	0,278	0,785	0

**CÁLCULO DE CILINDROS DE PAREDES GRUESAS Y DISCOS GIRATORIOS**

**§ 84. Cilindro de paredes gruesas sujeto a presión interior y exterior**

Un cilindro se considera de paredes gruesas si el espesor de su pared es mayor que una décima de su radio medio. Veamos un cilindro de paredes gruesas solicitado por una presión interior ( $p_1$ ) y una exterior ( $p_2$ ) (fig. 275);  $r_1$  y  $r_2$  son, respectivamente, los radios interior y exterior del cilindro. A consecuencia de la simetría axial del cilindro y de las cargas las tensiones y deformaciones en el cilindro serán también simétricas con respecto a su eje.

Separemos mediante dos secciones perpendiculares al eje del cilindro un anillo de longitud unitaria (fig. 275). Cortemos de ese anillo un elemento  $abcd$  (fig. 276, a) por medio de dos planos que pasan a través del eje del cilindro y que forman entre sí un ángulo  $d\theta$ , y dos superficies cilíndricas de radios  $r$  y  $r + dr$  (fig. 276, b). Por las caras de ese elemento actuarán las tensiones radiales  $\sigma_r$  y tangenciales  $\sigma_\theta$  que sustituyen la acción de la parte eliminada del cilindro y satisfacen las condiciones de equilibrio del elemento. Es evidente que  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_r$  serán las tensiones principales.

Empecemos la determinación de  $\sigma_r = f(p_1, p_2, r)$  y  $\sigma_\theta = f_1(p_1, p_2, r)$  por el examen de la parte estática del problema y conpongamos las ecuaciones de la estática de acuerdo con el sistema de coordenadas aceptado (fig. 276, c):

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Gracias a la simetría del elemento la segunda condición se satisface idénticamente, y la primera, una vez sustituidas las expresiones para los esfuerzos, tomará el siguiente aspecto:

$$\sum X = -\sigma_r r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta - 2 \left( \sigma_\theta dr \operatorname{sen} \frac{d\theta}{2} \right) = 0.$$

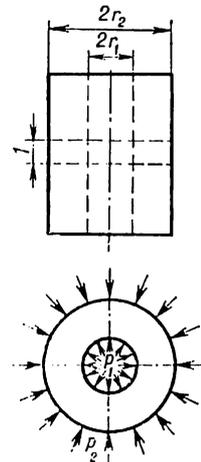


Fig. 275

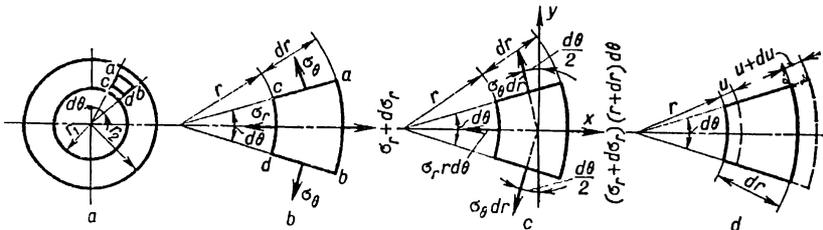


Fig. 276

Tomando  $\text{sen } \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$  y prescindiendo de las magnitudes de segundo orden de pequeñez, obtenemos

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \quad (15.1)$$

Esta ecuación contiene dos tensiones incógnitas:  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_r$ . Para hallarlas es necesario examinar *las partes geométrica y física del problema* lo que permitirá representar la ecuación (15.1) por medio de los desplazamientos.

Denotemos por  $u$  el desplazamiento radial de la superficie cilíndrica de radio  $r$  (fig. 276,  $d$ ); entonces el desplazamiento de la superficie cilíndrica de radio  $r + dr$  será  $u + du$ . El alargamiento unitario del elemento de longitud  $dr$  se expresará mediante la fórmula

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (15.2)$$

El alargamiento unitario en la dirección tangencial (circunferencial) es igual a

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r + u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}. \quad (15.3)$$

Analizando *la parte física del problema* representemos las dependencias entre las tensiones y las deformaciones según la ley generalizada de Hooke con arreglo al estado tensional plano en la siguiente forma:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r).$$

Tomando en consideración (15.2) y (15.3) obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left( \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left( \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

Sustituyendo (15.4) en (15.1) hallamos la ecuación diferencial de los desplazamientos

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (15.5)$$

Escribiendo esta ecuación como sigue

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0,$$

después de su doble integración obtenemos la solución general

$$u = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}, \quad (15.6)$$

siendo  $C_1$  y  $C_2$  las constantes de integración determinadas a partir de las condiciones de frontera. Para nuestro caso tales condiciones de frontera son las siguientes:  $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1$  y  $(\sigma_r)_{r=r_2} = -p_2$ .

Sustituyendo (15.6) en (15.4) hallamos

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) C_1 - \frac{1-\mu}{r^2} C_2 \right]; \quad (15.7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) C_1 + \frac{1-\mu}{r^2} C_2 \right]. \quad (15.8)$$

Al sustituir las condiciones de frontera en (15.7) obtenemos

$$-p_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) C_1 - \frac{1-\mu}{r_1^2} C_2 \right];$$

$$-p_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu) C_1 - \frac{1-\mu}{r_2^2} C_2 \right].$$

Resolviendo juntas estas ecuaciones hallamos

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Sustituyendo los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en (15.6)–(15.8) hallaremos las fórmulas definitivas para determinar el desplazamiento radial  $u$  y las tensiones (*fórmulas de Lamé*):

$$u = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}; \quad (15.9)$$

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (15.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (15.11)$$

Sumando (15.10) y (15.11) nos convencemos de que

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const},$$

por lo tanto,

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const},$$

es decir, las secciones transversales del cilindro durante la deformación siguen siendo planas. Las fórmulas (15.9)–(15.11) son justas para un cilindro infinita-

mente largo y sirven para la utilización en las secciones del cilindro bastante alejadas de los fondos, si éstos existen.

Siendo presentes las cargas axiales  $N$  que actúan sobre el cilindro, en particular, cuando hay fondos, en sus paredes aparecen tensiones axiales

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (15.12)$$

En este caso en (15.9) aparece el sumando

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r \quad (15.13)$$

sin cambiar las tensiones  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ .

En el caso particular cuando *falta la presión exterior* ( $p_2 = 0$ ,  $p_1 = p$ ), las fórmulas para determinar las tensiones y los desplazamientos en el cilindro de paredes gruesas pueden escribirse así:

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (15.14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p; \quad (15.15)$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (15.16)$$

Además

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{\text{máx}} &= (\sigma_r)_{r=r_1} = -p; \\ (\sigma_\theta)_{\text{máx}} &= (\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p, \end{aligned} \right\} \quad (15.17)$$

siendo

$$k = \frac{r_1}{r_2}.$$

El desplazamiento radial de la superficie interior, es decir, el aumento del radio interior es igual a

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left( \frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \mu \right) p. \quad (15.18)$$

Para la superficie exterior del cilindro se tiene

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= \frac{2k^2}{1 - k^2} p; \end{aligned} \quad (15.19)$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1 - k^2} \cdot p. \quad (15.20)$$

Los diagramas de las tensiones para el caso en cuestión, cuando  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ , pueden verse en la fig. 277, a. Las tensiones a lo largo del radio cambian según una ley hiperbólica. Los puntos peligrosos (puntos de tensiones máximas) están situados en la superficie interior del cilindro, cuando  $r = r_1$ .

Del análisis de (15.17) se desprende que cuando  $r_2 \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow 0$ ,

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = p.$$

Utilizando — supongamos — la tercera teoría de resistencia se tiene

$$\sigma_{\text{equiv}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (15.21)$$

En el caso límite examinado ( $k \rightarrow 0$ )

$$\sigma_1 = (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p; \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p$$

a condición de resistencia (15.21) será

$$2p \leq [\sigma]$$

de donde

$$p \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Así pues, el cilindro con pared bastante gruesa no admite la presión interior mayor que cierta magnitud, es decir, el aumento del espesor de la pared del cilindro no siempre es una medida eficaz de aumentar la resistencia.

Veamos el caso particular cuando *falta la presión interior* ( $p_1 = 0, p_2 = p$ ). Las fórmulas (15.9)–(15.11) tendrán el siguiente aspecto:

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}; \quad (15.22)$$

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) p; \quad (15.23)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) p. \quad (15.24)$$

Como se ve de (15.23) y (15.24), ambas tensiones en este caso son de compresión, con la particularidad de que  $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$ . En la superficie interior

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; \quad (15.25)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2} p; \quad (15.26)$$

$$(u)_{r=r_1} = -\frac{r_1}{E} \cdot \frac{2}{1-k^2} p. \quad (15.27)$$

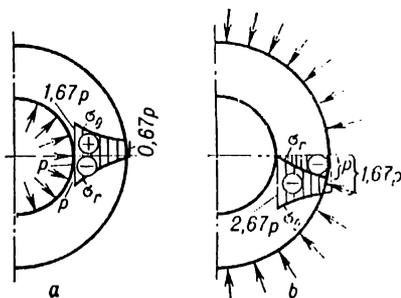


Fig. 277

En la superficie exterior del cilindro

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r)_{r=r_2} &= -p; \\
 (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= -\frac{1+k^2}{1-k^2} p;
 \end{aligned}
 \tag{15.28}$$

$$(u)_{r=r_2} = -\frac{r_2}{E} \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu \right) p.
 \tag{15.29}$$

Los diagramas de las tensiones  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$ , cuando  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ , pueden verse en la fig. 277, *b*. La tensión máxima de valor absoluto  $\sigma_\theta$  es en la superficie interior del cilindro; precisamente esos puntos son los peligrosos. Considerando en la fórmula (15.22)  $r_1 = 0$  y  $r = r_2$ , hallamos la magnitud del desplazamiento de la superficie exterior para el cilindro macizo:

$$(u)_{r=r_2} = -\frac{pr_2}{E} (1 - \mu).
 \tag{15.30}$$

En la tabla 35 se dan las fórmulas de cálculo para cilindros de paredes gruesas con diferentes esquemas de sollicitación.

### § 85. Cálculo de cilindros compuestos

Con el propósito de obtener una distribución de las tensiones más uniforme por el espesor de la pared y descargar las capas interiores a costa de una mejor utilización de las exteriores, se hacen cilindros compuestos, poniendo con aperturas un cilindro sobre el otro (de ordinario, mediante ajuste en caliente). En tales cilindros la magnitud de la presión interior admisible puede ser mucho mayor que en un cilindro entero, propiedad que se utiliza al fabricar cañones.

Al encajar un cilindro sobre el otro con aperturas las tensiones circunferenciales en el cilindro interior son de compresión, y en el exterior, de tracción. El diagrama de las tensiones que aparecen después del ajuste puede verse en la fig. 278, *a*

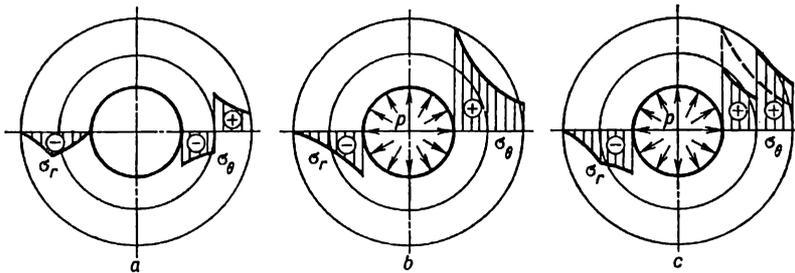


Fig. 278

Bajo la acción de la presión interior en tal cilindro compuesto surgen tensiones determinadas mediante las fórmulas (15.14) y (15.15) como para un cilindro entero y caracterizadas por los diagramas mostrados en la fig. 278, *b*. Una vez sumados los diagramas de las tensiones dados en las figs. 278, *a* y 278, *b*, obtenemos el diagrama real (fig. 278, *c*) que tiene lugar en el cilindro compuesto cuando las tensiones son interiores.

Del diagrama total se ve que las tensiones en la pared del cilindro compuesto son distribuidas más uniformemente que en la pared entera (el diagrama se muestra con línea de trazos), por eso en los cilindros compuestos la utilización del material es más racional que en los enteros.

En el cálculo de cilindros compuestos lo principal es determinar la magnitud de la presión  $p_c$  en la superficie de su contacto, siendo dada la apertura  $\delta$  que

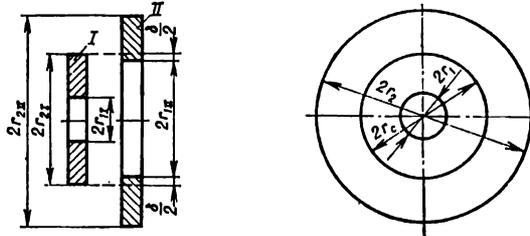


Fig. 279

es la diferencia entre el diámetro exterior del cilindro interior  $I$  y el diámetro interior del cilindro exterior  $II$  (fig. 279). Es evidente que la disminución del radio exterior del cilindro interior  $u_I$  y el aumento del radio interior del cilindro exterior  $u_{II}$  son iguales a la mitad de la apertura:

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2}. \quad (15.31)$$

Teniendo en cuenta que  $\delta$  es bastante pequeña en comparación con el radio de la superficie de contacto, consideramos que  $r_{2I} = r_{1II} = r_c$  ( $r_c$  es el radio de la superficie de contacto del cilindro compuesto).

La presión de contacto  $p_c$  será exterior para el cilindro interior e interior para el cilindro exterior.

Denotemos

$$k_1 = \frac{r_1}{r_c}; \quad k_2 = \frac{r_c}{r_2}.$$

El desplazamiento radial de la superficie de contacto del cilindro interior lo determinamos mediante la fórmula (15.29):

$$u_I = -\frac{r_c}{E_1} \left( \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c, \quad (15.32)$$

del exterior, por la fórmula (15.18):

$$u_{II} = \frac{r_c}{E_2} \left( \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) p_c. \quad (15.33)$$

Sustituyendo los valores absolutos de estos desplazamientos en (15.31) se tiene

$$\frac{r_c}{E_1} \left( \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c + \frac{r_c}{E_2} \left( \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \mu_2 \right) p_c = \frac{\delta}{2},$$

de donde, resolviendo la ecuación respecto a  $p_c$ , hallamos

$$p_c = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_c}{E_1} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{r_c}{E_2} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)}. \quad (15.34)$$

Si los cilindros componentes están fabricados de un mismo material, la fórmula se simplifica y se transforma en

$$p_c = \frac{\delta E}{2r_c} \cdot \frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1-k_2^2) + (1+k_2^2)(1-k_1^2)}. \quad (15.35)$$

Por el valor hallado de  $p_c = f(\delta)$  se determinan las deformaciones iniciales en los cilindros interior (fórmulas (15.23), (15.24)) y exterior (fórmulas (15.14), (15.15)). Las fórmulas (15.34) y (15.35) son válidas si las tensiones no rebasan el límite de proporcionalidad. Si durante el encaje aparecen deformaciones plásticas, los esfuerzos verdaderos  $p_c$  serán menores que los calculados.

### § 86. Tensiones térmicas en los cilindros de paredes gruesas

En el caso de calentamiento no uniforme de cilindros de paredes gruesas, en ellos se desarrollan tensiones térmicas. Durante su cálculo la ecuación de equilibrio (15.1) y las relaciones geométricas (15.2) y (15.3) obtenidas anteriormente no cambian, mientras que las dependencias físicas serán un poco diferentes.

Designando por  $t(r)$  el crecimiento de la temperatura que depende del radio corriente  $r$ , y por  $\alpha$ , el coeficiente de dilatación lineal, y tomando, además, los valores del módulo  $E$  y la relación de Poisson  $\mu$  correspondientes a la temperatura media de la pared, escribamos la ley generalizada de Hooke así:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r) = \text{const}; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_z - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_z - \mu\sigma_r) + \alpha t(r). \end{aligned} \right\} \quad (15.36)$$

Resolviendo estas ecuaciones respecto a las tensiones, obtenemos

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha t(r)]; \quad (15.37)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha t(r)]; \quad (15.38)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha t(r)]. \quad (15.39)$$

Teniendo en cuenta que

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{y} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (15.40)$$

hallamos, después de la sustitución en la ecuación (15.1) de las expresiones (15.38) y (15.39),

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr}. \quad (15.41)$$

Conociendo la ley del cambio de la temperatura  $t = f(r)$ , se puede determinar de la ecuación (15.41) el desplazamiento.

Escribiendo de nuevo (15.41) del modo siguiente:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr},$$

obtenemos después de la doble integración de esta ecuación

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (15.42)$$

Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  las determinaremos de las condiciones para  $\sigma_r$  en las superficies interior y exterior del cilindro

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; \quad (\sigma_r)_{r=r_2} = 0. \quad (15.43)$$

Introduciendo (15.40) y (15.42) en (15.38) se tendrá

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \mu} \left[ -\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{C_1}{1 - 2\mu} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_\theta \right].$$

Sustituyendo esta expresión en (15.43) y resolviendo el sistema obtenido de dos ecuaciones respecto a las constantes de integración, hallamos

$$C_1 = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \cdot \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \mu \varepsilon_\theta;$$

$$C_2 = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr.$$

Después de sustituir (15.40) en (15.37)–(15.39) y teniendo en cuenta (15.42) y los valores hallados de  $C_1$  y  $C_2$ , resulta

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[ -1 \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)r^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr \right]; \quad (15.44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{r^2 + r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)r^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \alpha t(r) \right]; \quad (15.45)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left[ \frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr + (1-\mu) \varepsilon_z - \alpha t(r) \right]. \quad (15.46)$$

La incógnita  $\varepsilon_z$  que figura en la última fórmula puede hallarse, en el caso de la dilatación libre del cilindro, partiendo de la condición de ausencia de la fuerza longitudinal en la sección transversal del cilindro:

$$N = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr d\varphi = 0 \quad (15.47)$$

o bien

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0.$$

Sustituyendo en la última igualdad la expresión para  $\sigma_z$  (15.46) hallamos

$$\varepsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr.$$

La fórmula (15.46), contando con la expresión obtenida para  $\varepsilon_z$ , toma el aspecto:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left( \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \alpha t(r) \right). \quad (15.48)$$

Es posible calcular la integral  $\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr$  y determinar las tensiones cuando es conocida la ley del cambio de la temperatura  $t(r)$  por el espesor de la pared. Si la ley del cambio de la temperatura es lineal

$$t(r) = T \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \quad (15.49)$$

donde  $T = t_1 - t_2$ ;  $t_1$  y  $t_2$  es la temperatura en la superficie interior y exterior, respectivamente.

Sustituyendo (15.49) en (15.44), (15.45) y (15.48), hallamos después de la integración

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[ r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (15.50)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[ 2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad (15.51)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[ 3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (15.52)$$

Las tensiones cerca de la superficie interior del cilindro cuando  $r = r_1$  serán

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[ 3r_1 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.53)$$

Cerca de la superficie exterior cuando  $r = r_2$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[ 3r_2 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.54)$$

Los diagramas de distribución de las tensiones térmicas por el espesor de la pared del cilindro con relación  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$  para  $\mu = 0,3$  se dan en la fig. 280, a.

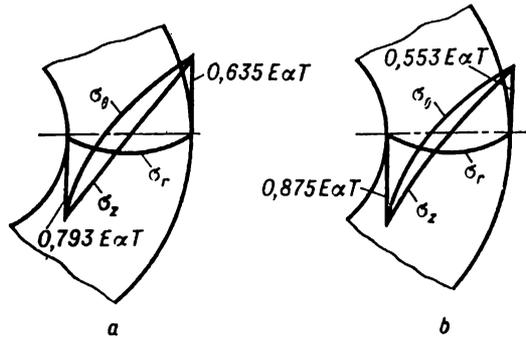


Fig. 280

En el caso de la ley logarítmica del cambio de la temperatura en la pared del cilindro de paredes gruesas

$$t(r) = \frac{T}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r}. \quad (15.55)$$

Al sustituir (15.55) en (15.44), (15.45), (15.48), y hacer la integración, las fórmulas para la determinación de las tensiones  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_z$  tendrán, respectivamente, el siguiente aspecto:

$$\sigma_r = - \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ \ln \frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (15.56)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (15.57)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - 2 \ln \frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (15.58)$$

Cerca de la superficie interior del cilindro, para  $r = r_1$ , las tensiones

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (15.59)$$

Cerca de la superficie exterior cuando  $r = r_2$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu) \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[ 1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (15.60)$$

Los diagramas de distribución de las tensiones térmicas por el espesor de la pared del cilindro con relación  $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$  cuando  $\mu = 0,3$  en el caso del cambio de la temperatura por la ley logarítmica se dan en la fig. 280 b.

Cerca de los topos del cilindro las tensiones determinadas mediante las fórmulas dadas pueden tener lugar solamente en el caso de que aquéllos estén sometidos a la carga superficial que varía de acuerdo con la fórmula para  $\sigma_z$ .

## § 87. Cálculo de discos giratorios

El disco giratorio experimenta de ordinario tracción, bajo la acción de las fuerzas centrífugas que son para él la carga principal, así como flexión. Durante el calentamiento no uniforme en éste pueden surgir también tensiones térmicas. Ordinariamente, la carga y el campo térmico son simétricos respecto al eje del disco, a causa de lo cual la tensión es función de la distancia desde el eje de rotación.

Analizando un disco fino plano de espesor constante  $h$  podemos considerar que las tensiones están distribuidas uniformemente por su espesor y faltan tensio-

nes paralelas al eje del disco ( $\sigma_z = 0$ ). Así pues, el problema de la determinación de las tensiones en el disco se reduce al llamado problema plano de la teoría de la elasticidad, precisamente, al problema sobre el estado tensional plano.

Si un disco, cuya masa específica del material es igual a  $\frac{\gamma}{g}$ , gira con velocidad angular  $\omega$ , las fuerzas de masa que actúan sobre el elemento separado del

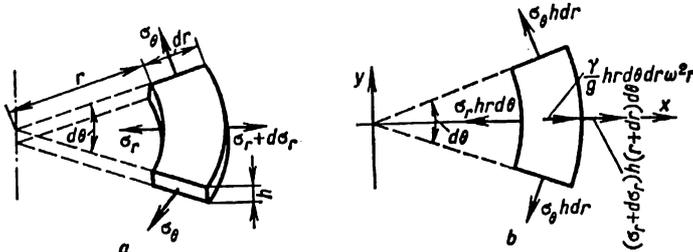


Fig. 281

disco (fig. 281, a) pueden ser representadas por la resultante (fig. 281, b) que se encuentra en el plano medio del disco y es igual a

$$dm \omega^2 r = \frac{\gamma}{g} h r d\theta dr \cdot \omega^2 r.$$

Escribamos la condición de equilibrio del elemento proyectando todas las fuerzas sobre el eje  $x$ :

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = 0. \quad (15.61)$$

Las ecuaciones geométricas y físicas para el cálculo de los discos son las mismas que en el problema de Lamé ((15.2)–(15.4)). Por eso la ecuación diferencial (15.61) respecto a los desplazamientos, contando con (15.4), tendrá el siguiente aspecto:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \quad (15.62)$$

Volviendo a escribir (15.62) en la forma:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r$$

e integrándola dos veces consecutivamente, hallamos

$$u = \bar{C}_1 r + \frac{\bar{C}_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3. \quad (15.63)$$

Al sustituir (15.63) en (15.4) se tiene

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \quad (15.64)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (15.65)$$

$$C_1 = \frac{E}{1-\mu} \bar{C}_1; \quad C_2 = -\frac{E}{1+\mu} \bar{C}_2. \quad (15.66)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  (por consiguiente,  $\bar{C}_1$  y  $\bar{C}_2$ ) se determinan a partir de las condiciones de frontera. Para el disco con orificio central en el caso general se tienen las siguientes condiciones en el contorno interior ( $r = r_1$ ) y exterior ( $r = r_2$ ):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_{r_1};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = \sigma_{r_2}.$$

Estas condiciones, de acuerdo con (15.64), dan dos ecuaciones, a saber:

$$\sigma_{r_1} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_1^2;$$

$$\sigma_{r_2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_2^2.$$

Solucionando juntamente este sistema de dos ecuaciones hallamos

$$C_1 = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} + \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (15.67)$$

$$C_2 = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma_{r_1} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (15.68)$$

En el caso de que  $\sigma_{r_2} = 0$  y  $\sigma_{r_1} = 0$ ,

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \quad (15.69)$$

$$C_2 = -\frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (15.70)$$

Sustituyendo los últimos valores de  $C_1$  y  $C_2$  en (15.64) y (15.65) hallamos

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left( r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \quad (15.71)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[ (3+\mu) \left( r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu)r^2 \right]. \quad (15.72)$$

Denotando

$$\frac{r_1}{r_2} = k; \quad \frac{r}{r_2} = \rho; \quad \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_2^2 = c; \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m, \quad (15.73)$$

podemos escribir

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c \left[ 1 + k^2 \left( 1 - \frac{1}{\rho^2} \right) - \rho^2 \right]; \\ \sigma_\theta &= c \left[ 1 + k^2 \left( 1 + \frac{1}{\rho^2} \right) - m\rho^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.74)$$

La tensión  $\sigma_r$  es positiva y alcanza la magnitud máxima cuando  $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ :

$$(\sigma_r)_{\text{máx}} = c(1 - k)^2. \quad (15.75)$$

La tensión  $\sigma_\theta$  también es positiva para todos los valores de  $\rho$  y alcanza el máximo cuando  $\rho = k$ :

$$(\sigma_\theta)_{\text{máx}} = c[2 + (1 - m)k^2]. \quad (15.76)$$

De la confrontación de (15.75) y (15.76) se desprende que siempre tiene lugar la desigualdad  $(\sigma_\theta)_{\text{máx}} > (\sigma_r)_{\text{máx}}$ . Por eso la condición de resistencia debe escribirse (por ejemplo, según la IV teoría) así:

$$\sigma_{\text{eq IV}} = (\sigma_\theta)_{\text{máx}} = c[2 + (1 - m)k^2] < [\sigma]. \quad (15.77)$$

En el caso del material frágil hay que valerse de la teoría de Coulomb—Mohr, la cual, siendo  $\sigma_3 = \sigma_z = 0$  lleva a la misma fórmula (15.77).

Las fórmulas para determinar las tensiones en el disco macizo ( $r_1 = 0$ ) tendrán, a base de (15.64) y (15.65), el siguiente aspecto:

$$\sigma_r = C_1 - \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r^2; \quad (15.78)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r^2. \quad (15.79)$$

Si falta la carga exterior en el contorno exterior ( $r = r_2$ ), es decir,  $\sigma_{r_2} = 0$ , entonces hallamos de acuerdo con (15.78)

$$C_1 = \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_2^2 = c. \quad (15.80)$$

Sustituyendo (15.80) en (15.78) y (15.79) se tendrá

$$\sigma_r = c(1 - \rho^2); \quad (15.81)$$

$$\sigma_\theta = c(1 - m\rho^2). \quad (15.82)$$

Ambas tensiones son positivas y aumentan al aproximarse al centro del disco. En el centro del disco cuando  $\rho = 0$

$$(\sigma_r)_{\text{máx}} = (\sigma_\theta)_{\text{máx}} = c = \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \quad (15.83)$$

Según (15.3) el desplazamiento radial

$$u = \varepsilon_{\theta} \cdot r. \quad (15.84)$$

Puesto que

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \mu\sigma_r),$$

resulta

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_{\theta} - \mu\sigma_r). \quad (15.85)$$

Para determinar el desplazamiento en el contorno exterior del disco es necesario sustituir en la fórmula (15.85) los valores de  $r = r_2$ ;  $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta_2}$ ;  $\sigma_r = \sigma_{r_2}$ .

En el caso del calentamiento no uniforme del disco se deben añadir las tensiones térmicas a las tensiones provocadas por las fuerzas centrífugas y cargas de contorno (si tales existen). Las tensiones térmicas se determinan de igual manera que en el cilindro de paredes gruesas, por eso la ecuación de equilibrio (15.61) ha de coincidir con la ecuación (15.1) cuando  $\omega = 0$ :

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_{\theta} = 0. \quad (15.86)$$

Las deformaciones unitarias, contando con la dilatación térmica, se determinan mediante las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_{\theta}) + \alpha t(r); \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \mu\sigma_r) + \alpha t(r). \end{aligned} \right\} \quad (15.87)$$

Resolviendo conjuntamente estas ecuaciones respecto a las tensiones hallamos

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_r + \mu\varepsilon_{\theta} - (1 + \mu)\alpha t(r)]; \\ \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_{\theta} + \mu\varepsilon_r - (1 + \mu)\alpha t(r)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.88)$$

Tomando en consideración (15.2) y (15.3) se tendrá

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1 + \mu)\alpha t(r) \right]; \\ \sigma_{\theta} &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1 + \mu)\alpha t(r) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15.89)$$

Cuando el cambio de temperatura es lineal a lo largo del radio del disco, o sea,  $t(r) = T \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$ , las últimas expresiones tendrán el aspecto

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} - (1 + \mu)\alpha T \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right]; \quad (15.90)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} - (1 + \mu)\alpha T \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right]. \quad (15.91)$$

El módulo de elasticidad  $E$  y la relación de Poisson  $\mu$  los consideramos constantes, no dependientes de la temperatura e iguales a sus valores para la temperatura media del disco.

Sustituyendo (15.90) y (15.91) en la ecuación de equilibrio (15.86) se tendrá

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1 + \mu}{r_2 - r_1} \alpha T. \quad (15.92)$$

Escribiendo esta ecuación en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1 + \mu}{r_2 - r_1} \alpha T,$$

y después de una doble integración hallaremos la expresión para el desplazamiento

$$u = \bar{B}_1 r + \frac{\bar{B}_2}{r} + \frac{1 + \mu}{3(r_2 - r_1)} \alpha T r^2. \quad (15.93)$$

Sustituyendo (15.93) en (15.90) y (15.91) hallamos para las tensiones

$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{T}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r; \quad (15.94)$$

$$\sigma_\theta = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{r_2 - r_1} \alpha E r, \quad (15.95)$$

donde

$$B_1 = \frac{E}{1 - \mu} \left( \bar{B}_1 + \frac{\alpha T r_1}{r_2 - r_1} \right);$$

$$B_2 = \frac{E}{1 + \mu} \bar{B}_2.$$

Las constantes  $B_1$  y  $B_2$  pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera cuando  $r = r_1$ ;  $(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_{r_1} = 0$  y  $r = r_2$ ;  $(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$ .

Las tensiones debidas a las fuerzas centrífugas y las tensiones térmicas deben sumarse. En el caso del cambio lineal de temperatura a lo largo del radio, sumando los segundos miembros de las expresiones (15.64) y (15.94) al igual que (15.65) y (15.95), se tendrá

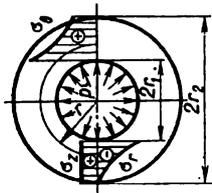
$$\sigma_r = D + \frac{L}{r^2} - \frac{3 + \mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{T}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r;$$

$$\sigma_\theta = D - \frac{L}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{r_2 - r_1} \alpha E r,$$

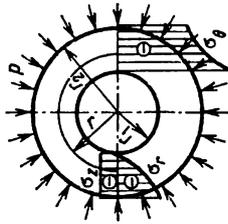
donde  $D = C_1 + B_1$ ;  $L = C_2 + B_2$  son las nuevas constantes que deben determinarse a partir de las condiciones de frontera.

## Fórmulas de cálculo para cilindros de paredes gruesas

Tabla 35

Esquema de sollicitación. Diagramas de las tensiones	Tensiones principales en los puntos de la superficie cilíndrica de radio $r$	Desplazamiento radial de los puntos de la superficie cilíndrica de radio $r$	Tensiones principales en el punto peligroso; la tensión equivalente para el punto peligroso ( $k = \frac{r_1}{r_2}$ )
<p>Cilindro sujeto a la presión interior <math>p</math></p> 	$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right)$ $\sigma_\theta = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right)$ $\sigma_z = 0, \text{ cilindro abierto}$ $\sigma_z = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \text{ cilindro cerrado}$	<p>Cilindro abierto</p> $u = \frac{pr_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[ (1 - \mu) r + (1 + \mu) \frac{r_2^2}{r} \right]$ <p>Cilindro cerrado</p> $u = \frac{pr_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[ (1 - 2\mu)r + (1 + \mu) \frac{r_2^2}{r} \right]$	$r = r_1$ $\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p$ $\sigma_3 = \sigma_z = 0, \text{ cilindro abierto}$ $\sigma_3 = \sigma_z = \frac{k^2}{1 - k^2} p, \text{ cilindro cerrado}$ $\sigma_3 = \sigma_r = -p$
			$\sigma_{\text{eq III}} = \frac{2p}{1 - k^2};$ $\sigma_{\text{eq M}} = p \left( \frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \right)$

Cilindro sujeto a la presión exterior  $p$



$$\sigma_r = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

$\sigma_z = 0$ , cilindro abierto

$$\sigma_z = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \text{ cilindro cerrado}$$

Cilindro abierto

$$u = -\frac{pr_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[ (1 - 2\mu)r + (1 + \mu) \frac{r_1^2}{r} \right]$$

Cilindro cerrado

$$u = -\frac{pr_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[ (1 - 2\mu)r + (1 + \mu) \frac{r_1^2}{r} \right]$$

$$r = r_1; \quad \sigma_1 = \sigma_r = 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0, \text{ cilindro abierto}$$

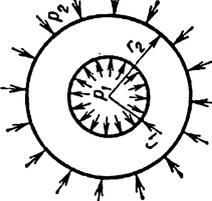
$$\sigma_3 = \sigma_2 = -\frac{p}{1 - k^2}, \text{ cilindro cerrado}$$

cerrado

$$\sigma_3 = \sigma_\theta = -\frac{2p}{1 - k^2}$$

$$\sigma_{\text{eq III}} = \frac{2p}{1 - k^2}$$

$$\sigma_{\text{eq M}} = \frac{2p}{1 - k^2} \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}$$

Esquema de sollicitación. Diagramas de las tensiones	Tensiones principales en los puntos de la superficie cilíndrica de radio $r$	Desplazamiento radial de los puntos de la superficie cilíndrica de radio $r$	Tensiones principales en el punto peligroso; la tensión equivalente para el punto peligroso $(k = \frac{r_1}{r_2})$
<p>Cilindro sujeto a la presión interior <math>p_1</math> y la exterior <math>p_2</math></p> 	$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ $\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$	<p>Cilindro abierto</p> $u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}$ <p>Cilindro cerrado</p> $u = \frac{1 + 2\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}$	$r = r_1$ $\sigma_r = -p_1$ $\sigma_\theta = \frac{(1 + k^2)p_1 - 2p_2}{1 - k^2}$ $\sigma_z = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2}$

**CÁLCULO DE BÓVEDAS DE PAREDES DELGADAS**

**§ 88. Cálculo de bóvedas de paredes delgadas por la teoría membranal**

A la categoría de bóvedas de paredes delgadas pueden pertenecer cisternas, tanques de agua, balones de aire y gas, cúpulas de edificios, mamparos herméticos de aviones y buques, aparatos químicos, piezas de los cuerpos de turbinas y motores de reacción, etc.

Veamos un elemento de la bóveda mostrado en la fig. 282, *a, b*. En el caso general en las secciones que separan dicho elemento actuarán los esfuerzos y

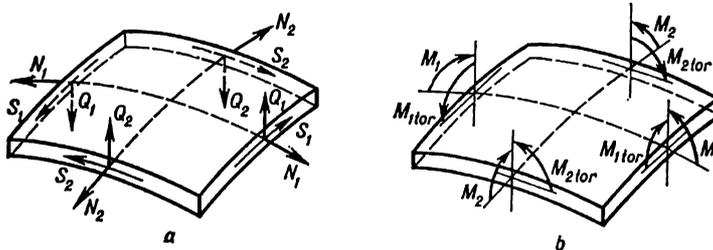


Fig. 282

momentos lineales (que se refieren a la unidad de longitud de la sección) (fig. 282, *a* y 282, *b*, respectivamente), a saber: esfuerzos normales  $N_1$  y  $N_2$ ; esfuerzos tangenciales (deslizantes)  $S_1$  y  $S_2$ ; fuerzas cortantes  $Q_1$  y  $Q_2$ ; momentos flectores  $M_1$  y  $M_2$ ; momentos torsionales  $M_{1tor}$  y  $M_{2tor}$ .

El de tomar en consideración a todos los factores de fuerza mencionados durante el cálculo de bóvedas lleva a unas ecuaciones diferenciales iniciales bastante complicadas, cuya solución, aunque sea para casos simples, ofrece grandes dificultades matemáticas. En muchos casos las ecuaciones iniciales pueden ser esencialmente simplificadas. Este propósito se logra partiendo del propio carácter del problema. Primero, si la bóveda es un cuerpo de revolución y la carga es simétrica respecto al eje de la bóveda, el problema se denomina *simétrico al eje* y en este caso en todas las secciones formadas por los planos que pasan a través del eje de simetría y las secciones ortogonales a éstas tienen lugar las igualdades

$$M_{1tor} = M_{2tor} = S_1 = S_2 = 0; \quad Q_1 = 0 \text{ (o bien } Q_2 = 0).$$

Segundo, si a base del tipo de la bóveda, carácter de la carga y las fijaciones se puede llegar, por unas u otras razones, a la conclusión de que tales o cuales esfuerzos o momentos en todo lugar son pequeños en comparación con otros esfuerzos o momentos, entonces se acepta que esos esfuerzos o momentos son iguales a cero. Por ejemplo, muchas veces se considera que

$$M_1 = M_2 = M_{1tor} = M_{2tor} = 0; \quad Q_1 = Q_2 = 0,$$

y, finalmente, se llega a la llamada *teoría membranal (sin momentos) de las bóvedas*.

En particular, la teoría membranal de las bóvedas se utiliza durante el cálculo de las tensiones en el tanque (fig. 283) que representa una bóveda simétrica. Consideremos que las secciones meridionales de la superficie media de dicha

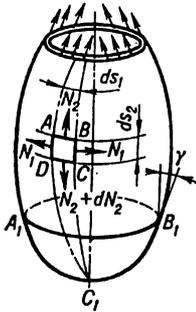


Fig. 283

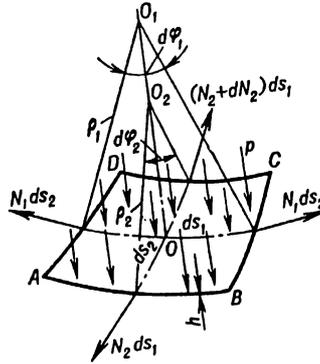


Fig. 284

bóveda forman curvas suaves, y el espesor de ésta  $h$  es pequeño en comparación con los radios de curvatura. Entonces en el caso de sujetar los bordes del tanque de tal manera que en ellos pueden actuar solamente los esfuerzos tangentes a las curvas meridionales, se supone que la bóveda se halla en el estado tensional membranal.

El tanque mostrado en la fig. 283 está lleno (total o parcialmente) de gas, líquido o materia pulverulenta, en el cual la presión es igual en todos los puntos del plano perpendicular al eje del tanque, representa una bóveda que se encuentra no sólo en el estado tensional membranal, sino en el simétrico al eje.

Separemos de la bóveda en cuestión un elemento rectangular curvilíneo  $ABCD$  trazando dos secciones axiales a corta distancia y dos secciones ortogonales a éstas y a la superficie de la bóveda. Designemos las longitudes de las caras del elemento por  $ds_1$  y  $ds_2$  (fig. 284). En las caras del elemento actuarán, respectivamente, los esfuerzos de tracción (en el caso de la presión interior)  $N_2 ds_1$  y  $N_1 ds_2$ . Aquí  $N_1$  y  $N_2$  son los esfuerzos normales que corresponden a la unidad de longitud del contorno del elemento

$$N_1 = \sigma_t \cdot h; \quad N_2 = \sigma_m \cdot h \quad (16.1)$$

siendo  $\sigma_t$  la tensión normal circunferencial (latitudinal o anular) dirigida por la tangente a la circunferencia de radio  $\rho_t = \rho_1$ ;  $\sigma_m$ , la tensión normal meridional orientada según la tangente al meridiano de radio  $\rho_m = \rho_2$ .

Examinemos la condición de equilibrio del elemento, proyectando sobre la normal  $OO_1$  (fig. 284) los esfuerzos interiores que actúan por el contorno del elemento, al igual que la presión  $p$  actuando sobre el elemento separado de área  $ds_1 \cdot ds_2$ :

$$2N_1 ds_2 \operatorname{sen} \frac{d\varphi_1}{2} + N_2 ds_1 \operatorname{sen} \frac{d\varphi_2}{2} + (N_2 + dN_2) ds_1 \operatorname{sen} \frac{d\varphi_2}{2} - p ds_1 ds_2 = 0.$$

Tomando en consideración la pequeñez de los ángulos  $d\varphi_1$  y  $d\varphi_2$  y prescindiendo de las magnitudes de segundo orden de pequeñez, hallamos

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \quad (16.2)$$

Teniendo también en cuenta la expresión (16.1) y el hecho de que  $\rho_t = \rho_1$  y  $\rho_m = \rho_2$ , hallamos a base de (16.2)

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}. \quad (16.3)$$

La ecuación (16.3) se conoce como *la ecuación de Laplace*. Una ecuación de Laplace es insuficiente para determinar dos incógnitas  $\sigma_t$  y  $\sigma_m$ . La segunda ecuación se obtendrá con facilidad al examinar las condiciones de equilibrio de la parte inferior de la bóveda de radio  $r$  seccionada por la superficie cónica  $A_1D_1B_1$  (fig. 285):

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - Q_l - Q_p = 0,$$

siendo  $Q_l$  el peso del líquido o la materia pulverulenta que se encuentran en la parte considerada del tanque;  $Q_p$ , el peso propio de la parte considerada del tanque.

De aquí se deduce el esfuerzo lineal en la sección examinada de la pared

$$N_2 = \frac{pr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q_l + Q_p}{2\pi r \cos \alpha}. \quad (16.4)$$

Una vez conocido  $N_2$ , determinemos la tensión normal meridional  $\sigma_m$  por medio de (16.1) a partir de la fórmula

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q_l + Q_p}{2\pi rh \cos \alpha}. \quad (16.5)$$

Puesto que el problema de determinación de las tensiones en las paredes del tanque se resolvió suponiendo que las tensiones están distribuidas uniformemente por el espesor de ellas, no fue necesario analizar las partes geométrica y física del problema, es decir, dadas estas suposiciones, el problema del cálculo de recipientes de paredes delgadas resultó estáticamente determinado.

Las tensiones normales  $\sigma_t$  y  $\sigma_m$  que actúan en los planos en que faltan las tensiones tangenciales son, evidentemente, las principales. En lo que atañe a la tercera tensión principal orientada según la normal a la superficie de la bóveda en la superficie interior ésta es igual a  $p$ , y en la exterior, a cero (cuando la presión es interior). Como en las bóvedas de paredes delgadas  $\sigma_1 = \sigma_t$  y  $\sigma_2 = \sigma_m$  son mucho mayores que  $p$ , se prescinde de la última en comparación con  $\sigma_t$  y  $\sigma_m$ , es decir, se considera  $\sigma_3$  igual a cero.

Por consiguiente, consideraremos que el material de la bóveda se encuentra en estado tensional plano. Por eso durante el cálculo a la resistencia debe hacerse uso, según sea el estado del material, de la teoría de resistencia correspondiente. Así, por la IV teoría de resistencia la condición de resistencia será

$$\sigma_{\text{eq IV}} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t \sigma_m} < [\sigma]. \quad (16.6)$$

A continuación se dan las fórmulas de cálculo para tanques de diferente forma.

UN BALÓN ESFÉRICO está lleno de gas, cuya presión es igual a  $p$ . Sustituyendo en (16.3) los valores de  $\rho_m = \rho_t = R$  y  $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$ , hallamos

$$2 \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}.$$

o bien

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}. \quad (16.7)$$

Las condiciones de resistencia según la primera, tercera y cuarta teorías de resistencia se reducen a

$$\sigma_{\text{éq IV}} = \frac{pR}{2h} < [\sigma]. \quad (16.8)$$

UN BALÓN CILÍNDRICO está lleno de gas, cuya presión es igual a  $p$  (fig. 286). En este caso

$$\rho_t = R; \quad \rho_m = \infty.$$

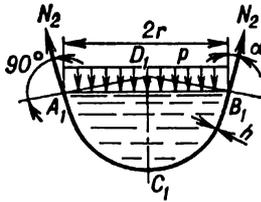


Fig. 285

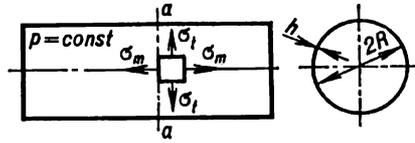


Fig. 286

Hallamos a partir de (16.3)

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \quad (16.9)$$

La tensión  $\sigma_m$  en la pared del balón alejada de sus topes la determinaremos mediante la fórmula (16.5) (considerando  $Q_l = Q_p = 0; \alpha = 0$ )

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}, \quad (16.10)$$

o bien

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \sigma_t.$$

UN TANQUE ESFÉRICO (fig. 287) está lleno de líquido (o materia pulverulenta) de densidad  $\gamma$ . En este caso

$$\rho_t = \rho_m = R; \quad r = R \sin \varphi; \quad H = R(\cos \varphi - \cos \beta);$$

$$p = \gamma H = \gamma R(\cos \varphi - \cos \beta).$$

De la ecuación de Laplace hallamos

$$\sigma_t + \sigma_m = \frac{pR}{h} = \frac{\gamma R^2}{h} (\cos \varphi - \cos \beta). \quad (16.11)$$

Haciendo uso de la fórmula (16.5), en la cual

$$\begin{aligned} Q_l &= \gamma V_{ABC} = \gamma \frac{1}{3} \pi H_C^2 (3R - H_C) = \\ &= \frac{\pi \gamma}{3} R^3 (1 - \cos \varphi)^2 (2 + \cos \varphi) \end{aligned} \quad (16.12)$$

y considerando  $Q_p = 0$  y  $\alpha = 90^\circ - \varphi$ , hallamos

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h} \left[ \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]. \quad (16.13)$$

Luego hallamos a partir de (16.11)

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \left[ \frac{2 \cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi - 1}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]. \quad (16.14)$$

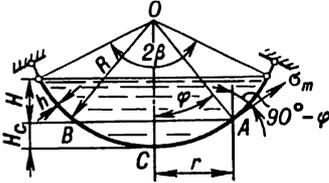


Fig. 287

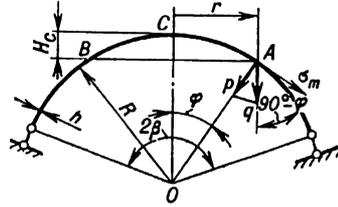


Fig. 288

La tensión máxima será en el punto C, donde  $\varphi = 0$ ,

$$\sigma_{m\text{máx}} = \sigma_{t\text{máx}} = \frac{\gamma R^2(1 - \cos \beta)}{2h}. \quad (16.15)$$

En el borde de la bóveda, cuando  $\varphi = \beta$

$$\sigma_m(\beta) = -\sigma_t(\beta) = \frac{\gamma R^2}{6h} \cdot \frac{2 - \cos \beta - \cos^2 \beta}{1 + \cos \beta}. \quad (16.16)$$

UNA CÚPULA ESFÉRICA de radio  $R$  y con espesor de la pared  $h$  está fabricada de un material de densidad  $\gamma$  (fig. 288). El peso de la unidad de área de la bóveda es  $q = \gamma h$ . La componente normal

$$q_n = q \cos \varphi = \gamma h \cos \varphi$$

juega el papel de la presión aplicada a la superficie; en la ecuación de Laplace (16.3) hay que considerar  $p = -q_n$ , y en la ecuación (16.5)  $p = 0$ .

Tomando en consideración que  $\rho_t = \rho_m = R$ , hallamos de la ecuación de Laplace

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = -\gamma R \cos \varphi. \quad (16.17)$$

Haciendo uso de la fórmula (16.5) en la cual

$$Q_p = qS_{ACB} = \gamma h S_{ACB} = \gamma h 2\pi R H_C = \gamma h 2\pi R^2(1 - \cos \varphi),$$

es decir,

$$Q_p = 2\pi\gamma hR^2(1 - \cos \varphi);$$

$$r = R \operatorname{sen} \varphi; \quad \alpha = 90^\circ - \varphi; \quad p = 0,$$

al igual que teniendo en cuenta que en la sección  $AB$  el peso de la parte  $ACB$  provoca compresión, hallamos

$$\sigma_m = - \frac{\gamma R}{1 + \cos \varphi}. \quad (16.18)$$

Entonces de la ecuación (16.17) se tiene

$$\sigma_t = \gamma R \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (16.19)$$

Las tensiones meridionales siempre son de compresión y aumentan a medida que se alejan de la cúspide de la cúpula al borde. Las tensiones anulares son negativas (de compresión) en la parte superior de la cúpula; cuando  $\varphi = 51^\circ 50'$  se igualan a cero, y cuando  $\varphi > 51^\circ 50'$  se tornan de tracción. Los resultados arriba señalados son verídicos si la construcción de la cúpula es tal que en ésta pueden surgir solamente las reacciones orientadas según la tangente a la curva meridional.

### § 89. Anillos de distancia en las bóvedas

Si en cierta sección  $AA_1$  de la bóveda (fig. 289) hay inflexión, las tangentes a la curva meridional a la izquierda y la derecha del punto  $A$  forman entre sí un ángulo  $180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$ . Los esfuerzos lineales originados por las tensiones meridionales ( $\sigma_{m_1}$  y  $\sigma_{m_2}$ ) (fig. 290) en las secciones  $BB_1$  y  $CC_1$  infinitamente cercanas a  $AA_1$  (formadas por las superficies cónicas  $O_1BB_1$  y  $O_2CC_1$  normales a la superficie media de la bóveda) serán iguales a  $\sigma_{m_1} h_1$  y  $\sigma_{m_2} h_2$ , siendo  $h_1$  y  $h_2$  el espesor de las partes 1 y 2 de la bóveda.

De la condición de equilibrio del anillo  $BB_1C_1C$  se tiene

$$\sigma_{m_1} h_1 \cos \alpha_1 \cdot 2\pi r = \sigma_{m_2} h_2 \cos \alpha_2 2\pi r,$$

o bien

$$\sigma_{m_1} h_1 \cos \alpha_1 = \sigma_{m_2} h_2 \cos \alpha_2.$$

Así pues, las proyecciones de estos esfuerzos sobre el eje de la bóveda se compensan mutuamente. A la vez la suma de las proyecciones de los esfuerzos señalados sobre el plano  $AA_1$  (fig. 291) ofrece el esfuerzo radial lineal

$$q = \sigma_{m_1} h_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + \sigma_{m_2} h_2 \operatorname{sen} \alpha_2, \quad (16.20)$$

el cual puede considerarse como una carga local que comprime la bóveda y puede originar en ésta una flexión bastante grande.

Para disminuir la flexión, en los tanques se colocan frecuentemente anillos de rigidez o de distancia (fig. 292) que toman los esfuerzos radicales  $q$  según

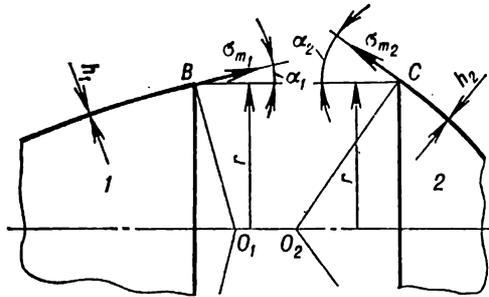


Fig. 290

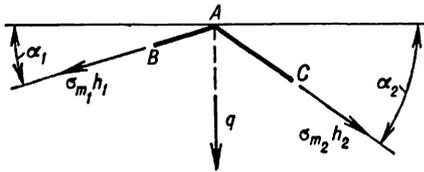


Fig. 291

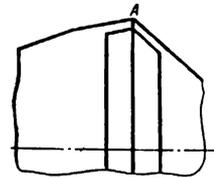


Fig. 292

el esquema dado en la fig. 293. En el anillo surgen solamente las tensiones de compresión, y la condición de resistencia para éste será

$$\frac{qR_{an}}{F_{an}} < [\sigma], \quad (16.21)$$

siendo  $R_{an}$  el radio de la superficie media del anillo;  $F_{an}$ , el área de la sección transversal del anillo;  $q$ , la carga lineal que actúa sobre el anillo y se determina por la fórmula (16.20).

A veces en el lugar de la inflexión en vez del anillo de distancia la bóveda se engrosa localmente, doblando los bordes del fondo del tanque adentro o, por ejemplo, de un modo tal como se muestra en la fig. 294.

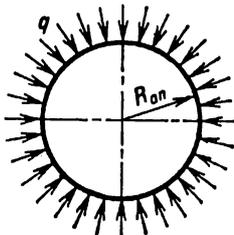


Fig. 293

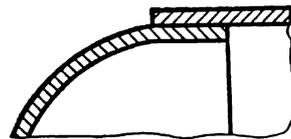
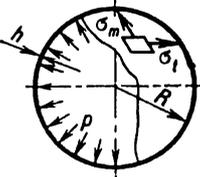
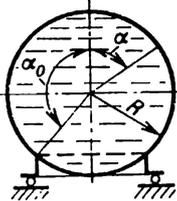


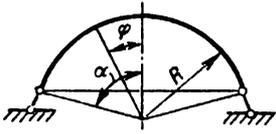
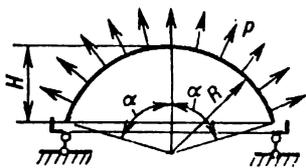
Fig. 294

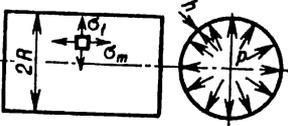
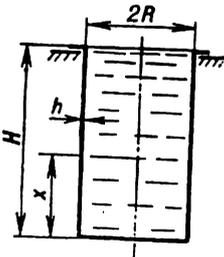
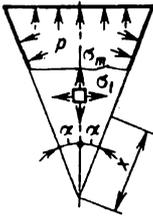
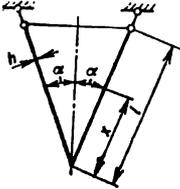
En la tabla 36 se dan las fórmulas de cálculo para determinar las tensiones y los desplazamientos en bóvedas de paredes delgadas.

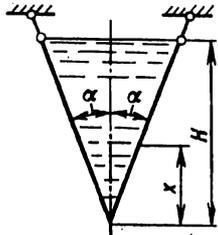
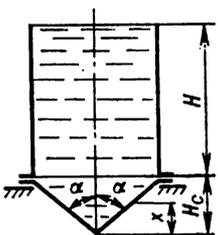
**Fórmulas de cálculo para determinar las tensiones y los desplazamientos en bóvedas de paredes delgadas**

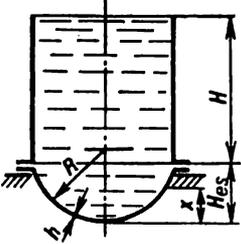
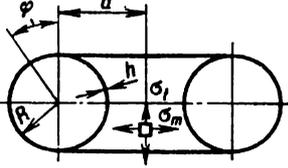
$p$  es la presión;  $q$ , la carga lineal;  $\sigma_m$  y  $\sigma_t$ , las tensiones normales meridional y circunferencial (positivas durante la tracción);  $h$ , el espesor de la bóveda;  $R$ , el radio de la superficie media en la sección transversal de la bóveda;  $E$ ,  $\mu$ ,  $\gamma_m$ , módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y peso específico del material de la bóveda, respectivamente;  $w$ , el desplazamiento en dirección de la normal a la superficie (la dirección desde el eje o centro de la bóveda se considera positiva);  $\gamma$ , el peso específico del líquido

Esquema	Fórmulas
<p>Bóveda esférica. Presión interior uniforme</p> 	$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}; \quad w = \frac{pR^2}{2Eh}(1 - \mu)$
<p>Bóveda esférica llena totalmente de líquido y apoyada por el anillo de radio <math>R \operatorname{sen} \alpha_0</math></p> 	<p>La presión interior <math>p = \gamma R(1 - \cos \alpha)</math></p> <p><math>\alpha \leq \alpha_0</math></p> $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{6h} \left( 1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{6h} \left( 5 - 6 \cos \alpha + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)$ <p><math>\alpha &gt; \alpha_0</math></p> $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{6h} \left( 5 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{6h} \left( 1 - 6 \cos \alpha - \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$

Esquema	Fórmulas
<p>Tanque esférico lleno de líquido. Los bordes son apoyados libremente</p> 	<p>La presión interior <math>p = \gamma R(\cos \varphi - \cos \beta)</math></p> $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h} \left[ \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \left[ \frac{-1 + 2 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi}{3(1 + \cos \varphi)} - \frac{\cos \beta}{2} \right]$ <p>Quando <math>\varphi = 0</math></p> $\sigma_m = \sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{2} = \sigma_{\text{máx}}$ <p>Quando <math>\varphi = \beta</math></p> $\sigma_m = -\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h} \cdot \frac{2 - \cos \beta - \cos^2 \beta}{6(1 + \cos \beta)}$ <p>El cambio del radio del círculo sobre el contorno</p> $\Delta = -\frac{\gamma R^2 \operatorname{sen} \beta}{Eh} \cdot \frac{(1 + \mu)(2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{6(1 + \cos \alpha)}$
<p>Cúpula esférica bajo la acción del peso muerto. Los bordes son apoyados libremente</p> 	$\sigma_m = -\frac{\gamma_m R}{1 + \cos \varphi};$ $\sigma_t = \gamma_m R \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}$ <p><math>\sigma_t = 0</math> cuando <math>\varphi = 51^\circ 50'</math></p> <p><math>\sigma_t &lt; 0</math> cuando <math>0 &lt; \alpha &lt; 51^\circ 50'</math></p> <p><math>\sigma_t &gt; 0</math> cuando <math>\alpha &gt; 51^\circ 50'</math></p>
<p>Cúpula esférica. Presión normal uniforme. Los bordes son apoyados articuladamente sobre un anillo elástico. Los materiales de la bóveda y del anillo son los mismos</p> 	<p>Lejos de los bordes cuando <math>H &gt; 10h</math></p> $\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}$ <p>La tensión en el anillo de apoyo</p> $\sigma_{\text{an}} = -\frac{pR^2 \operatorname{sen} \alpha}{2} \left[ \frac{\cos \alpha - 0,39 \frac{\sqrt{Rh}}{R \operatorname{sen} \alpha}}{F + 0,39h \sqrt{Rh}} \right],$ <p>siendo <math>F</math> el área de la sección del anillo de apoyo</p>

Esquema	Fórmulas
<p>Bóveda larga cilíndrica con fondos. Presión interior uniforme</p> 	<p>Lejos de los bordes</p> $\sigma_m = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{pR}{h} = \sigma_{\text{máx}}$ $w = \frac{pR^3}{Eh} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)$
<p>Cilindro lleno de líquido. Los bordes superiores son apoyados libremente</p> 	$\sigma_m = \frac{\gamma H R}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{\gamma(H-x)R}{h}$
<p>Bóveda cónica larga. Presión interior uniforme</p> 	<p>Lejos de los bordes</p> $\sigma_m = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{px \operatorname{tg} \alpha}{h}$ $w = \frac{3px^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4hE}$
<p>Bóveda cónica bajo la acción del peso muerto. Los bordes son apoyados libremente</p> 	<p>Lejos de los bordes</p> $\sigma_m = \frac{\gamma_m \cdot x}{2 \cos \alpha}; \quad \sigma_t = \frac{\gamma_m \cdot x \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha}$ <p>El desplazamiento radial del borde (<math>x = l</math>)</p> $\Delta = \frac{\gamma_m l^2}{E} \operatorname{tg} \alpha \left( \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{\mu}{2} \right)$ <p>Cuando <math>\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \quad \Delta = 0</math></p>

Esquema	Fórmulas
<p>Bóveda cónica llena totalmente de líquido. Los bordes son apoyados libremente</p> 	$\sigma_m = \frac{\gamma x \operatorname{tg} \alpha \left( H - \frac{2}{3} x \right)}{2h \cos \alpha}$ $\sigma_t = \frac{\gamma y \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} (H - x)$ $\sigma_{m \text{ máx}} = \frac{3\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{16h \cos \alpha} \text{ cuando } x = \frac{3}{4} H$ $\sigma_{t \text{ máx}} = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4h \cos \alpha} \text{ cuando } x = \frac{H}{2}$ <p>El cambio del radio del círculo sobre el contorno</p> $\Delta = -\mu \frac{\gamma H^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{6hE \cos \alpha}$
<p>Bóveda cilíndrica con fondo cónico llena de líquido</p> 	<p>Las tensiones en el fondo</p> $\sigma_m = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} \left( H + H_c - \frac{2}{3} x \right) x$ $\sigma_t = \frac{\gamma x \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} (H + H_c - x)$ <p>Si <math>H &gt; \frac{H_c}{3}</math>, entonces</p> $\sigma_{m \text{ máx}} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} \left( H + \frac{H_c}{3} \right) H_c \text{ cuando } x = H_c$ <p>Si <math>H &lt; \frac{H_c}{3}</math>, entonces</p> $\sigma_{m \text{ máx}} = \frac{3\gamma \operatorname{tg} \alpha}{16h \cos \alpha} (H + H_c)^2 \text{ cuando } x = \frac{3}{4} (H + H_c)$ <p>Si <math>H &gt; H_c</math>, entonces</p> $\sigma_{t \text{ máx}} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{4h \cos \alpha} (H + H_c)^2 \text{ cuando } x = \frac{H + H_c}{2}$ <p>Si <math>H &lt; H_c</math>, entonces</p> $\sigma_{t \text{ máx}} = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{h \cos \alpha} H H_c \text{ cuando } x = H_c$

Esquema	Fórmulas
<p><b>Bóveda cilíndrica con fondo esférico llena de líquido</b></p> 	<p>Las tensiones en el fondo</p> $\sigma_m = \frac{\gamma R}{2h} \left[ H + H_{es} - x + \frac{x(3R - x)}{3(2R - x)} \right]$ $\sigma_{m\text{máx}} = \frac{\gamma R}{2h} (H + H_{es}) \text{ cuando } x = 0$ $\sigma_t = \frac{\gamma R}{2h} \left[ H + H_{es} - x - \frac{x(3R - x)}{3(2R - x)} \right]$ $\sigma_{t\text{máx}} = \frac{\gamma R}{2h} (H + H_{es}) \text{ cuando } x = 0$ <p>Para un fondo semiesférico (<math>H_{es}' = R</math>)</p> $\sigma_{m\text{máx}} = \sigma_{t\text{máx}} = \frac{\gamma R}{2h} (H + R) \text{ cuando } x = 0$
<p><b>Bóveda toroidal.</b> Presión interior uniforme</p> 	$\sigma_m = \frac{pR}{2h} \cdot \frac{2a + R \operatorname{sen} \varphi}{a + R \operatorname{sen} \varphi}$ $\sigma_{m\text{máx}} = \frac{pR(2a - R)}{2h(a - R)} \text{ cuando } \varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\sigma_t = \frac{pR}{2h}$ $w = \frac{pR^2}{2Eh} \left[ \frac{a}{R} (1 - 2\mu) + (1 - \mu) \cos \varphi \right]$ <p>Los valores de <math>\sigma_m</math> y <math>\sigma_t</math> son bastante exactos cuando</p> $a > (2 \div 3) R$

## CÁLCULO DE LAS ESTRUCTURAS POR LOS ESTADOS LÍMITES

### § 90. Nociones fundamentales sobre el estado límite

Las metodologías de cálculo a la resistencia de barras, vigas y estructuras más arriba expuestas fueron basadas en la evaluación de la resistencia del material en el punto peligroso, es decir, se hizo el cálculo por *las tensiones admisibles*. Se consideraba peligroso o límite tal estado de la estructura en que la tensión local máxima alcanzaba una magnitud peligrosa, o sea, el límite de fluencia (para un material plástico), o la resistencia provisional (para un material frágil). El estado de la demás masa del material no se tomaba en consideración.

Mientras tanto, si la distribución de las tensiones no es uniforme, por ejemplo, durante la flexión o torsión, en las estructuras hiperestáticas fabricadas de materiales plásticos la aparición de las tensiones locales iguales al límite de fluencia en la mayoría de los casos no es peligrosa para toda la estructura en general.

Debido a ello apareció la necesidad de un nuevo enfoque en la evaluación de la resistencia de las estructuras por su estado límite.

*Se entiende por estado límite de una estructura el estado en que ésta pierde la capacidad de contrarrestar las influencias exteriores o deja de satisfacer las exigencias de explotación planteadas.*

Se distinguen tres tipos de estados límites, a saber: a) *por la capacidad portante* (resistencia, estabilidad y fatiga). Una vez alcanzado este estado, la estructura pierde la capacidad de contrarrestar las influencias exteriores u obtiene tales cambios residuales que deja de satisfacer las exigencias de explotación planteadas; b) *por el desarrollo de las deformaciones excesivas* debidas a las cargas estáticas o dinámicas, cuando en la estructura que conserva la resistencia y estabilidad, aparecen deformaciones irreversibles u oscilaciones de amplitud excesiva, de modo que la estructura deja de satisfacer las exigencias de explotación planteadas; c) *por la formación y desarrollo de fisuras*, cuando en la estructura que conserva la resistencia y estabilidad aparecen fisuras grandes, debido a lo cual la ulterior explotación de la estructura se hace imposible (pérdida de la impermeabilidad exigida, peligro de corrosión por dañar el revestimiento, etc.).

Los métodos de cálculo por los estados límites se emplean ampliamente durante la proyección de las estructuras de construcción, permitiendo descubrir las reservas de resistencia no utilizadas durante el cálculo por las tensiones admisibles y disminuir el peso de la estructura.

A continuación se examinan algunos ejemplos de cálculo por las cargas límites de las estructuras fabricadas de materiales plásticos que tienen escalón de fluencia en los diagramas de tracción, compresión y deslizamiento puro. Con el propósito de simplificar los cálculos esos diagramas (fig. 295) se esquematizan de tal manera que el tramo de la recta que expresa la ley de Hooke se convierte directamente en una curva horizontal sin transición suave (fig. 296), aceptándose así la igualdad entre los límites de proporcionalidad y de fluencia. La longitud del tramo horizontal del diagrama no se limita, es decir, el material se considera idealmente plástico, sin endurecimiento. Tal diagrama se conoce como *diagrama de Prandtl*.

La sustitución de los diagramas reales por el diagrama esquematizado de Prandtl es aceptable para los materiales del tipo de aluminio y es completamente

admisible para los materiales que tienen diagramas con longitud limitada del escalón de fluencia (fig. 297).

El estado límite de la estructura determinado por una deformación plástica de consideración vendrá al principio del endurecimiento del material, y la carga límite puede calcularse por medio del límite de fluencia.

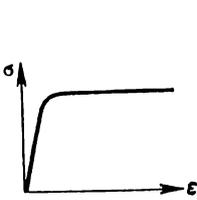


Fig. 295

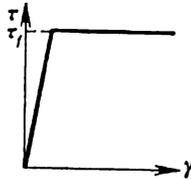


Fig. 296

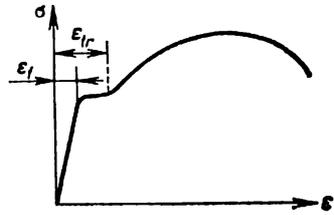


Fig. 297

Existen diferentes teorías de transición del material en el estado plástico para el estado tensional complejo. Los cálculos se realizan con mayor facilidad utilizando la teoría de la plasticidad de Saint-Venant, según la cual el estado plástico del material durante el estado tensional complejo viene cuando las tensiones tangenciales máximas alcanzan el valor límite, o sea, el límite de fluencia durante el deslizamiento

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_f. \quad (17.1)$$

Partiendo de lo anteriormente expuesto, veamos algunos casos característicos del cálculo por el estado límite.

### § 91. Cálculos durante tracción y compresión

Durante la tracción y compresión las tensiones se distribuyen uniformemente por el área de la sección transversal de la barra. Por eso los cálculos a la resistencia de los sistemas estáticamente determinados por la tensión admisible y el estado límite ofrecen el mismo resultado. En el caso de sistemas estáticamente indeterminados los resultados del cálculo serán diferentes. Es fácil de demostrarlo en el ejemplo de cálculo a la tracción de una suspensión de tres barras (fig. 298)

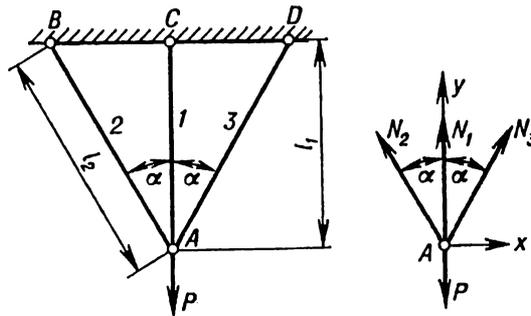


Fig. 298

solicitada por la fuerza  $P$ . Las áreas de las secciones transversales de las barras son idénticas; el material es plástico con límite de fluencia  $\sigma_f$ .

Calculando el sistema dado que tiene el grado de indeterminación estática igual a uno *por la tensión admisible*, según los datos del § 41, cuando  $F_1 = F_2 = F$  se tiene

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}; \quad (17.2)$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P. \quad (17.3)$$

Es obvio que siempre  $N_1 > N_2 = N_3$ , es decir, el esfuerzo máximo aparece en la barra media. Por tanto, también en la barra media aparecerá la tensión máxima igual a

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{N_1}{F} = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{P}{F}. \quad (17.4)$$

La reserva de resistencia (coeficiente de seguridad) será

$$n_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_{\text{máx}}} = \frac{1 + 2 \cos^3 \alpha}{P} F \sigma_f. \quad (17.5)$$

Durante el cálculo de la suspensión dada *por el estado límite* el esfuerzo en la barra media, en cuanto en ésta aparece la deformación plástica, será

$$N_{1f} = F \cdot \sigma_f. \quad (17.6)$$

Además, según (17.2) la carga exterior

$$P_{1f} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) F \sigma_f, \quad (17.7)$$

y los esfuerzos en las barras extremas del sistema en cuestión que se convirtió en un sistema estáticamente determinado

$$N_2 = N_3 = \frac{P - F \sigma_f}{2 \cos \alpha}. \quad (17.8)$$

La capacidad portante de la estructura de resistir la carga  $P > P_{1f}$  será agotada cuando las tensiones en las barras extremas alcancen el límite de fluencia, y la carga correspondiente a ese momento según (17.8) será igual a

$$N_2 = N_3 = F \sigma_f = \frac{P_{\text{lim}} - F \sigma_f}{2 \cos \alpha},$$

de donde

$$P_{\text{lim}} = (1 + 2 \cos \alpha) F \sigma_f. \quad (17.9)$$

El coeficiente de seguridad durante el cálculo por el estado límite

$$n_{\text{lim}} = \frac{P_{\text{lim}}}{P} = \frac{(1 + 2\cos \alpha) F\sigma_f}{P} . \quad (17.10)$$

De la confrontación de (17.5) y (17.10) se ve que  $n_{\text{lim}} > n_f$ . Por ejemplo, cuando  $\alpha = 30^\circ$  la relación  $\frac{n_{\text{lim}}}{n_f} = 1,19$ . Así pues, el cálculo por el estado límite permitió revelar la reserva latente de seguridad de la estructura.

## § 92. Cálculo durante la torsión

Durante la torsión de barras de sección circular maciza las tensiones tangenciales en la zona elástica a una distancia  $\rho$  del centro de la sección (fig. 299) se determinan mediante la fórmula (§ 46)

$$\tau_\rho = \frac{M_{\text{tor}} \rho}{J_p} , \quad (17.11)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor}}}{W_p} . \quad (17.12)$$

El estado peligroso de la barra durante el cálculo a la torsión por las tensiones admisibles se determina por la aparición de las deformaciones plásticas en las fibras extremas, cuando el momento torsional

$$M_{\text{tor}} = M_f = \tau_f W_p . \quad (17.13)$$

En este caso la barra conservará la capacidad de tomar el momento torsional creciente a causa del aumento de las tensiones hasta el nivel del límite de fluencia  $\tau_f$  (fig. 300) en los puntos situados más cerca del centro de la sección (fig. 301, a).

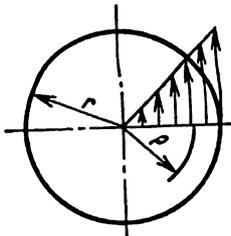


Fig. 299

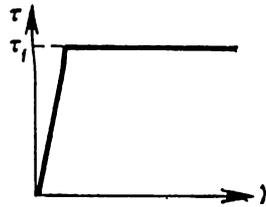


Fig. 300

Durante el cálculo por el estado límite cuando las deformaciones plásticas están distribuidas por toda la sección (fig. 301, b), el momento torsional (fig. 301, c) es igual a

$$M_{lim} = \int_F \rho dF \tau_f = \tau_f \cdot 2\pi \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho \quad (17.14)$$

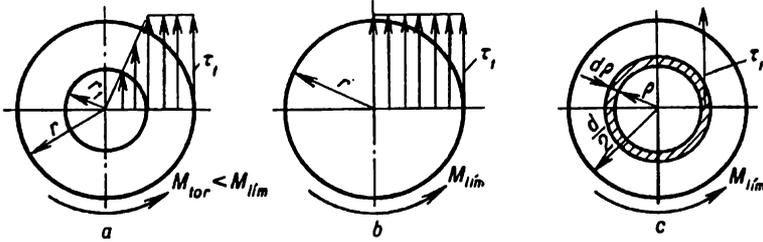


Fig. 301

o bien

$$M_{lim} = \tau_f \frac{\pi d^3}{12}. \quad (17.15)$$

La magnitud

$$\frac{\pi d^3}{12} = W_{p(p1)} \quad (17.16)'$$

se denomina *momento resistente plástico en la torsión*. Entonces

$$M_{lim} = \tau_f \cdot W_{p(p1)}. \quad (17.17)$$

La relación del momento límite  $M_{lim}$  al momento  $M_f$  determinado por la fórmula (17.13) será

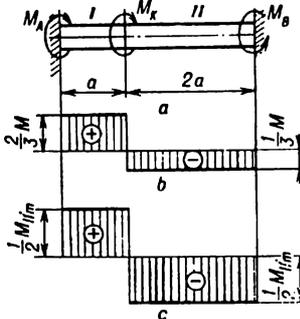
$$\frac{M_{lim}}{M_f} = \frac{W_{p(p1)}}{W_p} = \frac{\pi d^3 \cdot 16}{12 \cdot \pi d^3} = \frac{4}{3},$$

o bien

$$M_{lim} = \frac{4}{3} M_f = 1,33 M_f.$$

Tal es la reserva latente de seguridad de la barra circular sometida a torsión, que se revela pasando del cálculo por las tensiones admisibles al cálculo por el estado límite.

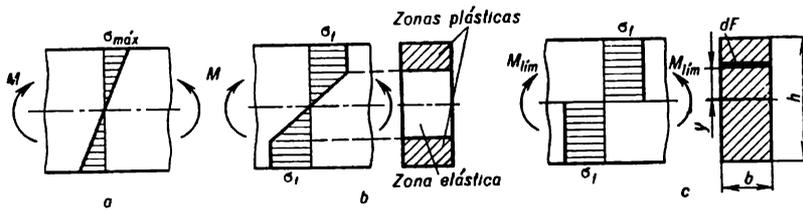
En el caso del sistema hiperestático dado en la fig. 302, *a, b, c* el coeficiente de seguridad durante el cálculo por el estado límite es 1,78 veces mayor que el obtenido durante el cálculo por las tensiones admisibles.



### § 93. Cálculo durante la flexión

Durante la flexión las tensiones normales se distribuyen por la sección irregularmente (fig. 303, *a*), y a una distancia *y* de la línea neutra se determinan mediante la fórmula de Navier (10.6)

$$\sigma = \frac{My}{J}$$



Las tensiones máximas en el borde de la sección

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W},$$

siendo *W* el módulo de la sección en la flexión que, por ejemplo, para una viga de sección rectangular de ancho *b* y altura *h* es

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

La magnitud peligrosa del momento flector durante el cálculo por las tensiones admisibles será (si los límites de fluencia en la compresión y tracción son iguales)

$$M_f = \sigma_f W. \quad (17.18)$$

Además, la viga es capaz de tomar el momento flector creciente. A medida que aumenta el momento flector en comparación con  $M_f$ , el estado plástico del material se extiende en dirección al eje neutro (fig. 303, *b*) hasta el agotamiento completo de la capacidad portante de la viga. El estado límite vendrá cuando la fluencia se extienda por toda la sección transversal (fig. 303, *c*), después de lo cual la deformación siguiente de la viga pasará sin aumento del momento flector. En la sección transversal en cuestión se forma la llamada articulación plástica que transmite el momento flector igual al momento flector límite que se determina para la sección simétrica respecto al eje neutro por la fórmula

$$M_{lim} = \int_F \sigma_f y \, dF = \sigma_f \cdot 2 \cdot \int_{F/2} y \, dF = \sigma_f \cdot 2 \cdot S_{m\acute{a}x}, \quad (17.19)$$

siendo  $S_{m\acute{a}x}$  el momento estático del área de la mitad de la sección transversal respecto al eje neutro.

La magnitud  $2S_{m\acute{a}x}$  se suele denominar momento resistente plástico y designar por  $W_{p1}$ . Entonces

$$M_{lim} = \sigma_f W_{p1}. \quad (17.20)$$

La relación

$$\frac{M_{lim}}{M_f} = \frac{W_{p1}}{W} \quad (17.21)$$

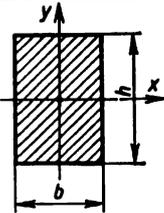
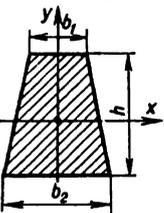
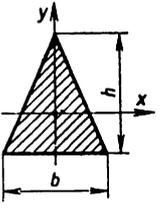
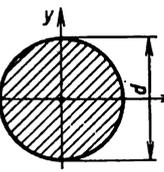
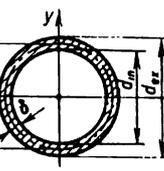
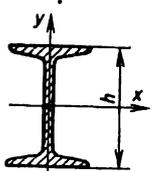
caracteriza el grado de aumento del coeficiente de seguridad de la viga al pasar al cálculo por las cargas límites. En el caso de una viga de sección rectangular

$$\frac{W_{p1}}{W} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5.$$

Para vigas laminadas de doble T, en promedio  $\frac{W_{p1}}{W} = 1,18$ .

En la tabla 37 están reunidas las fórmulas de cálculo para determinar momentos resistentes plásticos para algunas secciones de vigas.

**Momentos resistentes plásticos para algunas secciones de vigas**

Sección	Momentos resistentes plásticos
	$W_{p1} = \frac{bh^2}{4}; \quad W_{p1} = 1,5 W_x$
	$W_{p1} = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2} \left[ b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$
	$W_{p1} = \frac{bh^2}{6} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,0977 bh^2;$ $W_{p1} \approx 2,36 W_x$
	$W_{p1} = \frac{d^3}{6}; \quad W_{p1} = 1,7 W_x$
	$W_{p1} = \frac{1}{6} (d_{ex}^3 - d_{in}^3) \approx d^2 \delta;$ $W_{p1} = 1,7 \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^4} W_x; \quad \alpha = \frac{d_{in}}{d_{ex}}$
	$W_{p1} = 2S_x; \quad W_{p1} \approx (1,14 \div 1,18) W_x$

ESTABILIDAD DE BARRAS COMPRIMIDAS

§ 94. Equilibrio elástico estable e inestable

En el sistema que se halla en el estado deformado el equilibrio entre cargas exteriores y fuerzas de elasticidad originadas por ellas puede ser no sólo estable, sino también inestable.

El equilibrio elástico es *estable* si el cuerpo deformado durante cualquier desviación pequeña del estado de equilibrio tiende a regresar al estado original y lo hace después de eliminar la influencia exterior que perturbó el estado de equilibrio inicial. El equilibrio elástico es *inestable* si el cuerpo deformado, una vez sacado de él por alguna influencia, sigue deformándose en dirección a la desviación provocada y después de quitar la influencia no regresa al estado original. Entre estos dos estados de equilibrio se encuentra un estado transitorio denominado *crítico*. Durante el estado crítico el cuerpo deformado se halla en equilibrio indiferente; puede conservar la forma dada a él originalmente, pero también puede perderla a causa de una influencia más insignificante.

La estabilidad de la forma de equilibrio del cuerpo deformado depende de la magnitud de la carga aplicada a él. *La carga, cuya superación origina la pérdida de estabilidad de la forma original del cuerpo se denomina carga crítica y se designa por  $P_{crit}$ .*

En la fig. 304, *a, b, c* se muestran casos posibles de deformación de la barra en dependencia de la carga de compresión, a saber: cuando  $P < P_{crit}$  la forma de equilibrio se mantiene estable (fig. 304, *a*); cuando  $P = P_{crit}$ , el estado de

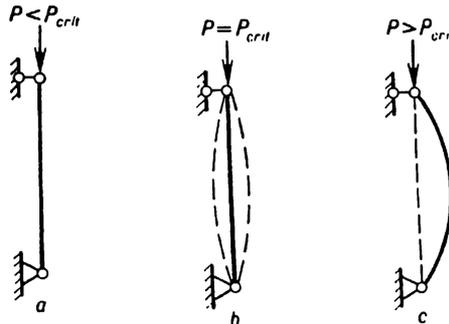


Fig. 304

equilibrio es indiferente, la barra puede ocupar uno de los tres estados mostrados con línea llena y de trazos (fig. 304, *b*); cuando  $P > P_{crit}$  la barra pierde la estabilidad, se comba, es decir, la forma rectilínea de equilibrio deja de ser estable (fig. 304, *c*).

Cuando las cargas alcanzan valores críticos esto equivale a la destrucción de la estructura, porque la forma inestable de equilibrio será inevitablemente perdida, lo que prácticamente está ligado con crecimiento ilimitado de las deformaciones y las tensiones. La destrucción sucede, por regla general, de repente a causa de la flexión, siendo pequeñas las tensiones de compresión cuando la resistencia del elemento a la compresión está lejos de agotarse. Para garantizar cierta seguridad por pandeo es necesario que se satisfaga la condición

$$P < [P], \quad (18.1)$$

siendo  $P$  la carga que actúa;  $[P]$ , la carga admisible que para el coeficiente de seguridad por pandeo  $n_e$  es igual a

$$[P] = \frac{P_{\text{crit}}}{n_e}, \quad (18.2)$$

Así pues, durante el cálculo de sistemas elásticos (en particular, tales sistemas típicos, como son barras comprimidas) al pandeo es necesario, ante todo, saber determinar la magnitud de la fuerza crítica  $P_{\text{crit}}$ .

A continuación examinaremos las fórmulas principales para determinar cargas críticas durante la compresión de una barra esbelta larga o durante la llamada *flexión longitudinal*.

### § 95. Fórmula de Euler para determinar la carga crítica de la barra comprimida

Suponiendo que la fuerza crítica  $P_{\text{crit}}$  no origina en la barra las tensiones que sobrepasan el límite de proporcionalidad, y que solamente tienen lugar desviaciones pequeñas de la forma rectilínea, el valor de la fuerza crítica  $P_{\text{crit}}$  para una barra comprimida de longitud  $l$  sujeta según el esquema dado en la fig. 305, *a* puede determinarse a partir de la siguiente ecuación diferencial aproximada del eje flexionado de la viga (§ 54):

$$EJ_{\text{min}} \frac{d^2 w(z)}{dz^2} = M(z), \quad (18.3)$$

siendo  $J_{\text{min}}$  el momento de inercia mínimo de la sección de la barra (al perder la estabilidad la comba sucederá perpendicularmente al eje de rigidez mínima);

$M(z)$  el momento flector igual a

$$M(z) = -Pw. \quad (18.4)$$

Sustituyendo (18.4) en (18.3) se tendrá

$$EJ_{\text{min}} \frac{d^2 w}{dz^2} + Pw = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + k^2 w = 0, \quad (18.5)$$

siendo

$$k^2 = \frac{P}{EJ_{\text{min}}}. \quad (18.6)$$

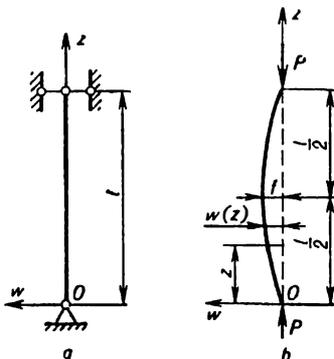


Fig. 305

La solución de la ecuación diferencial homogénea obtenida (18.5) será

$$w = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz,$$

donde  $A$  y  $B$  son las constantes de integración que se determinan a partir de las condiciones de frontera. En particular, para el caso de sujeción articulada de los extremos de la barra comprimida (fig. 305,  $a$ ) las condiciones de frontera serán las siguientes:

$$w(z)|_{z=0} = 0; \quad w(z)|_{z=l} = 0.$$

De la primera condición de frontera se desprende que  $B = 0$ , por eso

$$w(z) = A \operatorname{sen} kz. \quad (18.7)$$

De la segunda condición se obtiene

$$A \operatorname{sen} kl = 0.$$

Puesto que

$$A \neq 0,$$

resulta que

$$\operatorname{sen} kl = 0. \quad (18.8)$$

La raíz de esta ecuación  $kl$  puede tener un número infinito de valores:  $0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$  es decir,

$$kl = n\pi,$$

siendo  $n$  el número entero arbitrario.

Es obvio que la primera raíz  $kl = 0$  tiene que ser suprimida, porque no corresponde a los datos iniciales del problema. De esta manera

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2. \quad (18.9)$$

Teniendo en cuenta (18.6) y (18.9) hallamos el valor crítico incógnito del esfuerzo  $P$

$$P_{\text{crit}} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{\text{mín}}}{l^2}. \quad (18.10)$$

Esta expresión por vez primera fue obtenida por Euler y se denomina *fórmula de Euler*.

El valor mínimo de la fuerza crítica  $P_{\text{crit}}^I$  que se obtiene cuando  $n = 1$  y  $kl = \pi$  es igual a

$$P_{\text{crit}}^I = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{l^2}. \quad (18.11)$$

La ecuación de la línea flexionada, cuando las deformaciones son pequeñas, según (18.7) tiene la forma

$$w(z) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}.$$

El valor de  $A$  se caracteriza por la magnitud del pandeo máximo  $w_{\text{máx}} = f$  cuando  $\operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} = 1$ . Por consiguiente

$$w = f \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l}. \quad (18.12)$$

El máximo de  $w(z)$  tiene lugar cuando el valor de  $z$  es tal que

$$\frac{dw}{dz} = 0,$$

es decir,

$$\frac{dw}{dz} = f \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi z}{l} = 0,$$

o bien

$$\cos \frac{n\pi z}{l} = 0.$$

El valor mínimo del argumento — cuando el coseno es cero — es igual a  $\frac{\pi}{2}$ , por consiguiente,

$$\frac{n\pi z}{l} = \frac{\pi}{2},$$

de donde

$$z = \frac{l}{2n}. \quad (18.13)$$

De (18.12) o (18.13) se desprende que  $n$  es igual al número de semiondas de senoide que caben en la longitud de la barra flexionada (fig. 306). Si  $n = 1$ , entonces  $z = \frac{l}{2}$  y el valor máximo del pandeo  $w_{\text{máx}} = f$  tiene lugar en el centro de la barra. Esto corresponde al caso principal mostrado en la fig. 305, *b*, cuando

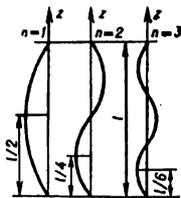


Fig. 306

después de haber perdido la barra la estabilidad, siendo mínimo el valor de la fuerza crítica  $P_{\text{cr}1}^1$ , en su eje flexionado cabe solamente una semionda de senoide.

**§ 96. Influencia de las condiciones de sujeción de los extremos de la barra sobre la magnitud de la fuerza crítica**

Es fácil aclarar la influencia de las condiciones de sujeción de los extremos de las barras sobre la magnitud de la fuerza crítica por medio de la confrontación del tipo del eje flexionado de la barra para diferentes casos de sujeción con la forma del eje flexionado en el caso principal, es decir, durante la sujeción articulada de ambos extremos de la barra.

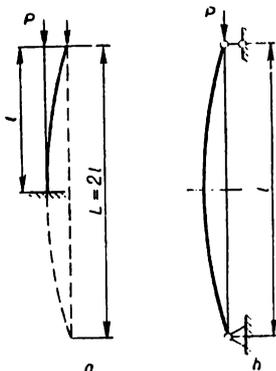


Fig. 307

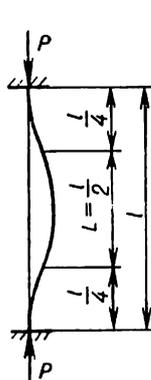


Fig. 308

*Barra de longitud l con un extremo empotrado y otro libre* (fig. 307 a). Al perder la estabilidad la barra se halla en el mismo estado que la mitad de la barra de longitud  $L=2l$  con los extremos sujetos articuladamente (fig. 307, b). Esto quiere decir que en el caso examinado

$$P_{\text{crit}}^I = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{4l^2}. \quad (18.14)$$

El eje flexionado de la barra (fig. 307 a) tiene el aspecto de una mitad de la semionda de senoide. O sea,  $n = \frac{1}{2}$ .

*Barra de longitud l con ambos extremos empotrados* (fig. 308). Al perder la estabilidad, la parte media de la barra tendrá la misma forma que la barra de longitud  $L = \frac{l}{2}$  con los extremos sujetos articuladamente, es decir,

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{l^2}. \quad (18.15)$$

En este caso se forman dos semiondas: la media de longitud  $L = \frac{l}{2}$  y dos mitades extremas de la semionda de longitud  $\frac{l}{2}$ . Es decir,  $n = 2$ .

*Barra de longitud l con un extremo empotrado y otro apoyado articuladamente* (fig. 309). Una vez perdida la estabilidad, la parte derecha de la barra

$CB$  tendrá la forma de semionda de senoide. De la comparación de la fig. 309 y la fig. 307,  $b$  deducimos que el tramo  $CB$  tiene una longitud  $L = 0,7 l$  y, por consiguiente,

$$P_{\text{crit}}^I = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{(0,7l)^2}. \quad (18.16)$$

De la confrontación de (18.11) y (18.14)–(18.15) se desprende que en el caso general las fórmulas señaladas pueden representarse así:

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín}}}{(\nu l)^2}, \quad (18.17)$$

donde  $\nu l = l_{\text{red}}$  es la longitud reducida de la barra;  $l$  es la longitud real de la barra;  $\nu$ ; el coeficiente de reducción de la longitud.

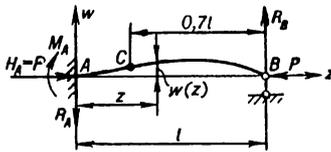


Fig. 309

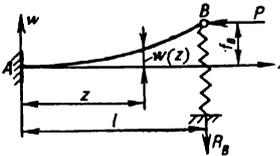


Fig. 310

Cuando la sujeción de ambos extremos de la barra es articulada,  $\nu = 1$ ; si un extremo de la barra es empotrado y otro libre,  $\nu = 2$ ; si ambos son empotrados,  $\nu = \frac{1}{2}$ ; si un extremo es empotrado y otro apoyado articuladamente,  $\nu = 0,7$ .

Los casos mencionados de sujeción de los extremos de la barra se encuentran raras veces en la práctica en forma pura. Son más difundidos los casos de sujeción en que un extremo de la barra es empotrado y otro se apoya elásticamente o cuando ambos extremos están sujetados elásticamente.

Examinando el primero de los casos señalados (fig. 310) es fácil de notar que después de haber perdido la estabilidad el extremo apoyado elásticamente se desplaza en dirección vertical en una magnitud  $f_B$ , y que surge la reacción elástica  $R_B$  proporcional al desplazamiento  $f_B$  e igual a

$$R_B = c \cdot f_B,$$

siendo  $c$  el coeficiente de rigidez del apoyo  $B$ .

La ecuación diferencial de la línea elástica será

$$EJ_{\text{mín}} \frac{d^2 w}{dz^2} = P(f_B - w) - cf_B(l - z) \quad (18.18)$$

o bien

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = k^2(f_B - w) - \frac{cf_B}{EJ_{\text{mín}}}(l - z), \quad (18.19)$$

siendo

$$k^2 = \frac{P_{\text{crit}}}{EJ_{\text{mín}}}.$$

Volviendo a escribir la ecuación (18.19) en la forma

$$\frac{d^2w}{dz^2} + k^2w = k^2f_B \left(1 - \frac{cl}{P_{\text{crit}}}\right) + k^2 \frac{cf_B}{P_{\text{crit}}} z, \quad (18.20)$$

hallamos su solución:

$$w = C \operatorname{sen} kz + D \operatorname{cos} kz + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right) + \frac{c}{P_{\text{crit}}} f_B z. \quad (18.21)$$

Las constantes de integración y la carga crítica las deducimos a partir de las condiciones de frontera:

cuando  $z = 0$

$$w(0) = w_A = 0, \quad (18.22)$$

$$\frac{dw(0)}{dz} = \theta(0) = 0; \quad (18.23)$$

cuando  $z = l$

$$w(l) = w_B = f_B. \quad (18.24)$$

De (18.22) hallamos que

$$D = -f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right).$$

Ahora calculemos la derivada de (18.21) con el fin de utilizar (18.23):

$$\frac{dw}{dz} = kC \operatorname{cos} kz - kD \operatorname{sen} kz + \frac{c}{P_{\text{crit}}} f_B,$$

de donde hallamos, siendo  $z = 0$ ,

$$kC + \frac{c}{P_{\text{crit}}} f_B = 0$$

o bien

$$C = -\frac{c}{kP_{\text{crit}}} f_B.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de  $C$  y  $D$  en (18.21) hallamos

$$w(z) = -\frac{c}{kP_{\text{crit}}} f_B \operatorname{sen} kz - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right) \operatorname{cos} kz + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right) + \frac{cf_B}{P_{\text{crit}}} z. \quad (18.25)$$

Utilicemos la condición de frontera (18.24). Considerando en (18.25)  $z = l$  hallamos

$$w(l) = -\frac{c}{kP_{\text{crit}}} f_B \operatorname{sen} kl - f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right) \operatorname{cos} kl + f_B \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right) + \frac{c}{P_{\text{crit}}} f_B l = f_B,$$

o bien

$$-\frac{c}{kP_{\text{crit}}} \operatorname{sen} kl - \left(1 - \frac{c}{P_{\text{crit}}} l\right) \cos kl = 0,$$

de donde

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 - \frac{P_{\text{crit}}}{cl}\right). \quad (18.26)$$

Si de esta ecuación se determina el valor mínimo de  $k$ , será hallado también el valor mínimo de la carga crítica

$$P_{\text{crit}} = k^2 EJ_{\text{mín.}}$$

Veamos dos casos límites. Considerando  $c = 0$  hallamos

$$\operatorname{tg} kl = \infty; \quad kl = \frac{\pi}{2},$$

es decir, llegamos al esquema de cálculo cuando un extremo (izquierdo) está empotrado y otro (derecho) libre (fig. 307, a). La magnitud de la fuerza crítica en este caso se determina mediante la fórmula (18.14).

Considerando  $c = \infty$ , a partir de (18.26) hallamos  $\operatorname{tg} kl = kl$ ;  $kl = \frac{\pi}{0,7}$ , y la magnitud de la fuerza crítica (18.16) que corresponde al caso en que un extremo de la barra está empotrado y otro se apoya articularmente (fig. 309).

Por consiguiente, el cambio del coeficiente de elasticidad  $c$  de cero a infinidad puede tomarse en consideración mediante el coeficiente de reducción  $\nu$  que ha de variar de 2 a 0,7.

Los valores del coeficiente de reducción de la longitud al igual que del coeficiente de estabilidad  $\eta = k^2 l^2$  para las barras de sección transversal constante y variada comprimidas centralmente para diferentes casos de su sollicitación y sujeción se dan en la tabla 38. En la tabla 39 se dan los valores de cargas críticas para la banda y algunas vigas de doble T.

### § 97. Sobre la pérdida de estabilidad cuando las tensiones rebasan el límite de proporcionalidad del material

La fórmula de Euler fue obtenida de la ecuación diferencial de la línea elástica, por eso se puede valerse de ésta solamente en el caso de que es justa la ley de Hooke, o sea, mientras la tensión crítica que surge en la barra comprimida durante la carga crítica  $P_{\text{crit}}^I$  no sobrepase el límite de proporcionalidad

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crit}}}{F} < \sigma_{\text{pr.}}$$

Al representar la tensión crítica en la forma

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{P_{\text{crit}}^I}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{mín.}}}{F(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i}\right)^2},$$

siendo  $i = i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$  el radio de giro principal mínimo del área de la sección de la barra (§ 10), o bien

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (18.27)$$

siendo

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}}, \quad (18.28)$$

la magnitud adimensional denominada *esbeltez de la barra*, se ve de la fórmula (18.27) que la tensión crítica depende solamente del módulo de elasticidad  $E$  y la esbeltez  $\lambda$ .

Construyendo el diagrama de la dependencia  $\sigma_{\text{crit}} = f(\lambda)$  (fig. 311)—la *hipérbola de Euler*—, se puede convencerse de que para el material dado (con el módulo  $E$  conocido) la fórmula (18.27) es justa empezando desde un valor determinado de la esbeltez que puede ser hallado a partir de la condición

$$\sigma_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{\text{pr}}.$$

Determinemos ahora la esbeltez límite  $\lambda_{\text{lim}}$ , por debajo de la cual no se puede valerse de la fórmula (18.27):

$$\lambda_{\text{lim}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{pr}}}}.$$

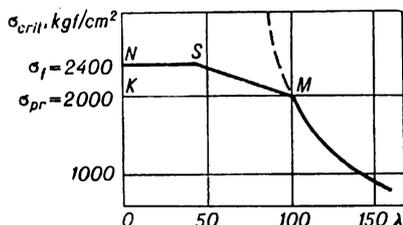


Fig. 311

Así, por ejemplo, para el acero Ст. 3, cuyo módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\sigma_{\text{pr}} \approx 2000 \text{ kgf/cm}^2$ ,

$$\lambda < \lambda_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{pr}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100,$$

es decir, la fórmula de Euler (18.27) puede utilizarse en el tramo de la hipérbola mostrado en la fig. 311 con la línea llena, cuando la esbeltez  $\lambda$  es no menor de 100.

Sin embargo, como muestra la experiencia, también en el tramo donde  $\lambda < \lambda_{\text{lim}}$ , siendo las tensiones en la barra mayores que  $\sigma_{\text{pr}}$ , con las cuales la fórmula de Euler ofrece valores exagerados de las tensiones críticas (tramo de la hipérbola de Euler mostrado en la fig. 311 con línea de trazos), la barra puede perder la estabilidad. En este caso el valor de la tensión crítica puede calcularse de acuerdo con los datos experimentales de F. S. Yasinski para diferentes materiales por la fórmula empírica

$$\sigma_{\text{crit}} = a - b\lambda. \quad (18.29)$$

Para la fundición se utiliza la dependencia cuadrática

$$\sigma_{\text{crit}} = a - b\lambda + c\lambda^2. \quad (18.30)$$

A continuación se dan los valores de los coeficientes constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$  para algunos materiales.

Material	$\lambda_{lim}$	$a$	$b$	$c$
Cr. 2, Cr. 3	100	3100	11,4	—
Cr. 5	100	4640	32,6	—
Acero 40	90	3210	11,6	—
Acero al silicio	100	5890	38,2	—
Madera (pino)	110	293	1,94	—
Fundición	80	7760	120	0,53

La magnitud de  $\sigma_{crit}$  deducida por las fórmulas (18.29) o (18.30) para algunos valores de la esbeltez  $\lambda_0$  se hace igual a la tensión límite en la compresión, es decir, para materiales plásticos

$$\sigma_{crit} = \sigma_f;$$

para materiales frágiles

$$\sigma_{crit} = \sigma_p.$$

Las barras que tienen  $\lambda < \lambda_0$  se denominan *barras de poca esbeltez* y se calculan solamente a la resistencia. Por ejemplo, para el acero Cr. 3, siendo  $40 < \lambda < 100$ , el diagrama de la dependencia  $\sigma_{crit} = f(\lambda)$  obtenido a base de la fórmula (18.29) es una recta inclinada *SM* (fig. 311), y la parte *NS* del diagrama, siendo  $0 < \lambda < 40$ , puede considerarse como línea horizontal.

Así pues, el diagrama  $\sigma_{crit} = f(\lambda)$  para el acero Cr. 3 consta de tres tramos, a saber: el tramo horizontal *NS* que corresponde a  $\sigma_{crit} = \sigma_f$ ; el tramo inclinado *SM* cuando  $40 < \lambda < 100$  y la hipérbola de Euler cuando  $\lambda > 100$  (a la derecha del punto *M*).

### § 98. Cálculo de las barras comprimidas por pandeo mediante los coeficientes de disminución de la tensión admisible básica

Las barras comprimidas centralmente con poca esbeltez ( $\lambda < \lambda_0$ ) conservan la capacidad portante a condición de que las tensiones críticas no sobrepasen la tensión peligrosa, o sea

$$\sigma_{crit} < \sigma_0,$$

siendo para los materiales frágiles  $\sigma_0 = \sigma_p$  y para los materiales plásticos  $\sigma_0 = \sigma_f$ . La capacidad portante de barras de poca esbeltez se determina por la resistencia del material.

En el caso de barras de gran esbeltez el momento del surgimiento en la barra comprimida de las tensiones iguales a  $\sigma_{crit}$  debe considerarse como estado peligroso. Por eso para garantizar la capacidad de trabajo de la barra es necesario que se cumpla la siguiente condición de estabilidad:

$$\sigma_{crit} \leq [\sigma]_e, \quad (18.31)$$

siendo  $[\sigma]_e$  la tensión admisible a la estabilidad, determinada mediante la fórmula

$$[\sigma]_e = \frac{\sigma_{crit}}{n_e}.$$

Aquí  $n_e$  es el coeficiente de seguridad por pandeo que a causa de la posible excentricidad de aplicación de la carga, comba de la barra y heterogeneidad del ma-

terial se toma siempre un poco mayor que el coeficiente básico de seguridad por resistencia ( $n_e > n_0$ ). Para el acero  $n_e = 1,8 + 3,0$ ; para la fundición  $n_e = 5,0 + 5,5$ ; para la madera  $n_e = 2,8 + 3,2$ . Cuanto mayor es la esbeltez, menor se toma  $n_e$ .

En la práctica durante el cálculo por pandeo se acostumbra utilizar no la tensión admisible a la estabilidad  $[\sigma]_e$ , sino la tensión admisible a la compresión  $[\sigma_-]$  con coeficiente de corrección  $\varphi$  correspondiente, cuyo valor puede determinarse a partir de la relación

$$\frac{[\sigma]_e}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{\text{crit}}}{n_e} \frac{n_0}{\sigma_0}.$$

De donde

$$[\sigma]_e = \frac{\sigma_{\text{crit}}}{\sigma_0} \frac{n_0}{n_e} [\sigma_-]$$

o bien

$$[\sigma]_e = \varphi [\sigma_-], \quad (18.32)$$

siendo

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{crit}}}{\sigma_0} \cdot \frac{n_0}{n_e}. \quad (18.33)$$

Aquí  $\varphi$  es el coeficiente de disminución de la tensión admisible a la compresión o coeficiente de la tensión admisible convencional. En la tabla 40 se dan valores de  $\varphi$  para diferentes esbelteces.

Así pues, tomando en consideración (18.32), podemos volver a escribir ahora la fórmula de cálculo por pandeo (18.31) así:

$$\sigma_{\text{máx}} < [\sigma]_e = \varphi [\sigma_-]$$

o bien

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{bruta}}} < \varphi [\sigma_-]. \quad (18.34)$$

Se distinguen dos clases de cálculo por pandeo: *de comprobación y de proyección*.

En el cálculo de comprobación se parte de los parámetros y la forma conocidos de la sección de la barra y se determinan ante todo el momento de inercia axial mínimo  $J_{\text{mín}}$ , el área  $F$  y se calcula el radio de giro mínimo

$$i_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{J_{\text{mín}}}{F}},$$

al igual que la esbeltez

$$\lambda = \frac{vl}{i_{\text{mín}}}.$$

Luego, conociendo la esbeltez, se halla en la tabla el coeficiente  $\varphi$ , se determina la tensión admisible a la estabilidad

$$[\sigma]_e = \varphi [\sigma_-],$$

se compara la tensión real  $\sigma = \frac{P}{F_{\text{bruta}}}$  con la tensión admisible a la estabilidad  $[\sigma]_e$  y se aclara si se satisface la condición

$$\sigma < [\sigma]_e.$$

En el cálculo de proyección se parte de la condición

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{\text{bruta}}} < [\sigma_-]. \quad (18.35)$$

La sección necesaria se determina por la fórmula

$$F_{\text{bruta}} = \frac{P}{\varphi [\sigma_-]}. \quad (18.36)$$

En la última relación, además del área buscada  $F_{\text{bruta}}$ , también es desconocido el coeficiente  $\varphi$ . Por eso durante la elección de la sección nos vemos obligados a utilizar el método de aproximaciones sucesivas variando la magnitud del coeficiente  $\varphi$ . Ordinariamente, durante la primera prueba se toma  $\varphi_1 = 0,5 \div 0,6$ . Después de haber tomado  $\varphi_1$ , por la fórmula (18.36) se determina  $F_{\text{bruta}}$  y se elige la sección correspondiente. Conociendo la sección y determinado  $J_{\text{mín}}$ ,  $i_{\text{mín}}$  y  $\lambda$  se deduce el valor real del coeficiente  $\varphi'_1$ . Si  $\varphi'_1$  difiere considerablemente de  $\varphi_1$ , entonces también la tensión diferirá de la admisible. En este caso se debe repetir el cálculo, es decir, hacer la segunda prueba tomando el promedio de los coeficientes  $\varphi_1$  y  $\varphi'_1$ :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Durante la segunda prueba se determina  $\varphi'_2$ . Si se necesita la tercera prueba, el cálculo se repite tomando

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}.$$

etc. De ordinario, en la práctica se logra limitarse con dos o tres pruebas.

### § 99. Elección del material y de la forma racional de las secciones transversales de barras comprimidas

Para las barras de gran esbeltez ( $\lambda > \lambda_{\text{lím}}$ ) cuando  $\sigma_{\text{crít}} < \sigma_{\text{pr}}$ , el módulo de elasticidad  $E$  es la única característica que determina la resistencia de la barra a la pérdida de estabilidad. Entonces, por lo visto, para las barras de acero que trabajan a compresión, cuyo  $E$  prácticamente cambia poco, no es racional utilizar acero de resistencia elevada. En lo que se refiere a la forma de la sección transversal, será racional una forma que ofrezca, para un área determinada, la magnitud máxima del radio de giro mínimo  $i_{\text{mín}}$ .

Introduzcamos la característica adimensional

$$\xi = \frac{i_{\text{mín}}}{\sqrt{F}}$$

denominándola *radio unitario de giro*. Se puede opinar sobre la racionalidad de tal o cual sección a base de los datos que se dan a continuación.

Sección	$\xi$
Tubular $\left(\alpha = \frac{d_{int}}{d_{ext}} = 0,95 - 0,8\right)$	2,25 - 1,64
Tubular $(\alpha = 0,7 - 0,8)$	1,2 - 1,0
Angular	0,5 - 0,3
Doble T	0,41 - 0,27
Canal	0,41 - 0,29
Cuadrada	0,289
Circular	0,283
Rectangular $(h = 2b)$	0,204

El análisis de los datos ofrecidos demuestra que las más racionales son las secciones tubulares, al igual que las de cajón de paredes delgadas. Las menos racionales son las secciones rectangulares macizas.

Durante la proyección de las barras, cuya capacidad portante se determina por la resistencia a la pérdida de estabilidad, se debe esforzarse por lograr que la barra sea equirresistente en todas las direcciones, o sea, que los momentos de inercia principales sean, en la medida de lo posible, iguales.

### § 100. Flexión longitudinal y transversal simultánea

La flexión de la barra se denomina longitudinal y transversal simultánea si en sus secciones transversales surgen momentos flectores debidos tanto a las cargas longitudinales como a las transversales (fig. 312).

El cálculo del momento flector total  $M_t$  en las secciones transversales se realiza contando con las flechas del eje de la barra:

$$|M_t(z)| = |M(z)| + |Sw_t(z)|, \quad (18.37)$$

siendo  $M(z)$  el momento flector debido a la acción de la carga transversal;  $Sw_t(z)$  el momento flector debido a la acción de la carga axial  $S$ . La determinación de la magnitud del momento flector total  $M_t(z)$  se complica por no poder utilizar en este caso el principio de superposición de fuerzas.

Veamos el método aproximado de determinación del momento flector  $M_t(z)$ . Se funda en la suposición de que el eje flexionado de la viga toma durante la sollicitación transversal la forma sinusoidal, o sea,

$$w(z) \approx f \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}. \quad (18.38)$$

Si existe la carga longitudinal también se toma aproximadamente que

$$w_t(z) \approx f_t \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}. \quad (18.39)$$

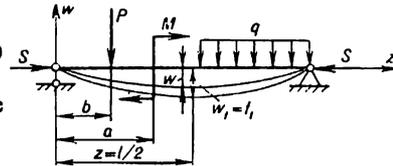


Fig. 312

Tal suposición permite obtener suficiente exactitud para la viga apoyada articuladamente durante la acción de cargas transversales dirigidas hacia un lado, sobre todo, si la deformación de la viga es simétrica con respecto a su mitad donde  $w_t \left(\frac{l}{2}\right) = f_t$ .

Las ecuaciones diferenciales de la línea elástica durante la flexión transversal así como la longitudinal y transversal simultánea las escribamos respectivamente así:

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ}; \quad (18.40)$$

$$\frac{d^2 w_t(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ} - \frac{S\omega_t(z)}{EJ}. \quad (18.41)$$

Eliminando  $M(z)$  de las ecuaciones (18.40) y (18.41) y tomando en consideración las suposiciones (18.38) y (18.39) se tendrá

$$(f_t - f) \frac{d^2}{dz^2} \left( \text{sen } \frac{\pi z}{l} \right) = - \frac{S}{EJ} f_t \text{sen } \frac{\pi z}{l}.$$

Después de la diferenciación tendremos

$$\frac{\pi^2}{l^2} (f_t - f) = \frac{S}{EJ} f_t. \quad (18.42)$$

Designando

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_e \quad (18.43)$$

hallamos de la ecuación (18.42) la expresión para la flecha en la mitad del vano de la viga durante la flexión transversal y longitudinal simultánea

$$f_t = \frac{f}{1 - \frac{S}{P_e}}. \quad (18.44)$$

La fórmula (18.44) ofrece resultados satisfactorios cuando la fuerza de compresión  $S$  no sobrepasa  $0,8P_{\text{crit}}^I$ . Suponiendo que los momentos flectores son proporcionales a las flechas, se puede obtener, de acuerdo con (18.44), una fórmula aproximada simple para determinar el momento flector durante la flexión transversal y longitudinal simultánea:

$$M_t = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_e}}. \quad (18.45)$$

Entonces la magnitud de las tensiones máximas en la sección de la barra se determinará mediante la fórmula

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{S}{F} + \frac{(M_t)_{\text{máx}}}{W} \quad (18.46)$$

o bien, contando con la fórmula (18.45),

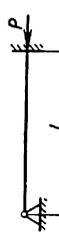
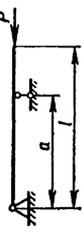
$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W \left( 1 - \frac{S}{P_e} \right)}. \quad (18.47)$$

De la fórmula se desprende que en este caso el principio de superposición no es válido.

En la tabla 41 se dan las ecuaciones del momento flector y de la línea elástica para algunos casos de la flexión longitudinal y transversal simultánea de vigas de sección transversal constante.

Coefficientes  $\nu$  y  $\eta$  para determinar la carga crítica de barras comprimidas centralmente mediante la fórmula  $P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$

Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coefficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coefficiente de estabilidad $\eta$
1		1	9,8696
2		0,699	20,199
3		2	2,4674
4		1	9,8696
5		2	2,4674
6		0,5	39,4784

Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$		Coeficiente de estabilidad $\eta$
7		0,699		20,199
8		$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\eta$
9		$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\eta$

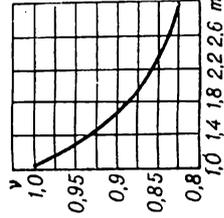


$$P_{crit} = (P_1 + P_2)_{crit}$$

$P_2/P_1$	$\eta$
0	9,8696
0,25	10,93
0,5	11,92
0,75	12,46
1	13,04
2	14,68

$P_2/P_1$	$\nu$
0	1
0,25	0,95
0,5	0,91
0,75	0,89
1	0,87
2	0,82

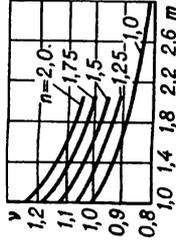
En el caso general cuando  $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$

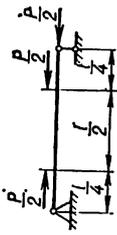
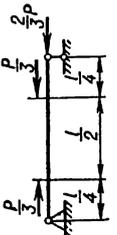
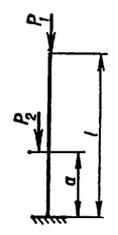


$$P_{crit} = (P_1 + P_2)_{crit}$$

$P_2/P_1$	$\nu$
0	1
0,25	0,95
0,5	0,91
0,75	0,89
1	0,87
2	0,82

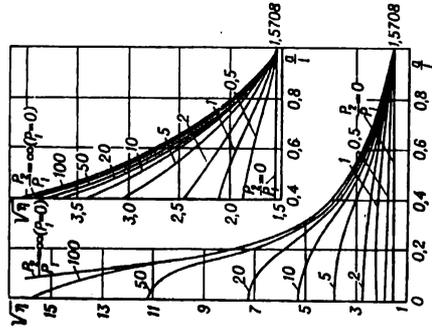
Cuando  $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$  y  $n = \frac{a}{b}$



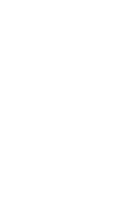
Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$																																																												
12		0,773	16,5																																																												
13		0,858	13,41																																																												
14	 <p><math>P_{crit} = (P_1 + P_2)_{crit}</math></p>	-	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\frac{a}{l}</math></th> <th>0</th> <th>0,1</th> <th>0,2</th> <th>0,5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2,467</td><td>2,714</td><td>2,961</td><td>3,701</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>2,467</td><td>2,714</td><td>2,960</td><td>3,698</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>2,467</td><td>2,710</td><td>2,953</td><td>3,679</td></tr> <tr><td>0,3</td><td>2,467</td><td>2,703</td><td>2,936</td><td>3,622</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>2,467</td><td>2,688</td><td>2,904</td><td>3,525</td></tr> <tr><td>0,5</td><td>2,467</td><td>2,665</td><td>2,856</td><td>3,384</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>2,467</td><td>2,635</td><td>2,793</td><td>3,211</td></tr> <tr><td>0,7</td><td>2,467</td><td>2,599</td><td>2,715</td><td>3,020</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>2,467</td><td>2,557</td><td>2,636</td><td>2,821</td></tr> <tr><td>0,9</td><td>2,467</td><td>2,513</td><td>2,551</td><td>2,641</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>2,467</td><td>2,467</td><td>2,467</td><td>2,467</td></tr> </tbody> </table>	$\frac{a}{l}$	0	0,1	0,2	0,5	0	2,467	2,714	2,961	3,701	0,1	2,467	2,714	2,960	3,698	0,2	2,467	2,710	2,953	3,679	0,3	2,467	2,703	2,936	3,622	0,4	2,467	2,688	2,904	3,525	0,5	2,467	2,665	2,856	3,384	0,6	2,467	2,635	2,793	3,211	0,7	2,467	2,599	2,715	3,020	0,8	2,467	2,557	2,636	2,821	0,9	2,467	2,513	2,551	2,641	1,0	2,467	2,467	2,467	2,467
$\frac{a}{l}$	0	0,1	0,2	0,5																																																											
0	2,467	2,714	2,961	3,701																																																											
0,1	2,467	2,714	2,960	3,698																																																											
0,2	2,467	2,710	2,953	3,679																																																											
0,3	2,467	2,703	2,936	3,622																																																											
0,4	2,467	2,688	2,904	3,525																																																											
0,5	2,467	2,665	2,856	3,384																																																											
0,6	2,467	2,635	2,793	3,211																																																											
0,7	2,467	2,599	2,715	3,020																																																											
0,8	2,467	2,557	2,636	2,821																																																											
0,9	2,467	2,513	2,551	2,641																																																											
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467																																																											

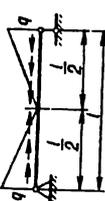
$\frac{a}{l}$	$\frac{P_2}{P_1}$				
	1	2	5	10	10
0	4,935	7,402	14,80	27,14	27,14
0,1	4,930	7,377	14,68	26,66	26,66
0,2	4,880	7,207	13,78	23,19	23,19
0,3	4,712	6,769	11,70	16,82	16,82
0,4	4,470	6,074	9,187	11,57	11,57
0,5	4,136	5,268	7,060	8,210	8,210
0,6	3,759	4,497	5,504	6,048	6,048
0,7	3,385	3,830	4,376	4,660	4,660
0,8	3,040	3,280	3,551	3,685	3,685
0,9	2,734	2,832	2,936	2,986	2,986
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

En el caso general



Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
15		3,952	0,632
16	 $P_{crit} = \left[ P_1 \left( \frac{a_1}{l} \right)^2 + P_2 \left( \frac{a_2}{l} \right)^2 + \dots + P_n \right]_{crit}$	2	$\frac{\pi^2}{4}$
17	 $P_{crit} = (q)_{crit}$	0,725	18,76
18	 $P_{crit} = (q)_{crit}$	0,434	52,5

19	 $P_{\text{crit}} = \frac{(q l)^2}{2}$	1,122	7,839
20	 $P_{\text{crit}} = \frac{(q l)^2}{12}$	0,723	18,9
21	 $P_{\text{crit}} = \frac{(q l)^2}{10}$	0,577	29,64
22	 $P_{\text{crit}} = \frac{(q l)^2}{20}$	0,366	73,65
23	 $P_{\text{crit}} = \left( \frac{q l}{2} \right)^2_{\text{crit}}$	0,560	31,47

Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
24	 $P_{\text{crit}} = \left( \frac{ql}{2} \right)_{\text{crit}}$	0,694	20,49
25	 $P_{\text{crit}} = \left( \frac{ql}{2} \right)_{\text{crit}}$	1,486	4,47
26	 $P_{\text{crit}} = \left( \frac{ql}{2} \right)_{\text{crit}}$	1,388	5,123
27	 $P_{\text{crit}} = \left( \frac{ql}{2} \right)_{\text{crit}}$	0,782	16,126

28



Para  $n = ql: \frac{\pi^2 EJ}{I^3}$

$n$	$\eta$
0	9,87
0,25	8,62
0,50	7,40
0,75	6,08
1,0	4,77
2,0	0,66
3,0	- 4,94
4,0	- 9,87
5,0	- 14,80

Cuando los valores de  $n$  son grandes el coeficiente  $\eta$  puede ser negativo, y para la estabilidad de equilibrio de la barra a ésta tiene que aplicarse la fuerza de tracción  $P$

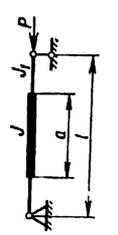
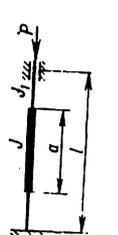
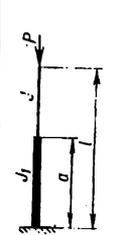
29



Para  $n = ql: \frac{\pi^2 EJ}{4I^3}$

$n$	$\eta$
0	2,47
0,25	2,28
0,50	2,08
0,75	1,91
1,0	1,72
2,0	0,96
3,0	0,15
4,0	- 0,69
5,0	- 1,56

Véase la observación al esquema 28

Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$					
			$a:l$					
			0,2	0,4	0,6	0,8	1	
30		-	$J_1: J$					
				0,153	0,27	0,598	2,26	$\pi^2$
			0,1	1,47	2,40	4,50	8,59	$\pi^2$
			0,2	2,80	4,22	6,69	9,33	$\pi^2$
			0,4	5,09	6,68	8,51	9,67	$\pi^2$
			0,6	6,98	8,19	9,24	9,78	$\pi^2$
			0,8	8,55	9,18	9,63	9,84	$\pi^2$
			1,0	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$
31		-	$J_1: J$					
				0,614	1,08	2,39	8,48	$4\pi^2$
			0,1	5,87	9,48	15,5	17,1	$4\pi^2$
			0,2	11,1	16,3	20,5	21,1	$4\pi^2$
			0,4	20,2	24,9	26,3	27,5	$4\pi^2$
			0,6	27,7	30,6	31,1	32,5	$4\pi^2$
			0,8	34,0	35,3	35,4	36,4	$4\pi^2$
			1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$
32		-	Aproximadamente					
			$2,467: \left[ \frac{l-a}{l} + \frac{l-a}{l} \cdot \frac{J}{J_1} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{J}{J_1} - 1 \right) \operatorname{sen} \frac{\pi a}{l} \right]$					
Algunos valores concretos de $\eta$ :								

$$\frac{J_1 - J}{J}$$

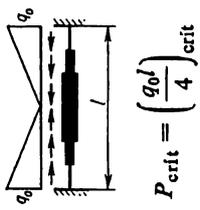
$a:l$	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,243	2,056	1,645	1,234	0,8225	0,411	0,2243	0,1175	0,0484	0,0247
0,1	2,467	2,285	2,126	1,761	1,367	0,944	0,4894	0,2714	0,1436	0,0595	0,0301
0,2	2,467	2,325	2,197	1,881	1,52	1,093	0,5919	0,3350	0,1793	0,0749	0,038
0,3	2,467	2,363	2,262	2,013	1,692	1,277	0,7293	0,4237	0,2302	0,0971	0,0494
0,4	2,467	2,396	2,327	2,141	1,879	1,499	0,9174	0,5498	0,3064	0,1309	0,067
0,5	2,467	2,423	2,379	2,256	1,756	1,178	1,178	0,7462	0,4268	0,1860	0,0958
0,6	2,467	2,444	2,420	2,350	2,235	2,025	1,531	1,052	0,633	0,2848	0,1482
0,7	2,467	2,457	2,446	2,415	2,356	2,256	1,950	1,530	1,018	0,488	0,2588
0,8	2,467	2,464	2,461	2,453	2,440	2,402	2,297	2,106	1,730	0,9991	0,5592
0,9	2,467	2,467	2,466	2,465	2,465	2,459	2,446	2,424	2,374	2,189	1,746
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

$P_{crit} = \eta \frac{EJ_1}{l^2}$  . Aproximadamente  $\eta = 2,467 \cdot \left[ \left( 1 - \frac{J_2 - J_1}{J_1} \cdot \frac{(l - a_1)^2}{l^2} \right) \left( 1 - \frac{J_3 - J_2}{J_2} \times \right. \right.$   
 $\left. \left. \left( \frac{l - a_2}{l} \right)^2 \right) \dots \left( 1 - \frac{J_n - J_{n-1}}{J_{n-1}} \cdot \frac{(l - a_{n-1})^2}{l^2} \right) \right]$   
 $\times$

Número de tramos con diferentes momentos de inercia

$\frac{J_1}{J}$	2	3	4	5	10
0,2	5,2	6,32	6,48	7,32	7,4
0,4	9,88	10,9	11,1	11,2	11,2
0,6	14,0	14,6	14,7	14,76	14,8
0,8	17,4	17,8	17,8	17,9	18,0
1,0	20,5	20,5	20,5	20,5	20,5
••					

$P_{crit} = \left( \frac{q_0 l}{4} \right)_{crit}$

Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$				
			$\frac{J_1}{J}$	Número de tramos con diferentes momentos de inercia			
35	 $P_{crit} = \left( \frac{q_0 l^4}{4} \right)_{crit}$	—	2	3	4		
			0,2	18,1	21,8	22,8	
			0,4	31,2	34,2	34,3	
			0,6	41,0	42,4	42,4	
			0,8	49,4	49,5	49,5	
		1,0	54,8	54,8	54,8		
		*					
		**					
El momento de inercia de la sección cambia a lo largo del eje de acuerdo con la ley							
$J(z) = J_0 (a + bz)^n$							
36		—	$n$				
			1	2	3	4	
			0	3,67	0,25	—	—
			0,1	4,67	3,59	3,24	3,12
			0,2	5,41	4,73	4,52	4,41
0,4	6,78	6,39	6,28	6,24			
0,6	7,78	7,70	7,64	7,64			
0,8	8,85	8,83	8,83	8,83			
1,0	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$			

$n = 1$ , la barra maciza de sección transversal rectangular de altura constante; el ancho de la sección cambia por la ley lineal



Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$						
			$\frac{J_1^*}{J}$	$a: l$					$n$
				0	0,2	0,4	0,6	0,8	
		El momento de inercia de la sección de los tramos extremos cambia a lo largo del eje según la ley $J(z) = J_0(a + bz)^n$							
			0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,8	1
			1,0	1,0	1,56	2,78	6,25	9,59	2
			0,01	5,87	7,11	8,4	9,4	9,8	1
				3,45	4,73	6,58	8,61	9,71	2
				2,55	3,65	5,42	7,99	9,63	3
				2,15	3,13	4,84	7,53	9,56	4
			0,1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
				5,4	6,67	8,08	9,25	9,79	2
				5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	3
				4,81	6,11	7,68	9,1	9,77	4
			0,2	7,01	7,99	8,9	9,73	9,82	1
				6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	2
				6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	3
				6,02	7,2	8,42	9,38	9,8	4
			0,4	7,87	8,59	9,19	9,7	9,85	1
				7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	2
				7,52	8,38	9,1	9,62	9,84	3
				7,48	8,33	9,1	9,62	9,84	4



0,6	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	1
	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	2
	8,5	9,02	9,46	9,74	9,85	3
	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	4
0,8	9,27	9,53	9,69	9,82	9,86	1
	9,24	9,5	9,69	9,82	9,86	2
	9,23	9,5	9,69	9,81	9,86	3
	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	4

El momento de inercia de la sección de los tramos extremos cambia a lo largo del eje según la ley  $J(z) = J_0(a + bz)^n$

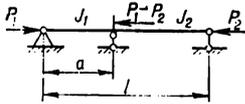
$\frac{J_1}{J}$	$a:l$				$n$	
	0	0,2	0,4	0,6		0,8
0,2	20,36	22,36	23,42	25,55	29,0	1
	18,94	22,25	22,91	24,29	27,67	2
	18,48	20,88	22,64	23,96	27,24	3
	18,23	20,71	22,49	23,8	27,03	4
0,4	26,16	27,8	28,96	30,2	33,08	1
	25,54	27,35	28,52	29,69	32,59	2
	25,32	27,2	28,4	29,52	32,44	3
	25,23	27,13	28,33	29,46	32,35	4
0,6	31,04	32,2	32,92	33,8	35,8	1
	30,79	32,02	32,77	33,63	35,64	2
	30,72	31,96	32,72	33,56	35,6	3
	30,68	31,94	32,69	33,54	35,56	4
0,8	35,4	36,0	36,36	36,84	37,84	1
	35,35	35,97	36,34	36,8	37,81	2
	35,33	35,96	36,32	36,8	37,8	3
	35,32	35,96	36,32	36,78	37,8	4



Núm. de orden	Esquema de la barra y de su solificación	Coefficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coefficiente de estabilidad $\eta$																																						
41	 $P_{crit} = (q_0 l)_{crit}$	-	El momento de inercia de la sección cambia a lo largo del eje según la ley $J(z) = J \left( \frac{l-z}{l} \right)^n$																																						
			<table border="1"> <tr> <td><math>n</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td><math>\eta</math></td> <td>7,839</td> <td>5,78</td> <td>3,67</td> </tr> </table>	$n$	0	1	2	$\eta$	7,839	5,78	3,67																														
$n$	0	1	2																																						
$\eta$	7,839	5,78	3,67																																						
42	 $q = q_0 \frac{l-z}{2}$ $P_{crit} = \left( \frac{q_0 l}{2} \right)_{crit}$	-	El momento de inercia de la sección cambia a lo largo del eje según la ley $J(z) = J \left( \frac{l-z}{l} \right)^n$																																						
			<table border="1"> <tr> <td><math>n</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td><math>\eta</math></td> <td>16,1</td> <td>13</td> <td>9,87</td> <td>6,59</td> </tr> </table>	$n$	0	1	2	3	$\eta$	16,1	13	9,87	6,59																												
$n$	0	1	2	3																																					
$\eta$	16,1	13	9,87	6,59																																					
43	 $q = q_0 \left( \frac{l-z}{l} \right)^m$ $P_{crit} = \left( \frac{q_0 l}{m+1} \right)_{crit}$	-	El momento de inercia de la sección cambia a lo largo del eje según la ley $J(z) = J \left( \frac{l-z}{l} \right)^n$																																						
			<table border="1"> <tr> <td rowspan="2"><math>n</math></td> <td colspan="5" style="text-align:center"><math>m</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>27,3</td> <td>41,3</td> <td>—</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>23,1</td> <td>36,1</td> <td>52,1</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>18,9</td> <td>30,9</td> <td>45,8</td> <td>63,6</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>14,7</td> <td>25,7</td> <td>39,5</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>10,2</td> <td>20,2</td> <td>33,0</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> </table>	$n$	$m$					2	3	4	5		0	27,3	41,3	—	—	—	1	23,1	36,1	52,1	—	—	2	18,9	30,9	45,8	63,6	—	3	14,7	25,7	39,5	—	—	4	10,2	20,2
$n$	$m$																																								
	2	3	4	5																																					
0	27,3	41,3	—	—	—																																				
1	23,1	36,1	52,1	—	—																																				
2	18,9	30,9	45,8	63,6	—																																				
3	14,7	25,7	39,5	—	—																																				
4	10,2	20,2	33,0	—	—																																				

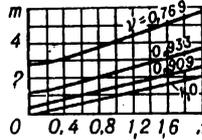
Núm. de orden	Esquema de la barra y de su sollicitación	Coefficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coefficiente de estabilidad $\eta$
---------------	---	--	------------------------------------

44



Quando  $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$  y  $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$$



Quando  $P_1 = P_2 = P$  y  $J_1 = J_2 = J$

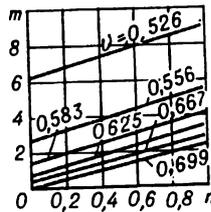
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\frac{a}{l}$	$\eta$
0	0,699	0	20,19
0,1	0,652	0,1	23,23
0,2	0,604	0,2	27,06
0,3	0,558	0,3	31,75
0,4	0,518	0,4	36,8
0,5	0,500	0,5	39,48
0,6	0,518	0,6	36,8
0,7	0,558	0,7	31,75
0,8	0,604	0,8	27,04
0,9	0,652	0,9	23,23
1,0	0,699	1,0	20,19

45

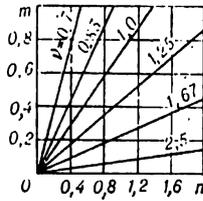
Quando  $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$  y  $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$$



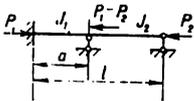
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coefficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coefficiente de estabilidad $\eta$
---	--	------------------------------------

45



Quando  $P_1 = P_2 = P$  y  $J_1 = J_2 = J$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

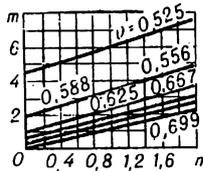
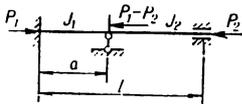


$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\frac{a}{l}$	$\eta$
0	0,699	0	20,19
0,1	0,646	0,1	23,63
0,2	0,593	0,2	28,09
0,3	0,539	0,3	33,96
0,4	0,487	0,4	41,68
0,5	0,439	0,5	51,12
0,6	0,41	0,6	58,84
0,7	0,412	0,7	58,92
0,8	0,436	0,8	51,97
0,9	0,467	0,9	45,27
1,0	0,500	1,0	39,48

46

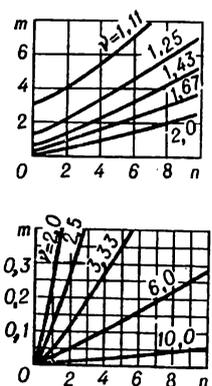
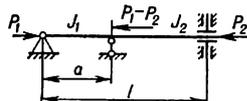
Quando  $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$  y  $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$

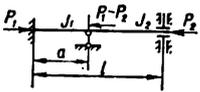
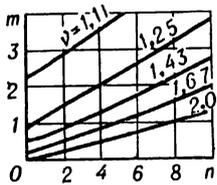
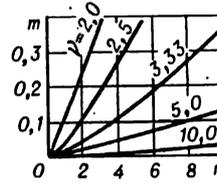
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$$

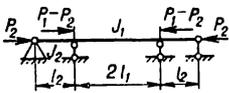
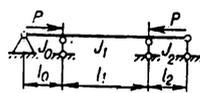
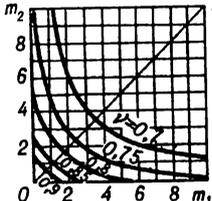
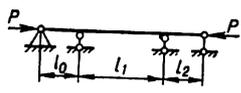
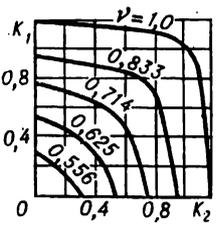
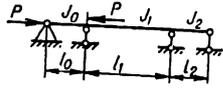
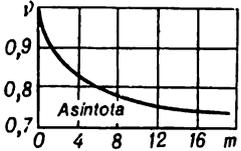


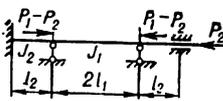
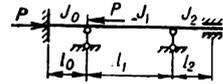
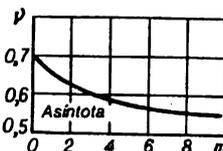
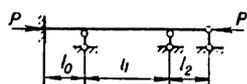
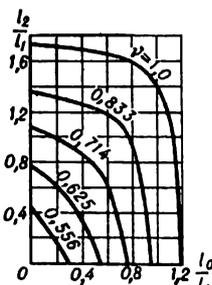
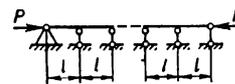
Quando  $P_1 = P_2 = P$  y  $J_1 = J_2 = J$

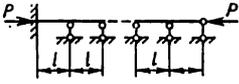
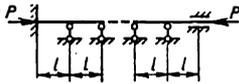
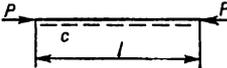
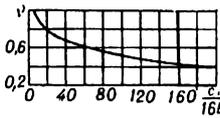
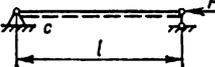
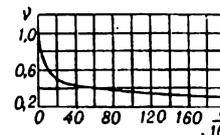
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

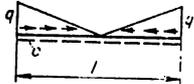
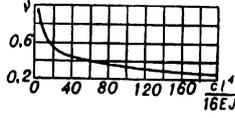
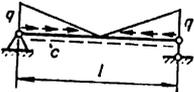
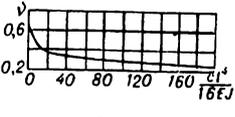
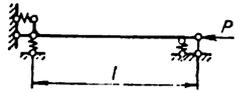
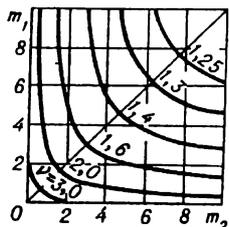
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$		Coeficiente de estabilidad $\eta$	
46	$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\frac{a}{l}$	$\eta$
	0	0,5	0	39,48
	0,1	0,463	0,1	46,13
	0,2	0,426	0,2	54,45
	0,3	0,391	0,3	64,56
	0,4	0,362	0,4	75,22
	0,5	0,35	0,5	80,76
	0,6	0,362	0,6	75,22
	0,7	0,391	0,7	64,56
	0,8	0,426	0,8	54,45
	0,9	0,463	0,9	46,13
	1,0	0,5	1,0	39,48
47	Cuando $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$ y $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$ $P_{crit} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(va)^2}$			
				
	Cuando $P_1 = P_2 = P$ y $J_1 = J_2 = J$ $P_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{(vl)^2} = \eta \frac{E J}{l^2}$			
	$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\frac{a}{l}$	$\eta$
	0	1,0	0	9,87
	0,1	0,933	0,1	11,83
0,2	0,868	0,2	13,11	
0,3	0,804	0,3	15,26	

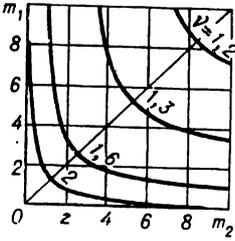
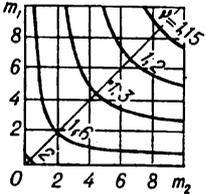
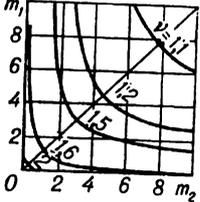
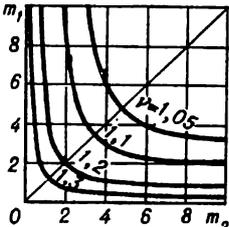
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$		Coeficiente de estabilidad $\eta$		
	$\frac{a}{l}$	$\nu$	$\frac{a}{l}$	$\eta$	
47	0,4	0,746	0,4	17,72	
	0,5	0,699	0,5	20,19	
	0,6	0,672	0,6	21,88	
	0,7	0,668	0,7	22,14	
	0,8	0,679	0,8	21,4	
	0,9	0,693	0,9	20,55	
	1,0	0,699	1,0	20,19	
	<p>Cuando <math>m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}</math> y <math>n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}</math></p> $P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$				
	48				
					
					
<p>Cuando <math>P_1 = P_2 = P</math> y <math>J_1 = J_2 = J</math></p> $P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$					
$\frac{a}{l}$		$\nu$	$\frac{a}{l}$	$\eta$	
0		1,0	0	9,87	
0,1		0,925	0,1	11,53	
0,2		0,85	0,2	13,65	
0,3		0,776	0,3	16,37	
0,4		0,704	0,4	19,9	
0,5	0,636	0,5	24,42		
0,6	0,575	0,6	29,82		
0,7	0,53	0,7	35,1		
0,8	0,507	0,8	38,41		
0,9	0,501	0,9	39,4		
1,0	0,5	1,0	39,48		

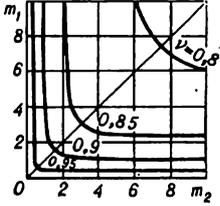
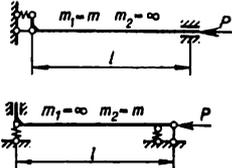
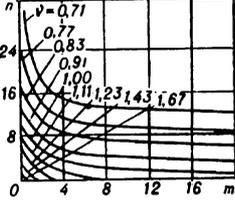
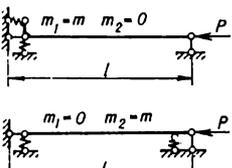
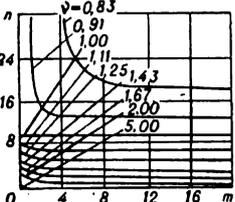
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>49</p> 	<p>Quando <math>m = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}</math></p> <p>y <math>n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}</math></p> <p><math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_1)^2}</math></p> <p>Los valores de <math>\nu</math> se hallan de los diagramas construidos para el esquema 47</p>	
<p>50</p> 	<p>Quando <math>m_1 = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}</math> y <math>m_2 = \frac{3J_2 l_1}{J_1 l_2}</math></p> <p><math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_1)^2}</math></p> 	-
<p>51</p> 	<p>Quando <math>k_1 = \frac{l_0}{l_1}</math> y <math>k_2 = \frac{l_2}{l_1}</math> <math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l_1)^2}</math></p> 	-
<p>52</p> 	<p>Quando <math>m = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}</math> <math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_0)^2}</math></p> 	-

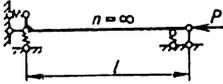
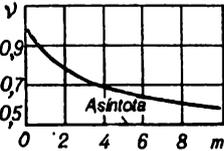
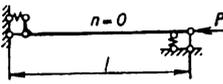
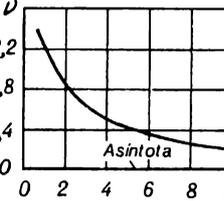
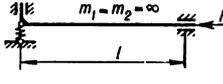
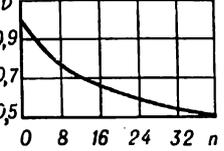
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>53</p> 	<p>Quando <math>m = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}</math></p> <p>y <math>n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}</math></p> <p><math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_1)^2}</math></p> <p>Los valores de <math>\nu</math> se hallan de los diagramas construidos para el esquema 48</p>	<p>—</p>
<p>54</p> 	<p>Quando <math>m = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}</math></p> <p><math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_0)^2}</math></p> 	<p>—</p>
<p>55</p> 	<p><math>P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l_1)^2}</math></p> 	<p>—</p>
<p>56</p> 	<p>1</p>	<p>9,8696</p>

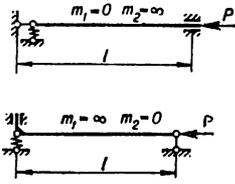
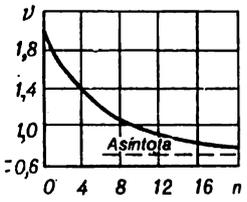
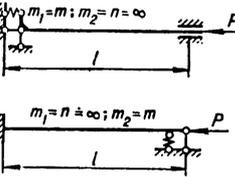
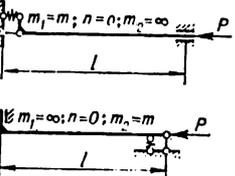
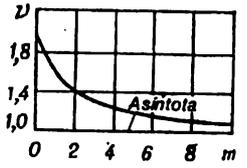
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$	
<p>57</p> 	$n$ es el número de luces		
	$n$	$\nu$	$\eta$
	1	0,699	20,2
	2	0,879	12,77
	3	0,939	11,19
	4	0,964	10,62
	5	0,977	10,34
	6	0,983	10,21
	7	0,988	10,1
	8	0,99	10,07
	9	0,992	10,029
	10	0,994	9,9895
<p>58</p> 	$n$ es el número de luces		
	$n$	$\nu$	$\eta$
	1	0,5	39,48
	2	0,699	20,2
	3	0,814	14,9
	4	0,879	12,77
	5	0,917	11,74
	6	0,939	11,19
	7	0,954	10,84
	8	0,964	10,62
	9	0,971	10,47
	10	0,977	10,34
<p>59</p> 	*****		—
			
<p>60</p> 	*****		—
			

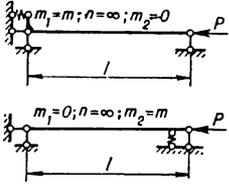
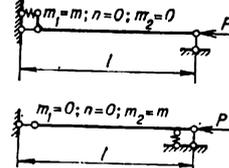
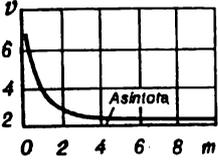
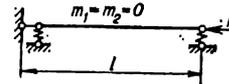
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>61</p>  $P_{crit} = \left( \frac{ql}{4} \right)_{crit}$	 <p style="text-align: center;">.....</p>	—
<p>62</p>  $P_{crit} = \left( \frac{ql}{4} \right)_{crit}$	 <p style="text-align: center;">.....</p>	—
<p>63</p> 	$m_1 = \frac{s_1 l}{EJ};$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ};$ $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p style="text-align: center;"><math>0,5 &lt; \nu &lt; \infty</math></p> <p>Algunos datos concretos cuando</p> $n = 0$ 	$0 < \eta < 39,48$

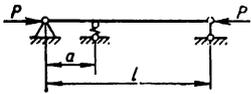
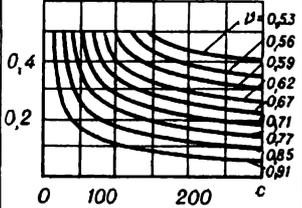
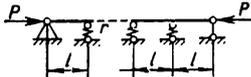
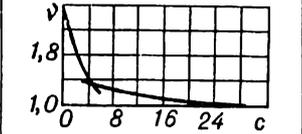
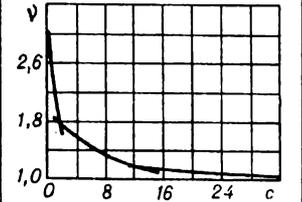
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
63	<p style="text-align: center;"><math>n = 0,5</math></p> 	
	<p style="text-align: center;"><math>n = 1</math></p> 	
	<p style="text-align: center;"><math>n = 2</math></p> 	
	<p style="text-align: center;"><math>n = 4</math></p> 	

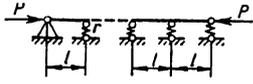
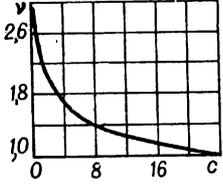
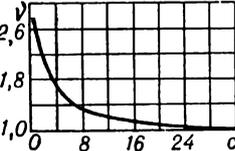
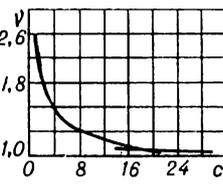
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>63</p>	<p><math>n = 10</math></p> 	
<p>64</p> 	<p><math>0,5 &lt; \nu &lt; 2</math></p> <p>Algunos datos concretos</p>  <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}, m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math>              y <math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math>              ... , ...         </p>	<p><math>2,4424 &lt; \eta &lt; 39,48</math></p>
<p>65</p> 	<p><math>0,7 \leq \nu &lt; \infty</math></p> <p>Algunos datos concretos</p>  <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}, m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math>              y <math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math>              ... , ...         </p>	<p><math>0 &lt; \eta &lt; 20,14</math></p>

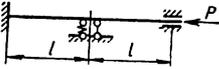
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>66</p>  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p><math>0,5 &lt; \nu &lt; 1</math></p> <p>Los valores concretos de <math>\nu</math> pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 50.</p> <p>Si <math>m_1 = m_2 = m = \frac{sl}{EJ}</math>, entonces</p> 	<p><math>9,8696 &lt; \eta &lt; 39,48</math></p>
<p>67</p>  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p><math>1 &lt; \nu &lt; \infty</math></p> <p>Los valores concretos pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 63 (caso de <math>n = 0</math>)</p> <p>Si <math>m_1 = m_2 = m = \frac{sl}{EJ}</math>, entonces</p> 	<p><math>0 &lt; \eta &lt; 9,8696</math></p>
<p>68</p>  $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$	<p><math>0,5 &lt; \nu &lt; 1</math></p> <p>Algunos datos concretos</p>  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}$ <p>***, ****</p>	<p><math>9,8696 &lt; \eta &lt; 39,48</math></p>

Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>69</p>  <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}</math> ;  <math>m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math> </p>	<p><math>0,7 &lt; \nu &lt; 2</math></p> <p>Algunos datos concretos</p>  <p> <math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math>                  ... , ...             </p>	<p><math>2,4424 &lt; \eta &lt; 20,14</math></p>
<p>70</p>  <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}</math> ;  <math>m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math> ;                  ....             </p>	<p><math>0,5 &lt; \nu &lt; 0,7</math></p> <p>Los valores concretos del <math>\nu</math> pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 54</p> <p> <math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math>                  ...             </p>	<p><math>20,14 &lt; \eta &lt; 39,48</math></p>
<p>71</p>  <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}</math> ;  <math>m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math> ;  <math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math>                  ... , ...             </p>	<p><math>1 &lt; \nu &lt; 2</math></p> <p>Algunos datos concretos</p> 	<p><math>2,4424 &lt; \eta &lt; 9,8696</math></p>

Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>72</p>  <p> <math>m_1 = m; n = \infty; m_2 = 0</math>  <math>m_1 = 0; n = \infty; m_2 = m</math> </p>	<p><math>0,7 &lt; \nu &lt; 1</math></p> <p>Los valores concretos de <math>\nu</math> pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 52 considerando que <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}</math> ;</p> <p><math>m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math> ;</p> <p><math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math></p> <p>***, ****</p>	<p><math>9,8696 &lt; \eta &lt; 20,14</math></p>
<p>73</p>  <p> <math>m_1 = m; n = 0; m_2 = 0</math>  <math>m_1 = 0; n = 0; m_2 = m</math> </p> <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}</math> ;  <math>m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math> ;  <math>n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2) EJ}</math> </p> <p>***, ****</p>	<p><math>2 &lt; \nu &lt; \infty</math></p> <p>Algunos datos concretos</p> 	<p><math>0 &lt; \eta &lt; 2,4424</math></p>
<p>74</p>  <p><math>m_1 = m_2 = 0</math></p> <p> <math>m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}</math> ;  <math>m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}</math> </p> <p>****</p>	<p>1</p> <p>Es necesario que se haga la comprobación de la estabilidad según la fórmula</p> <p><math>P_{crit} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} l</math></p> <p>***</p> <p>Por el valor calculado se toma el valor mínimo de <math>P_{crit}</math></p>	<p>9,8696</p>

Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>75</p> 	 $f = \frac{a}{l} ; c = \frac{rI^3}{EJ}$ <p>(<math>r</math> es el coeficiente de rigidez del apoyo trasladado elásticamente)</p>	<p>—</p>
<p>76</p>  <p><math>r</math> es el coeficiente de rigidez del apoyo trasladado elásticamente</p>	<p>Cuando el número de los vanos <math>n = 2</math>, los valores de <math>\nu</math> pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 69.</p> <p>Cuando <math>n = 3</math></p>  <p>Cuando <math>n = 4</math></p>  $c = \frac{rI^3}{EJ}$	<p>—</p>

Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>77</p>  <p><math>r</math> es el coeficiente de rigidez del apoyo trasladado elásticamente</p>	<p>Cuando el número de los vanos</p> <p><math>n = 2</math></p>  <p><math>n = 3</math></p>  <p><math>n = 4</math></p>  $c = \frac{rl^3}{EJ}$	<p>—</p>
<p>78</p> 	<p>Los valores de <math>\nu</math> pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 52, siendo <math>m = \frac{sl}{2EJ}</math> (<math>s</math> es el coeficiente de rigidez del apoyo giratorio elástico)</p>	<p>—</p>

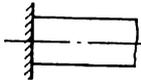
Esquema de la barra y de su sollicitación	Coeficiente de reducción de la longitud $\nu$	Coeficiente de estabilidad $\eta$
<p>79</p> 	<p>Los valores de <math>\nu</math> pueden tomarse del diagrama construido para el esquema 54, siendo <math>m = \frac{sl}{2EJ}</math> (<math>s</math> es el coeficiente de rigidez del apoyo giratorio elástico)</p>	<p>—</p>

- \*  $J$  y  $J_1$  son los momentos de inercia máximo y mínimo de la sección transversal, respectivamente.
- \*\* Se supone que hay varios tramos de igual longitud, siendo iguales las diferencias entre los momentos de inercia de los tramos vecinos.
- \*\*\*  $r_1$  y  $r_2$  son los coeficientes de rigidez de los apoyos trasladados elásticamente izquierdo y derecho.
- \*\*\*\*  $s_1$  y  $s_2$  son los coeficientes de rigidez de los apoyos giratorios elásticos izquierdo y derecho.
- \*\*\*\*\*  $c$  es el coeficiente de rigidez de la base elástica (coeficiente de reacción del suelo) igual a la relación de la reacción de la base a su asentamiento.

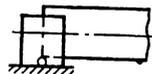
Tabla 39

**Cargas críticas para la banda y algunas vigas de doble T\***

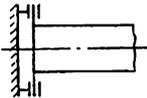
Tipos de los apoyos:



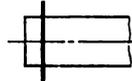
Empotramiento en los planos horizontal y vertical



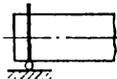
Empotramiento en el plano horizontal, articulación en el vertical



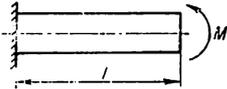
Articulación en el plano horizontal, empotramiento en el vertical



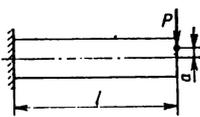
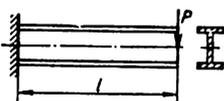
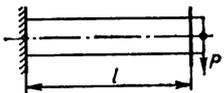
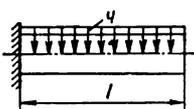
Articulación en el plano horizontal, guías en el vertical

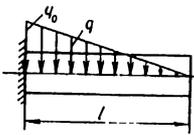
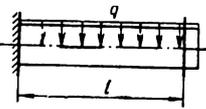
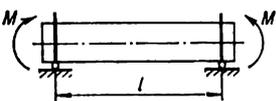
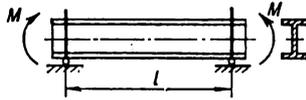
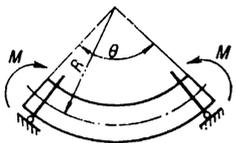
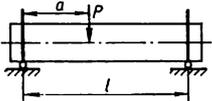


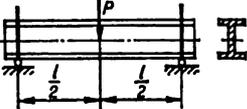
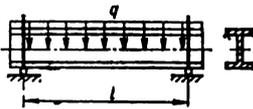
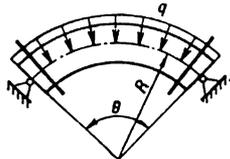
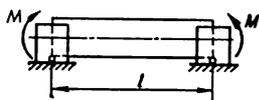
Articulaciones en los planos horizontal y vertical

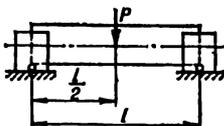
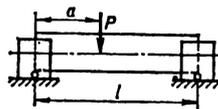
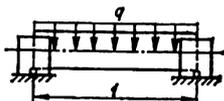
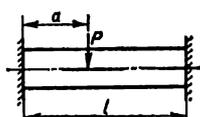
Esquema	Carga crítica
	$M_{crit} = \frac{\pi S}{2l}$ <p>El plano de acción del par conserva, al perder la estabilidad, la orientación invariable en el sistema de ejes móviles enlazados rígidamente con la sección de tope en traslación</p>

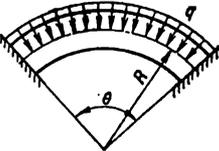
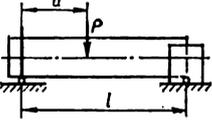
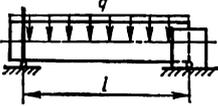
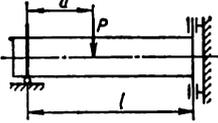
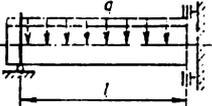
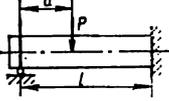
\*  $S = \sqrt{EJ GJ_1}$ , siendo  $EJ$  la rigidez mínima en la flexión;  $GJ$ , la rigidez en la torsión.

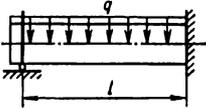
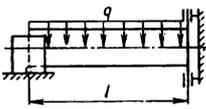
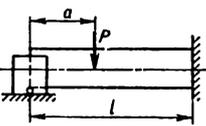
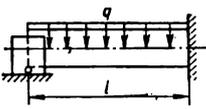
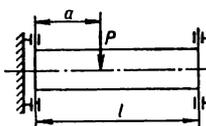
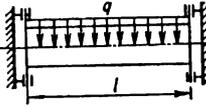
Esquema	Carga crítica																				
	$P_{\text{crit}} = \frac{4,013}{l^2} \left( S - \frac{a}{l} EJ \right)$ <p>cuando <math>a = 0</math></p> $P_{\text{crit}} = \frac{4,013S}{l^2}$ <p>Si la altura de la banda en voladizo varía según la ley <math>h = h_0 \sqrt[n]{1 - \frac{z}{l}}</math>, siendo <math>h_0</math> la altura de la banda cerca de la base y <math>z</math>, la coordenada corriente a lo largo de la banda, entonces</p> <table border="1" data-bbox="482 571 987 638"> <tr> <td><math>P_{\text{crit}} = \frac{mS}{l^2}</math></td> <td><math>n</math></td> <td>1</td> <td>1,333</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td><math>m</math></td> <td>2,4</td> <td>2,81</td> <td>3,21</td> <td>3,61</td> </tr> </table>	$P_{\text{crit}} = \frac{mS}{l^2}$	$n$	1	1,333	2	4		$m$	2,4	2,81	3,21	3,61								
$P_{\text{crit}} = \frac{mS}{l^2}$	$n$	1	1,333	2	4																
	$m$	2,4	2,81	3,21	3,61																
	$P_{\text{crit}} = \frac{kS}{l^2}$ <p>El coeficiente <math>k</math> se toma de la tabla.</p> <p>Además, <math>\chi = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}</math>, siendo <math>D</math> la rigidez de una de las alas del doble T durante la flexión en su plano</p> <table border="1" data-bbox="482 856 987 924"> <tr> <td><math>\chi</math></td> <td>0,1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>10</td> <td>24</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>44,3</td> <td>15,7</td> <td>12,2</td> <td>10,7</td> <td>9,76</td> <td>8,69</td> <td>7,58</td> <td>6,19</td> <td>5,64</td> </tr> </table> <p>Cuando <math>\chi &gt; 40</math> <math>k = \frac{4,013}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)^2}</math></p>	$\chi$	0,1	1	2	3	4	6	10	24	40	$k$	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	8,69	7,58	6,19	5,64
$\chi$	0,1	1	2	3	4	6	10	24	40												
$k$	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	8,69	7,58	6,19	5,64												
	$P_{\text{crit}} = \frac{5,56S}{l^2}$																				
	$(ql)_{\text{crit}} = \frac{12,85S}{l^2}$ <p>Si la altura de la banda en voladizo varía según la ley <math>h = h_0 \sqrt[n]{1 - \frac{z}{l}}</math>, siendo <math>h_0</math> la altura de la banda cerca de la base y <math>z</math> la coordenada corriente a lo largo de la banda, entonces <math>(ql)_{\text{crit}} = \frac{mS}{l^2}</math></p> <table border="1" data-bbox="558 1411 946 1478"> <tr> <td><math>n</math></td> <td>1</td> <td>1,333</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td><math>m</math></td> <td>9,6</td> <td>10,4</td> <td>11,2</td> <td>12,8</td> </tr> </table>	$n$	1	1,333	2	4	$m$	9,6	10,4	11,2	12,8										
$n$	1	1,333	2	4																	
$m$	9,6	10,4	11,2	12,8																	

Esquema	Carga crítica																								
	$\left(\frac{q_0 l}{2}\right)_{\text{crit}} = \frac{26,5S}{l^2}$ <p><math>q_0</math> en el empotramiento</p>																								
	$(ql)_{\text{crit}} = \frac{15,95S}{l^2}$																								
	$M_{\text{crit}} = \frac{\pi S}{l}$																								
	$M_{\text{crit}} = \frac{\pi S}{l} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{Dh^2}{2GJ_t}}$ <p>siendo <math>h</math> la altura de la viga y <math>D</math>, la rigidez de una de las alas del doble T durante la flexión en su plano</p>																								
	$M_{\text{crit}} = \frac{EJ + GJ_t}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{EJ + GJ_t}{2R}\right)^2 + \frac{S^2}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\theta^2} - 1\right)}$ <p>El signo inferior determina el valor crítico del momento dirigido contrariamente al mostrado en el esquema</p>																								
	$P_{\text{crit}} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="511 1176 981 1318"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,05</td> <td>0,1</td> <td>0,15</td> <td>0,2</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>111,6</td> <td>56,01</td> <td>37,88</td> <td>29,11</td> <td>24,1</td> </tr> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,3</td> <td>0,35</td> <td>0,4</td> <td>0,45</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>21,01</td> <td>19,04</td> <td>17,82</td> <td>17,15</td> <td>16,94</td> </tr> </table>	$a : l$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	$k$	111,6	56,01	37,88	29,11	24,1	$a : l$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	$k$	21,01	19,04	17,82	17,15	16,94
$a : l$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25																				
$k$	111,6	56,01	37,88	29,11	24,1																				
$a : l$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5																				
$k$	21,01	19,04	17,82	17,15	16,94																				
	$P_{\text{crit}} = \frac{16,93}{l^2} \left( S - 3,48 \frac{a}{l} EJ \right)$																								

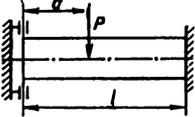
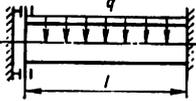
Esquema	Carga crítica																		
	$P_{\text{crit}} = \frac{kS}{l^2}$ <p>Cuando <math>\chi = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}</math>, siendo <math>h</math> la altura de la viga y <math>D</math>, la rigidez de una de las alas del doble T durante la flexión en su plano, los valores de <math>k</math> serán</p> <table border="1" data-bbox="499 470 999 537"> <tr> <td><math>\chi</math></td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>160</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>86,4</td> <td>31,9</td> <td>25,6</td> <td>21,8</td> <td>19,6</td> <td>18,3</td> <td>17,5</td> <td>17,2</td> </tr> </table>	$\chi$	0,4	4	8	16	32	64	160	400	$k$	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,2
$\chi$	0,4	4	8	16	32	64	160	400											
$k$	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,2											
	$(ql)_{\text{crit}} = \frac{28,31S}{l^2}$																		
	$(ql)_{\text{crit}} = \frac{kS}{l^2}$ <p>cuando <math>\chi = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}</math>, siendo <math>h</math> la altura de la viga y <math>D</math>, la rigidez de una de las alas del doble T durante la flexión en su plano, los valores de <math>k</math> serán</p> <table border="1" data-bbox="499 932 999 999"> <tr> <td><math>\chi</math></td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>128</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>143</td> <td>53</td> <td>42,6</td> <td>36,3</td> <td>32,6</td> <td>30,5</td> <td>29,4</td> <td>28,6</td> </tr> </table>	$\chi$	0,4	4	8	16	32	64	128	400	$k$	143	53	42,6	36,3	32,6	30,5	29,4	28,6
$\chi$	0,4	4	8	16	32	64	128	400											
$k$	143	53	42,6	36,3	32,6	30,5	29,4	28,6											
	<p>Si durante el volqueo la carga permanece paralela a la dirección inicial, entonces</p> $(qR)_{\text{crit}} = \frac{EJ}{R^2} \cdot \frac{(\pi^2 - \theta^2)^2}{\theta^2 \left( \pi^2 + \theta^2 \frac{EJ}{GJ_t} \right)}$ <p>Si durante el volqueo la carga permanece dirigida hacia el centro inicial de curvatura, entonces</p> $(qR)_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EJ}{R^2} \cdot \frac{\pi^2 - \theta^2}{\theta^2 \left( \pi^2 + \theta^2 \frac{EJ}{GJ_t} \right)}$																		
	$M_{\text{crit}} = \frac{2\pi S}{l}$																		

Esquema	Carga crítica																		
	$P_{crit} = \frac{44,5S}{l^2}$																		
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <p>Quando <math>\chi = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}</math>, siendo <math>h</math> la altura de la viga y <math>D</math>, la rigidez de una de las alas del doble T flexionado en su plano, los valores de <math>k</math> serán</p> <table border="1" data-bbox="499 630 1011 697"> <tr> <td><math>\chi</math></td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>32</td> <td>64</td> <td>128</td> <td>320</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>268</td> <td>88,8</td> <td>65,5</td> <td>50,2</td> <td>40,2</td> <td>34,1</td> <td>30,7</td> <td>28,4</td> </tr> </table>	$\chi$	0,4	4	8	16	32	64	128	320	$k$	268	88,8	65,5	50,2	40,2	34,1	30,7	28,4
$\chi$	0,4	4	8	16	32	64	128	320											
$k$	268	88,8	65,5	50,2	40,2	34,1	30,7	28,4											
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="499 798 987 865"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>117</td> <td>53,2</td> <td>35,2</td> <td>28,5</td> <td>26,7</td> </tr> </table>	$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	$k$	117	53,2	35,2	28,5	26,7						
$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5														
$k$	117	53,2	35,2	28,5	26,7														
	$(ql)_{crit} = \frac{48,6S}{l^2}$																		
	$(ql)_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <p>Quando <math>\chi = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}</math>, siendo <math>h</math> la altura de la viga y <math>D</math>, la rigidez de una de las alas del doble T flexionado en su plano, los valores de <math>k</math> serán</p> <table border="1" data-bbox="499 1234 1011 1302"> <tr> <td><math>\chi</math></td> <td>0,4</td> <td>4</td> <td>8</td> <td>16</td> <td>32</td> <td>96</td> <td>128</td> <td>400</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>488</td> <td>161</td> <td>119</td> <td>91,3</td> <td>73,0</td> <td>58,0</td> <td>55,8</td> <td>51,2</td> </tr> </table>	$\chi$	0,4	4	8	16	32	96	128	400	$k$	488	161	119	91,3	73,0	58,0	55,8	51,2
$\chi$	0,4	4	8	16	32	96	128	400											
$k$	488	161	119	91,3	73,0	58,0	55,8	51,2											
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="517 1419 976 1486"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>608</td> <td>155</td> <td>80,9</td> <td>58,6</td> <td>53,0</td> </tr> </table>	$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	$k$	608	155	80,9	58,6	53,0						
$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5														
$k$	608	155	80,9	58,6	53,0														

Esquema	Carga crítica																				
	$(ql)_{crit} = \frac{129,1S}{l^2}$																				
	$(qR)_{crit} = \frac{mEJ}{R^2}$ <p>La carga queda paralela a su dirección inicial</p> <table border="1" data-bbox="499 510 1004 577"> <tr> <td><math>\theta</math></td> <td><math>\pi : 4</math></td> <td><math>\pi : 2</math></td> <td><math>\pi</math></td> <td><math>1,063\pi</math></td> <td><math>1,1\pi</math></td> <td><math>1,24\pi</math></td> </tr> <tr> <td><math>m</math></td> <td>60,1</td> <td>12,6</td> <td>1,85</td> <td>1,54</td> <td>1,40</td> <td>1,00</td> </tr> </table>	$\theta$	$\pi : 4$	$\pi : 2$	$\pi$	$1,063\pi$	$1,1\pi$	$1,24\pi$	$m$	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00						
$\theta$	$\pi : 4$	$\pi : 2$	$\pi$	$1,063\pi$	$1,1\pi$	$1,24\pi$															
$m$	60,1	12,6	1,85	1,54	1,40	1,00															
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="491 695 1004 762"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>65,8</td> <td>34,7</td> <td>25,8</td> <td>22,8</td> <td>22,9</td> <td>25,7</td> <td>32,9</td> <td>50,7</td> <td>111</td> </tr> </table>	$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$k$	65,8	34,7	25,8	22,8	22,9	25,7	32,9	50,7	111
$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9												
$k$	65,8	34,7	25,8	22,8	22,9	25,7	32,9	50,7	111												
	$(ql)_{crit} = \frac{39,6S}{l^2}$																				
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="491 1076 1004 1144"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>77,5</td> <td>41,5</td> <td>31,5</td> <td>28,9</td> <td>30,5</td> <td>37,1</td> <td>53,9</td> <td>104</td> <td>376</td> </tr> </table>	$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$k$	77,5	41,5	31,5	28,9	30,5	37,1	53,9	104	376
$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9												
$k$	77,5	41,5	31,5	28,9	30,5	37,1	53,9	104	376												
	$(ql)_{crit} = \frac{57,2S}{l^2}$																				
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="491 1436 1004 1503"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>79,6</td> <td>43,2</td> <td>33,7</td> <td>31,9</td> <td>35,1</td> <td>45,1</td> <td>70,3</td> <td>149</td> <td>625</td> </tr> </table>	$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$k$	79,6	43,2	33,7	31,9	35,1	45,1	70,3	149	625
$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9												
$k$	79,6	43,2	33,7	31,9	35,1	45,1	70,3	149	625												

Esquema	Carga crítica																				
	$(ql)_{crit} = \frac{64,6S}{l^2}$																				
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="491 488 1009 556"> <tr> <td><math>a:l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>138</td> <td>67,1</td> <td>47,0</td> <td>40,1</td> <td>39,9</td> <td>46,2</td> <td>64,2</td> <td>119</td> <td>422</td> </tr> </table>	$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$k$	138	67,1	47,0	40,1	39,9	46,2	64,2	119	422
$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9												
$k$	138	67,1	47,0	40,1	39,9	46,2	64,2	119	422												
	$(ql)_{crit} = \frac{84,8S}{l^2}$																				
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="491 851 1009 918"> <tr> <td><math>a:l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>145</td> <td>67,6</td> <td>47,1</td> <td>40,7</td> <td>41,8</td> <td>50,5</td> <td>75,0</td> <td>150</td> <td>630</td> </tr> </table>	$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$k$	145	67,6	47,1	40,7	41,8	50,5	75,0	150	630
$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9												
$k$	145	67,6	47,1	40,7	41,8	50,5	75,0	150	630												
	$(ql)_{crit} = \frac{86,4S}{l^2}$																				
	<p>Los desplazamientos verticales de las secciones de apoyo son imposibles:</p> $P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="509 1265 1009 1332"> <tr> <td><math>a:l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>393</td> <td>114</td> <td>63,1</td> <td>47,2</td> <td>43,2</td> </tr> </table>	$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	$k$	393	114	63,1	47,2	43,2								
$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5																
$k$	393	114	63,1	47,2	43,2																
	<p>Los desplazamientos verticales de las secciones de apoyo se suponen imposibles</p> $(ql)_{crit} = \frac{98,7S}{l^2}$																				

Continuacion de la tabla 39

Esquema	Carga crítica																				
	$P_{crit} = \frac{kS}{l^2}$ <table border="1" data-bbox="491 325 992 393"> <tr> <td><math>a : l</math></td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,3</td> <td>0,4</td> <td>0,5</td> <td>0,6</td> <td>0,7</td> <td>0,8</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td><math>k</math></td> <td>399</td> <td>118</td> <td>67,8</td> <td>52,6</td> <td>50,2</td> <td>57,7</td> <td>82,2</td> <td>161</td> <td>621</td> </tr> </table>	$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$k$	399	118	67,8	52,6	50,2	57,7	82,2	161	621
$a : l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9												
$k$	399	118	67,8	52,6	50,2	57,7	82,2	161	621												
	$(ql)_{crit} = \frac{120,6S}{l^2}$																				

**Coefficientes de la tensión admisible convencional a la compresión  $\varphi$**

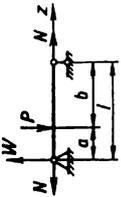
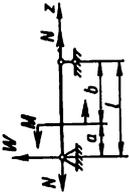
Material	Esbel								
	0	10	20	30	40	50	60	70	80
<b>Acero</b>									
Ст. 0	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75
Ст. 2									
Ст. 3									
Ст. 4									
Ст. 5	1,0	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,82	0,76	0,70
HЛ-1									
HЛ-2	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,83	0,78	0,71	0,63
(15 XCHД)									
СПК	1,00	0,97	0,95	0,91	0,87	0,83	0,79	0,72	0,65
<b>Fundición</b>									
СЧ 12-28	1,00	0,97	0,91	0,81	0,69	0,57	0,44	0,34	0,26
СЧ 15-18									
СЧ 15-30									
СЧ 15-32									
СЧ 15-36									
СЧ 18-36									
СЧ 21-40									
СЧ 21-44	1,00	0,95	0,87	0,75	0,60	0,43	0,32	0,23	0,18
СЧ 24-44									
СЧ 28-48									
<b>Aleación a base de aluminio</b>									
AMr	1,00	0,973	0,945	0,917	0,87	0,77	0,685	0,603	0,53
AMr 6	1,00	0,973	0,946	0,89	0,77	0,64	0,542	0,458	0,387
ABT 1	1,00	0,996	0,992	0,90	0,78	0,66	0,557	0,463	0,387
Д16Т	1,00	0,999	0,998	0,835	0,70	0,568	0,455	0,353	0,269
<b>Elementos de piedra y de piedra armada</b>	1,00	0,99	0,96	0,91	0,85	0,78	0,72	0,65	0,58
<b>Hormigón armado</b>	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,83	0,73	0,64
<b>Hormigón denso</b>	1,00	1,00	0,96	0,90	0,84	0,76	0,70	0,63	0,57
<b>Hormigón liviano</b>	1,00	1,00	0,95	0,86	0,73	0,68	0,59	0,52	0,46
<b>Madera (pino abeto)</b>	1,00	0,99	0,97	0,93	0,87	0,80	0,71	0,61	0,49

Tabla 40

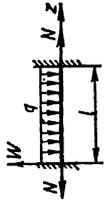
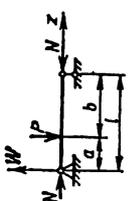
tez $\lambda$											
90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19
0,62	0,51	0,43	0,38	0,32	0,28	0,26	0,24	0,21	0,19	0,17	0,16
0,54	0,45	0,39	0,33	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14
0,55	0,43	0,35	0,30	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13
0,20	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,14	0,12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,465	0,415	0,365	0,327	0,296	0,265	0,235	—	—	—	—	—
0,322	0,28	0,243	0,213	0,183	0,162	0,148	—	—	—	—	—
0,312	0,252	0,21	0,175	0,15	0,129	0,113	—	—	—	—	—
0,212	0,172	0,142	0,119	0,101	0,087	0,076	—	—	—	—	—
0,53	0,48	0,43	0,38	0,35	0,32	0,29	—	—	—	—	—
0,57	0,52	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,51	0,45	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,38	0,31	0,25	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08

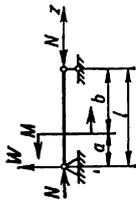
Tabla 41

Ecuaciones del momento flector  $M(z)$  y la línea elástica  $w(z)$  para algunos casos de la flexión longitudinal y transversal simultánea de vigas de sección transversal constante  $\left(k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}\right)$

Esquema de la viga y de su sollicitación	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{P}{k} \left[ \frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - e(a) \text{sh } k(z-a) \right]$ $M(a) = \frac{P}{k} \frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka$ $e(a) = 0 \text{ cuando } z < a$ $e(a) = 1 \text{ cuando } z > a$	$w(z) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ \frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - \left( 1 - \frac{a}{l} \right) kz - \right.$ $\left. - e(a) [\text{sh } k(z-a) - k(z-a)] \right\}$ $w(a) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ \frac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka - \left( 1 - \frac{a}{l} \right) ka \right\}$
	$M(z) = M \left[ \frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - e(a) \text{ch } k(z-a) \right]$ $M(a) = M \frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka$ $e(a) = 0 \text{ cuando } z < a$ $e(a) = 1 \text{ cuando } z > a$	$w(z) = \frac{M}{EJk^3} \left\{ \frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } kz - \frac{z}{l} - \right.$ $\left. - e(a) [\text{ch } k(z-a) - 1] \right\}$ $w(a) = \frac{M}{EJk^3} \left[ \frac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl} \text{sh } ka - \frac{a}{l} \right]$

	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[ -\frac{\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} + 1 \right]$ $M \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{k^2} \left( -\frac{1}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} + 1 \right)$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} \right] -$ $-\frac{k^2 l z}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)$ $w \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{EJk^4} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} k \frac{l}{2}} - \frac{k^2 l^2}{8} \right)$
	$M(z) = \frac{P}{k} \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kl}$	-
	$M(z) = \frac{M}{\operatorname{ch} kl} \operatorname{ch} k(l-z)$	-
	$M(l) = \frac{q}{k^2 \operatorname{ch} kl} (1 - \operatorname{ch} kl - kl \operatorname{sh} kl)$	-

Esquema de la viga y de su sollicitación	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{q}{k^3} \left[ 1 - \frac{kl}{2} \operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right) \right] \frac{kl}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}}$ $M \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{k^3} \left( 1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \right) \frac{kl}{2}$ $M(0) = \frac{q}{k^2} \left( 1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{th} \frac{kl}{2}} \right) \frac{kl}{2}$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[ \frac{-\operatorname{ch} k \left( z - \frac{l}{2} \right) + \operatorname{ch} \frac{kl}{2}}{\operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{kl}{2} - \frac{k^2 lz}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \right] \frac{kl}{2}$ $w \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{EJk^4} \left( \frac{kl}{2} \operatorname{th} \frac{kl}{4} - \frac{k^2 l^3}{8} \right)$
	$M(z) = \frac{P}{k} \left[ \frac{\operatorname{sen} kb}{\operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} kz - e(a) \operatorname{sen} k(z - a) \right]$ $M(a) = \frac{P}{k} \frac{\operatorname{sen} kb}{\operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} ka$ <p><math>e(a) = 0</math> cuando <math>z \leq a</math>  <math>e(a) = 1</math> cuando <math>z &gt; a</math></p>	$w(z) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ - \frac{\operatorname{sen} kb}{\operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} kz + \left( 1 - \frac{a}{l} \right) kz + \right. \\ \left. + e(a) [\operatorname{sen} k(z - a) - k(z - a)] \right\}$ $w(a) = \frac{P}{EJk^3} \left\{ - \frac{\operatorname{sen} kb}{\operatorname{sen} kl} \operatorname{sen} ka + \left( 1 - \frac{a}{l} \right) ka \right\}$



$$M(z) = M \left[ \frac{\cos kb}{\text{sen } kl} \text{sen } kz - e(a) \cos k(z - a) \right]$$

$$M(a) = M \frac{\cos kb}{\text{sen } kl} \text{sen } ka$$

$e(a) = 0$  cuando  $z < a$

$e(a) = 1$  cuando  $z > a$

$$w(z) = \frac{M}{EJk^2} \left\{ - \frac{\cos kb}{\text{sen } kl} \text{sen } kz + \frac{z}{l} - e(a) \left[ 1 - \cos k(z - a) \right] \right\}$$

$$w(a) = \frac{M}{EJk^2} \left[ - \frac{\cos kb}{\text{sen } kl} \text{sen } ka + \frac{a}{l} \right]$$

$$w(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[ 1 - \frac{\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} \right] +$$

$$+ \frac{k^2 lz}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \left[ \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \left( 1 - \frac{kl^2}{8} \right) \right]$$

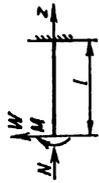
$$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[ -1 + \frac{\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{kl}{2}} \right]$$

$$M \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{k^2} \left( -1 + \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \right)$$

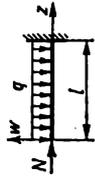


$$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[ \frac{\cos kl - \cos kb}{\text{sen } kl} \text{sen } kz - \cos kz + 1 \right]$$

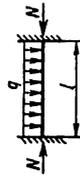
Esquema de la viga y de su sollicitación	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[ \frac{\cos kl - \cos kb}{\sin kl} \sin kz - \cos kz + \cos k(z - a) \right]$	
	$M(z) = \frac{q}{k^2} \left( \frac{\sin kz}{\sin kl} - \frac{z}{l} \right)$ <p> <math>M_{\text{máx}}</math> es cuando <math>z = \frac{1}{k} \times \arccos \frac{\sin kl}{kl}</math> </p>	
	$M(z) = - \frac{P}{k} \frac{\sin kz}{\cos kl}$	



$$M(z) = \frac{M}{\cos kl} \cos k(l-z)$$



$$M(l) = \frac{q}{k^2 \cos kl} (1 - \cos kl - kl \operatorname{sen} kl)$$



$$M(z) = \frac{q}{k^2} \left[ -1 + \frac{kl}{2} \frac{\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sen} \frac{kl}{2}} \right]$$

$$M \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{k^2} \left( -1 + \frac{kl}{2} \frac{kl}{\operatorname{sen} \frac{kl}{2}} \right)$$

$$M(0) = \frac{q}{k^2} \left( -1 + \frac{kl}{2} \frac{kl}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2}} \right)$$

$$w(z) = \frac{q}{EJk^4} \left[ \frac{kl}{2} \frac{-\cos k \left( z - \frac{l}{2} \right) + \cos \frac{kl}{2}}{\operatorname{sen} \frac{kl}{2}} \right] +$$

$$+ \frac{k^2 lz}{2} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)$$

$$w \left( \frac{l}{2} \right) = \frac{q}{EJk^4} \left( -\frac{kl}{2} \operatorname{tg} \frac{kl}{4} + \frac{k^2 l^3}{8} \right)$$

OSCILACIONES ELÁSTICAS

§ 101. Clasificación de las oscilaciones mecánicas

Todos los procesos oscilatorios con que se encuentra en la física y la técnica pueden clasificarse de acuerdo con una ley, según la cual cierta magnitud que caracteriza el proceso oscilatorio cambia en el tiempo. Tal clasificación puede llamarse *cine-mática* en el sentido amplio de esta palabra. Las oscilaciones pueden ser *periódicas* y *aperiódicas*. Además, existe una clase intermedia amplia de las llamadas *oscilaciones casi periódicas*.

Las oscilaciones periódicas se describen por una función periódica, cuyo valor se repite dentro de cierto lapso determinado  $T$  denominado *periodo de las oscilaciones*, es decir,

$$f(t + T) = f(t)$$

para cualquier valor de la variable  $t$ .

Las funciones se llaman aperiódicas cuando no satisfacen esta condición. Las funciones casi periódicas se determinan mediante la condición

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| < \varepsilon$$

para cualquier  $t$ , siendo  $\tau$  y  $\varepsilon$  las magnitudes constantes determinadas. Es evidente que si  $\varepsilon$  es muy pequeño en comparación con el valor medio del módulo de la función  $f_1(t)$  durante el tiempo  $t$ , la función casi periódica se aproximará a la periódica, en el lapso  $\tau$  será *casi el periodo*.

Las oscilaciones periódicas más difundidas son *las armónicas* o *sinusoidales*.

Las oscilaciones aperiódicas son mucho más variadas que las periódicas. Tales oscilaciones son, por regla general, oscilaciones sinusoidales *amortiguadas* (fig.

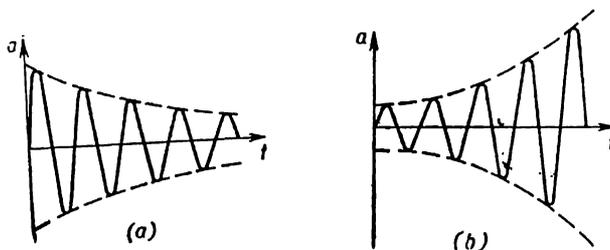


Fig. 313

313, a) o *crecientes* (fig. 313, b). Las oscilaciones amortiguadas pueden representarse matemáticamente mediante la expresión

$$x = A - \delta t \cos(\omega t + \varphi), \tag{19.1}$$

siendo  $A$ ,  $\varphi$ ,  $\delta$  y  $\omega$  las magnitudes constantes y  $t$ , el tiempo.

Las oscilaciones armónicas crecientes se describen matemáticamente análogamente a (19.1), sustituyendo el signo de  $\delta t$  por el contrario (positivo).

Hablando en rigor, no es muy lógico denominar las oscilaciones armónicas (o sinusoidales) amortiguadas, porque éstas no pueden decrecer. Sin embargo, en la práctica se utiliza esta denominación.

La clasificación de los procesos oscilatorios por los indicios externos no es suficiente, a causa de lo cual ésta tiene que ser completada por la clasificación de las oscilaciones por los indicios físicos principales de los sistemas oscilatorios examinados.

Investigando los movimientos de oscilación de los sistemas elásticos es importante saber qué número de parámetros independientes determina la posición del sistema en cada momento dado de tiempo. El número de tales parámetros se llama *número de grados de libertad*.

En los casos más simples la posición del sistema puede determinarse por una sola magnitud. Tales sistemas se denominan *sistemas de un grado de libertad*. El sistema oscilatorio que consta del peso  $Q$  suspendido de un muelle (fig. 314), siendo construido de tal manera que son posibles solamente desplazamientos verticales del peso, es sistema de un grado de libertad. Su posición en cualquier momento de tiempo puede determinarse mediante un parámetro, o sea, el desplazamiento por la vertical.



Fig. 314

Una viga imponderable que porta dos masas (fig. 315) puede servir de ejemplo del *sistema de dos grados de libertad*. En este caso los desplazamientos de las masas  $m_1$  y  $m_2$  con respecto a la posición de equilibrio pueden ser los parámetros independientes que determinan la posición del sistema en cualquier momento de tiempo. Aumentando el número de masas concentradas de la viga oscilante pasamos, en el caso límite, a una viga con la masa distribuida por toda la longitud, es decir, a un *sistema oscilatorio (fig. 316) de número infinito de grados de libertad*.

La clasificación de las oscilaciones mecánicas puede ser realizada también por otros indicios. En particular, se suele distinguir los cuatro siguientes tipos de oscilaciones: *oscilaciones propias, oscilaciones forzadas, oscilaciones paramétricas y autooscilaciones*.

Se entienden por *oscilaciones propias (o libres)* las que surgen en un sistema aislado a causa de la excitación exterior ("empujes") provocando desviaciones iniciales de los puntos del sistema con respecto a la posición de equilibrio, y que continúan después gracias a la presencia de las fuerzas elásticas interiores que restablecen el equilibrio. La energía necesaria que asegura el proceso de oscilaciones llega del exterior en el momento inicial de excitación de las oscilaciones. El período de las oscilaciones (tiempo de una oscilación completa) o la frecuencia de las oscilaciones (magnitud recíproca del período) depende del propio sistema. La frecuencia de las oscilaciones es bien determinada para el sistema dado y se denomina *frecuencia propia* de las oscilaciones del sistema. Las oscilaciones propias son prác-



Fig. 315

Las oscilaciones propias son prácticas en los sistemas de un grado de libertad, como en el caso del muelle y el peso (fig. 314). En los sistemas de dos grados de libertad, como en el caso de la viga con dos masas (fig. 315), las oscilaciones propias son prácticas en los sistemas de número infinito de grados de libertad, como en el caso de la viga con masa distribuida (fig. 316).

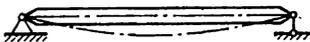


Fig. 316



Fig. 317

ticamente siempre amortiguadas a causa de las pérdidas de energía en el sistema, aunque durante el análisis de las oscilaciones propias muchas veces se prescinde de estas pérdidas.

*Se entienden por forzadas las oscilaciones del sistema elástico que ocurren bajo la acción sobre el sistema (durante todo el proceso de las oscilaciones) de las fuerzas perturbadoras exteriores dadas que varían periódicamente.* El carácter del proceso oscilatorio se determina no sólo por las propiedades del sistema, sino depende esencialmente también de la fuerza exterior. Como ejemplo de oscilaciones forzadas pueden citarse las oscilaciones transversales de una viga (fig. 317) engendradas por la masa no equilibrada del rotor de un motor eléctrico en funcionamiento montado sobre ésta.

Las oscilaciones forzadas suceden con la frecuencia de la fuerza perturbadora y se mantienen a costa del suministro continuo de la energía desde afuera. Al coincidir la frecuencia de las fuerzas perturbadoras con la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema empieza el fenómeno de resonancia que se caracteriza por un aumento brusco de la amplitud de las oscilaciones forzadas, peligroso para el trabajo del sistema oscilatorio mecánico en cuestión.

*Se llaman paramétricas las oscilaciones del sistema elástico, en el proceso de las cuales varían periódicamente los parámetros físicos del sistema, o sea, las magnitudes que caracterizan la masa o la rigidez del sistema.* En este caso las fuerzas exteriores no influyen directamente sobre el movimiento oscilatorio, sino cambian los parámetros físicos del sistema. Las oscilaciones transversales de una masa sobre una barra giratoria de sección no circular que tiene un momento ecuatorial de inercia diferente respecto a los ejes mutuamente perpendiculares es un ejemplo de las oscilaciones paramétricas.

*Se entiende por autooscilaciones del sistema elástico las oscilaciones sin amortiguamiento sostenidas por tales fuerzas exteriores, cuyo carácter de influencia se determina por el propio proceso de oscilación.*

Las autooscilaciones surgen en el sistema cuando faltan las influencias periódicas exteriores. El carácter de las oscilaciones se determina exclusivamente por la estructura del sistema. La fuente de energía que compensa las pérdidas de energía en el sistema durante el proceso de su oscilación constituye una parte inalienable del sistema. De tal manera, las autooscilaciones se diferencian de las oscilaciones propias que son amortiguadas, porque no se amortiguan. Por otra parte, las autooscilaciones difieren de las oscilaciones forzadas y paramétricas originadas por las fuerzas exteriores, cuyo carácter de acción en ambos casos es dado, por ser *autoexcitadas*, ya que el proceso de las oscilaciones en este caso se gobierna por las propias oscilaciones.

Citemos como ejemplo de autooscilaciones la vibración de las partes del avión (flameo) cuando la fuente de la energía complementaria que sostiene las oscilaciones del sistema es la energía de la corriente de aire, al igual que la tremolación de la bandera en el viento.

**Se acostumbra también hacer la clasificación de las oscilaciones según el tipo de las deformaciones de los elementos elásticos de la estructura.** En particular, con arreglo a los sistemas de barras se distinguen oscilaciones *longitudinales, transversales y de torsión.*

*Durante las oscilaciones longitudinales los desplazamientos de todos los puntos de la barra elástica están orientados a lo largo del eje de la barra.* Tiene lugar la deformación de alargamiento o acortamiento de la barra, es decir, las oscilaciones longitudinales pueden llamarse oscilaciones de tracción-compresión.

*Durante las oscilaciones transversales (de flexión) las componentes principales de los desplazamientos (flechas) están dirigidas perpendicularmente al eje de la barra.*

*Durante las oscilaciones de torsión tienen lugar las deformaciones variables de torsión. Son posibles también las oscilaciones de flexión y torsión combinadas, o sea, tales que tienen simultáneamente la flexión y torsión variables.*

### § 102. Oscilaciones libres de sistemas de un grado de libertad

Como ejemplo de sistema oscilatorio más simple de un grado de libertad puede considerarse un peso suspendido del muelle vertical (fig. 318).

Obtendremos la ecuación diferencial de las oscilaciones del peso  $Q$  tomando la suma de las proyecciones de todas las fuerzas (incluidas las fuerzas de inercia según el principio de D'Alembert) sobre el eje vertical en la siguiente forma:

$$Q + cx - \left( Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} \right) = 0.$$

De aquí

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = 0$$

o bien

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

(19.2)

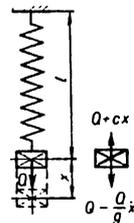


Fig. 318

siendo  $x$  el desplazamiento vertical del peso de la posición de equilibrio estático;  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ;  $t$ , el tiempo;  $c$ , la rigidez del muelle;  $g$ , la aceleración de la gravedad;  $\omega$ , la frecuencia angular de las oscilaciones propias

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{g}{\delta_{\text{est}}}; \quad (19.3)$$

$\delta_{\text{est}} = \frac{Q}{c}$  es el alargamiento del muelle durante la acción estática del peso  $Q$ .

La solución de la ecuación (19.2) será

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (19.4)$$

siendo  $A$  y  $B$  las constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales.

Si se dan la coordenada inicial del peso  $x_0$  y la velocidad inicial  $v_0 = \dot{x}$  cuando  $t = 0$ , entonces determinamos a partir de (19.4)

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}. \quad (19.5)$$

Suponiendo que

$$x_0 = a \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha, \quad (19.6)$$

podemos presentar la solución (19.4) así:

$$x = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha),$$

siendo  $a$  la amplitud de las oscilaciones determinada mediante la fórmula

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

La magnitud  $\omega t + \alpha$  se denomina *fase de las oscilaciones*, y la magnitud  $\alpha$ , *desfase*. A base de (19.6)  $\alpha$  puede determinarse a partir de la condición

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

La frecuencia angular de las oscilaciones (número de oscilaciones hecho durante  $2\pi$  s) a base de (19.3) será

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{est}}}} \quad (19.7)$$

o bien

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

siendo  $m = \frac{Q}{g}$  la masa del peso suspendido.

Conociendo la frecuencia circular se puede determinar *el periodo de las oscilaciones*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{est}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (19.8)$$

El número de oscilaciones por segundo, es decir, *la frecuencia por segundo* expresada en hertzios se determina mediante la fórmula

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (19.9)$$

Durante las oscilaciones del peso suspendido de un extremo del muelle que representa una barra de longitud  $l$  con una rigidez de la sección transversal a la tracción  $EF$  y una rigidez

$$c = \frac{EF}{l},$$

la frecuencia de las oscilaciones propias se determinará, según (19.7), mediante la fórmula

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}. \quad (19.10)$$

Tomando en consideración que  $\frac{Q}{g} = m$ , podemos escribir:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{ml}}. \quad (19.11)$$

De las fórmulas (19.10) y (19.11) se ve que la frecuencia de las oscilaciones propias del sistema aumenta, siendo invariable la masa, con el aumento de la rigidez, y disminuye con el aumento de la masa, siendo invariable la rigidez. La relación entre las frecuencias de las oscilaciones propias de los pesos sujetos a los extremos de dos barras diferentes es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la relación de los alargamientos estáticos de dichas barras.

Un sistema oscilatorio que consta de un disco macizo sujetado al extremo inferior del árbol empotrado por el extremo superior (fig. 319) también es un ejemplo del sistema de un grado de libertad. Si se aplica al disco en su plano y se retira de repente un par de fuerzas, surgen las oscilaciones libres de torsión del árbol junto con el disco. Designemos la rigidez del árbol a la torsión (momento torsional que origina la torsión del árbol en un radián) por  $c$ :

$$c = \frac{GJ_p}{l} = \frac{G\pi d^4}{l \cdot 32}, \quad (19.12)$$

siendo  $G$  el módulo de elasticidad durante el deslizamiento;  $d$ , el diámetro del árbol;  $l$ , la longitud del árbol.

Haciendo uso del principio de D'Alembert (prescindimos de la inercia de la masa de la barra), obtendremos la ecuación diferencial de las oscilaciones de torsión del disco igualando el

momento torsional  $c\varphi$  que actúa en el árbol durante su torsión en un ángulo  $\varphi$  al momento de las fuerzas de inercia de la masa del disco:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \quad (19.13)$$

siendo  $J$  el momento de inercia del disco con respecto al eje de la barra perpendicular al plano del disco.

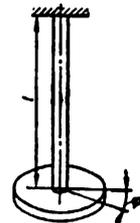


Fig. 319

Para un disco de espesor constante  $h$  hecho de un material con el peso específico  $\gamma$  se tendrá

$$J = \frac{\pi D^4 h \gamma}{32 g} = \frac{Q D^2}{8 g}, \quad (19.14)$$

siendo  $D$  el diámetro del disco;  $Q$ , el peso del disco.

Para un disco de espesor variable  $h(\rho)$

$$J = \frac{2\pi}{g} \int_0^{D/2} h(\rho) \gamma \rho^3 d\rho. \quad (19.15)$$

Designando

$$\omega^2 = \frac{c}{J}, \quad (19.16)$$

volveremos a escribir la ecuación (19.13) en la forma

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (19.17)$$

La solución general de esta ecuación será

$$\varphi = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t. \quad (19.18)$$

El período de las oscilaciones del sistema examinado

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}. \quad (19.19)$$

Para la barra de diámetro constante  $d$  se tiene contando con (19.12):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{32IJ}{Gnd^4}} \quad (19.20)$$

y la frecuencia de las oscilaciones por segundo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32JI}}. \quad (19.21)$$

En la tabla 42 se dan las frecuencias de las oscilaciones propias de los sistemas de un grado de libertad.

### § 103. Oscilaciones forzadas de los sistemas de un grado de libertad cuando la excitación es armónica

Obtendremos la ecuación de las oscilaciones forzadas del sistema de un grado de libertad (fig. 318) si tomamos en consideración en (19.2), además de las fuerzas de inercia  $\frac{Q}{g} \ddot{x}$  y las fuerzas de elasticidad que actúan sobre el peso  $Q$ , la influencia de la fuerza periódica perturbadora  $P \cos pt$ :

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = P \cos pt. \quad (19.22)$$

Designando

$$\frac{cg}{Q} = \omega^2; \quad (19.23)$$

$$\frac{Pg}{Q} = q, \quad (19.24)$$

siendo  $p$  la frecuencia angular de la fuerza perturbadora, reduciremos la ecuación (19.22) a la forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt. \quad (19.25)$$

Cuando  $p$  es pequeño en comparación con  $\omega$ , se puede despreciar el término  $\ddot{x}$  y considerar que tiene lugar sólo la deformación estática, cuyo valor máximo

$$x_{est} = \frac{q}{\omega^2}. \quad (19.26)$$

Para determinar la deformación dinámica es necesario solucionar la ecuación (19.25). Su solución se compondrá de la suma de la solución general de la ecuación homogénea (cuando  $q \cos pt = 0$ )

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (19.27)$$

y la solución particular de la ecuación (19.25)

$$x = C \cdot \cos pt. \quad (19.28)$$

Al sustituir (19.28) en (19.25) hallamos

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \quad (19.29)$$

Entonces la solución general de la ecuación (19.25) será

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt. \quad (19.30)$$

Los dos primeros sumandos del segundo miembro de (19.30) caracterizan las oscilaciones libres que, por regla general, se amortiguan con rapidez; el último caracteriza las oscilaciones forzadas estacionarias con frecuencia angular  $p$  (con período  $T_1 = \frac{2\pi}{p}$  o frecuencia  $f = \frac{p}{2\pi}$  Hz) y amplitud  $C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}$ . La amplitud de las oscilaciones forzadas depende esencialmente de la correlación de las frecuencias de las oscilaciones propias  $\omega$  y forzadas  $p$  y puede caracterizarse mediante el llamado *coeficiente del crecimiento de las oscilaciones* o *coeficiente de amplificación dinámica*

$$\beta = \frac{C}{x_{\text{est}}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \quad (19.31)$$

o bien

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}}, \quad (19.32)$$

siendo

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Como se ve de (19.31), cuando la razón  $\frac{p}{\omega}$  es pequeña,  $\beta \rightarrow 1$  y  $C \rightarrow x_{\text{est}}$ . Pero

cuando la frecuencia de las oscilaciones forzadas  $p \rightarrow \omega$ , es decir,  $\frac{p}{\omega} \rightarrow 1$ , entonces  $C \rightarrow \infty$ . Cuando  $p = \omega$  tiene lugar el estado de *resonancia*. La frecuencia correspondiente de la fuerza perturbadora  $p = p_{\text{crit}}$  se denomina *crítica*.

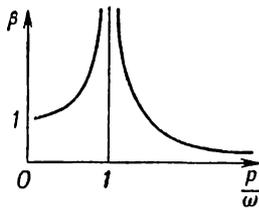


Fig. 320

El diagrama de la dependencia  $|\beta| = f\left(\frac{p}{\omega}\right)$  dado

en la fig. 320 que representa la llamada *curva de resonancia* o la *característica amplitud-frecuencia* ofrece la posibilidad de analizar el comportamiento del sistema oscilatorio en función de la razón de las frecuencias libres  $\omega$  y forzadas  $p$ .

#### §.104. Oscilaciones libres del sistema de un grado de libertad teniendo en cuenta la resistencia proporcional a la velocidad

La ecuación de las oscilaciones libres del sistema de un grado de libertad (fig. 321, a), cuando se cuenta con la resistencia proporcional a la velocidad de movimiento del peso oscilatorio, la obtendremos a partir del examen de las

condiciones de su equilibrio dinámico:

$$Q - \frac{Q}{g} \ddot{x} - \alpha \dot{x} = Q + cx$$

o bien

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (19.33)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de proporcionalidad;  $\alpha x$ , la fuerza de resistencia.

En la ecuación (19.33)

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad 2n = \frac{\alpha g}{Q}. \quad (19.34)$$

Designemos

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2. \quad (19.35)$$

La solución de la ecuación (19.33) será

$$x = e^{-nt}(A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \operatorname{cos} \omega_1 t), \quad (19.36)$$

siendo  $e = 2,718$ .

El período de las oscilaciones amortiguadas del sistema en cuestión

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}, \quad (19.37)$$

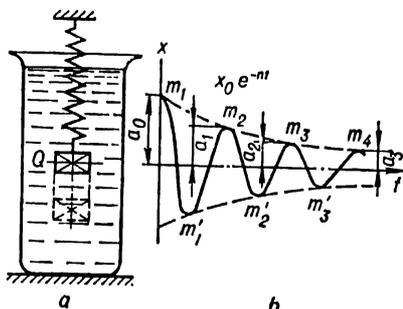


Fig. 321

siendo  $n$  el coeficiente que caracteriza la capacidad de amortiguación del sistema oscilatorio. De (19.36) se desprende que a causa del factor  $e^{-nt}$  la amplitud de las oscilaciones disminuye con el tiempo, o sea, las oscilaciones van decreciendo. Las constantes de integración  $A$  y  $B$  en la solución (19.36) se determinan a partir de las condiciones iniciales. Así, suponiendo que cuando  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ;  $\dot{x} = \dot{x}_0$  hallamos

$$B = x_0; \quad A = \frac{1}{\omega_1} (\dot{x}_0 + nx_0).$$

En este caso la solución (19.36) puede presentarse en la forma

$$x = e^{-nt} \left[ \frac{\dot{x}_0}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t + x_0 \left( \operatorname{cos} \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \right) \right]. \quad (19.38)$$

En el caso particular cuando  $A = 0$ , es decir, cuando

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega_1} + \frac{nx_0}{\omega_1} = 0,$$

la ecuación (19.38) tendrá el aspecto

$$x = x_0 e^{-nt} \operatorname{cos} \omega_1 t.$$

Esta ecuación está representada gráficamente en la fig. 321, *b*. La disminución de la amplitud sigue la progresión geométrica. En efecto, cuando  $t = 0$ ;  $t = T$ ;  $t = 2T$ , etc. las amplitudes tienen, respectivamente, los siguientes valores:

$$a_0 = x_0; \quad a_1 = x_0 e^{-nT}; \quad a_2 = x_0 e^{-2nT}, \text{ etc.}$$

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = e^{nT},$$

de donde

$$\ln \frac{a_k}{a_{k+1}} = \ln e^{-nT} = -nT = \delta. \quad (19.39)$$

La magnitud  $\delta$  se denomina *decremento logarítmico de las oscilaciones* y es, por regla general, la característica principal de la amortiguación de las oscilaciones o la característica de las propiedades amortiguadores del sistema oscilatorio \*).

**§ 105. Oscilaciones forzadas de los sistemas de un grado de libertad teniendo en cuenta la resistencia proporcional a la velocidad**

Según los datos de los párrafos anteriores la ecuación diferencial de las oscilaciones forzadas del sistema mostrado en la fig. 321, *a*, al actuar la fuerza exterior perturbadora  $P \sin pt$ , tiene que escribirse en la forma definitiva así:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q \sin pt, \quad (19.40)$$

siendo, igual que antes,

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad q = \frac{Pg}{Q}. \quad (19.41)$$

La solución general de la ecuación (19.40) ha de constar de la suma de la solución de la ecuación homogénea (19.33)

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t),$$

siendo  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$ , y la solución particular de la ecuación (19.40)

$$x = K \sin pt + L \cos pt. \quad (19.42)$$

Una vez sustituida (19.42) en (19.40), hallamos

$$K = \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}; \quad L = -\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2}. \quad (19.43)$$

Entonces la solución general de la ecuación (19.40) será

$$x = e^{-nt} (A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) - \frac{2pqn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} \cos pt + \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2 n^2} \sin pt. \quad (19.44)$$

Como las oscilaciones libres, caracterizadas por el término que contiene el factor  $e^{-nt}$ , van amortiguándose con el tiempo, las oscilaciones forzadas del sistema, para oscilaciones estacionarias, se caracterizarán por medio de los dos

---

\*) Los métodos de determinación de las características de amortiguación de los sistemas oscilatorios y los datos sobre las propiedades amortiguadoras de los materiales de construcción se exponen en el manual de G. S. Pisarenko, A. P. Yákovlev y V. V. Matvéev "Propiedades de vibroabsorción de los materiales de construcción", "Naukova dumka", Kíev, 1971.

últimos términos del segundo miembro de la solución (19.44) proporcionales a  $q$ . El período de las oscilaciones no amortiguadas será

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}.$$

Si se introduce la siguiente sustitución:

$$\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \operatorname{sen} \alpha; \quad (19.45)$$

$$\frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \operatorname{cos} \alpha, \quad (19.46)$$

la solución para las oscilaciones forzadas puede representarse así:

$$x = \mathfrak{A} (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} pt - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} pt) = \mathfrak{A} \operatorname{sen} (pt - \alpha), \quad (19.47)$$

determinándose la amplitud  $\mathfrak{A}$  y el ángulo de desfase  $\alpha$  a base de (19.45) y (19.46) mediante las siguientes fórmulas correspondientes:

$$\mathfrak{A} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}}; \quad (19.48)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}. \quad (19.49)$$

Cuando  $\omega > p$  el ángulo  $\alpha$  será positivo y menor que  $\frac{\pi}{2}$ , es decir,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Cuando  $\omega < p$  se obtendrá que  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , es decir, las oscilaciones forzadas

retardan de la fuerza perturbadora mayor que en  $\frac{\pi}{2}$ . Cuando  $p = \omega$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ , es decir, el sistema oscilatorio ocupa su posición media en el momento en que la fuerza perturbadora tiene el valor máximo.

Teniendo en cuenta que

$$q = \frac{gP}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q}, \quad (19.50)$$

hallamos que

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{gPQ}{Qcg} = \frac{P}{c} = \delta_{\text{est}}, \quad (19.51)$$

siendo  $\delta_{\text{est}}$  la deformación del muelle durante la aplicación estática del valor de amplitud de la fuerza perturbadora.

Tomando en consideración (19.51), podemos representar la expresión para la amplitud de las oscilaciones forzadas  $\mathfrak{A}$  (19.48) en la siguiente forma:

$$\mathfrak{A} = \frac{\delta_{\text{est}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}} = \frac{\delta_{\text{est}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_1^2}\right)^2 + \frac{T^2\gamma^2}{T_1^2}}} \quad (19.52)$$

siendo  $\gamma = \frac{2n}{\omega}$  el coeficiente que depende de la capacidad amortiguante del sistema oscilatorio.

Cuando  $T_1 \gg T \ \mathfrak{M} \rightarrow \delta_{est}$ ; cuando  $T_1 \rightarrow T \ \mathfrak{M} \rightarrow \infty$ .

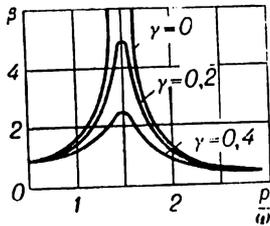


Fig. 322

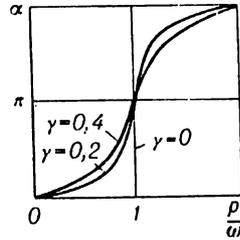


Fig. 323

El coeficiente de crecimiento de la amplitud  $\beta$  en el caso examinado es igual a

$$\beta = \frac{\mathfrak{M}}{\delta_{est}}$$

o bien, contando con (19.52),

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}}. \quad (19.53)$$

Las curvas de amplitud de resonancia  $\beta = f_1\left(\frac{p}{\omega}\right)$  para diferentes valores de  $\gamma$  pueden verse en la fig. 322, y el diagrama que expresa la dependencia  $\alpha = f_2\left(\frac{p}{\omega}\right)$ , en la fig. 323.

### § 106. Velocidad crítica de rotación del árbol

El número de revoluciones, con el cual los árboles giratorios, al producirse la resonancia, se ponen dinámicamente inestables creando la posibilidad de aparición de oscilaciones inadmisiblemente grandes, se denomina *crítico*. Se puede demostrar que tal número crítico de revoluciones del árbol es el número de revoluciones por segundo que corresponde a la frecuencia propia de sus oscilaciones transversales.

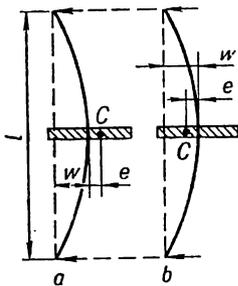


Fig. 324

Veamos la rotación de un disco puesto sobre el árbol (fig. 324, a). El centro de gravedad del disco  $C$  prácticamente siempre no coincide con el eje de rotación en un cierto valor  $e$ . La fuerza centrífuga que actúa sobre el eje durante la rotación del disco de peso  $Q$  con velocidad angular  $p$  será

$$T = \frac{Q}{g} p^2 (w + e),$$

siendo  $w$  la flecha del árbol en el lugar del encaje del disco.

La reacción del árbol en el lugar de aplicación de la fuerza  $T$

$$P = cw,$$

siendo  $c$  su rigidez a la flexión. En el caso de una sección constante de rigidez  $EJ$  con la ubicación del disco con el centro del árbol apoyado articuladamente,

$$c = \frac{48EJ}{l^3}.$$

De la condición de equilibrio se ve que  $P = T$ . Sustituyendo en vez de  $T$  y  $P$  sus expresiones hallaremos

$$\frac{Q}{g} (w + e)p^2 = cw$$

o bien

$$w = \frac{e}{\frac{c}{p^2} \cdot \frac{g}{Q} - 1}. \quad (19.54)$$

Teniendo en cuenta que la frecuencia propia de las oscilaciones transversales del árbol

$$w^2 = \frac{cg}{Q}, \quad (19.55)$$

la ecuación (19.54) puede presentarse así:

$$w = \frac{e}{\frac{\omega^2}{p^2} - 1}. \quad (19.56)$$

De (19.56) se desprende que la velocidad crítica para la cual  $w \rightarrow \infty$  será

$$p_{\text{crit}} = \omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \quad (19.57)$$

Cuando  $p_{\text{crit}} > \omega$  el centro de gravedad del disco estará ubicado entre la línea que une los apoyos y el eje flexionado del árbol (fig. 324, *b*), y la ecuación para determinar la flecha se escribirá así:

$$\frac{Q}{g} (w - e)p^2 = cw,$$

de donde

$$w = \frac{e}{1 - \frac{cg}{p^2Q}} = \frac{e}{1 - \frac{w^2}{p^2}}. \quad (19.58)$$

De (19.58) se desprende que con el aumento de  $p$  la flecha  $w \rightarrow e$ , es decir, siendo muy grandes las velocidades, el centro de gravedad del disco alcanza la línea que une los apoyos, y el árbol flexionado da vueltas alrededor del centro de gravedad del disco  $C$ .

§ 107. Oscilaciones libres de los sistemas elásticos con varios grados de libertad

Al examinar las oscilaciones de los sistemas elásticos con varios grados de libertad las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen en muchos casos igual que para el caso del sistema de un grado de libertad, haciendo uso del principio de D'Alembert. Así, para el sistema de dos grados de libertad mostrado en la fig. 325, *a* que consta de dos masas  $m_1$  y  $m_2$  y dos muelles con rigideces  $c_1$

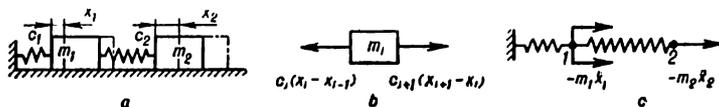


Fig. 325

y  $c_2$  considerando que las masas pueden desplazarse — cuando falta la fricción — solamente en la dirección horizontal a lo largo del eje  $x$  y designando los desplazamientos de las masas  $m_1$  y  $m_2$  por  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, se tendrá que sobre la masa  $m_1$  actúan las fuerzas de tensión de los muelles  $-c_1x_1$  y  $c_2(x_2 - x_1)$ , al igual que la fuerza de inercia  $-m_1\ddot{x}_1$ . La ecuación del movimiento de la masa  $m_1$  será

$$-c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) - m_1\ddot{x}_1 = 0$$

o bien

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0. \quad (19.59)$$

El esquema de las fuerzas que actúan sobre la  $i$ -ésima masa en el caso general se muestra en la fig. 325, *b*.

Sobre la masa  $m_2$ , además de las fuerzas de inercia, actúa solamente la fuerza de tensión del segundo muelle  $-c_2(x_2 - x_1)$  y la ecuación de su movimiento será

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0. \quad (19.60)$$

Se podría obtener las ecuaciones de movimiento (19.59) y (19.60) de un modo poco diferente. Efectivamente, puede considerarse que se tienen dos muelles unidos entre sí (fig. 325, *c*) sujetos a la acción de las fuerzas de inercia  $-m_1\ddot{x}_1$ , y  $-m_2\ddot{x}_2$  aplicadas en los puntos 1 y 2. Entonces el primer muelle se carga con la fuerza  $-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2$ , y el segundo, con la fuerza  $-m_2\ddot{x}_2$ . El desplazamiento de la primera masa será igual al alargamiento del primer muelle:

$$x_1 = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1},$$

y el desplazamiento de la segunda masa

$$x_2 = x_1 - \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1} - \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2}.$$

Transformando las últimas ecuaciones obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales equivalentes a (19.59) y (19.60):

$$x_1c_1 + m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0, \quad (19.61)$$

$$x_2c_1c_2 + c_2(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) + c_1m_2\ddot{x}_2 = 0. \quad (19.62)$$

El método más general de composición de las ecuaciones diferenciales es el método conocido de la mecánica teórica y fundado en la utilización de las ecuaciones de Lagrange de segundo género que, siendo ausentes las fuerzas de resistencia y las fuerzas exteriores perturbadoras, tienen el aspecto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (19.63)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

siendo  $T$  y  $U$  la energía cinética y potencial del sistema, respectivamente.

Con arreglo al sistema dado en la fig. 325,  $a$  se tendrá

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2},$$

$$U = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1).$$

La ecuación (19.63) tendrá el aspecto

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.64)$$

Las ecuaciones obtenidas a partir de las ecuaciones de Lagrange coincidieron totalmente con las obtenidas a base del principio de D'Alembert. Tal coincidencia tiene lugar siempre.

La solución de las ecuaciones (19.64) la buscamos en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha); \\ x_2 &= \lambda_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (19.65)$$

siendo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\omega$  y  $\alpha$  las constantes que tienen que elegirse de tal manera que se satisfagan las ecuaciones (19.64). Sustituyendo las soluciones de (19.65) en las ecuaciones (19.64) hallamos

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) - \lambda_2 c_2 &= 0; \\ -\lambda_1 c_2 + \lambda_2 (c_2 - m_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.66)$$

En dichas ecuaciones las incógnitas son  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\omega$ . La frecuencia  $\omega$  la determinamos de (19.66) suponiendo que  $\lambda_1 \neq 0$  y  $\lambda_2 \neq 0$ . Esto es posible cuando la determinante del sistema homogéneo con respecto a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  será igual a cero:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$\omega^4 - \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0.$$

De aquí

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Respectivamente, pueden determinarse dos frecuencias propias:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)} - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}. \end{aligned} \right\} (19.67)$$

El proceso oscilatorio de dos frecuencias puede representarse, de acuerdo con (19.67), así:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \lambda_{21} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} (19.68)$$

El primer índice de  $\lambda$  muestra el número de la coordenada, el segundo, el número del sumando en el renglón o el número de la frecuencia. De (19.66) se tiene

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2}$$

o bien, de acuerdo con el sistema de índices aceptado

$$\begin{aligned} \chi_{21} &= \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2}{c_2}; \\ \chi_{22} &= \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2 \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones (19.68) pueden escribirse del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \chi_{21} \lambda_{11} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + \chi_{22} \lambda_{12} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} (19.69)$$

Los valores de  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales. Así, por ejemplo, considerando que cuando  $t = 0$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0; & x_2(0) &= 0; \\ \dot{x}_1(0) &= 0; & \dot{x}_2(0) &= v_0, \end{aligned}$$

de (19.69) hallamos

$$\begin{aligned}\lambda_{11} \operatorname{sen} \alpha_1 + \lambda_{12} \operatorname{sen} \alpha_2 &= 0; \\ \chi_{21} \lambda_{11} \operatorname{sen} \alpha_1 + \chi_{22} \lambda_{12} \operatorname{sen} \alpha_2 &= 0; \\ \lambda_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \lambda_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 &= 0; \\ \chi_{21} \lambda_{11} \omega_1 \cos \alpha_1 + \chi_{22} \lambda_{12} \omega_2 \cos \alpha_2 &= v_0.\end{aligned}$$

De aquí, como se conocen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\chi_{21}$  y  $\chi_{22}$ , hallamos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \lambda_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\chi_{21} - \chi_{22}}; \quad \lambda_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\chi_{22} - \chi_{21}}.$$

Eligiendo las condiciones iniciales de tal manera que  $\lambda_{12}$  sea igual a cero obtenemos oscilaciones de una frecuencia descritas mediante un armónico:

$$\begin{aligned}x_{11} &= \lambda_{11} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1); \\ x_{21} &= \chi_{21} \lambda_{11} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha_1).\end{aligned}$$

Las oscilaciones descritas por medio de un armónico se denominan *primeras oscilaciones normales*.

Es evidente que, a condición de que  $\lambda_{11} = 0$ , las oscilaciones pasan conforme a la segunda forma. Las segundas oscilaciones normales se describirán mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}x_{12} &= \lambda_{12} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_{22} &= \chi_{22} \lambda_{12} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \alpha_2).\end{aligned}$$

El número de las formas normales de las oscilaciones y el número de las frecuencias propias, igual al primero coinciden con el número de grados de libertad del sistema oscilatorio.

En la tabla 42 se dan las frecuencias propias de las oscilaciones de sistemas de dos grados de libertad.

Los sistemas oscilatorios característicos de muchos grados de libertad son árboles elásticos con discos encajados (fig. 326, a). Veamos las oscilaciones torsionales de dicho árbol.

Supongamos que  $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$  son los momentos de inercia de masas de los discos respecto al eje del árbol  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ , los ángulos de giro de los discos durante las oscilaciones;  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ , las rigideces durante la torsión de diferentes tramos del árbol:

$$c_i = \frac{GJ_p}{l_i},$$

siendo  $J_p$  el momento polar de inercia del área de la sección del árbol y  $l_i$ , la longitud del tramo correspondiente.

Entonces los valores de los momentos torsionales que surgen en las secciones de diferentes tramos del árbol durante el giro recíproco de los discos serán, respectivamente,  $c_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ ;  $c_2(\varphi_2 - \varphi_3)$ , etc. (fig. 326, b). Las energías cinética y potencial del sistema con  $n$  grados de libertad (prescindiendo del momento de inercia de masa del árbol giratorio en comparación con los momentos de inercia de los discos) pueden presentarse así:

$$\left. \begin{aligned}T &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{J_i \dot{\varphi}_i^2}{2}; \\ U &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_{\text{tor } i} \varphi_i}{2},\end{aligned} \right\} \quad (19.70)$$









La fuerza de inercia del elemento de la barra de longitud  $dz$ , siendo  $m$  la masa total de la barra, y  $l$ , su longitud, será

$$P_1 = \frac{m}{l} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

Entonces, haciendo uso del principio de D'Alembert, ya podremos escribir la condición de equilibrio dinámico del elemento de la barra en la siguiente forma:

$$N_b - N_a = P_1$$

o bien

$$EF \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \frac{m}{l} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

Reduciendo en  $dz$  y sustituyendo  $\frac{m}{lF}$  por  $\rho$  (densidad del material), representamos la ecuación diferencial de las oscilaciones longitudinales de la barra en la siguiente forma:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (19.82)$$

Designando  $\frac{E}{\rho} = a^2$ , escribiremos la ecuación (19.82) así:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (19.83)$$

La solución de la ecuación (19.33) la buscamos, siguiendo el método de Fourier, en la forma de

$$u = ZT, \quad (19.84)$$

siendo

$$Z = f_1(z); \quad T = f_2(t).$$

Diferenciando la ecuación (19.84) respecto a  $z$  y  $t$  se tendrá

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Z \frac{d^2 T}{dt^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = T \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (19.85)$$

Al sustituir (19.85) en (19.83), se tiene

$$Z \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

o bien

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2}.$$

Igualando el primer y el segundo miembro de la última ecuación a una misma magnitud  $\omega^2$  se obtendrán dos ecuaciones corrientes de segundo orden:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 T; \quad (19.86)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{a^2} Z. \quad (19.87)$$

Las soluciones particulares de estas ecuaciones serán, respectivamente,

$$\begin{aligned} T &= \cos \omega t; & \text{sen } \omega t; \\ Z &= \cos \frac{\omega}{a} z; & \text{sen } \frac{\omega}{a} z. \end{aligned} \quad (19.88)$$

Para obtener la solución general de la ecuación (19.86) compuesta por soluciones particulares (19.88) es necesario que se tomen en consideración las condiciones de frontera de la barra. Por ejemplo, si ambos extremos están libres, entonces tienen que satisfacerse las siguientes condiciones:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=l} = 0. \quad (19.89)$$

Al sustituir las soluciones (19.88) en (19.86) y (19.87) nos convencemos de que se debe eliminar la solución  $\text{sen } \frac{\omega}{a} z$  de la ecuación (19.87), puesto que no corresponde a la primera condición (19.89).

Para garantizar la segunda condición (19.89) es necesario que se cumpla la igualdad

$$\text{sen } \frac{\omega}{a} l = 0. \quad (19.90)$$

La obtenida ecuación de la frecuencia será satisfecha cuando

$$\frac{\omega}{a} l = i\pi,$$

siendo  $i = 1, 2, 3 \dots$

La frecuencia del tono fundamental de las oscilaciones la tendremos cuando  $i = 1$ :

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (19.91)$$

El período de las oscilaciones correspondiente

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (19.92)$$

La forma de este modo de oscilaciones se muestra en la fig. 329, *b* mediante la curva *I*, para la cual

$$Z_1 = C_1 \cos \frac{\omega_1 z}{a} = C_1 \cos \frac{\pi z}{l}.$$

La forma del segundo modo de oscilaciones, para el cual

$$\frac{\omega_2 l}{a} = 2\pi \quad \text{y} \quad Z_2 = C_2 \cos \frac{2\pi z}{l},$$

puede verse en la fig. 329, *b* (curva *II*).

El aspecto general de la solución particular de la ecuación (19.83) para la *i*-ésima forma de las oscilaciones será

$$u = \cos \frac{i\pi z}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \text{sen } \frac{i\pi a t}{l} \right). \quad (19.93)$$

Imponiendo semejantes soluciones particulares se puede presentar cualquier oscilación longitudinal de la barra así:

$$u = \sum_{i=1,2,3\dots} \cos \frac{i\pi z}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \operatorname{sen} \frac{i\pi at}{l} \right), \quad (19.94)$$

eligiendo las constantes arbitrarias  $A_i$  y  $B_i$  a partir de las condiciones iniciales.

Por ejemplo, supongamos que cuando  $t = 0$  ( $u|_{t=0} = f(z)$ ; ( $u'|_{t=0} = f_1(z)$ ). Entonces de (19.94), siendo  $t = 0$ , deducimos

$$f(z) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos \frac{i\pi z}{l};$$

$$f_1(z) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{i\pi a}{l} B_i \cos \frac{i\pi z}{l},$$

de donde, utilizando el método de Fourier, hallamos que

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz;$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_1(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz.$$

Las oscilaciones torsionales de la barra (por ejemplo, cilíndrica) son fácilmente caracterizadas trazando una línea ondulada sobre la superficie desarrollada de dicha barra (fig. 330, a). Denotemos por  $\varphi$  el ángulo de torsión de la sección que se encuentra a una distancia  $z$  con respecto a la sección inmóvil, y por  $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$ , el ángulo de torsión de la sección con coordenada  $z + dz$  (fig. 330, b).

Entonces el ángulo de torsión relativo del elemento de longitud  $dz$  será  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , y los momentos torsionales (véase el § 46) en las secciones de la barra con la

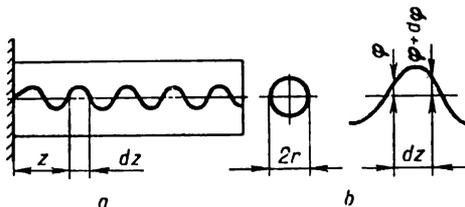


Fig. 330

rigidez a la torsión  $GJ_p$  que limitan su longitud elemental  $dz$  por la izquierda y la derecha serán, respectivamente:

$$GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{y} \quad GJ_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \right).$$

Igualando la resultante de estos momentos torsionales al momento de inercia de rotación  $\rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz$  del elemento de longitud  $dz$ , siendo  $\rho$  la densidad del material, obtenemos la ecuación diferencial de las oscilaciones torsionales de la barra:

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz.$$

Simplificando  $J_p$  y  $dz$ , resulta:

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (19.95)$$

Denotando  $\frac{G}{\rho}$  por  $a^2$ , se puede presentar la ecuación (19.95) en la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (19.96)$$

La solución de una ecuación de este tipo se examinó anteriormente para el caso de las oscilaciones longitudinales de la barra.

En la tabla 43 se dan las ecuaciones de frecuencia y formas propias de oscilaciones longitudinales y torsionales de las barras para diferentes condiciones de frontera.

### § 109. Oscilaciones transversales de barras prismáticas

Obtendremos la ecuación diferencial de las oscilaciones transversales de la barra a partir del examen de las condiciones de equilibrio dinámico del elemento  $dz$  (fig. 331) separado de una barra sujeta arbitrariamente.

Proyectando todas las fuerzas que actúan sobre el elemento en cuestión (incluidas, de acuerdo con el principio de D'Alembert, las fuerzas de inercia) sobre el eje vertical  $w$ , se tendrá:

$$Q - q_i dz - Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dz = 0,$$

de donde

$$q_i = - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad (19.97)$$

siendo  $Q$  la fuerza cortante;  $q_i$ , la intensidad de las fuerzas de inercia de masa

$$q_i = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (19.98)$$

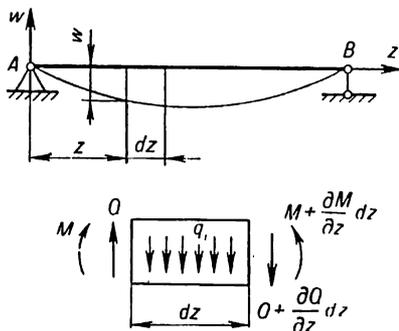


Fig. 331

( $F$  es el área de la sección transversal;  $\rho$ , la densidad del material;  $w$ , el desplazamiento transversal;  $t$ , el tiempo).

Sustituyendo (19.98) en (19.97) hallaremos la ecuación del movimiento de avance del elemento de la barra oscilatoria:

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (19.99)$$

Con el fin de obtener la ecuación del movimiento giratorio del elemento de la barra en el plano  $wz$  sumemos el ángulo de giro de la sección  $\theta$  originado por la flexión con el ángulo de deslizamiento  $\gamma$  determinado por la acción de la fuerza cortante:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \theta + \gamma. \quad (19.100)$$

Debido a la relación conocida entre el momento flector  $M$  y el ángulo de giro  $\theta$  (§ 54)

$$M = EJ \frac{d\theta}{dz} \quad (19.101)$$

y entre la fuerza cortante  $Q$  y el ángulo de deslizamiento  $\gamma$  para el sistema de coordenadas aceptado en nuestro caso (§ 66)

$$Q = -k\gamma FG \quad (19.102)$$

( $k$  es el coeficiente que toma en consideración la forma de la sección de la barra), la expresión para  $Q$  de acuerdo con (19.100)–(19.102) puede presentarse así:

$$Q = -kFG \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right). \quad (19.103)$$

Puesto que el momento de inercia de rotación de la masa del elemento examinado es igual a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \int y^2 dm = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \int y^2 \rho dF dz = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dz,$$

la ecuación del movimiento giratorio del elemento a base del principio de D'Alembert puede escribirse en la siguiente forma:

$$Q dz - \frac{\partial M}{\partial z} dz = -\rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dz$$

o eliminando  $dz$  y sustituyendo (19.101), resulta:

$$kGF \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right) + EJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0.$$

Diferenciando esta ecuación respecto a  $z$  se tendrá

$$kGF \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + EJ \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} - \rho J \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} = 0. \quad (19.104)$$

Sustituyendo (19.103) en (19.99) se obtendrá

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kGF \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = 0. \quad (19.105)$$

Al eliminar de (19.104) y (19.105) el ángulo  $\theta$  se obtendrá la ecuación diferencial de las oscilaciones transversales libres de la barra

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \quad (19.106)$$

Suponiendo despreciables las fuerzas de inercia de rotación del elemento y la influencia de la fuerza cortante sobre la flecha, se puede presentar la ecuación (19.106) en siguiente forma:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (19.107)$$

La solución periódica más simple de la ecuación (19.107) es la llamada *oscilación fundamental*, en la cual la función de la flecha de la barra oscilatoria varía en el tiempo según la ley armónica

$$w = \varphi(z) \text{ sen } (\omega t + \alpha). \quad (19.108)$$

La función  $\varphi(z)$  que establece la ley de distribución de las desviaciones máximas de los puntos del eje de la barra se denomina *forma de la oscilación fundamental* o *forma propia*.

Para obtener las ecuaciones de las formas propias sustituimos (19.108) en (19.107), y simplificando  $\text{sen } (\omega t + \alpha)$  se obtendrá

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} - k^4 \varphi = 0, \quad (19.109)$$

donde

$$k^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}. \quad (19.110)$$

La solución general de la ecuación (19.109) es, por tanto,

$$\varphi(z) = A \cos kz + B \text{ sen } kz + C \text{ ch } kz + D \text{ sh } kz \quad (19.111)$$

o bien, siendo expresada por medio de las funciones de Krilov, cuyos valores se dan en el Apéndice 3, se escribe así:

$$\varphi(z) = C_1 S(kz) + C_2 T(kz) + C_3 U(kz) + C_4 V(kz).$$

Aquí,  $A, B, C, D$  (o  $C_1, C_2, C_3, C_4$ ) son las constantes de integración determinadas a partir de las condiciones de sujeción de la barra. Así, por ejemplo, para la sujeción articulada (fig. 332) las condiciones en los extremos serán las siguientes:

$$\text{cuando } z = 0 \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi''(0) = 0;$$

$$\text{cuando } z = l \quad \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(l) = 0.$$

Partiendo de estas condiciones y de (19.111) se tendrá

$$A + C = 0; \quad B \text{ sen } kl + D \text{ sh } kl = 0;$$

$$-A + C = 0; \quad -B \text{ sen } kl + D \text{ sh } kl = 0,$$

de donde

$$A = C = D = 0,$$

$$B \text{ sen } kl = 0.$$

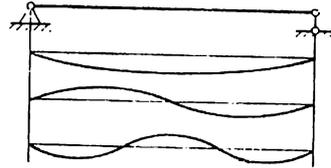


Fig. 332

Pero como  $B \neq 0$ , por consiguiente,  $\text{sen } kl = 0$ . De la ecuación de frecuencia obtenida se halla

$$k_i l = i\pi$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots).$$

De la igualdad

$$k_i^4 = \frac{\rho F \omega_i^2}{EJ} = \frac{m \omega_i^2}{EJ}$$

determinaremos la frecuencia propia circular

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (19.112)$$

el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2l^2}{i^2 \pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}}$$

y la frecuencia de las oscilaciones, Hz,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{i^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (19.113)$$

La ecuación de las formas propias de las oscilaciones de la barra será

$$\varphi_i(z) = B \operatorname{sen} \frac{i\pi z}{l}. \quad (19.114)$$

Las tres primeras formas propias de las oscilaciones de la viga sobre dos apoyos se muestran en la fig. 332.

La solución general de la ecuación diferencial (19.107) con arreglo a la viga examinada sobre dos apoyos puede escribirse en la siguiente forma:

$$w(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \operatorname{sen} \omega_i t) \operatorname{sen} \frac{i\pi z}{l}, \quad (19.115)$$

eligiendo  $a_i$  y  $b_i$  a partir de las condiciones iniciales (cuando  $t = 0$ ).

Las ecuaciones de frecuencia y sus raíces, al igual que las ecuaciones de formas propias de las oscilaciones transversales de barras para diferentes sujeciones de sus extremos se dan en la tabla 44. Las raíces de las ecuaciones de frecuencia de las oscilaciones transversales de barras sobre apoyos elásticos pueden verse en la tabla 45; de las barras con masas concentradas, en la tabla 46. En la tabla 47 se dan los valores de algunas integrales que se utilizan en el cálculo de las oscilaciones transversales de las barras.

Si la barra oscilatoria experimenta la acción de la fuerza longitudinal de compresión  $N$ , la ecuación diferencial de la línea elástica será

$$EJ \frac{d^2 w}{dz^2} = M(z) - Nw.$$

Después de doble diferenciación y sustitución según el principio de D'Alembert  $\frac{d^2 M}{dz^2} = -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  se obtendrá la ecuación diferencial de las oscilaciones transversales libres de la barra

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

La frecuencia propia de las oscilaciones se determinará en este caso mediante la expresión

$$\varphi(z) = A \cos k_1 z + B \operatorname{sen} k_1 z + C \operatorname{ch} k_2 z + D \operatorname{sh} k_2 z,$$

donde

$$k_1 = a \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k^4}{a^4}}};$$

$$k_2 = a \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k^4}{a^4}}};$$

$$a^2 = \frac{N}{EJ}.$$

La magnitud  $k$  se deduce mediante la fórmula (19.110).

Las expresiones para las frecuencias propias de las oscilaciones transversales de las barras cargadas con fuerzas longitudinales se dan en la tabla 48.

#### § 110. Principio de conservación de la energía durante las oscilaciones

Del principio de conservación de la energía durante las oscilaciones se desprende que la suma de la energía cinética y potencial de un sistema oscilatorio mecánico en cualquier momento de tiempo permanece constante (prescindimos de las pérdidas energéticas), es decir,

$$T + U = \text{const.} \quad (19.116)$$

En particular, con arreglo al sistema de un grado de libertad (fig. 333), para el cual

$$T = \frac{Q}{2g} \dot{x}^2;$$

$$U = \frac{cx^2}{2},$$

la ecuación (19.116) toma la forma:

$$\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \text{const.}, \quad (19.117)$$

siendo  $c$  la rigidez del muelle.

El segundo miembro de la ecuación (19.117) depende de las condiciones iniciales. Suponiendo, por ejemplo, que cuando  $t = 0$  el desplazamiento  $(x)_{t=0} = x_0$  y la velocidad inicial  $(\dot{x})_{t=0} = \dot{x}_0 = 0$ , se tendrá

$$\frac{Q}{2g} \dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}, \quad (19.118)$$

es decir, durante las oscilaciones la suma de la energía cinética y potencial se queda igual a la energía inicial de deformación del muelle alargado a un valor  $x_0$ .

Del análisis de la ecuación (19.118) se ve que en el momento en que el peso oscilante se encuentra en la posición media ( $x = 0$ ), la energía del sistema se determina por la energía cinética

$$\frac{Q\dot{x}_{\text{máx}}^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (19.119)$$

La ecuación (19.119) puede utilizarse para determinar la frecuencia de las oscilaciones. Efectivamente, considerando que

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad \dot{x}_{\text{máx}} = x_0 \omega,$$

después de sustituir los valores de  $x$  y  $\dot{x}_{\text{máx}}$  en (19.119) se tendrá

$$\frac{Qx_0^2\omega^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2},$$

de donde

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}$$

y

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{est}}}}, \quad (19.120)$$

lo que coincide con la fórmula (19.3) obtenida anteriormente.

Hagamos notar que, partiendo de la ecuación (19.117) que expresa el principio de conservación de la energía durante las oscilaciones, es fácil obtener la ecuación diferencial del movimiento del peso oscilante. Para esto basta con diferenciar la ecuación (19.117) respecto al tiempo  $t$  y hacer la correspondiente simplificación.

### § 111. Algunos métodos aproximativos de determinación de las frecuencias propias de las oscilaciones de sistemas elásticos

**Método de Rayleigh.** La frecuencia de las oscilaciones se determina partiendo del examen del balance de energía del sistema y haciendo ciertas suposiciones respecto a la deformación del sistema elástico oscilatorio. En particular, con el

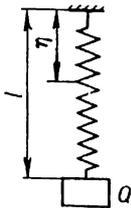


Fig. 333

propósito de tomar en consideración la masa del muelle en el sistema oscilatorio de un grado de libertad (fig. 333) se hace la suposición de que la masa del muelle es pequeña en comparación con la masa del peso suspendido  $Q$ , la forma de las oscilaciones no depende esencialmente de la masa del muelle y que se puede admitir con bastante precisión que el desplazamiento de cualquier sección transversal de éste a una distancia  $\eta$  del extremo sujeto es tal como si el muelle fuera imponderable y es

igual a  $\frac{x\eta}{l}$  ( $l$  es la longitud del muelle).

La energía cinética del elemento del muelle de longitud  $d\eta$ , siendo  $q$  el peso de la unidad de longitud de éste será

$$dT_m = \frac{q}{2g} \left( \frac{\eta}{l} \cdot \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta,$$

y la energía cinética total de todo muelle se expresará mediante la integral

$$T_m = \int_0^l \frac{q}{2g} \left( \frac{\eta}{l} \cdot \frac{dx}{dt} \right)^2 d\eta = \frac{1}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{ql}{3}.$$

Este valor de la energía cinética del muelle se debe sumar a la energía cinética del peso

$$T_Q = \frac{Q}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Entonces la energía cinética total será

$$T = T_Q + T_m = \frac{1}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \left( Q + \frac{ql}{3} \right).$$

La expresión de la energía potencial se queda como antes, o sea

$$U = \frac{cx^2}{2}.$$

Ahora la condición de conservación de la energía del sistema oscilatorio puede presentarse en la siguiente forma:

$$\frac{1}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \left( Q + \frac{ql}{3} \right) + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}.$$

Comparando esta ecuación con (19.118) encontramos que para evaluar la influencia de la masa del muelle en la frecuencia de oscilaciones propias hay que añadir al peso de la carga un tercio del peso del muelle. Así, pues, la frecuencia circular se determina mediante la fórmula

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{Q + \frac{ql}{3}}}. \quad (19.121)$$

Veamos las oscilaciones del peso situado en el centro de la viga (fig. 334). Siguiendo el método de Rayleigh se supone que el peso de la viga  $ql$  es pequeño en comparación con el peso  $Q$  y que la curva de la flecha de la viga durante las oscilaciones tiene la misma forma que la curva de la flecha estática. Denotando por  $f$  el desplazamiento del peso  $Q$  durante las oscilaciones, se tendrá la expresión del desplazamiento transversal de cualquier elemento de la viga de longitud  $dz$  y peso  $qdz$  que se encuentra a una distancia  $z$  del apoyo (fig. 266):

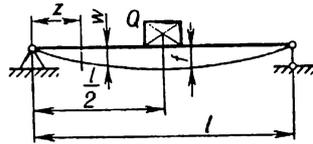


Fig. 334

$$w = f \frac{3zl^2 - 4z^3}{l^3}. \quad (19.122)$$

La energía cinética de la propia viga

$$T_v = 2 \frac{q}{2g} \int_0^{l/2} \left( \frac{df}{dt} \cdot \frac{3zl^2 - 4z^3}{l^3} \right)^2 dz = \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2.$$

La energía cinética del peso

$$T_p = \frac{Q}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2.$$

La energía cinética total del sistema será

$$T = T_p + T_v = \frac{Q + \frac{17}{35} ql}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2. \quad (19.123)$$

Haciendo uso de la expresión conocida para la energía potencial de la deformación de flexión

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EJ}$$

y también tomando en consideración que

$$M = EJ \frac{d^2 w}{dz^2},$$

donde para el caso examinado según (19.122)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{24}{l^3} fz,$$

resulta finalmente:

$$U = 2 \int_0^{l/2} \frac{EJ}{2} \left( \frac{24}{l^3} fz \right)^2 dz = \frac{24 EJ}{l^3} f^2.$$

La condición de conservación de la energía durante las oscilaciones tomará ahora la forma:

$$T + U = \frac{Q + \frac{17}{35} ql}{2g} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \frac{24 EJ}{l^3} f^2 = \text{const.}$$

Diferenciando esta última ecuación respecto al tiempo  $t$ , se tendrá después de la simplificación

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{48 EJ}{l^3} \cdot \frac{g}{Q + \frac{17}{35} ql} f = 0 \quad (19.124)$$

o bien, introduciendo la noción de la flecha reducida  $\delta_{\text{red}}$ ,

$$\delta_{\text{red}} = \frac{Q + \frac{17}{35} \gamma Fl}{48 EJ} l^3, \quad (19.125)$$

ya se puede presentar la ecuación diferencial de las oscilaciones del peso sobre la viga, contando con la masa de ésta, así:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{g}{\delta_{red}} f = 0.$$

De aquí la frecuencia circular de las oscilaciones del peso se determinará de acuerdo con (19.120) mediante la fórmula

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{red}}}. \quad (19.126)$$

De (19.125) se desprende que para tomar en consideración la masa de la viga durante la determinación de la frecuencia de oscilaciones propias del peso situado en el centro de la viga basta con agregar al peso de esta última  $\frac{17}{35} = 0,483$  del peso de la viga. La magnitud  $\frac{17}{35} q \frac{l}{g}$  se conoce con el nombre de *masa reducida de la viga*.

Utilicemos ahora el método de Rayleigh para determinar la frecuencia de las oscilaciones transversales de la barra con masas concentradas (fig. 328). En este caso se supone que la energía cinética del sistema se determina solamente por el desplazamiento de avance de las masas, mientras que la energía potencial se determina solamente por la flexión de la barra. Suponiendo que todas las masas oscilan cofásicamente con igual frecuencia, podemos describir el desplazamiento de una sección de la viga con abscisa  $z$  en función del tiempo mediante una ley sinusoidal

$$\varphi(z, t) = w(z) \text{sen}(\omega t + \alpha),$$

siendo  $w(z)$  la función que determina la forma de las oscilaciones.

La velocidad del desplazamiento del eje de la viga será

$$v(z, t) = \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = \omega w(z) \cos(\omega t + \alpha),$$

$$v_{\text{máx}} = \omega w(z).$$

El valor máximo de la energía cinética de  $n$  masas es igual a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega^2 w_i^2, \quad (19.127)$$

siendo  $w_i$  el valor de la amplitud de la flecha en el lugar de  $i$ -ésima masa concentrada.

La energía potencial máxima de deformación de la viga

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2w(z)}{dz^2} \right)^2 dz. \quad (19.128)$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (19.127) y (19.128) y resolviendo la ecuación obtenida respecto a  $\omega^2$  se tiene:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 dz}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i w_i^2} . \quad (19.129)$$

En el caso de distribución continua de la masa la fórmula de Rayleigh para la determinación aproximada del cuadrado de la frecuencia circular (19.129) toma el siguiente aspecto:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l m w^2 dz} , \quad (19.130)$$

siendo

$$m = \frac{F\gamma}{g} .$$

Si la forma verdadera de las oscilaciones  $w(z)$  es conocida, la fórmula (19.129) ofrece el valor exacto de la frecuencia. De ordinario, la función de la flecha  $w(z)$  no se conoce con anticipación y, siguiendo el método de Rayleigh, hay que proponérsela.

El método de Ritz no es sino el desarrollo del método de Rayleigh. En la ecuación de la línea elástica del sistema oscilatorio se introducen ciertos parámetros, cuyo valor se elige de tal manera que la frecuencia del tono fundamental sea mínima. Así, por ejemplo, siendo transversales las oscilaciones de la barra, la función de la flecha se elige en forma de la serie

$$w(z) = a_1 w_1(z) + a_2 w_2(z) + \dots, \quad (19.131)$$

cada miembro de la cual tiene que satisfacer las condiciones de frontera, y los coeficientes de la serie  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tienen que elegirse a partir de la condición del mínimo de frecuencia:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \cdot \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l m w^2 dz} = 0. \quad (19.132)$$

Al diferenciar esta ecuación y dividir el resultado por  $\int_0^l mw^2 dz$ , se tendrá, contando con (19.130):

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l \left[ EJ \left( \frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 - \omega^2 m w^2 \right] dz = 0. \quad (19.133)$$

El número de esas ecuaciones será tal, como términos hay en la serie (19.131). El sistema de ecuaciones obtenido es homogéneo respecto a los coeficientes  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Igualando la determinante de este sistema a cero se obtendrá la ecuación de frecuencia. Dicho método ofrece la posibilidad de hallar no sólo la frecuencia más baja de las oscilaciones propias, sino también los valores de las frecuencias más altas, aunque con menor exactitud.

**Método de Búbnov-Galerkin.** Apliquemos este método, por ejemplo, para resolver el problema sobre las oscilaciones transversales de una barra de sección variable descritas mediante la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ EJ(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (19.134)$$

La solución de dicha ecuación puede hallarse mediante la sustitución

$$w = Z(z) \cdot T(t),$$

utilizando la cual se obtendrá la ecuación diferencial para determinar la función de la flecha  $Z(z)$ :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ(z) \frac{d^2 Z}{dz^2} \right] - m \omega^2 Z = 0. \quad (19.135)$$

Según el método de Búbnov-Galerkin la curva verdadera de la flecha expresada mediante la función  $Z(z)$  se sustituye por cierta función aproximada  $\psi(z)$  que satisface las condiciones de frontera del problema. La función  $\psi(z)$  tiene que ser ortogonal al operador diferencial inicial. Con este fin formamos la integral

$$\int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dz^2} \left[ EJ(z) \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} \right] - m \omega^2 \psi(z) \right\} \psi(z) dz = 0. \quad (19.136)$$

De aquí, en particular, puede obtenerse la fórmula de Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l [EJ(z) \psi''(z)]' \psi(z) dz}{\int_0^l m \psi^2(z) dz}. \quad (19.137)$$

Si se presenta  $\psi(z)$  en forma de una serie

$$\psi(z) = a_1 \psi_1(z) + a_2 \psi_2(z) + \dots \quad (19.138)$$

y se considera cada uno de los sumandos  $\psi_i(z)$  como un posible desplazamiento, entonces en vez de (19.136) se obtendrá la relación expresando la igualdad a cero del trabajo virtual:

$$\int_0^l \{ [EJ(z)\psi''(z)]'' - m\omega^2\psi(z) \} \psi_i(z) dz = 0. \quad (19.139)$$

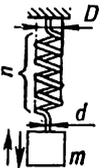
Se puede escribir tantas igualdades de este tipo, como sumandos tiene la expresión (19.138) aceptada para  $\psi(z)$ .

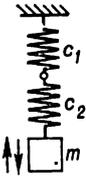
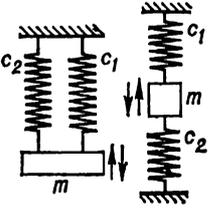
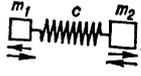
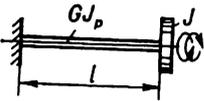
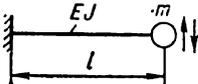
Cada una de las ecuaciones (19.139) es homogénea y contiene los coeficientes incógnitos  $a_1, a_2, a_3, \dots$  de primera potencia. Igualando a cero la determinante del sistema de las ecuaciones (19.139) se obtendrá la ecuación de frecuencia partiendo de la cual puede ser determinada la frecuencia angular de las oscilaciones propias.

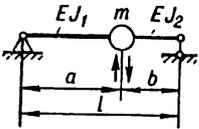
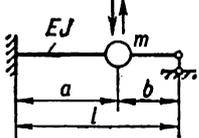
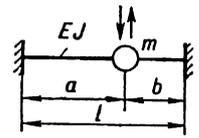
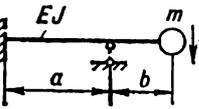
Tabla 42

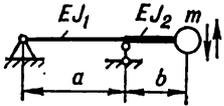
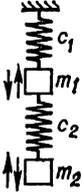
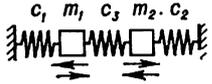
**Frecuencias propias de las oscilaciones de sistemas con uno y dos grados de libertad**

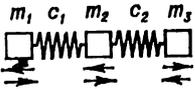
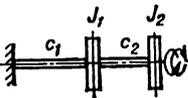
$m$ , la masa del peso;  $c$ , la rigidez del elemento elástico;  $l$ , la longitud de la barra;  $G$ , el módulo de elasticidad del deslizamiento;  $EF$ , la rigidez de la sección transversal de la barra en la tracción;  $GJ_p$ , la rigidez de la sección transversal de la barra en la torsión;  $EJ$ , la rigidez de la sección transversal de la barra en la flexión

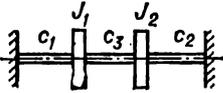
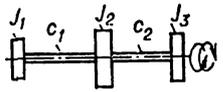
Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Gd^4}{8nmD^3}}$ <p><math>n</math>, el número de las espiras del muelle</p>
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EF}{ml}}$

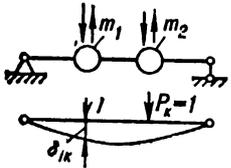
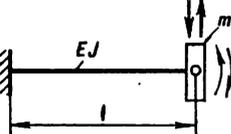
Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}}$ <p><math>J</math> es el momento de inercia de la masa del disco con respecto al eje de la barra</p>
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GJ_p(J_1 + J_2)}{lJ_1 \cdot J_2}}$ <p><math>J_1, J_2</math> son los momentos de inercia de las masas de los discos</p>
	1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$

Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	1	$f = \frac{l}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJ_1J_2}{m(aJ_2 + bJ_1)}}$ <p>cuando <math>J_1 = J_2 = J</math></p> $f = \frac{1}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJl}{m}};$ <p>cuando <math>J_1 = J_2 = J</math> y <math>a = b = \frac{l}{2}</math></p> $f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
	1	$f = \frac{l}{\pi ab} \sqrt{\frac{3EJl}{ma(3a + 4b)}}$ <p>cuando <math>a = b = \frac{l}{2}</math></p> $f = \frac{8}{\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{7ml^3}}$
	1	$f = \frac{l}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJl}{mab}}$ <p>cuando <math>a = b = \frac{l}{2}</math></p> $f = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
	1	$f = \frac{1}{\pi b} \sqrt{\frac{3EJ}{m(3a + 4b)}}$

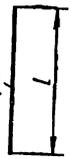
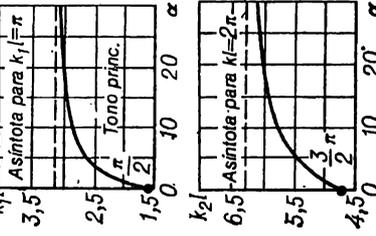
Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	1	$f = \frac{1}{2\pi b} \sqrt{\frac{3EJ_1 J_2}{m(aJ_2 + bJ_1)}}$ <p>cuando <math>J_1 = J_2 = J</math></p> $f = \frac{1}{2\pi b} \sqrt{\frac{3EJ}{m(a + b)}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_1 + c_2}{m_1} - \frac{c_2}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{c_2^2}{m_1 m_2}} \right]}$ <p>cuando <math>c_1 = c_2 = c</math> y <math>m_1 = m_2 = m</math></p> $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{c}{m}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{m_1 m_2}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_3}{m_1} + \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_1 + c_3}{m_1} - \frac{c_2 + c_3}{m_2} \right)^2 + 4 \frac{c_3^2}{m_1 m_2}} \right]}$ <p>cuando <math>c_1 = c_2 = c</math> y <math>m_1 = m_2 = m</math></p> $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} ; f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c + 2c_3}{m}}$

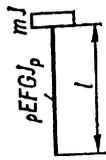
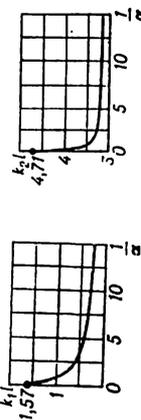
Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} \right) + \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_2}{m_3} \right) \right] \mp \right.}$ $\left. \mp \sqrt{\left[ \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} \right) - \left( \frac{c_2}{m_2} + \frac{c_2}{m_3} \right) \right]^2 + 4 \frac{c_1 c_2}{m_2^2}} \right\}} =$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_3} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \mp \right.}$ $\left. \mp \sqrt{\left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_2}{m_3} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)^2 - 4 c_1 c_2 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 m_2 m_3}} \right]}$ <p>cuando <math>c_1 = c_2 = c</math> y <math>m_1 = m_2 = m_3 = m</math></p> $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} ; f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3c}{m}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_2}{J_2} + \frac{c_1 + c_2}{J_1} \right) \mp \right.}$ $\left. \mp \sqrt{\left( \frac{c_2}{J_2} + \frac{c_1 + c_2}{J_1} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2}{J_1 J_2}} \right]} =$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_2}{J_1} + \frac{c_2}{J_2} \right) \mp \right.}$ $\left. \mp \sqrt{\left( \frac{c_1 + c_2}{J_1} - \frac{c_2}{J_2} \right)^2 + 4 \frac{c_2^2}{J_1 J_2}} \right]}$ <p><math>J_1, J_2</math> son los momentos de inercia de las masas de los discos respecto al eje del árbol cuando <math>c_1 = c_2 = c</math> y <math>J_1 = J_2 = J</math></p> $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{c}{J}}$

Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_3}{J_1} + \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_1 + c_3}{J_1} + \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right)^2 - 4 \frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}{J_1 J_2}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1 + c_3}{J_1} + \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_1 + c_3}{J_1} - \frac{c_2 + c_3}{J_2} \right)^2 + 4 \frac{c_3^2}{J_1 J_2}} \right]}$ <p><math>J_1, J_2</math> son los momentos de inercia de la masa de los discos respecto al eje del árbol cuando <math>c_1 = c_2 = c</math> y <math>J_1 = J_2 = J</math></p> $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{J}} ; f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c + 2c_3}{J}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3} + \frac{c_1 + c_2}{J_2} \right) \mp \sqrt{\left( \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3} + \frac{c_1 + c_2}{J_2} \right)^2 - 4c_1 c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3}} \right]}$ $= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_1}{J_2} \right) + \left( \frac{c_2}{J_2} + \frac{c_2}{J_3} \right) \right] \mp \sqrt{\left[ \left( \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_1}{J_2} \right) - \left( \frac{c_2}{J_2} + \frac{c_2}{J_3} \right) \right]^2 + 4 \frac{c_1 c_2}{J_2^2}} \right\}}$ <p><math>J_1, J_2, J_3</math> son los momentos de inercia de las masas de los discos respecto al eje del árbol cuando <math>c_1 = c_2 = c</math> y <math>J_1 = J_2 = J_3 = J</math></p> $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2c \mp c}{J}}$

Esquema del sistema oscilatorio	Número de grados de libertad	Frecuencia propia $f$ , Hz
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m_3} \left[ \delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} \mp \sqrt{\left( \delta_{11} + \delta_{22} \frac{m_2}{m_1} \right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) \frac{m_2}{m_1}} \right]}$ <p><math>\delta_{ik}</math> es la flecha del eje de la viga en la sección <math>i</math> debida a la fuerza unitaria aplicada en la sección <math>k</math>;</p> $\delta_{ik} = \delta_{ki}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6EJ}{ml^3} \left( 1 + \frac{l^2}{3i_0^2} \mp \sqrt{1 + \frac{l^2}{3i_0^2} + \frac{l^2}{9i_0^4}} \right)}$ <p><math>i_0</math> es el radio de giro del peso respecto a su centro de gravedad; cuando <math>l \geq i_0</math></p> $f_1 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3} \left( 1 - \frac{3i_0^2}{l^2} \right)}$ $f_2 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3} \left( 3 + \frac{4l^2}{3i_0^2} \right)}$

Ecuaciones de frecuencia y formas propias de las oscilaciones longitudinales y torsionales de barras de sección constante

Esquema de la sujeción de la barra	Ecuación de frecuencia	Raíces de la ecuación de frecuencia *	Forma propia de las oscilaciones
	$\text{sen } kl = 0$	$k_i l = i\pi$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\varphi(z) = C \cos kz$
	$\text{cos } kl = 0$	$k_i l = \frac{\pi}{2} (2i - 1)$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\varphi(z) = C \text{sen } kz$
	$\text{sen } kl = 0$	$k_i l = i\pi$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\varphi(z) = C \text{sen } kz$
	$\text{tg } kl = -\frac{kl}{\alpha}$  Para las oscilaciones longitudinales $\alpha = \frac{cl}{EF}$ ; para las oscilaciones torsionales $\alpha = \frac{cl}{GJ_p}$ , siendo $F$ y $J_p$ el área y el momento polar de inercia de la sección transversal de la barra; $c$ , la rigidez del apoyo respecto a los desplazamientos longitudinales y torsionales		$\varphi(z) = C \text{sen } kz$

Esquema de la sujeción de la barra	Ecuación de frecuencia	Raíces de la ecuación de frecuencia *					Forma propia de las oscilaciones																																																
	<p><math>\text{tg } kl = \alpha \cdot kl</math></p> <p>Para las oscilaciones longitudinales <math>\alpha = \frac{\rho F l}{m}</math> ;</p> <p>para las oscilaciones torsionales <math>\alpha = \frac{\rho J_p l}{J}</math>, siendo <math>m</math> la masa del peso; <math>J</math>, el momento de inercia de la masa del peso respecto al eje de la barra; <math>F</math>, el área de la sección; <math>J_p</math>, el momento polar de inercia de la sección de la barra</p>	<table border="1"> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>0</td> <td>0,5</td> <td>1,0</td> <td>10</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>k_1 l</math></td> <td><math>\pi</math></td> <td>4,26</td> <td>4,50</td> <td>4,69</td> <td><math>\frac{3}{2} \pi</math></td> </tr> </table>	$\alpha$	0	0,5	1,0	10	$\infty$	$k_1 l$	$\pi$	4,26	4,50	4,69	$\frac{3}{2} \pi$	$\varphi(z) = C \cos kz$																																								
$\alpha$	0	0,5	1,0	10	$\infty$																																																		
$k_1 l$	$\pi$	4,26	4,50	4,69	$\frac{3}{2} \pi$																																																		
	<p><math>kl \cdot \text{tg } kl = \alpha</math></p> <p>Durante las oscilaciones longitudinales <math>\alpha = \frac{\rho F l}{m}</math> ;</p> <p>durante las oscilaciones torsionales <math>\alpha = \frac{\rho J_p l}{J}</math>, siendo <math>m</math> la masa del peso; <math>J</math>, el momento de inercia de la masa del peso respecto al eje de la barra; <math>F</math>, el área de la sección; <math>J_p</math>, el momento polar de inercia de la sección de la barra</p>	<table border="1"> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>0,01</td> <td>0,05</td> <td>0,20</td> <td>0,30</td> <td>0,50</td> </tr> <tr> <td><math>k_1 l</math></td> <td>0,10</td> <td>0,21</td> <td>0,42</td> <td>0,52</td> <td>0,65</td> </tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>0,70</td> <td>0,90</td> <td>1,00</td> <td>1,50</td> <td>2,00</td> </tr> <tr> <td><math>k_2 l</math></td> <td>0,75</td> <td>0,82</td> <td>0,86</td> <td>0,98</td> <td>1,08</td> </tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>3,00</td> <td>4,00</td> <td>5,00</td> <td>10,0</td> <td>20,0</td> </tr> <tr> <td><math>k_3 l</math></td> <td>1,20</td> <td>1,27</td> <td>1,32</td> <td>1,42</td> <td>1,52</td> </tr> <tr> <td><math>\alpha</math></td> <td>100,0</td> <td><math>\infty</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>k_4 l</math></td> <td>1,568</td> <td><math>\pi/2</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	$\alpha$	0,01	0,05	0,20	0,30	0,50	$k_1 l$	0,10	0,21	0,42	0,52	0,65	$\alpha$	0,70	0,90	1,00	1,50	2,00	$k_2 l$	0,75	0,82	0,86	0,98	1,08	$\alpha$	3,00	4,00	5,00	10,0	20,0	$k_3 l$	1,20	1,27	1,32	1,42	1,52	$\alpha$	100,0	$\infty$				$k_4 l$	1,568	$\pi/2$							$\varphi(z) = C \sin kz$	
$\alpha$	0,01	0,05	0,20	0,30	0,50																																																		
$k_1 l$	0,10	0,21	0,42	0,52	0,65																																																		
$\alpha$	0,70	0,90	1,00	1,50	2,00																																																		
$k_2 l$	0,75	0,82	0,86	0,98	1,08																																																		
$\alpha$	3,00	4,00	5,00	10,0	20,0																																																		
$k_3 l$	1,20	1,27	1,32	1,42	1,52																																																		
$\alpha$	100,0	$\infty$																																																					
$k_4 l$	1,568	$\pi/2$																																																					

Oscilaciones longitudinales

$$\left[ m_1 m_2 \left( \frac{k}{\rho F} \right)^2 - 1 \right] \operatorname{tg} kl -$$

$$- (m_1 + m_2) \frac{k}{\rho F} = 0;$$

Oscilaciones torsionales

$$\left[ J_1 J_2 \left( \frac{k}{\rho J_p} \right)^2 - 1 \right] \operatorname{tg} kl -$$

$$- (J_1 + J_2) \frac{k}{\rho J_p} = 0,$$



siendo  $m_1, m_2$  las masas de los pesos;  $J_1, J_2$ , momentos de inercia de la masa de los pesos respecto al eje de la barra;  $F$ , el área de la sección;  $J_p$ , el momento polar de inercia de la sección de la barra

$$\varphi(z) =$$

$$= C \left( \cos kz -$$

$$- \frac{m_1}{\rho F} \operatorname{sen} kz \right)$$

$$\varphi(z) =$$

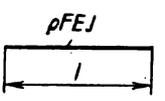
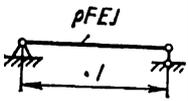
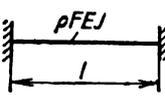
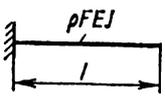
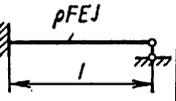
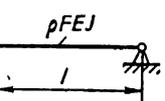
$$= C \left( \cos kz -$$

$$- \frac{J_1}{\rho J_p} k \operatorname{sen} kz \right)$$

\* Las frecuencias propias se determinan mediante la fórmula  $f_1 = \frac{k_1}{2\pi} a$  siendo  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  para las oscilaciones longitudinales

y  $a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$  para las torsionales.

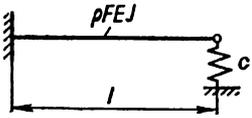
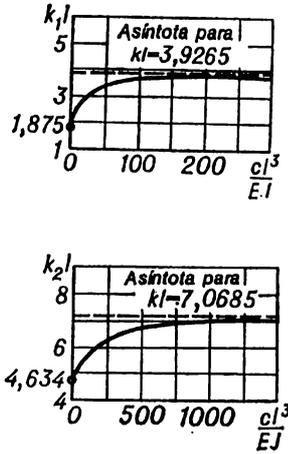
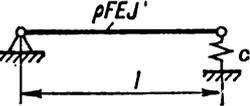
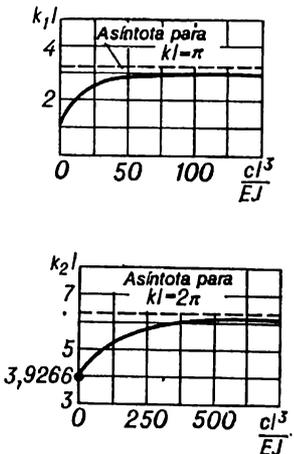
Ecuaciones de frecuencia y formas propias de las oscilaciones transversales de barras de sección constante

Esquema de la sujeción de la barra	Ecuación de frecuencia	Raíces de la ecuación de frecuencia *		Forma propia de las oscilaciones
		$i$	$k_i l$	
	$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = 1$	1 2 3 4 5 $i > 3$	0 4,730 7,853 10,996 14,137 $\frac{\pi}{2} (2i - 1)$	$\varphi(z) = (\operatorname{ch} kl - \cos kl) \times$ $\times (\operatorname{sh} kz + \operatorname{sen} kz) -$ $- (\operatorname{sh} kl - \operatorname{sen} kl) \times$ $\times (\operatorname{ch} kz + \cos kz)$
	$\operatorname{sen} kl = 0$	1 2 3 4 $i$	3,142 6,283 9,425 12,566 $i\pi$	$\varphi(z) = \operatorname{sen} kz$
	$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = -1$	1 2 3 4 $i > 2$	4,730 7,853 10,996 14,137 $\frac{\pi}{2} (2i + 1)$	$\varphi(z) = (\operatorname{sh} kl - \operatorname{sen} kl) \times$ $\times (\operatorname{ch} kz - \cos kz) -$ $- (\operatorname{ch} kl - \cos kl) \times$ $\times (\operatorname{sh} kz - \operatorname{sen} kz)$
	$\cos kl \cdot \operatorname{ch} kl = -1$	1 2 3 4 $i > 3$	1,875 4,694 7,855 10,996 $\frac{\pi}{2} (2i - 1)$	$\varphi(z) = (\operatorname{sh} kl + \operatorname{sen} kl) \times$ $\times (\operatorname{ch} kz - \cos kz) -$ $- (\operatorname{ch} kl + \cos kl) \times$ $\times (\operatorname{sh} kz - \operatorname{sen} kz)$
	$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$	1 2 3 4 $i$	3,927 7,069 10,210 13,352 $\frac{\pi}{4} (4i + 1)$	$\varphi(z) = (\operatorname{sh} kl + \operatorname{sen} kl) \times$ $\times (\operatorname{ch} kz - \cos kz) -$ $- (\operatorname{ch} kl + \cos kl) \times$ $\times (\operatorname{sh} kz - \operatorname{sen} kz)$
	$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$	1 2 3 4 5 $i > 1$	0 3,927 7,069 10,210 13,352 $\frac{4i - 3}{4} \pi$	$\varphi(z) = (\operatorname{ch} kl + \cos kl) \times$ $\times (\operatorname{sh} kz + \operatorname{sen} kz) -$ $- (\operatorname{sh} kl + \operatorname{sen} kl) \times$ $\times (\operatorname{ch} kz + \cos kz)$

\* Las frecuencias propias se determinan mediante la fórmula

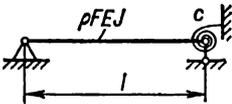
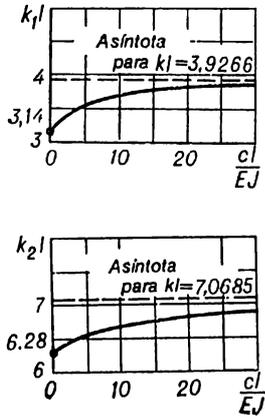
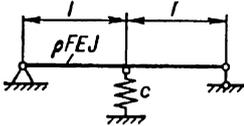
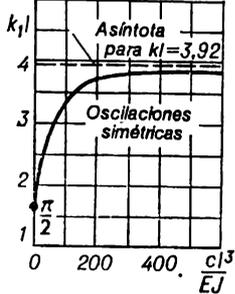
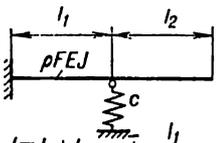
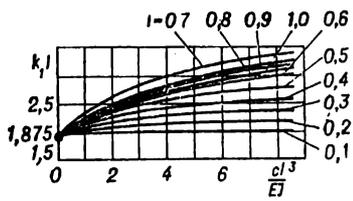
$$f_i = \frac{(k_i l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \text{ siendo } m = \rho F.$$

Raíces de las ecuaciones de frecuencia de las oscilaciones transversales de barras de sección constante sobre apoyos elásticos \*

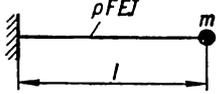
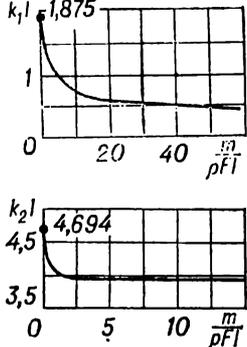
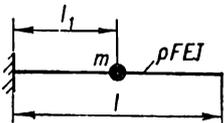
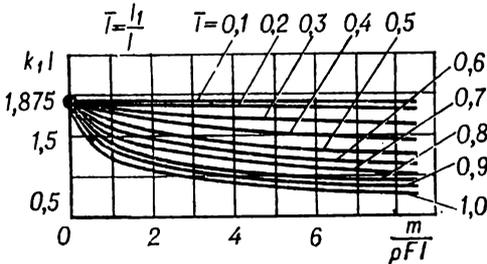
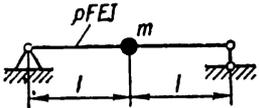
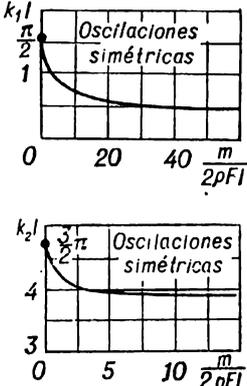
Esquema de la sujeción de la barra	Diagrama para determinar los coeficientes $kI$
	
	

\* Las frecuencias propias se determinan mediante la fórmula

$$f = \frac{(kI)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{k^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \text{ siendo } m = \rho F.$$

Esquema de la sujeción de la barra	Diagrama para determinar los coeficientes $k_l$
	 <p>Asíntota para <math>k_l = 3,9266</math></p> <p>Asíntota para <math>k_l = 7,0685</math></p>
	 <p>Asíntota para <math>k_l = 3,92</math></p> <p>Oscilaciones simétricas</p>
 <p><math>l = l_1 + l_2</math>; <math>l = \frac{l_1}{l_1 + l_2}</math></p>	 <p><math>l = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,8, 0,9, 1,0</math></p>

**Raíces de las ecuaciones de frecuencia de las oscilaciones transversales de barras de sección constante con masas concentradas  $m$  \***

Esquema de la barra	Diagrama para determinar los coeficientes $kl$
	
	
	

\* Las frecuencias propias se determinan mediante la fórmula

$$f = \frac{(kl)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

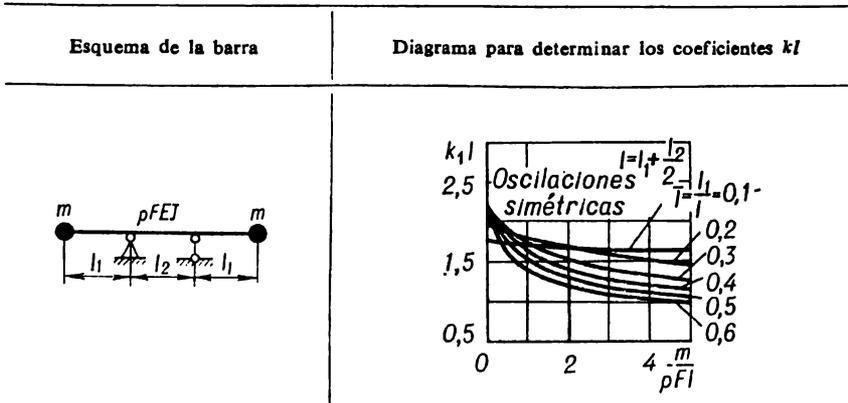


Tabla 47

Valores de algunas integrales que se utilizan en los cálculos de las oscilaciones transversales de las barras ( $\varphi_i$  es la  $i$ -ésima forma propia de las oscilaciones)

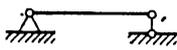
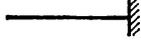
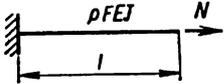
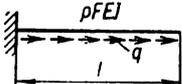
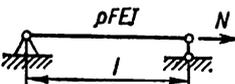
Esquema de la sujeción de la barra	i	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l \varphi_i^2 dx$	$l \int_0^l (\varphi_i')^2 dx$	$l^3 \int_0^l (\varphi_i'')^2 dx$
	1	0,6366	0,5	4,9343	48,705
	2	0	0,5	19,739	779,28
	3	0,2122	0,5	44,413	3 945,1
	4	0	0,5	78,955	12 468
	5	0,1273	0,5	123,37	30 440
	1	0,8445	1,0359	12,775	518,52
	2	0	0,9984	45,977	3 797,1
	3	0,3637	1,0000	98,920	14 619
	4	0	1,0000	171,58	39 940
	5	0,2314	1,0000	264,01	89 138
	1	0,6147	0,4996	5,5724	118,80
	2	-0,0586	0,5010	21,451	1 250,40
	3	0,2364	0,5000	47,017	5 433,0
	4	-0,0310	0,5000	82,462	15 892
	5	0,1464	0,5000	127,79	36 998
	1	1,0667	1,8556	8,6299	22,933
	2	0,4252	0,9639	20,176	467,97
	3	0,2549	1,0014	77,763	3 808,5
	4	0,1819	1,0000	152,83	14 619
	5	0,1415	1,0000	205,52	39 940

Tabla 48

Frecuencias propias de las oscilaciones transversales de barras de sección constante cargadas con fuerzas longitudinales

Esquema de la barra	Frecuencia propia de las oscilaciones
	$f_1 = \frac{0,562}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \left( 1 + \frac{5NI^2}{14EJ} \right)}$
	$f_1 = \frac{0,562}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \left( 1 + \frac{ql^3}{8EJ} \right)}$
	$f_i = \frac{\pi}{2} \frac{i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \left( 1 + \frac{NI^2}{i^2 \pi^2 EJ} \right)}$

**RESISTENCIA DE LOS MATERIALES A LA ACCIÓN DE TENSIONES CÍCLICAS**

**§ 112. Fenómeno de fatiga de los materiales**

Se entiende por *fatiga de los materiales* (en particular, de los metales) el fenómeno de destrucción al alternar reiteradamente las cargas. La capacidad de los materiales de contrarrestar la destrucción durante la acción de tensiones cíclicas se denomina *resistencia a la fatiga del material*.

La destrucción por fatiga tiene lugar cuando existe una de las siguientes particularidades de sollicitación:

1) durante la sollicitación repetida de un signo que varía, por ejemplo, periódicamente de cero a máximo (fig. 335, *a*);

2) durante la sollicitación repetida que varía periódicamente no sólo por la magnitud, sino también por el signo (sollicitación de signo variable), cuando sobre la resistencia a la fatiga del material influyen al mismo tiempo tanto la repetición como la variación cíclica de la sollicitación. En este caso se distinguen la sollicitación simétrica (fig. 335, *b*) y disimétrica (fig. 335, *c, d*).

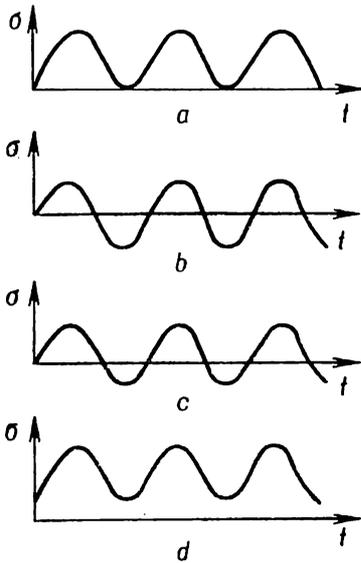


Fig. 335

Para la destrucción a causa de la fatiga no es suficiente que las tensiones sean cíclicas. Es necesario también que las tensiones tengan una magnitud determinada. *La tensión máxima que el material es capaz de contrarrestar sin destruirse, siendo como se quiera grande el número de repeticiones de las cargas, se denomina límite de resistencia a la fatiga o límite de fatiga.*

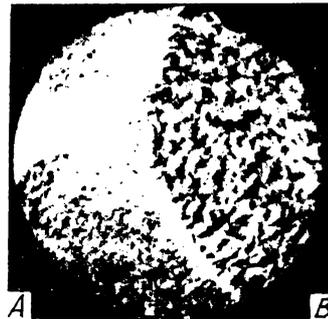


Fig. 336

La fractura por fatiga del metal tiene un aspecto característico (fig. 336). Sobre ella se pueden distinguir, generalmente, dos zonas: una de ellas (*A*) es lisa, esmerilada que se formó a causa del desarrollo paulatino de la grieta; la otra (*B*) es de grano grueso formada durante la rotura definitiva de la sección de la pieza debilitada por la desarrollada grieta de fatiga. La zona *B* de los materiales frágiles tiene una estructura macrocristalina, de los materiales dúctiles una estructura fibrosa.

El mecanismo de formación de las grietas durante la tensión cíclica es bastante complicado y no puede considerarse totalmente estudiado. De los postulados indiscutibles de la teoría de la fatiga pueden señalarse los siguientes:

1) los procesos que se operan en el material durante la sollicitación alternativa tienen un carácter local muy acentuado;

2) las tensiones tangenciales que originan deslizamientos plásticos y la destrucción por medio del cizallamiento, ejercen influencia definitiva sobre el fenómeno de la fatiga antes de la formación de la primera grieta. El desarrollo de las grietas de fatiga se acelera cuando existen las tensiones de tracción tanto para los materiales plásticos, como, sobre todo, para los frágiles (del tipo de la fundición), en los cuales la aparición de las grietas de desprendimiento aumenta esencialmente la sensibilidad a las tensiones de tracción.

El límite de resistencia a la fatiga se determina experimentalmente en las máquinas de ensayo correspondientes, ensayando una serie de probetas del material dado en cantidad no menor de 6—12. El límite de resistencia a la fatiga depende de varios factores, entre ellos de la forma y las dimensiones de la probeta o pieza, del modo de su elaboración, del estado de la superficie, del tipo del estado tensional (tracción-compresión, torsión, flexión), de la ley del cambio de la carga en el tiempo durante el ensayo, de la temperatura, etc.

En la mayoría de los casos las tensiones alternativas, que originan la destrucción a causa de la fatiga, son funciones del tiempo  $\sigma = f(t)$  con período igual a  $T$ . La totalidad de los valores de las tensiones durante un período se denomina *ciclo de tensiones* (fig. 337, a). Sobre la magnitud del límite de resistencia a la fatiga influyen las tensiones máximas ( $P_{m\acute{a}x}$ ) y mínimas ( $P_{m\acute{i}n}$ ) del ciclo. La característica principal del ciclo es *el coeficiente de asimetría del ciclo*

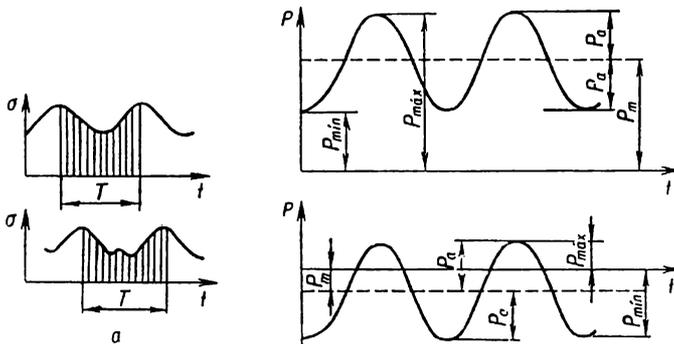


Fig. 337

$$r = \frac{P_{m\acute{i}n}}{P_{m\acute{a}x}} \quad (20.1)$$

Se distingue también *la tensión media del ciclo* (fig. 337, b)

$$P_m = \frac{P_{m\acute{a}x} + P_{m\acute{i}n}}{2} \quad (20.2)$$

y la *amplitud del ciclo*

$$P_a = \frac{P_{m\acute{a}x} - P_{m\acute{i}n}}{2} \quad (20.3)$$

La tensión media del ciclo puede ser tanto positiva como negativa; la amplitud del ciclo se determina por el valor absoluto (sin tomar en consideración el signo). De acuerdo con (20.2) y (20.3) es evidente que

$$P_{\text{máx}} = P_{\text{m}} + P_{\text{a}}; \quad P_{\text{mín}} = P_{\text{m}} - P_{\text{a}}.$$

El más peligroso es el llamado *ciclo simétrico* (cuando  $P_{\text{máx}} = -P_{\text{mín}}$  y  $P_{\text{m}} = 0$ ):

$$r = \frac{P_{\text{mín}}}{P_{\text{máx}}} = -1.$$

El límite de fatiga durante el ciclo simétrico se denota por  $p_{-1}$ .

Durante *el ciclo de pulsación*, cuando  $P_{\text{mín}} = 0$ :

$$r = \frac{0}{P_{\text{máx}}} = 0,$$

y el límite de resistencia a la fatiga se denota por  $p_0$ . Si la carga es constante, cuando  $P_{\text{máx}} = P_{\text{mín}} = P$ ,

$$r = \frac{P}{P} = 1.$$

En el caso más general, cuando el coeficiente de asimetría es  $r$ , el límite de fatiga se denota por  $p_r$ . En el caso particular, por ejemplo, cuando  $r = -0,5$ , el límite de fatiga se denota por  $p_{-0,5}$ . Los ciclos que tienen iguales características  $r$  se llaman *semejantes*. La característica del ciclo, o el coeficiente de asimetría, puede variar de  $-\infty$  a  $+\infty$  (véase la tabla 49).

No se debe perder de vista que en los casos en que se trata de la fatiga durante la tracción-compresión o la flexión, en vez de las designaciones  $P_{\text{a}}, P_{\text{m}}, P_0, P_{\text{máx}}, P_{\text{mín}}$ , etc. es necesario utilizar las designaciones  $\sigma_{\text{a}}, \sigma_{\text{m}}, \sigma_0, \sigma_{\text{máx}}, \sigma_{\text{mín}}$ , etc., respectivamente, y en el caso de estudiar la resistencia de los materiales a la acción de las tensiones tangenciales cíclicas (durante la torsión cíclica) se deben utilizar las denotaciones  $\tau_{\text{a}}, \tau_{\text{m}}, \tau_0, \tau_{\text{máx}}, \tau_{\text{mín}}$ , etc.

### § 113. Métodos de determinación del límite de resistencia a la fatiga. Diagramas de la fatiga

Durante el ensayo del material a la fatiga se utilizan, generalmente, probetas cilíndricas lisas de 7–10 mm de diámetro.

Según sea el tipo de las tensiones alternativas que actúan en la probeta (tracción—compresión, flexión alternativa, torsión alternativa), al igual que la característica del ciclo (coeficiente de asimetría  $r$ ) los valores del límite de resistencia a la fatiga serán diferentes. Por eso, planteando la tarea de obtener el límite de resistencia a la fatiga del material se debe señalar de antemano para qué tipo de la deformación (flexión, torsión, etc.) y también para qué carácter del cambio de las tensiones durante el ciclo, es decir, para qué valor de  $r$  se debe determinar el límite de resistencia a la fatiga.

De acuerdo con la tarea planteada se escoge la máquina de ensayo. Para el ensayo a la fatiga durante la flexión se utilizan máquinas (fig. 338), en las cuales las tensiones simétricas cíclicas en la probeta ensayada surgen a costa de la rotación de esta probeta, cargada con el peso sujetado al extremo mediante un cojinete de bolas. El número de revoluciones por minuto de tales máquinas es, ordinaria-

mente, de cerca de 3000 (50 Hz). Las máquinas modernas de fatiga, en particular, las máquinas con vibradores electromagnéticos para el ensayo durante la tracción-compresión, permiten realizar los ensayos con frecuencias del orden de 10 000—20 000 Hz.

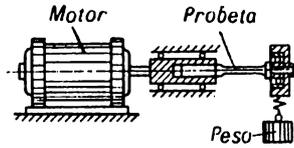


Fig. 338

Durante el ensayo de una partida de probetas con el propósito de determinar el límite de resistencia a la fatiga es necesario asegurar diferentes tensiones en probetas distintas para poner de manifiesto las regularidades del cambio del número de ciclos hasta la destrucción para tales o cuales niveles de tensiones.

La interpretación de los datos experimentales obtenidos se efectúa mediante la construcción de *curvas de la fatiga*, llamadas muchas veces *curvas de Vöhler* (fig. 339).

La curva de la fatiga se construye por puntos en las coordenadas siguientes: la tensión máxima del ciclo  $p_{m\acute{a}x}$  ( $\sigma_{m\acute{a}x}$  o  $\tau_{m\acute{a}x}$ ) — el número de ciclos hasta la destrucción  $N$ . A cada punto le corresponde una probeta destruida que trabajó  $N$  ciclos con  $p_{m\acute{a}x}$  dada.

Conforme disminuye la tensión, las probetas resisten hasta la destrucción cada vez más ciclos, y la curva de la fatiga  $p_{m\acute{a}x} = f(N)$  parece como si se acercara a cierta asíntota paralela al eje de abscisas  $N$ . El número de ciclos, para el cual

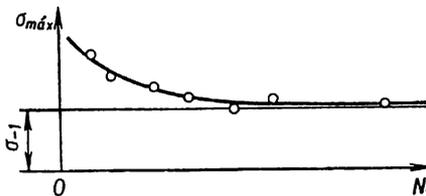


Fig. 339

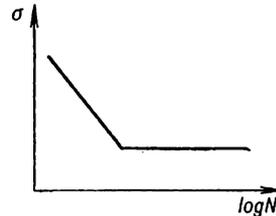


Fig. 340

la curva de la fatiga empieza a coincidir prácticamente con la asíntota, puede tomarse por *base del ensayo a la fatiga*, es decir, por tal número de ciclos, cuya superación para la tensión dada no tiene que llevar prácticamente a la descomposición de la probeta. En fin, se entiende por *base del ensayo a la fatiga el número máximo de sollicitaciones cíclicas, cuya considerable superación no debe llevar a las destrucciones de fatiga de la probeta ensayada para la tensión dada*.

Para los metales ferrosos (acero, fundición, etc.) por base del ensayo se toman en la práctica de ingeniería 10 millones de ciclos; para los metales no ferrosos (cobre, aluminio, etc.) la base del ensayo es 5—10 veces mayor que para los ferrosos.

En algunos casos, sobre todo para los metales no ferrosos, la curva de la fatiga en las coordenadas  $N, p$  trata de aproximarse lentamente a la asíntota, por eso la base del ensayo se tiene que elegir mucho mayor. En tales casos, en general, es difícil hablar del verdadero, o físico, límite de fatiga, porque éste prácticamente no existe. Se habla del límite convencional de fatiga, compren-

diendo con eso la tensión máxima que no lleva a la destrucción al realizar un número determinado, dado de antemano, de ciclos tomado por base del ensayo.

Además de la construcción de los diagramas primarios de la fatiga en las coordenadas  $N, \sigma_{m\acute{a}x}$  para la tracción-compresión o en las coordenadas  $N, \tau_{m\acute{a}x}$  para la torsión, éstos se construyen también en las coordenadas semilogarítmicas  $\log N, \sigma_{m\acute{a}x}$  (fig. 340) o  $\log N, \tau_{m\acute{a}x}$ . En este caso el límite de fatiga se caracterizará por la ordenada del tramo horizontal de la curva de la fatiga.

Como demuestran los numerosos ensayos a la fatiga, para algunos materiales pueden notarse las siguientes relaciones entre los límites de resistencia a la fatiga para el ciclo simétrico obtenidas durante la flexión  $\sigma_{-1}^f$ , torsión  $\tau_{-1}$  y tracción-compresión  $\sigma_{-1}^0$  sobre probetas lisas. Para el acero  $\sigma_{-1}^0 = 0,7 \sigma_{-1}^f$ ; para la fundición  $\sigma_{-1}^0 = 0,65 \sigma_{-1}^f, \tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1}^f$ ; para los aceros y aleaciones ligeras  $\tau_{-1} = 0,55 \sigma_{-1}^f$ . Se notó también que para el acero existen las siguientes relaciones entre los límites de resistencia a la fatiga y la resistencia provisional a la tracción:  $\sigma_{-1}^0 = 0,28 \sigma_p; \sigma_{-1}^f = 0,4 \sigma_p; \tau_{-1} = 0,22 \sigma_p$ . Para los metales no ferrosos  $\sigma_{-1}^f = (0,24 - 0,5) \sigma_p$ .

**Diagrama de las tensiones límites.** Para caracterizar la resistividad del material a las tensiones cíclicas para diferente asimetría del ciclo se construye el llamado *diagrama de las tensiones límites* (fig. 341) en las coordenadas  $\sigma_{m\acute{a}x}, \sigma_{m\acute{m}n} - \sigma_m$  (*diagrama de Smith*).

Las ordenadas de la curva  $CAB$  del diagrama corresponden a los valores de los límites de fatiga (valores máximos de la tensión) para diferente asimetría del ciclo, que se toman de los diagramas primarios de la fatiga.

La tangente del ángulo de inclinación del rayo trazado desde el origen de coordenadas hasta la intersección con la curva límite  $CAB$  y que forma un ángulo  $\beta$  con el eje de abscisas  $\sigma_m$  será

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_m} = \frac{2\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{m}n}} = \frac{2}{1 + r} \quad (20.4)$$

Los diagramas de las tensiones límites en la parte superior se acotan, de ordinario, por el límite de resistencia o el límite de fluencia del material. El aspecto aproximado del diagrama de las tensiones límites acotado por el límite de fluencia  $\tau_f$  para el caso de torsión cíclica puede verse en la fig. 342.

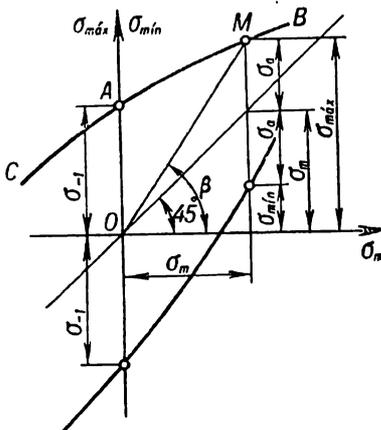


Fig. 341

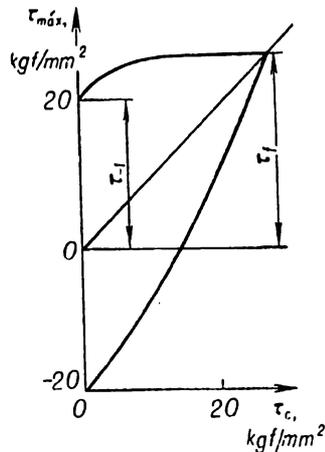


Fig. 342

Los diagramas de las tensiones límites pueden ser contruidos también en las coordenadas  $\sigma_a - \sigma_m$  (*diagrama de Haigh*). En este caso (fig. 343) la tangente del ángulo  $\beta$  formado por el rayo trazado del origen de coordenadas con la curva límite se expresará así:

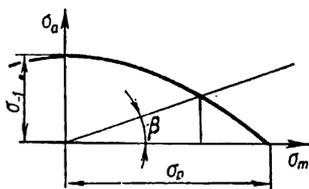


Fig. 343

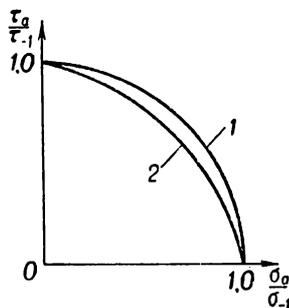


Fig. 344

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{m\max} - \sigma_{m\min}}{\sigma_{m\max} + \sigma_{m\min}} = \frac{1 - r}{1 + r}. \quad (20.5)$$

Para evaluar la resistencia del material a las tensiones cíclicas durante el estado tensional complejo, por ejemplo, durante la acción combinada de la torsión cíclica y la flexión, se utilizan las máquinas de fatiga correspondientes que permiten obtener el estado tensional que nos interesa. En la fig. 344 pueden verse los resultados de los ensayos con probetas lisas para diferente combinación de las tensiones alternativas normales ( $\sigma$ ) y tangenciales ( $\tau$ ), siendo simétrico el ciclo. Por  $\sigma_{-1}$  y  $\tau_{-1}$  están denotados los límites de resistencia a la fatiga solamente durante la flexión y la torsión, respectivamente;  $\sigma_a$  y  $\tau_a$  son las amplitudes límites durante la acción simultánea de la flexión y la torsión. Los datos experimentales se agrupan cerca de la curva que con suficiente grado de exactitud puede ser aproximada para los aceros de construcciones mediante un arco circular (fig. 344, curva 1) definido por la ecuación

$$\left( \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_a}{\tau_{-1}} \right)^2 = 1. \quad (20.6)$$

Para los aceros y las fundiciones de alta resistencia los datos experimentales se sitúan más cerca de los arcos elípticos (fig. 344, curva 2).

En el caso de ciclo simétrico, observados el sincronismo y el carácter cofásico de las tensiones, la condición de resistencia expresada por medio de las amplitudes de las tensiones principales de acuerdo con la tercera teoría de resistencia se escribirá así:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a = \sigma_{-1}, \quad (20.7)$$

y por la cuarta teoría de resistencia

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \quad (20.8)$$

Durante el estado tensional complejo caracterizado por la acción combinada de la flexión cíclica y la torsión, la condición de resistencia (20.8), tomando en consideración la relación  $\sigma_{-1} \approx \sqrt{3}\tau_{-1}$ , tendrá el siguiente aspecto:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left( \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \right)^2} \tau_a = \sigma_{-1}. \quad (20.9)$$

Dicha condición coincide con la expresión (20.6) que se desprende de los datos experimentales.

**§ 114. Influencia de los factores de construcción y tecnológicos sobre el límite de resistencia a la fatiga del material**

**Influencia de la concentración de tensiones.** Lo que más influye sobre el límite de resistencia a la fatiga es la concentración de tensiones, cuyo grado se caracteriza mediante el coeficiente teórico de concentración  $\alpha$  (véase el § 27). Como demuestran los experimentos, el límite de fatiga de las probetas con concentradores de tensiones  $p_{-1c}$  resulta mayor que el calculado por medio del coeficiente teórico de concentración  $\alpha$ , es decir,

$$p_{-1c} \geq \frac{p_{-1}}{\alpha}.$$

Por eso junto con el coeficiente teórico de concentración se introduce la noción de *coeficiente de concentración efectivo o real*  $k$ . Estos coeficientes se denotan así: para las tensiones normales

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1c}};$$

para las tensiones tangenciales

$$k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1c}},$$

siendo  $\sigma_{-1}$  y  $\tau_{-1}$  los límites de resistencia a la fatiga obtenidos durante la acción de las tensiones normales y tangenciales cíclicas sobre probetas lisas;  $\sigma_{-1c}$  y  $\tau_{-1c}$ , los límites de resistencia a la fatiga de las probetas con concentradores de tensiones.

Prácticamente resultó más cómodo deducir el coeficiente efectivo de concentración por medio del llamado *coeficiente de sensibilidad* del material a la concentración de tensiones

$$q = \frac{k - 1}{\alpha - 1} \quad (20.10)$$

que depende del material, al igual que de los coeficientes  $q_{\sigma}$ ;  $k_{\sigma}$ ;  $\alpha_{\sigma}$  durante las tensiones normales, o bien  $q_{\tau}$ ;  $k_{\tau}$ ;  $\alpha_{\tau}$ , durante las tangenciales.

Para determinar el coeficiente de sensibilidad  $q$  en la literatura hay diagramas (fig. 345). Conociendo  $q$  y el coeficiente teórico de concentración de tensiones  $\alpha$  se puede deducir según (20.10) el coeficiente efectivo de concentración  $k$  mediante la fórmula

$$k = 1 + q(\alpha - 1). \quad (20.11)$$

Para el material sensible a la concentración de tensiones, cuando  $q \rightarrow 1$ ,  $k \rightarrow \alpha$ . Para el material no sensible a la concentración de tensiones, cuando  $q \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 1$

La influencia de la concentración de las tensiones durante el estado tensional complejo se evalúa a base del ensayo de probetas con concentradores y obtención de los diagramas correspondientes (fig. 346) que son análogos a los diagramas

dados para probetas lisas (fig. 344) y se describen por medio de la dependencia elíptica

$$\left(\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{-1c}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ac}}{\tau_{-1c}}\right)^2 = 1, \quad (20.12)$$

siendo  $\sigma_{-1c}$ ,  $\tau_{-1c}$  los límites de fatiga durante el ciclo simétrico para probetas con concentradores sólo durante la flexión y sólo durante la torsión, respecti-

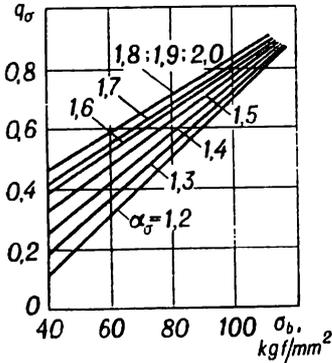


Fig. 345

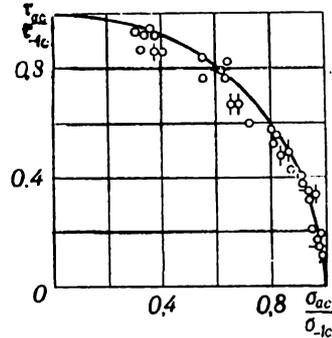


Fig. 346

vamente;  $\sigma_{ac}$  y  $\tau_{ac}$  son los valores de amplitud de las tensiones, cuando son simultáneos los cambios sincrónicos y cofásicos de las tensiones para el estado tensional complejo y para diferentes combinaciones de las tensiones alternativas normales y tangenciales.

**Influencia de las dimensiones (factor de escala).** Los experimentos demuestran que con el aumento de las dimensiones de la probeta el límite de resistencia a la fatiga disminuye. Esta disminución se toma en consideración, generalmente, por medio de cierto coeficiente denotado, por ejemplo, con arreglo a las tensiones normales así:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}, \quad (20.13)$$

siendo  $(\sigma_{-1})_{d_0}$  el límite de resistencia a la fatiga de la probeta de laboratorio lisa de diámetro  $d_0 = 7 + 10$  mm;  $(\sigma_{-1})_d$ , el límite de resistencia a la fatiga de la probeta en cuestión de diámetro  $d > d_0$ . Puesto que  $(\sigma_{-1})_d < (\sigma_{-1})_{d_0}$ , por supuesto, el coeficiente de influencia de las dimensiones absolutas  $\varepsilon_{\sigma} < 1$ .

Cuando existe un concentrador, la influencia de la escala se evalúa análogamente a lo que se hizo para probetas lisas por medio del coeficiente  $\varepsilon_{\sigma c}$ :

$$\varepsilon_{\sigma c} = \frac{(\sigma_{-1c})_d}{(\sigma_{-1c})_{d_0}}, \quad (20.14)$$

siendo  $(\sigma_{-1c})_d$  y  $(\sigma_{-1c})_{d_0}$  los límites de resistencia a la fatiga de la pieza y la probeta de laboratorio, respectivamente. En la fig. 347 pueden verse las curvas de la dependencia  $\varepsilon = f(d)$ . La curva 1 corresponde a la pieza de acero al carbono sin concentrador; la curva 2, a la pieza de acero aleado ( $\sigma_p = 100 + 120$  kgf/mm<sup>2</sup>) sin concentrador y de acero al carbono con concentrador; la curva 3, a la pieza de acero aleado con concentrador; la curva 4, a cualquier acero, siendo muy

depende de la concentración de tensiones (por ejemplo, para el concentrador del tipo de ranura).

La disminución del límite de fatiga con el aumento de las dimensiones es sobre todo muy bien expresada para los materiales heterogéneos. Así, por ejemplo, a medida que aumentan las dimensiones de la probeta de fundición gris de 3 a 10 mm a 50 mm, la disminución de  $\sigma_p$  y  $\sigma_{-1}$  puede alcanzar de 60 a 70%.

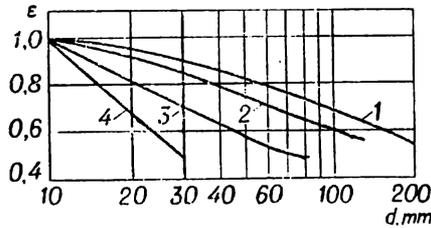


Fig. 347

Para el acero al carbono el aumento del diámetro de la probeta de 7 mm a 150 mm conduce a la reducción del límite de resistencia a la fatiga en un 45%, aproximadamente.

Además del coeficiente efectivo de concentración  $(k_\sigma)_d$  se introduce para la probeta el concepto de *coeficiente efectivo de concentración de tensiones para la pieza*  $(k_\sigma)_p$ , que toma en consideración simultáneamente tanto las dimensiones como la concentración:

$$(k_\sigma)_p = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1c})_d} \quad (20.15)$$

Si  $(k_\sigma)_d$  se determina sobre probetas de un diámetro bastante grande (cuando el aumento ulterior del diámetro influye poco sobre  $(k_\sigma)_d$ ), entonces

$$(k_\sigma)_p = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\epsilon_\sigma)_d (\sigma_{-1c})_d} = \frac{(k_\sigma)_d}{(\epsilon_\sigma)_d} \quad (20.16)$$

La influencia de los concentradores de tensión depende esencialmente del tipo del estado tensional. Por ejemplo, durante la torsión cíclica el coeficiente de concentración resulta más bajo que durante la flexión, siendo igual la forma del concentrador. Esto se ve, en particular, de las figs. 348 y 349, en que se

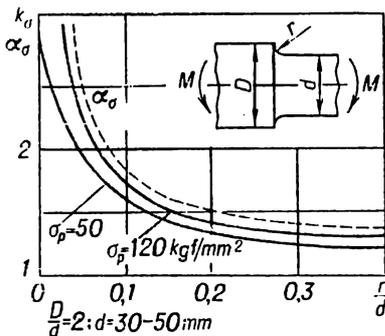


Fig. 348

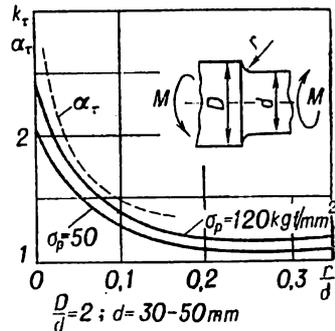


Fig. 349

dan los valores de los coeficientes efectivos de concentración para árboles escalonados con arista hueca para la flexión y torsión, respectivamente. La correlación entre  $k_\tau$  y  $k_\sigma$  puede representarse mediante la fórmula

$$k_\tau = 1 + 0,6 (k_\sigma - 1).$$

En la fig. 350 se dan los diagramas que caracterizan los coeficientes efectivos de concentración de tensiones durante la tracción—compresión. De los diagramas (figs. 348 y 350) se ve que los valores de los coeficientes efectivos durante la tracción—compresión rebasan un poco tales coeficientes durante la flexión. Los datos más amplios sobre los coeficientes de concentración y de sensibilidad a la concentración de tensiones se dan en el APENDICE 2.

#### Influencia del estado de la superficie.

El estado de la superficie de la pieza o la probeta influye considerablemente sobre el límite de resistencia a la fatiga. La explicación consiste en que en una superficie casi siempre hay defectos relacionados con la calidad del tratamiento mecánico de ésta, al igual que con la corrosión bajo la

influencia del medio ambiente. Por eso las grietas de fatiga empiezan, como regla, en la superficie, y la calidad mala de ésta lleva a la disminución del límite de fatiga.

La influencia de la calidad del tratamiento mecánico de la superficie sobre la resistencia a la fatiga se puede evaluar por medio de cierto coeficiente  $\beta < 1$ , que es igual a la relación del límite de resistencia a la fatiga de la probeta ensayada con tratamiento determinado de la superficie al límite de resistencia a la fatiga de una probeta minuciosamente pulida. En la fig. 351 puede verse el coeficiente  $\beta$  en función del límite de resistencia para diferentes tipos de tratamiento de la superficie de probetas de acero. La curva 1 corresponde a las probetas

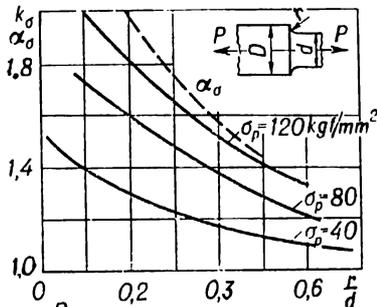


Fig. 350

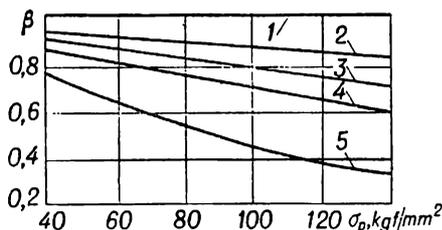


Fig. 351

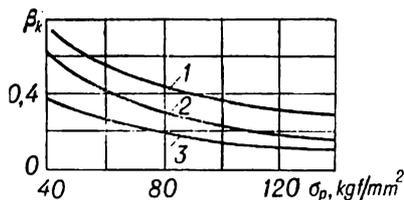


Fig. 352

pulidas; la curva 2, a las esmeriladas; la curva 3, a las probetas con torneado en fino; la curva 4, a las probetas con torneado en tosco; la curva 5, cuando existe la cascarilla. Del diagrama se ve que para el torneado en tosco el límite de resistencia a la fatiga disminuye en un 40%, cuando hay cascarilla, en un 70%.

La influencia de la corrosión, en el proceso de ensayo, sobre el límite de resistencia a la fatiga durante la flexión rotativa se muestra en forma de diagramas en la fig. 352, donde sobre el eje de ordenadas se colocó el valor del coeficiente

$$\beta_k = \frac{\sigma_{-1}^k}{\sigma_{-1}}$$

que expresa la relación del límite de resistencia a la fatiga de la probeta afectada por corrosión  $\sigma_{-1}^k$  al límite de resistencia a la fatiga de la probeta pulida  $\sigma_{-1}$ , y sobre el eje de las abscisas, la resistencia provisional del material de las probetas investigadas. La curva 1 caracteriza la influencia de la corrosión en agua dulce cuando hay concentradores de las tensiones; la curva 2, en agua dulce sin concentradores y en agua marina cuando hay concentración; la curva 3, en agua marina sin concentración.

**Influencia de las pausas.** Las pausas (interrupciones de carga) ejercen influencia sobre el límite de resistencia a la fatiga. A veces a costa de las pausas el número de ciclos hasta la destrucción aumenta en un 15–20%. El crecimiento del número de ciclos es tanto mayor, cuanto más frecuentes son las pausas y más larga es su duración (el último factor influye menos).

**La influencia de las sobrecargas** (cargas mayores que el límite de resistencia a la fatiga) sobre la magnitud del límite de resistencia a la fatiga depende del carácter de ellas. Durante las sobrecargas pequeñas la resistencia a la fatiga aumenta hasta determinado número de ciclos, durante las sobrecargas grandes, disminuye después de determinado número de ciclos.

**Influencia del entrenamiento.** Si en la probeta se crean tensiones un poco por debajo del límite de resistencia a la fatiga, aumentándolas luego paulatinamente, entonces la resistencia del material a la fatiga puede elevarse esencialmente. Este fenómeno denominado entrenamiento del material se emplea ampliamente en la técnica. Un efecto especial puede lograrse al aumentar gradualmente la sobrecarga. En este caso se puede obtener la resistencia elevada con entrenamiento relativamente breve (del orden de 50 000 ciclos), pero con fuertes sobrecargas.

**Influencia de la temperatura.** En lo que se refiere a los materiales corrientes de construcción, la elevación de la temperatura conduce a la disminución del límite de resistencia a la fatiga, y la disminución de la temperatura, al aumento de la resistencia a la fatiga de las probetas tanto lisas como con concentradores.

Para el acero, si la temperatura es mayor que 300°C, su ulterior aumento en cada 100°C reduce el límite de fatiga unos 15–20%. Sin embargo, para algunos aceros con el aumento de la temperatura de 20 a 300°C se observa cierto aumento del límite de fatiga. Dicho aumento está relacionado, por lo visto, con los procesos físico-químicos que se operan en el material bajo la influencia simultánea de la temperatura y las tensiones cíclicas. Ordinariamente, la influencia de la concentración de las tensiones sobre la resistencia a la fatiga disminuye con el crecimiento de la temperatura.

Al bajar la temperatura de 20 a –190°C el límite de resistencia a la fatiga de algunos aceros aumenta más que dos veces, aunque la resiliencia disminuye considerablemente.

### § 115. Cálculo a la resistencia durante las cargas repetidas cíclicamente

Para los tipos simples de la deformación de la pieza que trabaja en ciclos simétricos, por ejemplo, durante la tracción—compresión o la flexión cíclicas y la tensión de signo variado  $\sigma_a$  que actúa realmente, el coeficiente de seguridad puede determinarse mediante la fórmula

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1c})_d}{\sigma_a},$$

siendo  $(\sigma_{-1c})_d$  el límite de resistencia a la fatiga de la pieza durante la tracción—compresión o la flexión, que puede ser determinado a partir del límite de resistencia a la fatiga de probetas pulidas de laboratorio  $(\sigma_{-1})_d$ , tomando en consideración

el coeficiente efectivo de concentración  $(k_\sigma)_d$ , el factor de escala  $\epsilon_\sigma$ , el estado de la superficie y el medio ambiente caracterizados, respectivamente, mediante los coeficientes  $\beta$  y  $\beta_k$  por la fórmula

$$(\sigma_{-1c})_d = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(k_\sigma)_d \epsilon_\sigma \beta \beta_k}.$$

En el caso de estado tensional complejo según (20.9)

$$(\sigma_{-1c})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[ \frac{(\sigma_{-1c})_d}{(\tau_{-1c})_d} \right]^2 \tau_a^2}$$

o bien según (20.6)

$$\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1c})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1c})_d^2} = 1. \quad (20.17)$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1c})_d}{\sigma_a}$$

y

$$n_\tau = \frac{(\tau_{-1c})_d}{\tau_a}$$

a base de (20.17) se tendrá

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2},$$

de donde el coeficiente de seguridad durante el estado tensional complejo se determinará mediante la fórmula

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (20.18)$$

En el caso de determinación del coeficiente de seguridad durante el ciclo asimétrico o cualquier tipo de sollicitación cíclica (flexión, tracción—compresión, torsión) se puede partir del diagrama esquematizado de las tensiones límites para probetas lisas (fig. 353), representándolo en forma de una recta que pasa a través de los puntos  $A$  y  $B$  con coordenadas  $O$ ,  $\sigma_{-1}$  y  $\frac{\sigma_0}{2}$ ,  $\sigma_0$  y cuya ecuación es

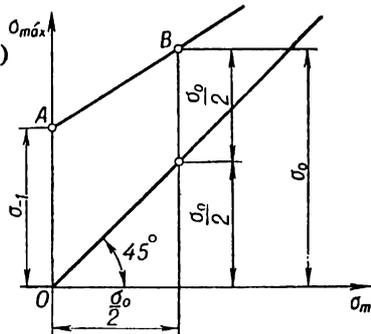


Fig. 353

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_m = \sigma_{-1} + \left( 1 - \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \right) \sigma_m$$

o bien

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_{\sigma}) \sigma_m, \quad (20.19)$$

siendo  $\psi_{\sigma}$  el coeficiente de sensibilidad del material a la simetría del ciclo:

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (20.20)$$

Durante la acción de las tensiones tangenciales la ecuación de la curva límite de las tensiones máximas tendrá, por analogía con (20.19), la siguiente forma:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{-1} + (1 - \psi_{\tau}) \tau_m. \quad (20.21)$$

Los valores de los coeficientes  $\psi_{\sigma}$  y  $\psi_{\tau}$  para aceros con diferente resistencia provisional se dan a continuación:

$\sigma_p$ kgf/mm <sup>2</sup>	$\psi_{\sigma}$	$\psi_{\tau}$
35-55	0	0
52-75	0,05	0
70-100	0,1	0,05
100-120	0,2	0,10
120-140	0,25	0,15

La amplitud límite de las tensiones para la probeta lisa puede ser expresada, a base de (20.19), mediante la fórmula

$$\sigma_a = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_m = \sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m.$$

La amplitud límite de las tensiones para la pieza  $(\sigma_{ak})_d$  será

$$(\sigma_{ak})_d = \frac{\sigma_a}{(k_{\sigma})_P} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_m}{(k_{\sigma})_P}, \quad (20.22)$$

y la ecuación de la curva de las tensiones límites para la pieza (fig. 354) puede escribirse así:

$$(\sigma_{m\acute{a}x})_d = (\sigma_{ak})_d + \sigma_m = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P} + \left[ 1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_P} \right] \sigma_m. \quad (20.23)$$

Para determinar el coeficiente de seguridad de la pieza, cuya tensión en el diagrama de las tensiones límites (fig. 355) se caracteriza por el punto  $M$  con coordenadas  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$ , es necesario hallar las coordenadas del punto  $N$  situado en la intersección del rayo que parte del origen de coordenadas con la curva de las tensiones límites para la pieza. Las coordenadas del punto  $N$  se determinarán a partir del examen conjunto de las ecuaciones de la curva (línea)  $AN$  de las tensiones límites para la pieza

$$(\sigma'_{m\acute{a}x}, k)_d = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P} + \left[ 1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_P} \right] \sigma'_m \quad (20.24)$$

y de la ecuación del rayo

$$\sigma'_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_m} \sigma'_m = \text{tg } \beta \cdot \sigma'_m, \quad (20.25)$$

denotando con rayas las coordenadas corrientes.

La ordenada del punto  $N$  que se encuentra en la intersección de las rectas  $AN$  y  $ON$  será la misma, es decir,

$$(\sigma'_{m\acute{a}x,k})_d = \sigma'_{m\acute{a}x}$$

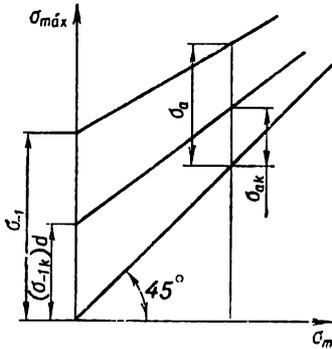


Fig. 354

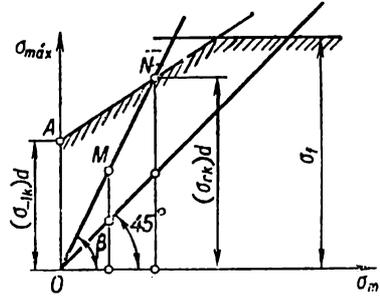


Fig. 355

o bien

$$\frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P} + \left[ 1 - \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_P} \right] \sigma'_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_m} \sigma'_m.$$

de donde hallamos la abscisa del punto  $N$ :

$$\begin{aligned} \sigma'_m &= \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P \left[ \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_m} - 1 + \frac{\psi_{\sigma}}{(k_{\sigma})_P} \right]} \\ &= \frac{\sigma_{-1} \sigma_m}{(k_{\sigma})_P \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_m (k_{\sigma})_P + \psi_{\sigma} \sigma_m}. \end{aligned}$$

Tomando en consideración que  $\sigma_a = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_m$ , se tendrá

$$\sigma'_m = \frac{\sigma_{-1} \cdot \sigma_m}{(k_{\sigma})_P \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}. \quad (20.26)$$

Sustituyendo este valor  $\sigma'_m$  en (20.25) y denotando esta ordenada  $(\sigma'_{m\acute{a}x})$  por  $(\sigma_{rk})_d$ , se obtendrá

$$(\sigma_{rk})_d = \frac{\sigma_{-1} \sigma_{m\acute{a}x}}{(k_{\sigma})_P \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}.$$

De este modo, la expresión definitiva para el coeficiente de seguridad se escribirá así:

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{rk})_d}{\sigma_{m\acute{a}x}} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}. \quad (20.27)$$

Análogamente, durante la torsión

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_P \tau_a + \Psi_{\tau} \tau_m} \quad (20.28)$$

Durante la resistencia compuesta y el ciclo no simétrico el coeficiente de seguridad puede deducirse mediante la fórmula

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},$$

hallando, respectivamente,  $n_{\sigma}$  y  $n_{\tau}$  por las fórmulas (20.27) y (20.28).

La elección del coeficiente de seguridad durante los cálculos a la acción de las tensiones repetidas cíclicamente depende de la exactitud de determinación de los esfuerzos y las tensiones, de la homogeneidad del material, la calidad del tratamiento de la pieza y otros factores. Para la exactitud elevada de determinación de las tensiones (en particular, utilizando la extensometría), siendo homogéneo el material y de alta calidad el tratamiento, se toma el coeficiente de seguridad  $n = 1,3 \div 1,4$

Para la exactitud corriente de la determinación de los esfuerzos y una homogeneidad moderada del material  $n = 1,4 \div 1,7$ . Si la precisión de la determinación de los esfuerzos y las tensiones es rebajada, igual que para una homogeneidad rebajada del material  $n = 1,7 \div 3,0$

Detengámonos en la sucesión del *cálculo de proyección* a la resistencia, por ejemplo, del vástago de un motor de pistón, cuando están dadas las cargas que actúan sobre la pieza diseñada ( $P_{m\acute{a}x}$  y  $P_{m\acute{i}n}$ ); está dado el material, es decir, se conocen  $\sigma_p$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\Psi_{\sigma}$ ; se conoce la tecnología del tratamiento de la pieza; se conoce el tipo del concentrador (supongamos que está dado el diámetro del orificio transversal en la pieza  $\delta$ ) y se necesita determinar las dimensiones de la pieza. Durante la solución del problema planteado se establece, ante todo, la sección peligrosa de la pieza que, por cierto, será la sección en el lugar del concentrador. Puesto que las relaciones del diámetro del orificio de éste y del diámetro de la propia pieza son desconocidas, debe elegirse el coeficiente teórico de concentración  $\alpha_{\sigma}$  y para el material dado, siendo conocida ( $\sigma_p$ ), hay que determinar el diagrama (fig. 345) con  $\alpha_{\sigma}$  dado el coeficiente de sensibilidad del material a la concentración de tensiones  $q_{\sigma}$ , y luego por la fórmula

$$(k_{\sigma})_d = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1)$$

hallar el valor del coeficiente efectivo de concentración. Del diagrama (fig. 351) se encuentra el valor del coeficiente  $\beta$  que caracteriza la calidad del tratamiento de la superficie. Eligiendo el coeficiente  $\varepsilon$  que toma en consideración las dimensiones, se determina el coeficiente efectivo de concentración de la pieza

$$(k_{\sigma})_P = \frac{(k_{\sigma})_d}{\varepsilon \beta}$$

Luego, tomando el coeficiente de seguridad  $n_{\sigma}$ , por la fórmula

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P \sigma_a + \Psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1} F}{(k_{\sigma})_P \frac{P_{m\acute{a}x} - P_{m\acute{i}n}}{2} + \Psi_{\sigma} \frac{P_{m\acute{a}x} + P_{m\acute{i}n}}{2}}$$

se halla el área de la sección transversal de la pieza

$$F = \frac{n_\sigma}{\sigma_{-1}} \left[ (k_\sigma)_P \frac{P_{m\acute{a}x} - P_{m\acute{i}n}}{2} + \psi_\sigma \frac{P_{m\acute{a}x} + P_{m\acute{i}n}}{2} \right]$$

y su diámetro

$$d = \sqrt[3]{\frac{4F}{\pi}}$$

Una vez terminado el cálculo, es necesario comprobar la justeza del coeficiente elegido  $\varepsilon$  por el diagrama (fig 347), ya conocido ahora el diámetro de la pieza  $d$ . En el caso de divergencia grande del valor obtenido de  $\varepsilon$  con el tomado anteriormente, hace falta precisar el cálculo

En el caso del *cálculo de comprobación* son conocidas la forma y las dimensiones de la pieza (supongamos que se trata de una barra circular escalonada sujeta a carga axial alternativa con asimetría dada del ciclo); se dan el diámetro máximo  $d$  y el radio del redondeo  $r$  en el lugar de conjugación de diferentes diámetros del árbol; se conoce el material de la pieza ( $\sigma_p$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_{-1}$ ) y la calidad de su tratamiento mecánico. Es necesario determinar el esfuerzo admisible que puede tomar la pieza. Se debe resolver el problema planteado en la siguiente sucesión:

1. Determinar el coeficiente teórico de concentración  $\alpha_\sigma$  utilizando, por ejemplo, el diagrama dado en la fig. 350.

2. Por el diagrama (fig. 345) hallar el coeficiente de sensibilidad a la concentración de tensiones  $q_\sigma$ .

3. Determinar el coeficiente efectivo de concentración

$$(k_\sigma)_d = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1).$$

4. Por el diagrama (fig. 347) hallar el coeficiente de influencia de las dimensiones absolutas  $\varepsilon$ .

5. Por el diagrama (fig. 351) hallar el coeficiente que toma en consideración la calidad del tratamiento de la superficie.

6. Determinar el coeficiente efectivo de concentración de tensiones para la pieza

$$(k_\sigma)_P = \frac{(k_\sigma)_d}{\varepsilon\beta}.$$

7. Elegir el coeficiente de seguridad  $n_\sigma$ .

8. Determinar la amplitud de las tensiones partiendo de la fórmula

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P \sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_m};$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma} \cdot \frac{1}{(k_\sigma)_P + \Psi_\sigma \cdot \frac{\sigma'_m}{\sigma_a}}.$$

De ordinario, para los aceros de baja calidad  $\Psi_\sigma = 0$ , entonces

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma (k_\sigma)_P}.$$

9. Determinar el esfuerzo de amplitud admisible

$$P_a = F_{\min} \sigma_a = \frac{\pi d^3}{4} \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma (k_\sigma)_P} .$$

10. Hallar el esfuerzo medio

$$P_m = P_a \frac{1+r}{1-r} .$$

11. Deducir las tensiones máxima y mínima del ciclo

$$P_{\max} = P_a + P_m ;$$

$$P_{\min} = P_{\max} \cdot r .$$

En fin, veamos la sucesión de la determinación del coeficiente de seguridad para un árbol tubular circular giratorio con orificio transversal  $\delta$  para la lubricación que experimenta la flexión alternativa durante el ciclo simétrico con  $M_{\max} = M_a$  dado junto con la torsión alternativa con  $M_{\text{tor máx}}$ , siendo conocida la asimetría del ciclo  $r$ . Está conocido el diámetro exterior  $D$  y el interior  $d$  del árbol, su material ( $\sigma_p$ ,  $\sigma_f$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$ ), así como la calidad del tratamiento mecánico de la superficie.

El problema se resolverá en la siguiente sucesión:

1. Determinar las tensiones nominales en el árbol a causa de la flexión y torsión (§ 46, 50):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} ;$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max}, \quad \sigma_m = 0 ;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{tor máx}}}{W_p} ;$$

$$\tau_{\min} = r \tau_{\max} ;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max} - \tau_{\min}}{2} ;$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{\max} + \tau_{\min}}{2} .$$

2. Determinar el coeficiente de concentración durante la flexión, cuando se conoce la razón  $\frac{\delta}{D}$  (fig. 173).

3. Determinar en el diagrama (fig. 345), una vez hallado  $\alpha_\sigma$  y conocida la tensión  $\sigma_p$ , el coeficiente de sensibilidad a la concentración de tensiones  $q_\sigma$  y hallar el coeficiente efectivo de concentración durante la flexión

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma (\alpha_\sigma - 1) .$$

4. Una vez elegido  $\varepsilon$  en el diagrama (fig. 347) y  $\beta$  en el diagrama (fig. 351), determinar el coeficiente efectivo de concentración para la pieza

$$(k_\sigma)_P = \frac{k_\sigma}{\varepsilon \beta} .$$

5. Determinar el coeficiente de seguridad durante la flexión mediante la fórmula

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_{\sigma})_P \sigma_a}$$

(porque para el caso dado  $\sigma_m = 0$ ).

6. Establecer el coeficiente de concentración durante la torsión  $\alpha_{\tau}$ , al igual que, tomando  $q_{\tau} \approx q_{\sigma}$ , deducir el coeficiente efectivo de concentración durante la torsión

$$k_{\tau} = 1 + q_{\tau}(\alpha_{\tau} - 1).$$

Tomando los mismos valores de  $\varepsilon$  y  $\beta$  que durante la flexión, hallar el coeficiente efectivo de concentración para la pieza durante la torsión

$$(k_{\tau})_P = \frac{k_{\tau}}{\varepsilon \beta}.$$

7. Determinar el coeficiente de seguridad durante la torsión

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{(k_{\tau})_P \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

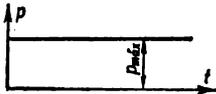
8. Deducir el coeficiente general de seguridad

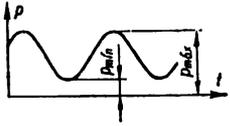
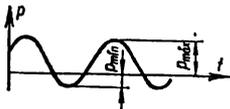
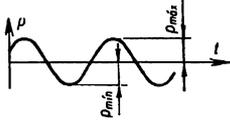
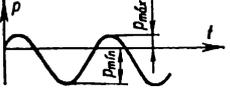
$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$

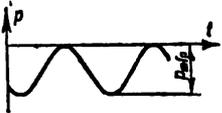
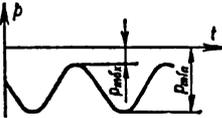
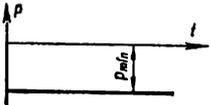
En el APENDICE 1 se dan los datos sobre el límite de resistencia a la fatiga de los principales materiales de construcción.

Tabla 49

**Características de los ciclos de sollicitación alternativa**

Denominación del ciclo	$P_{m\acute{a}x}; P_{m\acute{i}n}$	$P_m = \frac{P_{m\acute{a}x} + P_{m\acute{i}n}}{2}$ $P_a = \frac{P_{m\acute{a}x} - P_{m\acute{i}n}}{2}$	$r = \frac{P_{m\acute{i}n}}{P_{m\acute{a}x}}$
Constante positivo 	$P_{m\acute{a}x} = P_{m\acute{i}n} > 0$	$P_m = P_{m\acute{a}x} =$ $= P_{m\acute{i}n} > 0$ $P_a = 0$	$r = + 1$

Denominación del ciclo	$p_{m\acute{a}x}; p_{m\acute{i}n}$	$p_m = \frac{p_{m\acute{a}x} + p_{m\acute{i}n}}{2}$ $p_a = \frac{p_{m\acute{a}x} - p_{m\acute{i}n}}{2}$	$r = \frac{p_{m\acute{i}n}}{p_{m\acute{a}x}}$
<p>Asimétrico positivo</p> 	$p_{m\acute{a}x} > 0$ $p_{m\acute{i}n} > 0$	$p_m > 0$ $p_a \neq 0$	$0 < r < +1$
<p>De pulsación positivo</p> 	$p_{m\acute{a}x} > 0$ $p_{m\acute{i}n} = 0$	$p_m = \frac{1}{2} p_{m\acute{a}x}$ $p_a = \frac{1}{2} p_{m\acute{a}x}$	$r = 0$
<p>Asimétrico</p> 	$p_{m\acute{a}x} > 0$ $p_{m\acute{i}n} < 0$	$p_m > 0$ $p_a \neq 0$	$-1 < r < 0$
<p>Simétrico</p> 	$p_{m\acute{a}x} = -p_{m\acute{i}n}$ $p_{m\acute{i}n} < 0$	$p_m = 0$ $p_a = p_{m\acute{a}x}$	$r = -1$
<p>Asimétrico</p> 	$p_{m\acute{a}x} > 0$ $p_{m\acute{i}n} < 0$ $p_{m\acute{a}x} <  p_{m\acute{i}n} $	$p_m < 0$ $p_a \neq 0$	$-\infty <$ $< r < -1$

Denominación del ciclo	$p_{\text{máx}}; p_{\text{mín}}$	$p_m = \frac{p_{\text{máx}} + p_{\text{mín}}}{2}$ $p_a = \frac{p_{\text{máx}} - p_{\text{mín}}}{2}$	$r = \frac{p_{\text{mín}}}{p_{\text{máx}}}$
<p>De pulsación negativo</p> 	$p_{\text{máx}} = 0$ $p_{\text{mín}} < 0$	$p_m = \frac{1}{2} p_{\text{mín}}$ $p_a = \frac{1}{2}  p_{\text{mín}} $	$r = -\infty$
<p>Asimétrico negativo</p> 	$p_{\text{máx}} < 0$ $p_{\text{mín}} < 0$	$p_m < 0$ $p_a \neq 0$	$+1 < r < +\infty$
<p>Constante negativo</p> 	$p_{\text{máx}} = p_{\text{mín}} < 0$	$p_{\text{máx}} = p_{\text{mín}} =$ $= p_m < 0$ $p_a = 0$	$r = +1$

§ 116. Cálculo por impacto durante la acción axial de la carga

Se suele evaluar la influencia de la acción dinámica de la carga sobre el valor de la deformación o la tensión *por medio del coeficiente dinámico*

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{est}}, \quad (21.1)$$

siendo  $\delta_{est}$  la deformación del elemento elástico (fig. 356, a) durante la aplicación estática de la carga  $Q$  (durante el aumento gradual de la carga de cero hasta su valor finito);  $\delta_d$ , la deformación (fig. 356, b) durante la aplicación de impacto de la carga (supongamos, al caer el peso  $Q$  de la altura  $H$ ).

La deformación dinámica puede expresarse por medio de la estática empleando la fórmula

$$\delta_d = k_d \delta_{est}.$$

Establezcamos, por analogía, la relación entre la tensión dinámica y la estática:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{est} = k_d \frac{Q}{F}. \quad (21.2)$$

Para hacer uso de la fórmula (21.2) es necesario conocer el coeficiente dinámico  $k_d$ .

Al deducir el coeficiente dinámico se parte de la admisión de que *la relación entre los esfuerzos y las deformaciones se mantiene igual tanto para la carga estática  $P_{est}$  como para la dinámica  $P_d$ , es decir,*

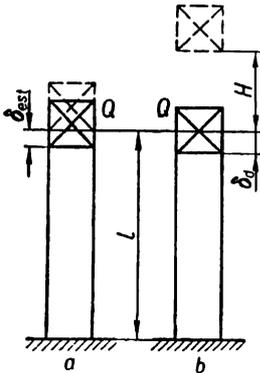


Fig. 356

$$\delta_{est} = \frac{P_{est}}{c}$$

$$\delta_d = \frac{P_d}{c},$$

siendo  $c = \frac{EF}{l}$  la rigidez de la barra.

La deducción de la fórmula para determinar el coeficiente dinámico se basa en el principio de conservación de la energía. El cambio de la energía potencial de la posición del peso  $T$  al caer desde la altura  $H$  y recorrer el camino  $H + \delta_d$  será

$$T = Q(H + \delta_d). \quad (21.3)$$

La energía potencial de deformación de la barra acumulada durante el impacto puede ser expresada mediante la fórmula

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \delta_d = \frac{c \delta_d^2}{2}. \quad (21.4)$$

Escribiremos a base del principio de conservación de la energía que

$$T = U_d$$

o bien

$$\frac{c\delta_d^2}{2} = Q(H + \delta_d). \quad (21.5)$$

Tomando en consideración que  $\delta_{est} = \frac{Q}{c}$ , podemos presentar la ecuación (21.5) en la forma:

$$\delta_d^2 - 2\delta_{est} \cdot \delta_d - 2\delta_{est} \cdot H = 0.$$

De aquí determinaremos la deformación dinámica incógnita

$$\delta_d = \delta_{est} \pm \sqrt{\delta_{est}^2 + 2\delta_{est} H}.$$

Dejando, según el sentido físico del problema el signo más, podemos presentar la última fórmula del modo siguiente:

$$\delta_d = \delta_{est} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}} \right). \quad (21.6)$$

Por consiguiente, se halla la expresión para el coeficiente dinámico de acuerdo con (21.2):

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}}. \quad (21.7)$$

Si se tiene en cuenta que  $H = \frac{v^2}{2g}$  ( $v$  es la velocidad del peso caído al principio del impacto), se tendrá

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{est}}}. \quad (21.8)$$

Puesto que  $\frac{2H}{\delta_{est}} = \frac{T_0}{U_{est}}$ , siendo  $T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g}$  la energía cinética del peso caído en el momento del impacto y  $U_{est} = \frac{1}{2} Q\delta_{est}$ , la energía potencial de deformación de la barra durante la aplicación estática de la carga  $Q$ , el coeficiente dinámico puede ser expresado también mediante la fórmula

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{est}}}. \quad (21.9)$$

Cuando  $H = 0$ ,  $k_d = 2$ . Puesto que, por regla general,  $H \gg \delta_{est}$ , en la expresión para  $k_d$  podemos prescindir de uno en comparación con el segundo sumando. Se obtendrá, por tanto,

$$k_d \approx 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{est}}} = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{\delta_{est}g}} = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{est}}}. \quad (21.10)$$

La tensión dinámica durante el impacto será, de acuerdo con (21.2),

$$\sigma_d = k_d \sigma_{est} = \sigma_{est} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}} \right) \approx \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{IF}}. \quad (21.11)$$

La carga dinámica durante el impacto

$$P_d = \sigma_d F = k_d \sigma_{est} F = Q \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}} \right). \quad (21.12)$$

Del análisis de la fórmula (21.11) se ve que durante la distribución uniforme de las tensiones por el largo de la barra, es decir, cuando ésta tiene una sección constante, el valor de las tensiones dinámicas depende no sólo del área de la sección transversal de la barra  $F$ , como sucede durante la acción de la carga estática en los sistemas estáticamente determinados, sino también de su longitud  $l$  y del módulo de elasticidad del material  $E$ . Además, cuanto mayor es el volumen del material sometido al impacto de la barra elástica, menores serán las tensiones dinámicas que surgen en él.

Por otro lado, la disminución de las tensiones durante el impacto en una barra con rebajo puede ser lograda al reducir el volumen del elemento elástico a costa de la reducción del área de la parte engrosada, aumentando así la capacidad de deformación de la barra. Se puede lograr el mismo propósito tomando el material con un módulo de elasticidad más bajo, igualando las áreas de la sección transversal por la longitud de la barra, aumentando la longitud de la barra e incluyendo resortes amortiguadores.

La masa de la barra que experimenta el impacto puede tomarse en consideración suponiendo que después del aplastamiento y disminución de la velocidad del peso en la primera etapa de  $v$  a  $v_1$ , que es igual a la velocidad de movimiento de la sección superior de la barra al principio de la segunda etapa del impacto, la velocidad de las secciones subyacentes disminuye según una ley lineal cayendo hasta cero en la sección inferior (fig. 357), es decir, la velocidad en cualquier sección de la barra a una distancia  $x$  del extremo inferior será

$$v(x) = v_1 \frac{x}{l}.$$

La energía cinética correspondiente de un tramo elemental de la barra de longitud  $dx$  en la sección examinada será

$$dT_b = \frac{\gamma F dx}{2g} \left( v_1 \frac{x}{l} \right)^2,$$

y la energía cinética total de la barra golpeada puede ser expresada mediante la fórmula

$$T_b = \frac{\gamma F}{2g} \cdot \frac{v_1^2}{l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma Fl}{3} \frac{v_1^2}{2g}$$

o bien

$$T_b = \frac{Q_b}{3} \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

siendo  $Q_b = \gamma Fl$  el peso muerto de la barra golpeada.

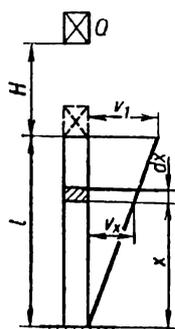


Fig. 357

Expresemos la pérdida de la energía por el aplastamiento del material en el lugar del impacto del peso y la barra durante la primera etapa del golpe (cuando la velocidad cambia de  $v = \sqrt{2gH}$  a  $v_1$ ) por medio de la fórmula

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left( \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{Q_b v_1^2}{3 \cdot 2g} \right) = \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - v_1^2 \left( 1 + \frac{Q_b}{3Q} \right) \right]. \quad (21.13)$$

La misma pérdida de la energía puede expresarse así:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{1}{3} \frac{Q_b}{2g} (0 - v_1)^2 = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \left( 1 + \frac{Q_b}{3Q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21.14)$$

Al igualar los segundos miembros de las fórmulas (21.13) y (21.14) y resolviendo la ecuación obtenida respecto a  $v_1$ , se tendrá

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_b}{Q}}. \quad (21.15)$$

Por tanto, la energía cinética que durante el impacto se transforma en energía de deformación de la barra golpeada, será

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_b v_1^2}{2g} = \frac{Qv^2}{2g \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{Q_b}{Q} \right)}. \quad (21.16)$$

Sustituyendo en (21.9) en vez de  $T_0$  el valor obtenido de  $T$ , expresemos el coeficiente dinámico mediante la fórmula

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{est}}}$$

o bien

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qv^2}{2g \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_b}{Q} \right) U_{est}}}. \quad (21.17)$$

Tomando en consideración que  $\frac{v^2}{2g} = H$ ;  $HQ = T_0$ , y denotando también  $\frac{Q_b}{Q} = \beta$ , volvamos a escribir la fórmula (21.17) como

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{est} \left( 1 + \frac{1}{3} \beta \right)}}. \quad (21.18)$$

La tensión máxima durante el impacto se determinará mediante la fórmula

$$\sigma_d = k_d \sigma_{est} = \sigma_{est} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{est} \left( 1 + \frac{1}{3} \beta \right)}} \right)$$

o bien

$$\sigma_d = \sigma_{est} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2EFH}{Ql \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{Fl\gamma}{Q} \right)}} \right].$$

Los valores del coeficiente que toma en consideración la masa del elemento golpeado se dan, para algunos casos particulares, en la tabla 50.

### § 117. Tensión durante el impacto torsional

En el caso de torsión de impacto efectuada, supongamos, según el esquema que puede verse en la fig. 358, las tensiones dinámicas máximas en el árbol  $\tau_d$  se determinarán mediante la fórmula

$$\tau_{d\text{máx}} = k_d \tau_{est\text{máx}}, \quad (21.19)$$

donde

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}}}; \quad (21.20)$$

$$\delta_{est} = \varphi R = \frac{M_{tor} l}{GJ_p} \quad R = \frac{QR^2 l}{GJ_p};$$

$$\tau_{est\text{máx}} = \frac{M_{tor}}{W_p} = \frac{QR}{W_p}.$$

En estas fórmulas  $H$  es la altura de la caída del peso;  $Q$ , el peso de la carga que cae;  $R$ , el radio de la manivela;  $l$ , la longitud del árbol;  $J_p$ ,  $W_p$ , el momento polar de inercia y el módulo polar de la sección.

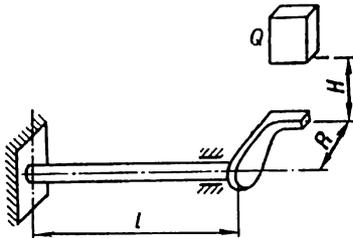


Fig. 358



Fig. 359

Las tensiones dinámicas que surgen en el árbol al frenar bruscamente el volante que gira a gran velocidad (fig. 359) y que tiene la reserva  $T_0$  de la energía

cinética, pueden hallarse también partiendo del principio de conservación de la energía:

$$T_0 = U_d, \quad (21.21)$$

siendo  $U_d$  la energía potencial de deformación del árbol durante la torsión de impacto.

Teniendo en cuenta que

$$U_d = \frac{1}{2} M_{\text{tor.d}} \varphi_d = \frac{M_{\text{tor.d}}^2 l}{2GJ_p}, \quad (21.22)$$

y tomando en consideración que

$$\tau_{d\text{máx}} = \frac{M_{\text{tor.d}}}{W_p}$$

o bien

$$M_{\text{tor.d}} = \tau_{d\text{máx}} \cdot W_p = \frac{\pi d^3}{16} \tau_{d\text{máx}},$$

se puede escribir que

$$U_d = \frac{\tau_{d\text{máx}}^2 \pi^2 d^6 l}{16^2 G J_p \cdot 2} = \frac{\tau_{d\text{máx}}^2 l F}{2G}. \quad (21.23)$$

Sustituyendo (21.23) en (21.21) y resolviendo la ecuación obtenida respecto a la tensión dinámica máxima incógnita, se tendrá

$$\tau_{d\text{máx}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{l F}}, \quad (21.24)$$

determinando la energía cinética del volante de peso  $Q$  que gira con velocidad angular  $\omega$  por la fórmula

$$T_0 = \frac{J}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{J}{2} \omega^2; \quad J = \frac{Q D^2}{8g}$$

( $D$  es el diámetro del volante).

### § 118. Cálculo por impacto durante la flexión

Las tensiones dinámicas máximas durante la flexión de impacto se determinarán por medio de la fórmula

$$\sigma_{d\text{máx}} = k_d \sigma_{\text{estmáx}},$$

siendo

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{est}}}}$$

( $f_{\text{est}}$  es la flecha estática en el lugar del impacto que depende del esquema de sollicitación y las condiciones de apoyo).

En el caso de impacto en la mitad de la viga con rigidez a la flexión de la sección  $EJ$  (fig. 360) se tendrá

$$f_{est} = \frac{Ql^3}{48EJ}, \quad \sigma_{est\text{máx}} = \frac{M}{W} = \frac{Ql}{4W},$$

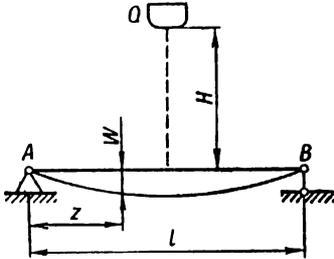


Fig. 360

y las tensiones dinámicas máximas en este caso serán

$$\sigma_{d\text{máx}} = k_d \sigma_{est\text{máx}} = \frac{Ql}{4W} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Ql^3}} \right].$$

Designando  $QH = T_0$ , se tendrá

$$\sigma_{d\text{máx}} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}} \right). \quad (21.25)$$

La condición de resistencia en este caso se escribirá así:

$$\sigma_{d\text{máx}} = \frac{Q}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}} \right) < [\sigma_d], \quad (21.26)$$

siendo

$$[\sigma_d] = \frac{\sigma_f}{n_d}$$

( $n_d$  es el coeficiente de seguridad contando con la carga dinámica;  $\sigma_f$ , el límite de fluencia del material de la viga).

Se puede tomar en consideración la masa de la viga golpeada utilizando la metodología analizada durante el impacto longitudinal. Supongamos que al final de la primera etapa del impacto la velocidad de la viga en el lugar de la caída del peso es igual a  $v_1$ . La energía cinética del peso, evidentemente, será igual a  $\frac{Qv_1^2}{2g}$ . Supongamos también que durante el impacto y durante la aplicación dinámica de la carga (en nuestro caso, en el centro de la luz de la viga) el eje flexionado de la viga puede definirse por una misma ecuación

$$w = \frac{f}{l^3} (3l^2z - 4z^3),$$

siendo  $f = \frac{Ql^3}{48EJ}$  la flecha de la viga.

Denotando por  $w_{\text{máx}}$  el valor de la flecha máxima en el centro de la viga, determinaremos el valor de la flecha en la sección situada a una distancia  $z$  del extremo izquierdo de la viga mediante la fórmula

$$w = \frac{w_{\text{máx}}}{l^3} (3l^2z - 4z^3),$$

y la velocidad del movimiento de dicha sección, a partir de la expresión

$$v = \frac{dw}{dt} = \frac{dw_{\text{máx}}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} (3l^2z - 4z^3).$$

La energía cinética del elemento de la viga  $dz$  que se encuentra a una distancia  $z$  del extremo izquierdo de la viga será

$$dT_v = \frac{v^2 \gamma F dz}{2g} = \frac{\gamma F}{2g} \left[ \frac{dw_{m\acute{a}x}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} (3l^2 z - 4z^3) \right]^2 dz,$$

y la energía cinética de toda la viga se determinará por medio de la fórmula

$$T_v = 2 \int_0^{l/2} \frac{\gamma F}{2g} \left( \frac{dw_{m\acute{a}x}}{dt} \right)^2 \frac{1}{l^6} (3l^2 z - 4z^3)^2 dz = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} \left( \frac{dw_{m\acute{a}x}}{dt} \right)^2.$$

Puesto que al final de la primera etapa la velocidad en el centro de la viga es igual a  $v_1$ , es decir,

$$\frac{dw_{m\acute{a}x}}{dt} = v_1,$$

la energía cinética de la viga al principio de la segunda etapa del golpe será

$$T_v = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2. \quad (21.27)$$

Al expresar la pérdida de la energía por el aplastamiento en el lugar de golpe durante la primera etapa en la forma de

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Qv^2}{2g} - \left( \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 \right) = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[ v^2 - v_1^2 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right], \end{aligned} \quad (21.28)$$

o bien

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{Q}{2g} (v - v_1)^2 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} (0 - v_1)^2 = \\ &= \frac{Q}{2g} \left[ v - 2vv_1 + v_1^2 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right) \right], \end{aligned} \quad (21.29)$$

y luego igualando los segundos miembros de las ecuaciones (21.28) y (21.29) y resolviendo la ecuación obtenida respecto a  $v_1$ , se tendrá

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}}. \quad (21.30)$$

La energía cinética del sistema (viga—peso) que tiene que transformarse en energía de deformación de la viga durante el impacto, se determinará por la fórmula

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2 = \frac{Qv^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}}. \quad (21.31)$$

Denotando

$$T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g},$$

podemos escribir la fórmula (21.31) de la siguiente manera:

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}} \quad (21.32)$$

La tensión dinámica máxima de acuerdo con la fórmula (21.25), sustituyendo  $T_0$  por  $T$ , se determinará así:

$$\sigma_{d\text{máx}} = \frac{Ql}{4W} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2 l^3}} \right)$$

o bien, contando con (21.32),

$$\sigma_{d\text{máx}} = k_d \sigma_{est\text{máx}} = \frac{Ql}{4W} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}} \right], \quad (21.33)$$

siendo

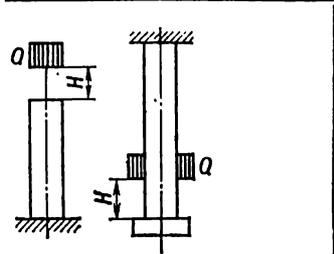
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3 \left( 1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q} \right)}} \quad (21.34)$$

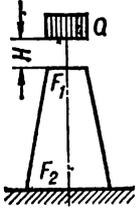
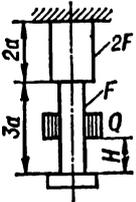
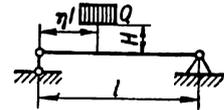
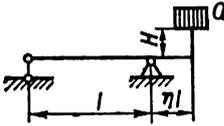
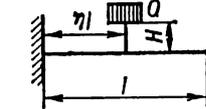
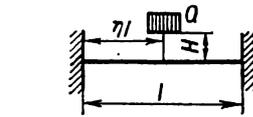
Tabla 50

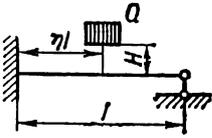
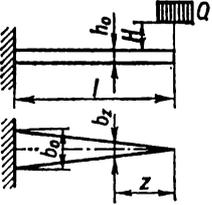
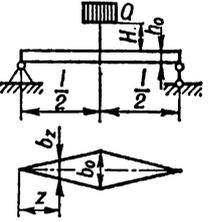
Valores del coeficiente  $\alpha$  que toma en consideración la masa del elemento golpeado en la fórmula para el coeficiente dinámico

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{est}(1 + \alpha \cdot \beta)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{est}(1 + \alpha \cdot \beta)}}$$

$H$  es la altura de la caída del cuerpo que golpea;  $v$ , la velocidad del cuerpo que golpea en el momento del inicio del impacto;  $\delta_{est}$ , la deformación del elemento elástico golpeado durante la aplicación estática de la fuerza igual al peso del cuerpo que golpea;  $\beta = \frac{Q_{e1}}{Q}$ , siendo  $Q_{e1}$  el peso del elemento golpeado;  $Q$ , el peso del cuerpo que golpea;  $g$ , aceleración de la gravedad.

Esquema del elemento elástico y carácter de su sollicitación	$\alpha$
	1/3

Esquema del elemento elástico y carácter de su sollicitación	$\alpha$
	$\frac{F_1}{F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 F_2}}$
	$\frac{67}{336}$
	$\frac{2 + 4\eta - \eta^2 - 6\eta^3 + 3\eta^4}{105\eta^2(1 - \eta)^2}$
	$\frac{8 + \eta^2(140 + 231\eta + 99\eta^2)}{420(1 + \eta)^2 \eta^2}$
	$\frac{105 - 105\eta + 35\eta^2 - 2\eta^3}{140\eta^3}$
	$\frac{24 - 24\eta - 4\eta^2 + 8\eta^3 - \eta^4}{35\eta^2(5\eta - 4 - \eta^2)^2}$

Esquema del elemento elástico y carácter de su sollicitación	$\alpha$
	$\frac{3 + \eta - \eta^2}{104\eta^2(1 - \eta)^2}$
	$\frac{1}{15}$
	$\frac{11}{15}$

TENSIONES DE CONTACTO

§ 119. Conceptos y fórmulas principales para determinar las tensiones y deformaciones de contacto

Las tensiones y deformaciones que surgen durante la presión mutua de dos cuerpos contiguos se denominan *de contacto*. El material en el lugar de contacto, sin poder deformarse libremente, se halla en el estado tensional volumétrico (fig. 361). Las tensiones de contacto tienen un carácter puramente local y disminuyen bastante rápidamente a medida de alejarse del lugar de contacto. Hay que prestar especial atención a las tensiones de contacto durante el cálculo a la resistencia de tales piezas como son los cojinetes de bolas y rodillos, ruedas dentadas, ruedas de vagones ferroviarios, raíles, etc.

Por primera vez la solución correcta de los problemas principales sobre las tensiones y deformaciones de contacto fue realizada por medio de los métodos de la teoría de la elasticidad en 1881—1882 por H. Hertz.

A continuación se dan algunas fórmulas para la determinación de las tensiones y deformaciones de contacto obtenidas al observar las siguientes suposiciones:

- 1) las tensiones en la zona de contacto no rebasan el límite de elasticidad;
- 2) las áreas de contacto son pequeñas en comparación con las superficies de los cuerpos que están en contacto;
- 3) las fuerzas de presión distribuidas por la superficie de contacto son normales a dicha superficie.

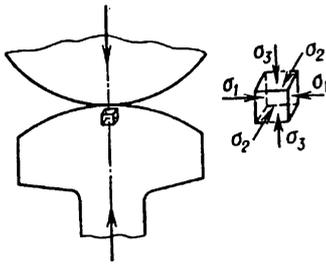


Fig. 361

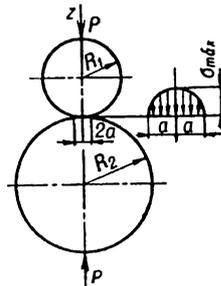


Fig. 362

**Compresión de esferas.** El radio de la zona circular  $a$  (fig. 362) que se forma en el lugar de contacto durante la presión mutua con la fuerza  $P$  de dos esferas de radios  $R_1$  y  $R_2$  y módulos de elasticidad del material  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, se determina mediante la fórmula

$$a = 0,88 \sqrt[3]{\frac{P \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}} \quad (22.1)$$

Las tensiones normales (de compresión) están distribuidas en la zona de contacto por la semiesfera. La tensión máxima, que tiene lugar en el centro de la zona de contacto, puede determinarse por la fórmula

$$\sigma_3 = - |\sigma_{\text{máx}}| = - 1,5 \frac{P}{\pi a^2} = - 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (22.2)$$

Las dos demás tensiones principales en el centro de la zona son iguales a

$$\sigma_1 = \sigma_2 = - 0,8 |\sigma_{\text{máx}}|.$$

Gracias al estado tensional volumétrico del material en el centro de la zona de contacto, cuando todas las tres tensiones de compresión son prácticamente iguales, el material en ese punto puede resistir, sin aparición de las deformaciones permanentes, unas presiones bastante grandes que son, por ejemplo, de acuerdo con la cuarta teoría de resistencia, iguales a  $\sigma_{\text{máx}} = 5\sigma_r$ . Para el acero que tiene  $\sigma_{pr} = 10\,000 \text{ kgf/cm}^2$   $\sigma_{\text{máx}}$  alcanza  $50\,000 \text{ kgf/cm}^2$ .

El punto más peligroso en la zona de contacto está situado sobre el eje  $z$  a una profundidad igual a la mitad del radio de la zona de contacto, aproximadamente. Las tensiones principales en este punto son iguales a

$$\sigma_1 = \sigma_2 = - 0,18\sigma_{\text{máx}}; \quad \sigma_3 = - 0,8\sigma_{\text{máx}}, \quad (22.3)$$

determinándose  $\sigma_{\text{máx}}$  por la fórmula (22.2).

La tensión tangencial máxima en el punto peligroso

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31 \sigma_{\text{máx}}. \quad (22.4)$$

Las tensiones máximas que surgen en la zona durante la presión de la esfera sobre la superficie esférica cóncava de radio  $R_2$  (fig. 363) las obtendremos mediante la fórmula (22.2), sustituyendo en ella el signo de  $R_2$  por el inverso:

$$\sigma_{\text{máx}} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (22.5)$$

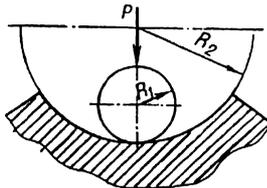


Fig. 363.

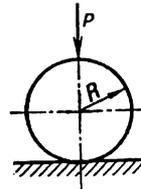


Fig. 364

Durante la presión de la esfera de radio  $R_1 = R$  sobre el plano (fig. 364), deduciremos las tensiones mediante la fórmula (22.5) tomando en ella  $R_2 = \infty$ :

$$\sigma_{\text{máx}} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{1}{R^2}}. \quad (22.6)$$

**Compresión de cilindros.** Durante la compresión mutua por una carga distribuida uniformemente  $q$  de dos cilindros que se tocan con las generatrices paralelas (fig. 365), el ancho de la zona de contacto rectangular se determina mediante la fórmula

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (22.7)$$

La tensión máxima que actúa en los puntos del eje de la zona de contacto se deduce mediante la fórmula

$$\sigma_{\text{máx}} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (22.8)$$

El punto peligroso en la zona de contacto se encuentra sobre el eje  $z$  a una profundidad igual a  $0,4b$ . Las tensiones principales en este punto tienen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -0,180 \sigma_{\text{máx}}; \\ \sigma_2 &= -0,288 \sigma_{\text{máx}}; \\ \sigma_3 &= -0,780 \sigma_{\text{máx}}. \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

La tensión tangencial máxima en el punto peligroso es

$$\tau_{\text{máx}} = 0,3 \sigma_{\text{máx}}. \quad (22.10)$$

Cambiando en la fórmula (22.8) el signo de  $R_2$  por el inverso obtendremos la tensión en el caso de presión del cilindro sobre una superficie cilíndrica cóncava

$$\sigma_{\text{máx}} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}. \quad (22.11)$$

Durante la presión mutua del cilindro de radio  $R_1 = R$  y el plano, tomando en (22.8)  $R_2 = \infty$ , se tendrá

$$\sigma_{\text{máx}} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (22.12)$$

Las fórmulas dadas más arriba fueron obtenidas para el coeficiente de Poisson  $\mu = 0,3$ . Sin embargo, en los cálculos prácticos son válidas también para otros valores de  $\mu$ .

En el caso general de contacto de dos cuerpos de igual material comprimidos por la fuerza  $P$  en dirección del eje  $z$  (fig. 366) que se tocan por el plano  $AB$ , siendo los radios de curvatura del primer cuerpo  $\rho_1$  y  $\rho'_1$ ; del segundo cuerpo  $\rho_2$  y  $\rho'_2$  (suponemos que  $\rho_1 < \rho'_1$ ;  $\rho_2 < \rho'_2$ ), los semiejes de la zona de contacto elíptica formada se determinan por medio de las fórmulas

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right)}}; \quad (22.13)$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_2} \right)}}; \quad (22.14)$$

siendo  $\mu$  el coeficiente de Poisson.

A continuación se dan los valores de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  como funciones del ángulo auxiliar  $\psi$  calculado por la fórmula

$$\cos \psi = \frac{\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'}\right) \cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}} \quad (22.15)$$

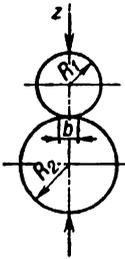


Fig. 365

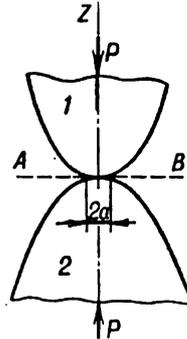
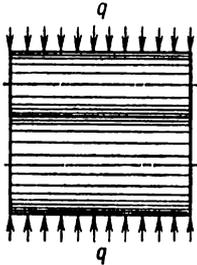


Fig. 366

siendo  $\varphi$  el ángulo entre los planos principales de curvatura de los cuerpos, en los cuales se encuentran los radios  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Los signos en la fórmula (22.15) se eligen de tal manera que  $\cos \psi$  sea positivo.

$\psi^\circ$	$\alpha$	$\beta$	$\psi^\circ$	$\alpha$	$\beta$
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

La tensión máxima en el centro de la zona de contacto

$$\sigma_{\text{máx}} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} \quad (22.16)$$

El punto más peligroso está situado sobre el eje  $z$  a cierta profundidad que depende de la relación  $\frac{b}{a}$ .

La tensión tangencial máxima no depende de la relación señalada y es igual a

$$\tau_{\text{máx}} \approx 0,32 \sigma_{\text{máx}} \quad (22.17)$$

Como se desprende de las fórmulas dadas, las tensiones de contacto dependen de las propiedades elásticas del material y no son función lineal de la carga, de modo que el ritmo de su crecimiento se atrasa del ritmo de aumento de la carga de compresión. La explicación consiste en que con el aumento de la carga aumentan también las dimensiones de la zona de contacto. En la tabla 51 se dan las fórmulas de cálculo para determinar los parámetros de contacto de dos cuerpos (coeficientes  $A$  y  $B$  de la ecuación de la elipse de contacto,

dimensiones de la zona de contacto, tensión de contacto máxima  $\sigma_{m\acute{a}x}$  y aproximación mutua  $\Delta$ ). Con el fin de simplificar los cálculos por las fórmulas dadas, en la tabla 52 se dan los valores de los coeficientes  $n_a, n_b, n_p, n_\Delta$  que forman parte de ellas en dependencia de la relación de  $A$  y  $B$ .

### § 120. Comprobación de la resistencia durante las tensiones de contacto

La comprobación de la resistencia durante las tensiones de contacto se debe realizar según la tercera o cuarta teoría de resistencia:

$$\sigma_{eq\ III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{eq\ IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} < [\sigma].$$

Poniendo en estas fórmulas  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  expresadas por medio de  $\sigma_{m\acute{a}x}$  en el centro de la zona de contacto, escribiremos las condiciones de resistencia en la siguiente forma:

$$\sigma_{eq} = m\sigma_{m\acute{a}x} < [\sigma] \quad (22.18)$$

de donde

$$\sigma_{m\acute{a}x} < \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{cont},$$

siendo  $[\sigma]_{cont} = \frac{[\sigma]}{m}$  la tensión admisible para la tensión máxima en el lugar de contacto. Los valores del coeficiente  $m$  en dependencia de la correlación de los semiejes de la zona elíptica  $\frac{b}{a}$  se dan a continuación.

$\frac{b}{a}$	$m = \frac{\sigma_{eq\ III}}{\sigma_{m\acute{a}x}}$	$m = \frac{\sigma_{eq\ IV}}{\sigma_{m\acute{a}x}}$
1 (círculo)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (banda)	0,600	0,557

Puede recomendarse la siguiente sucesión del cálculo a la resistencia de los elementos de la estructura en los lugares de contacto:

1. Determinar los radios principales de curvatura de los cuerpos que se tocan  $\rho_1, \rho'_1, \rho_2, \rho'_2$ , al igual que el ángulo  $\psi$  entre sus planos principales de curvatura.

2. Calcular por las fórmulas (22.13) y (22.14), teniendo en cuenta (22.15), las dimensiones de los semiejes de la zona elíptica de contacto.

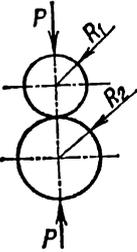
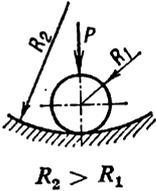
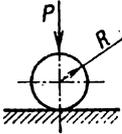
3. Mediante la fórmula (22.16) determinar  $\sigma_{m\acute{a}x}$ , haciéndolo también por las fórmulas (22.2) o (22.8) en el caso de zona de contacto circular o rectangular, respectivamente, sin determinar las dimensiones de la zona.

4. El cálculo a la resistencia puede realizarse por la fórmula (22.18) hallando los valores de  $m$  por la tabla anterior. En este caso se recomienda partir de la cuarta teoría de resistencia.

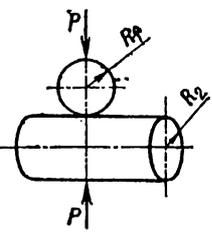
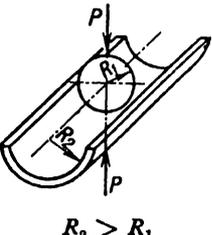
5. Para los cojinetes de bolas y de rodillos  $[\sigma]_{cont} = 35\ 000 \div 50\ 000$  kgf/cm<sup>2</sup>; para el acero para carriles,  $8\ 000 \div 10\ 000$  kgf/cm<sup>2</sup>.

En la tabla 53 se dan las presiones máximas admisibles en la zona de contacto durante el contacto inicial por la línea ( $m = 0,557$ ) y la sollicitación estática. En el caso de contacto inicial en el punto, se debe aumentar el valor de  $[\sigma]_{cont}$  1,3 ÷ 1,4 veces.

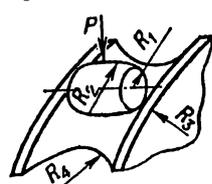
**Fórmulas de cálculo para determinar los parámetros de contacto de dos cuerpos**

Esquema del contacto	Coeficientes de la ecuación de la elipse de contacto		Dimensiones de la zona de contacto
	A	B	
<p>Dos cuerpos esféricos</p> 	$\frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}$	$\frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2}$	$a = b = 0,9086 \times$ $\times \sqrt[3]{P \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$
<p>Esfera y cavidad esférica</p>  <p><math>R_2 &gt; R_1</math></p>	$\frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2}$	$\frac{R_2 - R_1}{2R_1R_2}$	$a = b = 0,9086 \times$ $\times \sqrt[3]{P \frac{R_1R_2}{R_2-R_1} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}}$
<p>Cuerpo esférico y un plano</p> 	$\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{2R}$	$a = b = 0,9086 \times$ $\times \sqrt[3]{PR \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} R}$

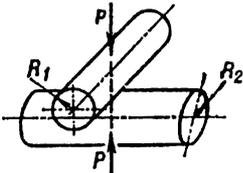
Tensión máxima, $\sigma_{\text{máx}}$	Aproximación de los cuerpos que se tocan, $\Delta$
$0,5784 \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2};$ <p>máx <math>\tau = \frac{1}{3} \sigma_{\text{máx}}</math>;  máx <math>\sigma_1 = 0,133 \sigma_{\text{máx}}</math></p>	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{P^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ $1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$
$0,5784 \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2};$ <p>máx <math>\tau = \frac{1}{3} \sigma_{\text{máx}}</math>; máx <math>\sigma_1 = 0,133 \sigma_{\text{máx}}</math></p>	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{P^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ $1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$
$0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{R^2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{1}{R^2}}$ <p>máx <math>\tau = \frac{1}{3} \sigma_{\text{máx}}</math>;  máx <math>\sigma_1 = 0,133 \sigma_{\text{máx}}</math></p>	$0,8255 \sqrt[3]{\frac{P^2 \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}{R \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ $1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{1}{R}}$

Esquema del contacto	Coeficientes de la ecuación de la elipse de contacto		Dimensiones de la zona de contacto
	A	B	
<p>Cuerpo esférico y cilindro</p>  <p><math>R_2 &gt; R_1</math></p>	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	$a = 1,145 n_a \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ $b = 1,145 n_b \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = 1,397 n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1}}$ $b = 1,397 n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 + R_1}}$
<p>Cuerpo esférico y canal cilíndrico</p>  <p><math>R_2 &gt; R_1</math></p>	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	$\frac{1}{2R_1}$	$a = 1,145 n_a \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ $b = 1,145 n_b \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = 1,397 n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}}$ $b = 1,397 n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}}$

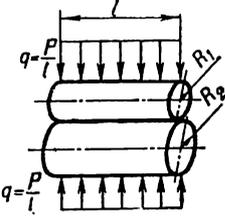
Tensión máxima, $\sigma_{\text{máx}}$	Aproximación de los cuerpos que se tocan, $\Delta$
$0,365n_P \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,245n_P \times \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right)^2}$	$0,655n_\Delta \times \sqrt[3]{P^2 \frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}$  $0,977n_\Delta \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{2R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$
$0,365n_P \times \sqrt[3]{P \frac{\left(\frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2}{\left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,245n_P \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)^2}$	$0,655n_\Delta \times \sqrt[3]{P^2 \frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}\right)^2}$  $0,977n_\Delta \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{2R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$

Esquema del contacto	Coeficientes de la ecuación de la elipse de contacto		Dimensiones de la zona de contacto
	A	B	
<p>Cuerpo esférico y canal circular (cojinete de bolas)</p>  <p><math>R_2 \geq R_3</math></p>	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$	$a = 1,145 n_a \sqrt[3]{\frac{P \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ $b = 1,145 n_b \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{P \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = 1,397 n_a \sqrt[3]{\frac{\frac{P}{E}}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ $b = 1,397 n_b \sqrt[3]{\frac{\frac{P}{E}}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$
<p>Cojinete de rodillos</p> 	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} \right)$	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right)$	$a = 1,145 n_a \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{P \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}}$

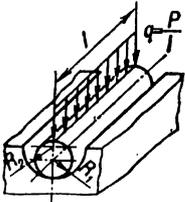
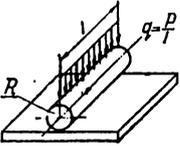
Tensión máxima, $\sigma_{\text{máx}}$	Aproximación de los cuerpos que se tocan, $\Delta$
$0,365n_P \times \sqrt[3]{\frac{P \left( \frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^2}{\left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,245n_P \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^2}$	$0,655n_{\Delta} \times \sqrt[3]{\frac{P^2 \left( \frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^2}{\left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$  $0,977n_{\Delta} \sqrt[3]{\left( \frac{P}{E} \right)^2 \left( \frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^2}$
$0,365n_P \times \sqrt[3]{\frac{P \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)^2}{\left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$	$0,655n_{\Delta} \times \sqrt[3]{\frac{P^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)^2}{\left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$

Esquema del contacto	Coeficientes de la ecuación de la elipse de contacto		Dimensiones de la zona de contacto
	A	B	
			$b = 1,145n_b \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}}{P \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)}}$ <p style="text-align: center;">Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = 1,397n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)}$ $b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)}$
<p>Cilindros con ejes mutuamente perpendiculares</p> 	$\frac{1}{2R_2}$	$\frac{1}{2R_1}$	$a = 1,145n_a \times$ $\times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}$ $b = 1,145n_b \times$ $\times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p style="text-align: center;">Para <math>R_1 =</math></p> $a = b = 0,9086 \times$ $\times \sqrt[3]{PR \left( \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}$

Tensión máxima, $\sigma_{\text{máx}}$	Aproximación de los cuerpos que se tocan, $\Delta$
<p style="text-align: center;"><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> <p style="text-align: center;"><math>0,245 n_P \times</math></p> $\times \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)^2}$	<p style="text-align: center;"><math>0,977 n_J \times</math></p> $\times \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)^2}$
<p style="text-align: center;"><math>0,365 n_P \times</math></p> $\times \sqrt[3]{P \frac{\left( \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \right)^2}{\left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$ <p style="text-align: center;"><math>= R_2 = R</math></p> $0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{R^2 \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}}$	<p style="text-align: center;"><math>0,655 n_A \times</math></p> $\times \sqrt[3]{P^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}$  $0,8255 \sqrt[3]{\frac{P^2}{R} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2}$

Esquema del contacto	Coeficientes de la ecuación de la elipse de contacto		Dimensiones de la zona de contacto
	A	B	
			<p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $a = 1,397n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$ $b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}$ <p>Para <math>R_1 =</math></p> $a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{PR}{E}}$
<p>Cilindros con ejes paralelos</p> 	-	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$	<p>Semiancho de la banda de contacto</p> $b = 1,128 \times$ $\times \sqrt{\frac{P}{l} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Para <math>R_1 =</math></p> $b = 0,798 \times$ $\times \sqrt{\frac{PR}{l} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $b = 1,522 \sqrt{\frac{P}{lE} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$ <p>Para <math>R_1 =</math></p> $b = 1,076 \sqrt{\frac{PR}{lE}}$

Tensión máxima, $\sigma_{\text{máx}}$	Aproximación de los cuerpos que se tocan, $\Delta$
<p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,245n_P \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \right)^2}$ <p><math>= R_2 = R</math></p> $0,388 \sqrt[3]{P \left( \frac{E}{R} \right)^2}$	$0,977n_{\Delta} \sqrt[3]{\left( \frac{P}{E} \right)^2 \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}}$  $1,231 \sqrt[3]{\left( \frac{P}{E} \right)^2 \frac{1}{R}}$
$\times \sqrt[3]{\frac{0,5642 \times \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{P}{l} \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}{1 - \mu_1^2 \frac{1 - \mu_2^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p><math>= R_2 = R</math></p> $0,798 \sqrt[3]{\frac{\frac{P}{lR}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,418 \sqrt[3]{\frac{PE}{l} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$ <p><math>= R_2 = R</math></p> $0,591 \sqrt[3]{\frac{PE}{lR}}$	$\frac{2P}{\pi l} \left[ \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \left( \ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \left( \ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$  $\frac{2P}{\pi l} \left[ \left( \ln \frac{2R}{b} + 0,407 \right) \times \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \right]$  $0,5796 \frac{P}{lE} \left( \ln \frac{4R_1 R_2}{b^2} + 0,814 \right)$  $0,5796 \frac{P}{lE} \left( \ln \frac{4R^2}{b^2} + 0,814 \right)$

Esquema del contacto	Coeficientes de la ecuación de la elipse de contacto		Dimensiones de la zona de contacto
	A	B	
<p>Cilindro y cavidad cilíndrica con ejes paralelos</p> 	—	$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$	<p>Semiancho de la banda de contacto</p> $b = 1,128 \times \sqrt{\frac{P}{l} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $b = 1,522 \sqrt{\frac{P}{lE} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$
<p>Cilindro y plano</p> 	—	$\frac{1}{2R}$	<p>Semiancho de la banda de contacto</p> $b = 1,131 \times \sqrt{\frac{PR}{l} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}$ <p>Si <math>E_1 = E_2 = E</math> y</p> $b = 1,526 \sqrt{\frac{PR}{lE}}$
<p>Dos cuerpos limitados por superficies curvilineas que se han tocado antes de la deformación en un punto</p>			<p>Semieje mayor de la elipse</p> $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{P}{\Sigma k}}$ <p>Semieje menor de la elipse</p> $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right) \frac{P}{\Sigma k}}$ <p><math>P</math> es la carga; <math>E</math>, el módulo de elasticidad; <math>\mu</math>, el coeficiente de Poisson; 1 y 2, los índices que corresponden al primer y segundo cuerpo; <math>\Sigma k</math>, la suma de las curvaturas principales de las superficies de los cuerpos que se tocan en el lugar del contacto inicial</p>

Tensión máxima, $\sigma_{m\acute{a}x}$	Aproximación de los cuerpos que se tocan, $\angle$
$0,5642 \sqrt{\frac{P}{l} \frac{\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,418 \sqrt{\frac{PE}{l} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$	$1,82 \frac{P}{lE} (1 - \ln b)$
$0,5642 \sqrt{\frac{\frac{P}{lR}}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}}}$ <p><math>\mu_1 = \mu_2 = 0,3</math>, entonces</p> $0,418 \sqrt{\frac{PE}{lR}}$	<p>Disminución del tamaño del diámetro del cilindro entre dos aristas que lo comprimen (contando con las deformaciones de contacto y generales del cilindro)</p> $\Delta D = 1,159 \frac{P}{lE} \left( 0,41 + \ln \frac{4R}{b} \right)$
$n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left( \frac{\sum k}{\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}} \right)^2 P}$ <p>siendo <math>n_p = \frac{1}{n_a n_b}</math></p>	$n_A \frac{1}{2} \times \sqrt[3]{\frac{9}{4} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)^2 P^2 \sum k}$

Valores numéricos de los coeficientes  $n_a, n_b, n_p, n_\Delta$

$\frac{A}{B}$	$n_a$	$n_b$	$n_p$	$n_\Delta$
1,0000	1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9623	1,013	0,9873	0,9999	0,9999
0,9240	1,027	0,9742	0,9997	0,9997
0,8852	1,042	0,9606	0,9992	0,9992
0,8459	1,058	0,9465	0,9985	0,9985
0,8059	1,076	0,9318	0,9974	0,9974
0,7652	1,095	0,9165	0,9960	0,9960
0,7238	1,117	0,9005	0,9942	0,9942
0,6816	1,141	0,8837	0,9919	0,9919
0,6384	1,168	0,8660	0,9890	0,9889
0,5942	1,198	0,8472	0,9853	0,9852
0,5489	1,233	0,8271	0,9805	0,9804
0,5022	1,274	0,8056	0,9746	0,9744
0,4540	1,322	0,7822	0,9669	0,9667
0,4040	1,381	0,7565	0,9571	0,9566
0,3518	1,456	0,7278	0,9440	0,9432
0,3410	1,473	0,7216	0,9409	0,9400
0,3301	1,491	0,7152	0,9376	0,9366
0,3191	1,511	0,7086	0,9340	0,9329
0,3080	1,532	0,7019	0,9302	0,9290
0,2967	1,554	0,6949	0,9262	0,9248
0,2853	1,578	0,6876	0,9219	0,9203
0,2738	1,603	0,6801	0,9172	0,9155
0,2620	1,631	0,6723	0,9121	0,9102
0,2501	1,660	0,6642	0,9067	0,9045
0,2380	1,693	0,6557	0,9008	0,8983
0,2257	1,729	0,6468	0,8944	0,8916
0,2132	1,768	0,6374	0,8873	0,8841
0,2004	1,812	0,6276	0,8766	0,8759
0,1873	1,861	0,6171	0,8710	0,8668
0,1739	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,1603	1,979	0,5938	0,8507	0,8451
0,1462	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,1317	2,141	0,5665	0,8246	0,8168
0,1166	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,1010	2,381	0,5325	0,7887	0,7775
0,09287	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,08456	2,557	0,5114	0,7647	0,7509
0,07600	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,06715	2,805	0,4858	0,7338	0,7163
0,05797	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,04838	3,199	0,4524	0,6909	0,6675
0,04639	3,253	0,4484	0,6856	0,6613
0,04439	3,311	0,4442	0,6799	0,6549
0,04237	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,04032	3,441	0,4352	0,6678	0,6409
0,03823	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,03613	3,594	0,4253	0,6542	0,6251

$\frac{A}{B}$	$n_a$	$n_b$	$n_P$	$n_{\Delta}$
0,03400	3,683	0,4199	0,6467	0,6164
0,03183	3,781	0,4142	0,6387	0,6071
0,02962	3,890	0,4080	0,6300	0,5970
0,02737	4,014	0,4014	0,6206	0,5860
0,02508	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,02273	4,320	0,3864	0,5990	0,5608
0,02033	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,01787	4,750	0,3680	0,5721	0,5292
0,01533	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,01269	5,432	0,3436	0,5358	0,4864
0,009934	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,007018	6,837	0,3058	0,4783	0,4186
0,003850	8,609	0,2722	0,4267	0,3579

Tabla 53

Presiones admisibles en la zona de contacto para el contacto inicial por la línea y la sollicitación estática

Marca del metal	Resistencia provisional, en $\text{kgf/mm}^2$	Dureza Brinell	Presión máxima admisible en la zona de contacto $[\sigma]_{\text{cont}}$ , en $\text{kgf/cm}^2$
<b>Acero</b>			
30	48—60	180	8500—10500
40	57—70	200	10000—13500
50	63—80	230	10500—14000
50Г	65—85	240	11000—14500
15X	62—75	240	10500—16000
20X	70—85	240	12000—14500
15XΦ	160—180	240	13500—16000
IIIХ15	—	—	38000
<b>Fundición</b>			
СЧ21-40	96	180—207	8000—9000
СЧ24-44	100	187—217	9000—10000
СЧ28-48	110	170—241	10000—11000
СЧ32-52	120	170—241	11000—12000
СЧ35-56	130	197—255	12000—13000
СЧ38-60	140	197—255	13000—14000

## NUEVE ANALOGÍAS NUEVAS EN LA RESISTENCIA DE MATERIALES \*

Veamos las nueve analogías nuevas que se basan en la identidad de las ecuaciones diferenciales en los problemas de obtención para las barras de fuerzas y desplazamientos longitudinales durante la tracción-compresión axial, de deformaciones angulares y desplazamientos angulares durante la torsión, de deformaciones angulares y desplazamientos lineales de deslizamiento durante el deslizamiento, de fuerzas transversales generalizadas y momentos flectores, ángulos de giro y flechas durante la flexión.

**ANALOGÍA 1.** *Los problemas de determinación de las fuerzas y los desplazamientos longitudinales durante la tracción-compresión de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de las fuerzas transversales generalizadas y los momentos flectores durante la flexión de la viga recíproca.* Las condiciones de equivalencia y reciprocidad son las siguientes:

$$\frac{n(x)}{EF(x)} \rightleftharpoons -q(x); \quad (\text{S.1})$$

$$\frac{N(x)}{EF(x)} \rightleftharpoons Q^*(x); \quad (\text{S.2})$$

$$u(x) \rightleftharpoons M(x). \quad (\text{S.3})$$

En estas fórmulas  $n(x)$  es la intensidad de la carga longitudinal distribuida;  $q(x)$ , la intensidad de la carga transversal distribuida;  $N(x)$ , la fuerza longitudinal;  $EF(x)$ , la rigidez durante la tracción-compresión;  $Q^*(x)$ , la fuerza transversal generalizada:  $Q^*(x) = Q(x) + m(x)$ ;  $u(x)$ , el desplazamiento longitudinal;  $M(x)$ , el momento flector;  $m(x)$ , la intensidad de la carga distribuida de momento.

**ANALOGÍA 2.** *Los problemas de determinación de los esfuerzos y desplazamientos longitudinales durante la tracción-compresión axial de la barra son equivalentes a los problemas de obtención de los ángulos de giro y las flechas durante la flexión de la viga recíproca.* Las condiciones de equivalencia y reciprocidad son las siguientes:

$$\frac{n(x)}{EF(x)} \rightleftharpoons -\frac{M(x)}{EJ(x)}; \quad (\text{S.4})$$

$$\frac{N(x)}{EF(x)} \rightleftharpoons \alpha(x); \quad (\text{S.5})$$

$$u(x) \rightleftharpoons w(x). \quad (\text{S.6})$$

Aquí  $EJ(x)$  es la rigidez en la flexión;  $\alpha(x)$ , el ángulo de giro;  $w(x)$ , la flecha.

\* Várvak P. M., Várvak A. P. Cinco analogías nuevas en la resistencia de materiales. Problemas de resistencia, 1972, 1; Várvak P. M., Várvak A. P. Cuatro nuevas analogías en la resistencia de materiales. Problemas de resistencia, 1972, 10.

**ANALOGÍA 3.** *Los problemas de determinación de las deformaciones angulares y los desplazamientos lineales de deslizamiento durante el deslizamiento separado de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de las fuerzas longitudinales y los desplazamientos longitudinales durante la tracción-compresión de la barra recíproca.* Las condiciones de equivalencia y reciprocidad son las siguientes:

$$\frac{q(x) k}{GF(x)} \rightleftharpoons \frac{n(x)}{EF(x)}; \quad (\text{S.7})$$

$$\gamma(x) \rightleftharpoons \frac{N(x)}{EF(x)}; \quad (\text{S.8})$$

$$v(x) \rightleftharpoons u(x). \quad (\text{S.9})$$

Aquí  $GF(x)$  es la rigidez durante el deslizamiento;  $k$ , el coeficiente que caracteriza la irregularidad de distribución de las tensiones tangenciales por la altura de la sección;  $\gamma(x)$ , el deslizamiento unitario (deformación angular);  $v(x)$ , el desplazamiento lineal de deslizamiento.

**ANALOGÍA 4.** *Los problemas de determinación de las deformaciones angulares y los desplazamientos lineales de deslizamiento durante el deslizamiento separado de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de las deformaciones angulares y los desplazamientos angulares durante la torsión de la barra recíproca.* Las condiciones de equivalencia y de reciprocidad se definen por medio de las fórmulas:

$$\frac{q(x) k}{GF(x)} \rightleftharpoons \frac{m_1(x)}{GF_1(x)}; \quad (\text{S.10})$$

$$\gamma(x) \rightleftharpoons \theta(x); \quad (\text{S.11})$$

$$v(x) \rightleftharpoons \varphi(x). \quad (\text{S.12})$$

En estas fórmulas  $m_1(x)$  es la intensidad de la carga torsional distribuida;  $GJ_1(x)$ , la rigidez en la torsión;  $\theta(x)$ , la deformación angular (ángulo relativo de torsión);  $\varphi(x)$ , el desplazamiento angular (ángulo de torsión).

**ANALOGÍA 5.** *Los problemas de determinación de los momentos torsionales y los ángulos de torsión durante la torsión de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de las fuerzas transversales generalizadas y los momentos flectores durante la flexión de la viga recíproca.* Las condiciones de reciprocidad y equivalencia son las siguientes:

$$\frac{m_1(x)}{GJ_1(x)} \rightleftharpoons -q(x); \quad (\text{S.13})$$

$$\frac{M_1(x)}{GJ_1(x)} \rightleftharpoons Q^*(x); \quad (\text{S.14})$$

$$\varphi(x) \rightleftharpoons M(x). \quad (\text{S.15})$$

Aquí  $M_1(x)$  es el momento torsional.

**ANALOGÍA 6.** *Los problemas de determinación de las fuerzas y los desplazamientos longitudinales durante la tracción-compresión de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de los momentos torsionales y los ángulos de torsión durante la torsión de la barra recíproca.* Las condiciones de reciprocidad

y equivalencia son las siguientes:

$$\frac{n(x)}{EF(x)} \rightleftharpoons \frac{m_t(x)}{GJ_t(x)}; \quad (\text{S.16})$$

$$\frac{N(x)}{EF(x)} \rightleftharpoons \frac{M_t(x)}{GJ_t(x)}; \quad (\text{S.17})$$

$$u(x) \rightleftharpoons \varphi(x). \quad (\text{S.18})$$

**ANALOGÍA 7.** *Los problemas de determinación de las deformaciones angulares y los desplazamientos lineales de deslizamiento durante el deslizamiento separado de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de las fuerzas transversales generalizadas y los momentos flectores durante la flexión de la viga recíproca.* Las condiciones de equivalencia y reciprocidad son las siguientes:

$$\frac{q(x)}{GF} k \rightleftharpoons q^*(x); \quad (\text{S.19})$$

$$v(x) \rightleftharpoons M(x); \quad (\text{S.20})$$

$$\gamma(x) \rightleftharpoons Q^*(x). \quad (\text{S.21})$$

**ANALOGÍA 8.** *Los problemas de determinación de las deformaciones angulares y los desplazamientos lineales de deslizamiento durante el deslizamiento separado de la barra son equivalentes a los problemas de determinación de los ángulos de giro y las flechas de la viga recíproca.* Las condiciones de reciprocidad y equivalencia se expresan por medio de las siguientes fórmulas:

$$\frac{q(x)}{GF} k \rightleftharpoons \frac{M(x)}{EJ}; \quad (\text{S.22})$$

$$v(x) \rightleftharpoons w(x); \quad (\text{S.23})$$

$$\gamma(x) \rightleftharpoons \alpha(x). \quad (\text{S.24})$$

**ANALOGÍA 9.** *Los problemas de determinación de los momentos flectores y los ángulos de torsión durante la torsión son equivalentes a los problemas de determinación de los ángulos de giro y las flechas de la viga recíproca durante la flexión.* Las condiciones de reciprocidad y equivalencia son las siguientes:

$$\frac{m_t(x)}{GJ_t(x)} \rightleftharpoons \frac{M(x)}{EJ(x)}; \quad (\text{S.25})$$

$$\frac{M_t(x)}{GJ_t(x)} \rightleftharpoons \alpha(x); \quad (\text{S.26})$$

$$\varphi(x) \rightleftharpoons w(x). \quad (\text{S.27})$$

Ilustremos algunas analogías con ejemplos tomados de los artículos señalados.

**EJEMPLO 1.** Una barra prismática pesada se encuentra bajo la influencia de la fuerza de gravedad que no es sino la carga axial distribuida uniformemente de intensidad  $n(x) = \gamma F$  (fig. 367, a). Aquí  $F$  es el área de la sección transversal;  $\gamma$ , el peso volumétrico. Mostremos para este caso la aplicación de la analogía 1.

En la barra dada las condiciones de frontera son las siguientes: cuando  $x = 0$   $u = 0$  y cuando  $x = l$   $u = 0$ . De acuerdo con (S.3) la barra recíproca tiene que elegirse de tal manera que los momentos flectores en los extremos sean iguales a cero. Esta condición la satisface la viga sobre dos apoyos (fig. 367, b).

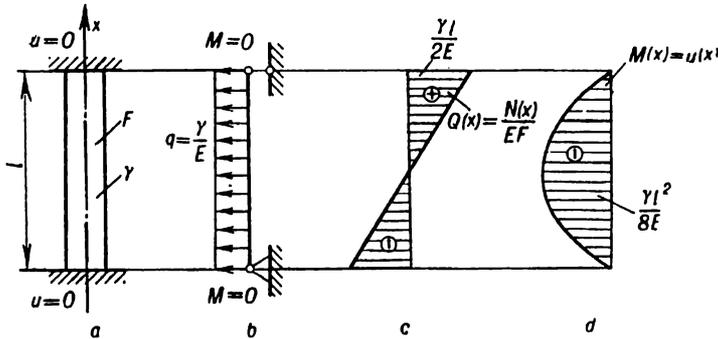


Fig. 367

Según (S.1) la carga ficticia para esta viga  $q(x) = -\frac{F\gamma}{EF} = -\frac{\gamma}{E}$ , siendo  $E$  el módulo de elasticidad. Ahora basta con construir para esta viga recíproca (ficticia) dos diagramas debidas a la carga ficticia, a saber: de las fuerzas cortantes (fig. 367, c) y de los momentos flectores (fig. 367, d). El primer diagrama, de acuerdo con (S.2), representa el diagrama de las fuerzas longitudinales  $\frac{N(x)}{EF}$  el segundo, el diagrama de los desplazamientos longitudinales.

EJEMPLO 2. Una barra prismática pesada está fijada cerca del extremo superior (fig. 368, a) y se halla bajo la influencia del peso muerto. Mostremos también con este ejemplo la aplicación de la analogía 1. Las condiciones de frontera aquí son las siguientes: cuando  $x = 0$   $N = 0$ , cuando  $x = l$   $u = 0$ .

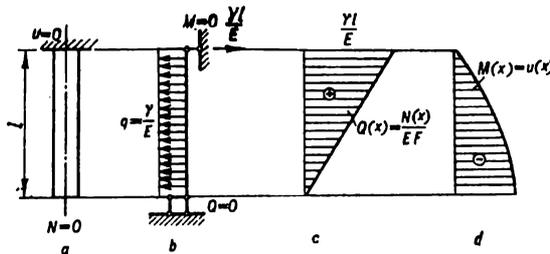


Fig. 368

En este caso la viga recíproca tiene que elegirse de tal modo que la fuerza cortante en un extremo y el momento flector en el otro sean iguales a cero. La viga correspondiente puede verse en la fig. 368, b. El diagrama de  $Q(x)$  (fig. 368, c) corresponde al diagrama de  $\frac{N(x)}{EF}$ , y el diagrama de  $M(x)$  (fig. 368, d), al diagrama de  $u(x)$ .

**EJEMPLO 3.** Apliquemos para la barra mostrada en la fig. 369, *a* la analogía 2. Las condiciones de frontera en la viga recíproca, de acuerdo con (S.6), deben ser tales que las flechas en los extremos sean iguales a cero. Estas condiciones las satisface la viga mostrada en la fig. 369, *b*. De acuerdo con (S.4)

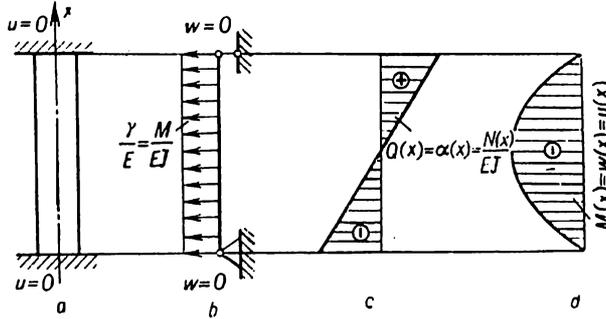


Fig. 369

$\frac{\gamma}{E} = \frac{M}{EJ}$  representa la carga de momento; por eso los diagramas de  $Q(x)$  (fig. 369, *c*) y de  $M(x)$  (fig. 369, *d*) debidos a esta carga serán diagramas de los ángulos de inclinación y de las flechas, que a su vez son diagramas de  $\frac{N(x)}{EF}$  y de  $u(x)$ .

**EJEMPLO 4.** Un árbol circular empotrado por ambos extremos se tuerce por los momentos torsionales distribuidos uniformemente de intensidad  $m_t$  (fig. 370, *a*). Mostremos con este ejemplo la aplicación de la analogía 5. Las

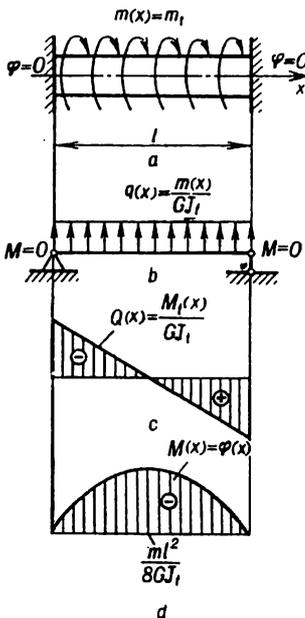


Fig. 370

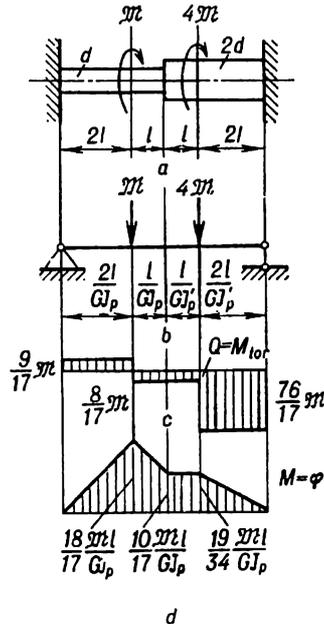


Fig. 371

condiciones de frontera en la barra dada son las siguientes: cuando  $x = 0$   $\varphi = 0$  y cuando  $x = l$   $\varphi = 0$ . De acuerdo con (S.15) en los extremos de la barra recíproca los momentos flectores serán iguales a cero. La viga recíproca puede verse en la fig. 370, *b*. La carga ficticia  $q(x) = \frac{m(x)}{GJ_t}$ . De acuerdo con (S.14)

(S.15) el diagrama de  $Q(x)$  corresponde a  $\frac{M_t(x)}{GJ_t}$  (fig. 370, *c*) y el diagrama de  $M(x)$ , al diagrama de los ángulos de torsión  $\varphi(x)$  (fig. 370, *d*).

**EJEMPLO 5.** Una barra escalonada se tuerce por dos momentos concentrado (fig. 371, *a*). La viga recíproca de sección transversal constante, que por sus dimensiones longitudinales y el esquema de sollicitación corresponde al árbol inicial pero con valores reducidos de las longitudes, es decir, con escala diferente de los tramos reducidos, puede verse en la fig. 371, *b*. Aquí  $J_p$  y  $J_p'$  son los momentos polares de inercia de las secciones del árbol a la izquierda y la derecha. Ahora para resolver el problema queda construir dos diagramas de  $Q$  y  $M$  (fig. 371, *c, d*).

De semejante manera pueden aplicarse también otras analogías para resolver los problemas. Las citadas analogías amplían considerablemente las posibilidades de una utilización eficaz del material del manual. Una serie de datos que se refieren a un tipo del estado tensional—deformacional de la barra pueden utilizarse, por medio de las analogías, durante el examen de otros tipos de las deformaciones.

**Propiedades físico-mecánicas de los materiales  
(para los cálculos aproximados)**

- $\sigma_p$  es el límite de resistencia en la tracción (para la madera es a lo largo de las fibras);  
 $\sigma_c$ , el límite de resistencia en la compresión (para la madera es a lo largo de las fibras);  
 $\sigma_f$ , el límite de resistencia en la flexión;  
 $\tau_p$ , el límite de resistencia en la torsión;  
 $\tau_{ciz}$ , el límite de resistencia en el cizallamiento (para la madera es a lo largo de las fibras);  
 $\sigma_{pr}$ , el límite de proporcionalidad en la tracción;  
 $\sigma_F$ , el límite de fluencia en la tracción;

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
----------	--	---	---

**Aceros al**

**DE CALIDAD**

**GOST 380-60**

Ст. 1	$\sigma_p = 32-40$	$\sigma_F = 18$	$\sigma_{-1t} = 12-15$ $\sigma_{-1} = 16-22$ $\tau_{-1} = 8-12$
Ст. 2	$\sigma_p = 32-40$	$\sigma_F = 19-22$	$\sigma_{-1t} = 12-16$ $\sigma_{-1} = 17-22$ $\tau_{-1} = 8-13$
Ст. 3	$\sigma_p = 38-47$	$\sigma_F = 21-24$	$\sigma_{-1t} = 12-16$ $\sigma_{-1} = 17-22$ $\tau_{-1} = 10-13$
Ст. 4	$\sigma_p = 42-52$	$\sigma_F = 24-26$	$\sigma_{-1} = 19-25$
Ст. 5	$\sigma_p = 50-62$	$\sigma_F = 26-28$	$\sigma_{-1t} = 17-22$ $\sigma_{-1} = 22-30$ $\tau_{-1} = 13-18$
Ст. 6	$\sigma_p = 60-72$	$\sigma_F = 30-31$	$\sigma_{-1t} = 19-25$ $\sigma_{-1} = 25-34$ $\tau_{-1} = 15-20$

**ESPE**

**GOST 5520-62**

15K	$\sigma_p = 38$	$\sigma_F = 21-23$	—
20K	$\sigma_p = 41$	$\sigma_F = 23-25$	—

**GOST 6713-53**

Ст. 3 para puentes M16C	$\sigma_p = 38$ $\sigma_p = 38$	$\sigma_F = 24$ $\sigma_F = 23$	— —
----------------------------	------------------------------------	------------------------------------	--------

**GOST 1414-54**

A12	$\sigma_p = 42-57$	—	—
A40Г	$\sigma_p = 60-75$	—	—

- $\sigma_{0,1}$ , límite convencional de fluencia en la tracción (deformación 0,1%);
- $\sigma_{F^c}$ , límite de fluencia en la compresión;
- $\sigma_{F^f}$ , límite de fluencia en la flexión;
- $\sigma_{-1t}$ , límite de fatiga en la tracción;
- $\sigma_{-1}$ , límite de fatiga en la flexión;
- $\tau_{-1}$ , límite de fatiga en la torsión.

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en $\times 10^6 \frac{1}{grad}$
--	--	--------------------------------------	---	-------------------------	--	--

**carbón**

**CORRIENTE \*\*\***

28	110	—	—	—	—	—
26	116	—	—	—	—	—
21—23	131	7—10	—	—	—	—
19—21	143	6—8	—	—	—	—
15—17	170	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

**CIALES**

23	—	7—8	—	—	—	—
22	—	6—7	—	—	—	—
22(50)	—	7—10	—	—	—	—
22(50)	—	7—10	—	—	—	—
22(36)	160	—	2,02	—	—	11,9—14,2
14(20)	207	—	—	—	—	—

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
----------	--	---	---

DE

## GOST 1050-60

10	$\sigma_p = 34-42$	$\sigma_F = 21$	$\sigma_{-1t} = 12-15$ $\sigma_{-1} = 16-22$ $\tau_{-1} = 8-12$
20	$\sigma_p = 42-50$	$\sigma_F = 25$	$\sigma_{-1t} = 12-16$ $\sigma_{-1} = 17-22$ $\tau_{-1} = 10-13$
30	$\sigma_p = 50-60$	$\sigma_F = 30$	$\sigma_{-1t} = 17-21$ $\sigma_{-1} = 20-27$ $\tau_{-1} = 11-14$
40	$\sigma_p = 58-70$	$\sigma_F = 34$	$\sigma_{-1t} = 18-24$ $\sigma_{-1} = 23-32$ $\tau_{-1} = 14-19$
45	$\sigma_p = 61-75$	$\sigma_F = 36$	$\sigma_{-1t} = 19-25$ $\sigma_{-1} = 25-34$ $\tau_{-1} = 15-20$
50	$\sigma_p = 64-80$	$\sigma_F = 38$	$\sigma_{-1t} = 20-26$ $\sigma_{-1} = 27-35$ $\tau_{-1} = 16-21$
60	$\sigma_p = 69-90$	$\sigma_F = 41$	$\sigma_{-1t} = 22-28$ $\sigma_{-1} = 31-38$ $\tau_{-1} = 18-22$
30Г	$\sigma_p = 55-70$	$\sigma_F = 32$	$\sigma_{-1} = 22-32$
60Г	$\sigma_p = 71$	$\sigma_F = 42$	$\sigma_{-1t} = 25-32$

## Aceros

## GOST 5058-65

15XCHД	$\sigma_p = 64-66$	$\sigma_F = 39-42$	$\sigma_{-1} = 31$ $\tau_{-1} = 16$
--------	--------------------	--------------------	--

## GOST 4543-61

20X	$\sigma_p = 72-85$	$\sigma_F = 40-65$	$\sigma_{-1} = 31-88$ $\tau_{-1} = 17-23$
40X	$\sigma_p = 73-105$	$\sigma_F = 65-90$	$\sigma_{-1t} = 24-34$ $\sigma_{-1} = 32-48$ $\tau_{-1} = 21-26$
45X	$\sigma_p = 85-105$	$\sigma_F = 70-95$	$\sigma_{-1} = 40-50$
30XM	$\sigma_p = 74-100$	$\sigma_F = 54-85$	$\sigma_{-1t} = 37$ $\sigma_{-1} = 31-41$ $\tau_{-1} = 23$
40XH	$\sigma_p = 100-145$	$\sigma_F = 80-130$	$\sigma_{-1t} = 31-42$ $\sigma_{-1} = 46-60$

Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, $\frac{1}{\text{grad}}$ en $\times 10^6$
--	--	--------------------------------------	---	-------------------------	--	---

CALIDAD \*\*\*

31(55)	—	—	1,90	—	7,83	11,6—14,6
25(55)	—	—	2,02	—	7,82	11,1—14,4
21(50)	—	8	—	—	7,82	12,6—15,6
19(45)	—	6	2,135	—	7,81	12,4—14,6
16(40)	—	5	2,04	—	7,81	11,6—14,7
14(40)	—	4	2,20	—	7,81	12,0—14,1
12(35)	—	—	2,08	—	7,80	11,1—14,6
20(45)	—	8	2,17	—	7,81	—
11(35)	—	—	2,109	—	7,81	11,6—14,6

aleados \*\*\*

18—21	—	7,11	—	—	—	—
—	—	—	2,07	—	7,74	11,3
—	—	—	2,185(0,808)	—	7,85	13,4—14,8
9(45)	187—219	5	2,109(0,8015)	—	7,82	12,8
—	—	—	2,130	—	7,82	12,3—14,4
—	—	—	2,040	—	7,82	11,8

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
12XH3A	$\sigma_p = 95-140$	$\sigma_F = 70-110$	$\sigma_{-1} = 42-64$ $\tau_{-1} = 22-30$
20XH3A	$\sigma_p = 95-145$	$\sigma_F = 85-110$	$\sigma_{-1} = 43-65$ $\tau_{-1} = 24-31$
40XHMA	$\sigma_p = 110-170$	$\sigma_F = 85-160$	$\sigma_{-1} = 50-70$ $\tau_{-1} = 27-38$
30XГСА	$\sigma_p = 110-170$	$\sigma_F = 85-150$	$\sigma_{-1} = 48-70$ $\tau_{-1} = 28-40$

#### Aceros inoxidables

##### GOST 5632-61

1X13(ЭЖ1)	$\sigma_p = 61$	$\sigma_F = 41$	$\sigma_{-1} = 37$
2X13(ЭЖ2) (temple de 1000-1020°C al aire, revenido a 720-750°C)	$\sigma_p = 72$	$\sigma_F = 52$	$\sigma_{-1} = 37$
1X17H2(ЭИ268) (temple de 1030°C, revenido a 680°C)	$\sigma_p = 96$	$\sigma_F = 77$	$\sigma_{-1} = 49$
1X18H9T(ЭЯ1T)	$\sigma_p = 58$	$\sigma_F = 24$	$\sigma_{-1} = 20-24$ $\tau_{-1} = 13,5$
X12H22TЭМР(ЭИ696М, ЭП33) (laminación, envejecimiento 730°C, 16h+630°C, 16 h)	$\sigma_p = 135$	$\sigma_F = 104$	—

#### Aleaciones termorresistentes y resistentes

##### GOST 5632-31

X20H77T2ЮР(ЭИ 437Б) (austenización a 1080°C con enfriamiento al aire, envejecimiento a 750°C, 16 h)	$\sigma_p = 92-109$	$\sigma_F = 66$	—
ЖС6К (temple de 1210-1220°C con enfriamiento al aire, recocido a 950°C, 2 h)	$\sigma_p = 100-107$	$\sigma_F = 88-94$	—

#### Metales con alto

Tungsteno (no aleado*****)	$\sigma_p = 10,7$	—	—
Aleaciones de tungsteno			
W - 15Mo*****	$\sigma_p = 17,5$	—	—
W - 2Nb*****	$\sigma_p = 23,4$	—	—
W - 3,6Ta*****	$\sigma_p = 35$	—	—

Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en $\times 10^6 \frac{1}{\text{grad}}$
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	2,040(0,815)	—	7,85	11,0—14,5
—	—	—	2,040	—	7,85	11,7
—	—	—	1,980(0,830)	—	7,85	11,0

termorresistentes

22(60)	—	1	2,2	—	7,75	10,1—12,25
21(65)	—	6—17	2,2	—	7,75	10,1
17(59)	—	—	2,0	—	7,75	10,3
70(80)	—	28	2,0	—	7,9	16,6—18,6
20(46)	—	—	—	—	—	—

a la oxidación a altas temperaturas

11—24 (10—21)	—	3,5	2,0	—	8,2	12,7
1,5—7 (8—16)	—	—	—	—	—	—

punto de fusión

49(76)	—	—	4,2(1,5)	0,3	19,3	4,45
27(78)	—	—	—	—	—	—
9(25)	—	—	—	—	—	—
15(8)	—	—	—	—	—	—

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
<b>Molibdeno</b>	$\sigma_p = 78$	$\sigma_F = 76$	—
<b>Aleaciones de molibdeno</b>			
BM-1 { 20°C	$\sigma_p = 80$	$\sigma_F = 68$	—
1800°C	$\sigma_p = 10$	—	—
BM-2 { 20°C	$\sigma_p = 75$	—	—
1800°C	$\sigma_p = 9$	—	—
BM-3 { 20°C	$\sigma_p = 43-60$	—	—
1800°C	$\sigma_p = 12-13,5$	—	—
<b>Niobio</b>	$\sigma_p = 77$	$\sigma_F = 60$	—
<b>Aleaciones de niobio</b>			
BH-2 { 20°C	$\sigma_p = 75$	$\sigma_F = 70$	—
1500°C	$\sigma_p = 8-10$	—	—
20°C	$\sigma_p = 75-80$	—	—
BH-3 { 1500°C	$\sigma_p = 12,5$	—	—
20°C	$\sigma_p = 81$	$\sigma_F = 73$	—
BH-4 { 1500°C	$\sigma_p = 17$	—	—
		*	<b>Fundición</b>
<b>GOST 1412-54</b>			
Ч4 12-28	$\sigma_p = 12$ $\sigma_c = 50$ $\sigma_f = 28$	—	—
Ч4 15-32	$\sigma_p = 15$ $\sigma_c = 65$ $\sigma_f = 32$ $\tau_p = 24$	—	—
Ч4 18-36	$\sigma_p = 18$ $\sigma_c = 70$ $\sigma_f = 36$	—	$\sigma_{-1t} = 3,5$ $\sigma_{-1} = 9,0$
Ч4 21-40	$\sigma_p = 21$ $\sigma_c = 95$ $\sigma_f = 40$ $\tau_p = 28$	$\sigma_F = 0,75\sigma_p$	$\sigma_{-1} = 10$ $\tau_{-1} = 8$
Ч4 24-44	$\sigma_p = 24$ $\sigma_c = 100$ $\sigma_f = 44$ $\tau_p = 30$	$\sigma_F = 0,75\sigma_p$	$\sigma_{-1t} = 6,5$ $\sigma_{-1} = 12$ $\tau_{-1} = 10$
Ч4 28-48	$\sigma_p = 28$ $\sigma_c = 110$ $\sigma_f = 48$ $\tau_p = 35$	$\sigma_F = 0,75\sigma_p$	$\sigma_{-1t} = 7,5$ $\sigma_{-1} = 15$ $\tau_{-1} = 11$

Continuación del apéndice 1.

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell,	Resiliencia,	Módulo de elasticidad $E(G)$ , en	Coeficiente de Poisson	Peso específico,	Coeficiente de dilatación lineal,
	en $\text{kgf/mm}^2$	en $\text{kgfm/cm}^2$	$\times 10^{-4} \text{ kgf/mm}^2$		en $\text{gf/cm}^3$	en $\times 10^4 \frac{1}{\text{grad}}$
20	—	—	3,3(1,22)	0,31	10,2	5,6
10	—	—	3,3	—	10,3	—
45	—	—	1,85	—	—	—
10(30)	—	0,2	3,33	—	—	—
18	—	—	1,85	—	—	—
2,8(0,7— —40)	—	—	3,25	—	—	—
40—50 (6,5)	—	—	—	—	—	—
20—25 (25—35)	—	37	1,06(0,88)	0,39	8,57	7,1
18—28	—	27	1,06	—	8,66	6,25
—	—	—	—	—	—	—
16—20 (40—70)	—	30	—	—	—	—
40—43	—	—	—	—	—	—
16(33)	—	5—7	—	—	—	—
24(30)	—	—	—	—	—	—

gris

—	143—229	—	0,8—1,5(0,45)	0,23—0,27	6,8—7,1	10—12
—	163—229	—	0,8—1,5(0,45)	0,23—0,27	6,8—7,1	10—12
—	170—229	—	0,8—1,5(0,45)	0,23—0,27	7,0—7,2	10—12
—	180—207	0,9	0,85(0,45)	0,23—0,27	7,2—7,3	10—12
—	187—217	0,9	1,1(0,48)	0,23—0,27	7,25—7,4	10—12
1,0—1,2	170—241	1,0	1,2(0,52)	0,23—0,27	7,3—7,4	10—12

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
KЧ 32-52	$\sigma_p = 32$ $\sigma_c = 120$ $\sigma_f = 52$ $\tau_p = 39$	$\sigma_F = 0,85\sigma_p$	$\sigma_{-1t} = 7$ $\sigma_{-1} = 14$ $\tau_{-1} = 11,5$
KЧ 35-56	$\sigma_p = 35$ $\sigma_c = 120$ $\sigma_f = 56$ $\tau_p = 40$	$\sigma_F = 0,85\sigma_p$	$\sigma_{-1t} = 7,5$ $\sigma_{-1} = 15$ $\tau_{-1} = 11,5$
KЧ 38-60	$\sigma_p = 38$ $\sigma_c = 140$ $\sigma_f = 60$ $\tau_p = 46$	$\sigma_F = 0,85\sigma_p$	$\sigma_{-1} = 15$ $\tau_{-1} = 11,5$
Fundición blanca	$\sigma_p = 10-20$ $\sigma_c = 70-140$ $\sigma_f = 30-50$	—	—
<b>Fundición</b>			
GOST 2176-43			
X28	$\sigma_p = 35$ $\sigma_f = 55$	—	—
X34	$\sigma_p = 40$ $\sigma_f = 50$	—	—
<b>Fundición</b>			
GOST 1215-59			
Ferrítica			
KЧ 30-6	$\sigma_p \geq 30$ $\sigma_f = 49$ $\tau_p = 34$	$\sigma_F = 19$ $\sigma_{F.c} = 21$ $\sigma_{F.f} = 31$	$\sigma_{-1t} = 7$ $\sigma_{-1} = 12$ $\tau_{-1} = 11$
KЧ 33-8	$\sigma_p \geq 33$ $\sigma_f = 53$ $\tau_p = 34,5$	$\sigma_F = 21$ $\sigma_{F.c} = 23$ $\sigma_{F.f} = 33$	$\sigma_{-1t} = 8$ $\sigma_{-1} = 13$ $\tau_{-1} = 12$
KЧ 35-10	$\sigma_p \geq 35$ $\sigma_f = 57$ $\tau_p = 35$	$\sigma_F = 22$ $\sigma_{F.c} = 24$ $\sigma_{F.f} = 34$	$\sigma_{-1t} = 8$ $\sigma_{-1} = 14$ $\tau_{-1} = 13$
KЧ 37-12	$\sigma_p \geq 37$ $\sigma_f = 58$ $\tau_p = 37$	$\sigma_F = 23$ $\sigma_{F.c} = 25$ $\sigma_{F.f} = 35$	$\sigma_{-1t} = 8$ $\sigma_{-1} = 14$ $\tau_{-1} = 13$
Perlítica			
KЧ 45-6	$\sigma_p \geq 45$	—	—
KЧ 50-4	$\sigma_p \geq 50$ $\sigma_f = 72$ $\tau_p = 52$	$\sigma_F = 27$ $\sigma_{F.c} = 30$ $\sigma_{F.f} = 42$	$\sigma_{-1t} = 11$ $\sigma_{-1} = 18$ $\tau_{-1} = 16$

Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell,	Resiliencia,	Módulo de elasticidad $E(G)$ , en	Coeficiente de Poisson	Peso específico,	Coeficiente de dilatación lineal, $\frac{1}{\text{grad}}$
	en kgf/mm <sup>2</sup>	en kgfm/cm <sup>2</sup>	$\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>		en gf/cm <sup>3</sup>	
1,0—1,2	187—255	1,0	1,3(0,56)	0,23—0,27	7,3—7,4	10—12
1,1—1,3	197—269	1,1	1,45(0,64)	0,23—0,27	7,3—7,4	10—12
1,2—1,4	207—269	1,0	1,6(0,7)	0,23—0,27	7,4—7,6	10—12
—	300—700	0,1—0,5	1,6—1,8	—	7,5±0,2	8±2

**termorresistente**

—	220—270	—	—	—	—	—
—	250—320	—	—	—	—	—

**maleable**

> 6(7)	< 163	1,2	1,55(0,63)	0,23	7,2	10,5
> 8(9)	< 149	1,3	1,6(0,64)	0,25	7,21	10,3
> 10(11)	< 149	1,4	1,66(0,65)	0,27	7,22	10,2
> 12(13)	< 149	1,6	1,98(0,73)	0,36	7,24	10
> 6	< 241	—	—	—	—	—
> 4(3,5)	< 241	0,8	1,74(0,68)	0,28	7,3	10

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
КЧ 56-4	$\sigma_p > 56$	—	—
КЧ 60-3	$\sigma_p > 60$	—	—
КЧ 63-2	$\sigma_p > 63$	—	—

**Fundición con**

**GOST 7293—54**

ВЧ 45-0

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 45-50 \\ \sigma_c &= 150-160 \\ \sigma_f &= 65-75 \\ \tau_p &= 45-50 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 35-40$$

$$\sigma_{-1} = 18-20$$

ВЧ 50-1,5

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 50-60 \\ \sigma_c &= 170-180 \\ \sigma_f &= 90-100 \\ \tau_p &= 50-55 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 40-50$$

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= 20-22 \\ \tau_{-1} &= 17-21 \end{aligned}$$

ВЧ 60-2

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 60-70 \\ \sigma_c &= 200-210 \\ \sigma_f &= 105-110 \\ \tau_p &= 60-75 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 42-55$$

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= 17-23 \\ \tau_{-1} &= 15-16 \end{aligned}$$

ВЧ 45-5

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 45-55 \\ \sigma_c &= 180-200 \\ \sigma_f &= 65-75 \\ \tau_p &= 40-45 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 32-42$$

$$\sigma_{-1} = 18-20$$

ВЧ 40-10

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 40-55 \\ \sigma_c &= 200-220 \\ \sigma_f &= 60-70 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 30-40$$

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= 25-28 \\ \tau_{-1} &= 19,8 \end{aligned}$$

**Metales**

**ALEACIONES DE**

**GOST 4784—65**

АМцМ

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 13 \\ \tau_{ciz} &= 8 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 5$$

$$\sigma_{-1} = 5^*$$

АМг2М

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 19 \\ \tau_{ciz} &= 12,5 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 8$$

$$\sigma_{-1} = 12^*$$

АМг2П

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 25 \\ \tau_{ciz} &= 15 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 21$$

$$\sigma_{-1} = 12,5^*$$

АМг6

$$\sigma_p = 32$$

$$\sigma_F = 17$$

—

АМг6М

$$\sigma_p = 30$$

$$\sigma_F = 15$$

—

Д1(О)

$$\sigma_p = 21$$

$$\sigma_F = 11$$

$$\sigma_{-1} = 7,5^*$$

Д1П(3 y EC)

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 41 \\ \tau_{ciz} &= 27 \end{aligned}$$

$$\sigma_F = 25$$

$$\sigma_{-1} = 12,5^*$$

Д6 { (О)  
(3 y EC)

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 22 \\ \sigma_p &= 46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_F &= 11 \\ \sigma_F &= 30 \end{aligned}$$

—

—

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en $\times 10^4 \frac{1}{\text{grad}}$
> 4	< 269	—	—	—	—	—
> 3	< 269	—	—	—	—	—
> 2	< 269	—	—	—	—	—

**grafito globular**

0,4—1,4	207—269	0,5—1,5	1,3—1,6(0,7)	—	7—7,5	10,6—11,4
1,5—3,0	207—255	1,5—3	1,3(0,775)	—	7—7,5	10,6—11,4
2—3	255—285	1,5—3	1,8(0,8)	—	7—7,5	10,6—11,4
5—10	173—207	2,5—8	1,3(0,7)	—	7—7,5	10,6—11,4
10—20	156—179	5—7	1,6(0,75)	—	7—7,5	10,6—11,4

**no ferrosos**

**ALUMINIO DEFORMABLES**

23(70)	30	—	0,71(0,27)	0,3	2,73	24
23(64)	45	—	0,71(0,27)	0,3	2,67	23,8
6	60	—	0,71(0,27)	0,3	2,67	23,8
24	—	—	0,7	—	2,64	24,7
18	—	—	0,71(0,27)	0,3	2,64	24,7
18(58)	45	—	0,71(0,27)	0,31	2,8	22,9
15(30)	115	3	0,71(0,27)	0,31	2,8	22,9
15(50)	50	—	0,71	0,31	2,8	22
—	105	—	0,71	0,31	2,8	22

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
Д16, Д16 П chapeado (3 y EC)	$\sigma_p = 44$	$\sigma_F = 29$	—
materiales semiacabados { (O) (C3) chapeado (3 e HC) perfiles (3 e HC)	$\sigma_p = 52$	$\sigma_F = 38$	$\sigma_{-1} = 14^*$
	$\tau_{ciz} = 21 - 30$	$\sigma_F = 10$	$\sigma_{-1} = 9^*$
	$\sigma_p = 22$	$\sigma_F = 23$	—
	$\sigma_p = 43$	$\sigma_F = 41$	—
	$\sigma_p = 46$	$\sigma_F = 40 - 44$	—
	$\sigma_p = 42 - 50$		
ЛК4-1	$\sigma_p = 43$	$\sigma_F = 28$	$\sigma_{-1} = 13^{**}$
ВД17	$\sigma_p = 49$	$\sigma_F = 33$	$\sigma_{-1} = 16,5^*$

ALEACIONES DE ALUMINIO

GOST 2685-63

АЛ1

colada en arena

$\sigma_p = 20$

$\sigma_F = 17$

$\sigma_{-1} = 5,6^*$

termotratamiento T5

$\tau_{ciz} = 17$

$\sigma_F = 22$

$\sigma_{-1} = 5,6^*$

termotratamiento T7

$\sigma_p = 26$

$\sigma_F = 18$

$\sigma_{-1} = 6,5^*$

colada en coquilla

$\tau_{ciz} = 22$

$\sigma_F = 26$

$\sigma_{-1} = 6,5^*$

(termotratamiento T5)

$\sigma_p = 22$

$\tau_{ciz} = 22$

АЛ2

colada en arena

$\sigma_p = 18$

$\sigma_F = 8$

$\sigma_{-1} = 5,5^{**}$

colada en molde metálico

$\tau_{ciz} = 13$

$\sigma_F = 9$

$\sigma_{-1} = 7^{**}$

colada a presión

$\sigma_p = 22$

$\sigma_F = 12$

$\sigma_{-1} = 7^{**}$

АЛ3

colada en arena

$\sigma_p = 17$

$\sigma_F = 12$

$\sigma_{-1} = 5^*$

termotratamiento T5

$\sigma_p = 20$

$\sigma_F = 17$

$\sigma_{-1} = 5^*$

colada en molde metálico

$\sigma_p = 22$

$\sigma_F = 12$

$\sigma_{-1} = 5^*$

termotratamiento T5

$\sigma_p = 27$

$\sigma_F = 22$

$\sigma_{-1} = 5^*$

АЛ8 (termotrata-

miento T4)

$\sigma_p = 30$

$\sigma_F = 17$

$\sigma_{-1} = 5^*$

colada en arena

$\tau_{ciz} = 23$

$\sigma_F = 18$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

colada en molde metálico

$\sigma_p = 33$

$\sigma_F = 11$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

АЛ9 colada en arena

$\sigma_p = 20$

$\sigma_F = 11$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

termotratamiento T4

$\tau_{ciz} = 15$

$\sigma_F = 21$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

colada en arena

$\sigma_p = 24$

$\sigma_F = 21$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

(termotratamiento T6)

$\tau_{ciz} = 12$

$\sigma_F = 21$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

colada en molde metálico

$\sigma_p = 23$

$\sigma_F = 21$

$\sigma_{-1} = 4,5^*$

(termotratamiento T6)

АЛ11 (termotrata-

tamiento T2)

$\sigma_p = 22$

$\sigma_F = 15$

$\sigma_{-1} = 6,5$

АЛ13 colada en arena

$\sigma_p = 17$

$\sigma_F = 9$

$\sigma_{-1} = 4^*$

colada en molde metálico

$\tau_{ciz} = 14$

$\sigma_F = 10$

$\sigma_{-1} = 4^*$

$\sigma_p = 20$

$\sigma_F = 10$

$\sigma_{-1} = 4^*$

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell,	Resiliencia,	Módulo de elasticidad $E(G)$ , en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coeficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coeficiente de dilatación lineal, en $\times 10^4 \frac{1}{grad}$
	en kgf/mm <sup>2</sup>					
18(30)	105	—	} 0,71(0,27)	0,31	2,78	22,7
11(15)	131	—				
18(30)	42	—				
13(15)	—	—				
6	—	—				
7	—	—	} 0,72(0,27)	0,33	2,8	19,6—24,8
13(26)	120	—				
20	115	—	} 0,71(0,27)	0,31	2,75	23,6—26,9

DE COLADA

1,0	80	—	} 0,72(0,27)	0,33	2,75	22,3—24,4
0,5	100	0,3				
1,2	90	—				
0,5	120	—	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,65	21,1—23,3
6	50	—				
5	55	0,8				
1,8	—	—	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,7	22—24
2	70	—				
3	75	—				
4	70	0,22				
3	80	0,45	} 0,7(0,72) (0,27)	0,33	2,55	24,5—25,6
12	75	1				
15	80	—	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,66	23—24,5
6	55	—				
2	75	—				
5	70	—	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,6	20
2	80	—				
3	65	0,5	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,6	20
5	70	—				

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
AJI15B colada en arena termotratamiento T5	$\sigma_p = 15$ $\sigma_p = 20$	— —	— —
colada en molde metálico termotratamiento T5	$\sigma_p = 18$ $\sigma_p = 22$	— —	— —
AJI19 (colada en arena) termotratamiento T4	$\sigma_p = 32$	$\sigma_F = 16$	$\sigma_{-1} = 7^{**}$
termotratamiento T5	$\sigma_p = 37$	$\sigma_F = 22$	$\sigma_{-1} = 7^*$
TITANIO Y SUS			
BT1	$\sigma_p = 61$	$\sigma_F = 47$	$\sigma_{-1} = 26$
OT4	$\sigma_p = 70-85$	$\sigma_F = 55-65$	—
BT8	$\sigma_p = 105-118$ $\tau_{ciz} = 65-70$	$\sigma_F = 95-110$ $\sigma_{pr} = 75-85$	$\sigma_{-1} = 50$
BT3-1	$\sigma_p = 95-120$ $\tau_{ciz} > 65$	$\sigma_F = 85-110$ $\sigma_{pr} = 70-85$	$\sigma_{-1} = 48$
BT14	$\sigma_p = 95-120$	$\sigma_F = 85-110$	—
ALEACIONES <i>Lato-</i>			
GOST 1019-47			
JI68 blando	$\sigma_p = 32$ $\tau_{ciz} = 20$	$\sigma_{0,1} = 9,1$	$\sigma_{-1} = 12$
duro	$\sigma_p = 66$	$\sigma_{0,1} = 52$	$\sigma_{-1} = 15$
JIA77-2 blando	$\sigma_p = 40$	$\sigma_F = 14$	—
duro	$\sigma_p = 65$	—	—
JIM1158-2 blando	$\sigma_p = 40$	$\sigma_F = 15,6$	—
duro	$\sigma_p = 70$	—	—
JIC59-1 blando	$\sigma_p = 40$ $\tau_{ciz} = 26$	$\sigma_F = 14$	—
duro	$\sigma_p = 65$	$\sigma_F = 45$	$\sigma_{-1} = 16$
JIK80-3 blando	$\sigma_p = 30$	$\sigma_F = 20$	—
duro	$\sigma_p = 60$	—	—
<i>Bronces</i>			
Br. O-10	$\sigma_p = 25$	—	—
Br. O118-4	$\sigma_p = 20$	$\sigma_F = 4-5$	—

Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup> × 10 <sup>-4</sup> kgf/mm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en × 10 <sup>4</sup> $\frac{1}{\text{grad}}$
—	70	—	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,7	22—24
—	80	—				
0,5	70	—				
0,5	85	—				
9	90	—	} 0,7—0,72 (0,27)	0,33	2,78	19,5—21,9
5	100	—				

ALEACIONES

20—30 (> 45)	150—180	> 7	1,121(0,411)	0,32	4,5	8
10—40 (25—55)	229—302	3,5—6,5	1,1(0,4)—1,2	—	4,55	8—9,8
9—15 (30—55)	310—350	3—6	1,1(0,425)	0,3	4,48	8,3—9,1
10—16 (25—40)	—	3—6	1,15(0,43)	0,3	4,5	8,6
6—10 (25—35)	255—388	2,5—5	1,15	—	4,52	8—8,7

DE COBRE  
nes

55(70)	55	17	1,1	—	8,6	19
3	150	—	1,15	—	—	—
55	60	20	1,05	—	8,6	18,3
12	170	—	—	—	—	—
40	85	12	1,0	—	8,4	21,2
10	175	—	—	—	—	—
45(44)	90	2,6—5	1,05(0,35)	—	8,5	20,6
16	140	—	—	—	—	—
58	100	12	0,98	—	8,5	17
4	180	—	—	—	—	—

de estaño

11	80	—	3	—	—	—
4	75	—	—	—	—	—

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
<b>GOST 613-65</b>			
Bp. OЦC 6-6-3 colada en arena colada en coquilla	$\sigma_p = 15$	$\sigma_F = 11$	—
	$\sigma_p = 18$	$\sigma_F = 8-10$	—
	$\tau_{ciz} = 22$	$\sigma_{pr} = 5$	—
Bp. OФ 10-1 colada en arena colada en coquilla	$\sigma_p = 20-30$	$\sigma_F = 14$	—
	$\sigma_p = 25-35$	$\sigma_{pr} = 8-9$	—
	$\tau_{ciz} = 34$	$\sigma_F = 20$ $\sigma_{pr} = 13-14$	—
<i>Bronces de</i>			
<b>GOST 493-54</b>			
Bp. A5 colada en coquilla blando deformable duro deformable	$\sigma_p = 28$	$\sigma_F = 7$	—
	$\sigma_p = 38$	$\sigma_F = 16$	—
	$\sigma_p = 80$	$\sigma_F = 50$ $\sigma_{pr} = 48$	$\sigma_{-1} = 13,4^{**}$
Bp. AMц 9-2 colada en coquilla blando deformable duro deformable	$\sigma_p = 40$	$\sigma_F = 20$	—
	$\sigma_p = 40$	$\sigma_{pr} = 11$ $\sigma_F = 30$	—
	$\sigma_p = 60$	$\sigma_F = 50$	$\sigma_{-1} = 21^{****}$
Bp. AЖKMц 10-3-1,5 colada en coquilla blando deformable duro deformable	$\sigma_p = 56$	$\sigma_F = 21$	—
	$\tau_{ciz} = 38$	$\sigma_{pr} = 17$ $\sigma_F = 19$	—
	$\sigma_p = 61$ $\sigma_p = 60-70$	—	$\sigma_{-1} = 28^{****}$
Bp. AЖC 7-1,5-1,5	$\sigma_p = 50$	—	$\sigma_{-1} = 21^{****}$
Bp. AЖ 9-4 colada en coquilla blando deformable duro deformable	$\sigma_p = 55$	$\sigma_F = 20$	—
	$\sigma_p = 60$	$\sigma_{pr} = 18$ $\sigma_F = 22$	—
	$\sigma_p = 55$	$\sigma_{pr} = 12,7$ $\sigma_F = 35$	$\sigma_{-1} = 18,5^{****}$
<i>Bronce de</i>			
<b>GOST 493-54</b>			
Bp. KMц 3-1 estado blando estado duro	$\sigma_p = 35-40$	$\sigma_F = 10-20$	$\sigma_{-1} = 11-16$
	$\sigma_p = 65-75$	$\sigma_F = 10-20$	—
<b>ALEACIONES DE</b>			
MA1 chapas barras	$\sigma_p = 21$	$\sigma_F = 12$	$\sigma_{-1} = 7,5^{**}$
	$\sigma_p = 24$	$\sigma_F = 14$	$\sigma_{-1} = 7,5^{**}$
	$\tau_p = 19$		
	$\tau_{ciz} = 13$		

Continuación del apéndice I

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgf/cm <sup>2</sup> × 10 <sup>-4</sup> kgf/mm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en × 10 <sup>4</sup> $\frac{1}{\text{grad}}$
6	60	—	—	—	8,82	17,1—18,2
4(6—10)	60	2—3	0,9	—	—	—
3(3)	80—100	0,6	0,754	—	8,58	17—22
7—10(10)	90—120	0,9	1,03	—	8,76	17

aluminio

55(48)	65	16	—	—	—	—
65(70)	60	11	1	—	8,2	15,6
4	200	—	1,1	—	—	—
20(25—27)	90—120	7	0,92	—	—	—
25	110—130	—	1,05	—	—	—
4—5(55)	160—180	—	—	—	7,6	17—20
22(25—27)	130	6—8	1	—	—	—
32(55)	125—140	—	1,05	—	—	—
9—12	160—220	—	—	—	7,55	16—20
18	—	—	—	—	—	—
10—20 (25—30)	120—140	6,3	1,12	} 0,29	7,5	16,2—17,1
40(33)	110	8	1,12			
5	160—200	—	1,16			

silicio

25—45	70—90	} 13—17	1,04	—	8,4	15,8—20
5—10	170—190					

MAGNESIO DEFORMABLES

8	45	0,5	0,4	} 0,34	1,76	22,3—32
4(6)	45	0,6	0,4			

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
MA3			
tiras	$\sigma_p = 29$ $\tau_{ciz} = 14$	$\sigma_F = 17$	—
barras	$\sigma_p = 28$	$\sigma_F = 22$	—
BM65-1			
barras	$\sigma_p = 35$	$\sigma_F = 30$ $\sigma_{pr} = 14,5$	—
barras (IC)	$\sigma_p = 33,5$ $\tau_{ciz} = 16$	$\sigma_F = 28$	$\sigma_{-1} = 15^{**}$
tiras	$\sigma_p = 34,5$	$\sigma_F = 29$ $\sigma_{pr} = 13$	—
perfiles	$\sigma_p = 34,5$	$\sigma_F = 29$	—
piezas forjadas	$\sigma_p = 31$	$\sigma_F = 25$	—
piezas estampadas	$\sigma_p = 32$	$\sigma_F = 26$	—

ALEACIÓN DE MAGNESIO

MJI6			
de colada	$\sigma_p = 16$ $\tau_{ciz} = 14$	$\sigma_F = 11$	$\sigma_{-1} = 8,5^{**}$
termotratamiento T4	$\sigma_p = 25$ $\tau_{ciz} = 15$	$\sigma_F = 10$	$\sigma_{-1} = 9,5^{**}$
termotratamiento T6	$\sigma_p = 26$ $\tau_{ciz} = 16$	$\sigma_F = 14$	$\sigma_{-1} = 8,5^{**}$
Plomo GOST 3778—65	$\sigma_p = 1,5-1,8$ (deformado y O)	$\sigma_F = 0,5-1$	$\sigma_{-1} = 0,42^{***}$
Zinc GOST 3640—47	$\sigma_p = 6,4$	$\sigma_F = 1,0$	—
Níquel GOST 849—56	$\sigma_p = 40-55$ (estado blando)	$\sigma_F = 6-20$ (estado blando)	—
	$\sigma_p = 50-100$ (estado duro)	$\sigma_F = 28-90$ (estado duro)	—
Maillechort MHЖM11 30-0,8-1 (MH 70-30) GOST 492—52			
estado blando	$\sigma_p = 35-45$	$\sigma_F = 14$	—
estado duro	$\sigma_p = 55-65$	$\sigma_F = 54$	—
Plata alemana MHI 15—20 GOST 492—52			
estado blando	$\sigma_p = 40-45$	$\sigma_F = 14$	$\sigma_{-1} = 12-14$
estado duro	$\sigma_p = 60-72$	$\sigma_F = 59$	—

Continuación del apéndice I

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en $\times 10^4 \frac{1}{\text{grad}}$
15(23)	—	1	0,43	} 0,34	1,8	26,1—31,2
12	60	—	0,43			
9(24)	60	—	} 0,43	0,34	1,8	20,9—22,6
9(24)	—	0,9				
10(25)	—	—				
10	—	—				
12	—	—				
14	55	—				

DE COLADA

15(2,5)	55	0,2	(0,16)	—	} 1,81	26,1—27,7
5(12)	60	0,3	0,42(0,165)	0,33		
1(3)	80	0,15	(0,165)	0,33		
35—50 (90—100) (de colada) 60—70 (de- formado)	3,8—4 (de colada)	0,6—2,3 (O)	0,15—0,18	—	11,34	28
20(50)	20	—	0,53	—	7,133	39,7
30—50 (estado blando)	90—120 (O)	—	1,8—2,27 (0,73)	—	} 8,9	13,3—16,3
2—15 (estado duro)	125—220 (endure- cido)	—	—	—		
40—50 3—5	70 190	— —	} 1,54	—	8,9	16
40—50 2—3	70 160	— —		} 1,26	—	8,7

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
Monel HMЖKMИ 28-2,5-1,5 GOST 492-52 estado blando estado duro	$\sigma_p = 50-60$ $\sigma_p = 70-85$	$\sigma_F = 20$ $\sigma_F = 65-75$	$\sigma_{-1} = 17$ $\sigma_{-1} = 26$
<b>Plás-</b>			
Plásticos de fibra de vidrio GOST 10087-62, GOST 10292-62, GOST 2910-67, GOST 10316-62			
a base de tela	$\sigma_p = 26-40$ $\sigma_c = 10-30$ $\sigma_f = 13-15$	$\sigma_{pr} = 12,2-26$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,22-0,25$
a base de hilos orientados en dos direcciones mutua- mente perpendiculares	$\sigma_p = 30-50$ $\sigma_c = 23-46$ $\sigma_f = 40-42$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,25-0,28$
Textolitas (a base de tejidos de algodón) GOST 5-52 GOST 2910-67 GOST 5385-50	$\sigma_p = 4,5-11$ $\sigma_c = 12-25$ $\sigma_f = 7,5-16$ $\tau_p = 9-10$	$\sigma_F = 7-8$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,25-0,3$ $\sigma_{-1t} = 2$
Plásticos a base de madera GOST 8697-58	$\sigma_p = 14-30$ $\sigma_c = 12-18,5$ $\sigma_f = 16,5-28$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,25-0,3$
Guetinax (a base de papel sulfatado) GOST 2718-66	$\sigma_p = 6-10$ $\sigma_f = 4-14$	—	$\sigma_{-1t} = 5,8$ $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,2-0,3$ $\frac{\sigma_p}{\sigma_{-1}} = 3,5-4,9$
Fibra (a base de clases espe- ciales de papel) GOST 6910-54	$\sigma_p = 5-7$ $\sigma_c = 8-14$ $\sigma_f = 6-9,5$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,2-0,3$
Plásticos con cargas fibrosas (estopa de algodón, fibra de cristal y de amianto)	$\sigma_p = 3-13$ $\sigma_c = 10-15$ $\sigma_f = 4-13$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,25-0,3$
Polvos para molde termo- endurecibles (cargas: ase- rrín, harina de cuarzo, mica) GOST 5689-66 GOST 9359-66	$\sigma_p = 2,5-6,9$ $\sigma_c = 7-30$ $\sigma_f = 4,5-10$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,3-0,4$

Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coeficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coeficiente de dilatación lineal en $\times 10^6 \frac{1}{\text{grad}}$
30-50(65) 3-5(50)	110-140 140-220	- -	1,82	-	8,8	14-15

tics

-	27-38	0,5-5,25	0,18-0,22 (0,035-0,04)	0,035- -0,622	1,4-1,85	0,45-8,3
-	28-52	0,5-5,25	0,24-0,35	0,035- -0,622	1,7-1,9	0,45-8,3
-	30	0,35	0,04-0,1 (0,25)	-	1,3-1,45	3,3-4,1
-	18-20	0,17-0,8	0,12-0,34	-	1,2-1,4	-
-	25-30	$(8-20) \times 10^{-2}$	0,1-0,18 (0,008-0,025)	-	1,3-1,4	20
-	10	-	(0,07)	-	1,1-1,25	-
-	18-35	$(15-65) \times 10^{-2}$	0,05-0,118	-	1,35-1,9	-
-	10-60	0,03-0,8	-	-	1,3-2,7	$(0,22-7) \times 10$

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
Vidrio orgánico (a base de polímeros y copolímeros del ácido metacrílico) GOST 10667-65 GOST 9784-61	$\sigma_p = 5-10,8$ $\sigma_c = 7-12$ $\sigma_f = 8-17,6$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,1 - 0,16$
Termoplásticos polímeros lineales con diferente grado de cristalización  no armados	$\sigma_p = 1,2-8$ $\sigma_f = 1,2-10$ $\sigma_p = 0,04-0,42$ $\sigma_c = 0,017-0,45$ $\sigma_f = 0,07-0,5$	— —	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_p} = 0,15 - 0,2$ —
Plástico fluorocarbúrico-4 GOST 10007-62	$\sigma_p = 1,4-2,5$ $\sigma_c = 1,2-2$ $\sigma_f = 1,1-1,4$	—	—
Kaprón A, B, B	$\sigma_p = 6$ $\sigma_c = 7,5$ $\sigma_f = 9$	—	—
Resina de poliamida 68 GOST 10589-63	$\sigma_p = 5-6$ $\sigma_c = 7-8,5$ $\sigma_f = 7$	—	—
Plástico vinílico GOST 9639-61	$\sigma_p = 4-6$ $\sigma_c = 8-16$ $\sigma_f = 8-12$	—	—
Poliétileno de alta densidad (de baja presión)	$\sigma_p = 2,2-4,5$ $\sigma_c = 2,8-4$ $\sigma_f = 2-3,8$	—	—
Poliestireno en bloques GOST 9440-60	$\sigma_p = 3,5$ $\sigma_c = 10$ $\sigma_f = 9,5-10$	—	—
<b>Otros</b>			
Hielo	—	—	—
Caucho natural	$\sigma_p = 1,6-3,8$	—	—
Vidrio GOST 10135-62	$\sigma_p = 3-9$ $\sigma_c = 50-200$ $\sigma_f = 5-15$	—	—
Basalto	$\sigma_c = 25-30$	—	—
Granito	$\sigma_p = 0,3$ $\sigma_c = 12-26$	—	—
Caliza	$\sigma_c = 5,0-15$	—	—

Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, $\frac{1}{\text{grad}}$ en $\times 10^4$
2,5—23,2	12—25	$(4-33) \times 10^{-2}$	0,027—0,041	—	1,18—1,2	46—120
—	3—16	—	0,0015— —0,007	—	0,92—2,1	—
1,5—14	—	$(0,16-2,2) \times 10^{-2}$	0,00037— —0,002 (0,00015— —0,00019)	—	0,02—0,6	$(3,5-7,8) \times 10$
300—350	3—6	—	0,0047— —0,0085	—	2,19—2,35	$(8-25) \times 10$
150—200	10—12	1,5—1,6	0,0144 (0,0045— —0,0048)	—	1,1—1,14	$(6-15) \times 10$
100	10—15	—	0,012	—	1,11	$(10-12) \times 10$
10—100	13—16	0,5—0,8	0,03—0,04	0,354	1,3—1,4	$(6-7) \times 10$
250—900	4,5—5,8	—	0,005—0,008	—	—	0,94—0,96
0,4—0,7	14—15	0,16—0,2	0,012—0,032	—	1,05—1,1	60
<b>materiales</b>						
—	—	—	0,1(0,25— —0,03)	—	—	50,7
600—700	—	—	$(0,6-1) \times 10^{-4}$	0,47	0,91	$(1,8-2,8) \times 10^2$
—	—	0,015— —0,025	0,48—0,85 (0,022—0,032)	0,18—0,32	2,2—8	0,5—15
—	—	—	—	—	2,7—3,3	—
—	—	—	0,49	—	2,5—2,8	—
—	—	—	0,42	—	1,8—2,6	—

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
Arenisca	$\sigma_p = 0,2$ $\sigma_c = 4-1,5$	—	—
Mármol	$\sigma_c = 10-18$	—	—
Mampostería de granito, caliza, ladrillos	$\sigma_p = 0,02-$ $-0,05$ $\sigma_c = 0,25-0,9$	—	—
Hormigón	$\sigma_c = 0,5-4,8$	—	—
Pino corriente (15% de humedad)	$\sigma_p = 9,31-11,5$ $\sigma_c = 4,27-4,66$ $\sigma_f = 7,36-8,77$ $\tau_{ciz} = 0,62-0,73$	$\sigma_{pr} = 6,1$ $\sigma_{pr} = 3,1$	—
Abeto corriente (15% de humedad)	$\sigma_p = 10,7-12,2$ $\sigma_c = 3,85-4,23$ $\sigma_f = 7,74-7,22$ $\tau_{ciz} = 0,52-0,67$	$\sigma_{pr} = 5,6$ $\sigma_{pr} = 2,7$	—
Abedul corriente (15% de humedad)	$\sigma_p = 16,1-21$ $\sigma_c = 4,37-5,33$ $\sigma_f = 9,67-10,84$ $\tau_{ciz} = 0,85-1,33$	$\sigma_{pr} = 3,4$	—
Alamo (15% de humedad)	$\sigma_p = 8,69$ $\sigma_c = 3,47$ $\sigma_f = 6,09$ $\tau_{ciz} = 0,54-0,71$	—	—
Acacia (15% de humedad)	$\sigma_p = 16,9$ $\sigma_c = 6,65$ $\sigma_f = 13,92$ $\tau_{ciz} = 1,25-1,4$	—	—
Haya de Cáucaso (15% de humedad)	$\sigma_p = 12,91$ $\sigma_c = 4,74$ $\sigma_f = 9,53$ $\tau_{ciz} = 0,99-1,31$	$\sigma_{pr} = 7$ $\sigma_{pr} = 2,9$	—
Fresno (15% de humedad)	$\sigma_p = 14,4-16,6$ $\sigma_c = 4,5-5,1$ $\sigma_f = 9,8-11,5$ $\tau_{ciz} = 1,14-1,38$	$\sigma_{pr} = 7,4$ $\sigma_{pr} = 2,7$	—
Roble (15% de humedad)	$\sigma_p = 12,88$ $\sigma_c = 5,2$ $\sigma_f = 9,35$ $\tau_{ciz} = 0,85-1,25$	$\sigma_{pr} = 2,9$ $\sigma_{pr} = 7,4$	—
Tilo (15% de humedad)	$\sigma_p = 11,58$ $\sigma_c = 3,98$ $\sigma_f = 7,8$ $\tau_{ciz} = 0,73-0,8$	$\sigma_{pr} = 4,5$ $\sigma_{pr} = 2$	—

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en $\times 10^{-4}$ kgf/mm <sup>2</sup>	Coefficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coefficiente de dilatación lineal, en $\times 10^6 \frac{1}{\text{grad}}$
—	—	—	0,18	—	2,1—2,8	—
—	—	—	0,56	—	2,5—2,8	—
—	—	—	0,09—0,1 0,06	—	—	} 4—7
—	—	—	0,027—0,03	—	—	
—	—	—	0,146—0,232	0,16—0,18	—	10—14
—	1,99—2,7	0,18—0,23	0,102—0,145 (0,0055)	0,49	0,48—0,54	3,7 a lo largo de las fibras; 63,6 de través de las fibras
—	1,82—2,52	0,18—0,19	0,11(0,0055)	0,44	0,46	5,4 a lo largo de las fibras; 34,1 de través de las fibras
—	2,98—3,92	0,41—0,54	0,15—0,184 (0,0065)	0,41	0,64—0,73	2-5 a lo largo de las fibras
—	1,73—2,5	0,19	0,13(0,0055)	—	0,46	2-5 a lo largo de las fibras
—	6,19—8,81	0,92	0,09—0,16 (0,0045— —0,0065)	—	0,75—0,81	2-5 a lo largo de las fibras
—	3,79—5,71	0,39	0,127 (0,0065)	0,58	0,68	2-5 a lo largo de las fibras
—	5,34—7,32	0,3—0,43	0,124—0,15 (0,0065)	0,43	0,66—0,71	2-5 a lo largo de las fibras
—	4,63—6,53	0,46	0,073—0,151 (0,0065)	0,43	0,76	4,9 a lo largo de las fibras; 54,4 de través de las fibras
—	1,56—2,34	0,28	0,09(0,0045)	—	0,51	5,4 a lo largo de las fibras; 44,1 de través de las fibras

Material	Límite de resistencia, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fluencia, de proporcionalidad, en kgf/mm <sup>2</sup>	Límite de fatiga, en kgf/mm <sup>2</sup>
Aliso (15% de humedad)	$\sigma_p = 9,63$ $\sigma_c = 3,87$ $\sigma_f = 7,1$ $\tau_{ciz} = 0,78 - 0,85$	—	—
Arce (15% de humedad)	$\sigma_c = 5,2$ $\sigma_f = 10,53$ $\tau_{ciz} = 1,13 - 1,29$	—	—

\* El límite de fatiga fue obtenido a base de  $5 \times 10^8$  ciclos.

\*\* El límite de fatiga fue obtenido a base de  $2 \times 10^7$  ciclos.

\*\*\* El límite de fatiga fue obtenido a base de  $10^7$  ciclos.

\*\*\*\* El límite de fatiga fue obtenido a base de  $10^6$  ciclos.

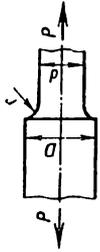
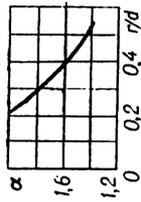
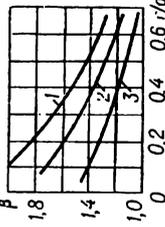
\*\*\*\*\*  $\sigma_p$ , el alargamiento relativo y la reducción relativa se dan para una temperatura de 1650°C.

El estado del material: O, recocido; (3), recién templado; EC, envejecido naturalmente;  $\overline{N}C$ , envejecido artificialmente. El termotratamiento: T2, recocido; T4, temple; T5, temple y envejecimiento artificial instantáneo (no completo); T6, temple y envejecimiento artificial completo; T7, temple y revenido estabilizante.

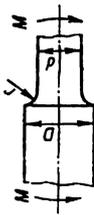
Continuación del apéndice 1

Alargamiento relativo (reducción relativa), en %	Dureza Brinell, en kgf/mm <sup>2</sup>	Resiliencia, en kgfm/cm <sup>2</sup> × 10 <sup>-4</sup> kgf/mm <sup>2</sup>	Módulo de elasticidad E(G), en kgf/mm <sup>2</sup>	Coeficiente de Poisson	Peso específico, en gf/cm <sup>3</sup>	Coeficiente de dilatación lineal, en × 10 <sup>6</sup> $\frac{1}{\text{grad}}$
—	2,48—3,67	0,25	0,132 (0,0055)	—	0,53	2—5 a lo largo de las fibras
—	5,06—6,9	0,37	0,118 (0,0055)	—	0,7	2—5 a lo largo de las fibras

Coefficientes de concentración y de sensibilidad a la concentración de tensiones

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$												
1	<p>Arboles, ejes con aristas huecas</p>  <p>Tracción-compresión</p>	<p>Cuando <math>d = 30 - 50</math> mm</p> <p><math>\gamma \frac{D}{d} = 2</math></p> 	<p>Cuando <math>d = 30 - 50</math> mm.</p> <p><math>\gamma \frac{D}{d} = 2</math></p> 	<p>Para el acero</p> <table border="1" data-bbox="452 110 687 411"> <thead> <tr> <th><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>q</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>40</td> <td>0,2-0,5</td> <td>0,27-0,32</td> </tr> <tr> <td>80</td> <td>0,2-0,5</td> <td>0,59-0,65</td> </tr> <tr> <td>120</td> <td>0,2-0,5</td> <td>0,82-0,93</td> </tr> </tbody> </table>	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\frac{r}{d}$	$q$	40	0,2-0,5	0,27-0,32	80	0,2-0,5	0,59-0,65	120	0,2-0,5	0,82-0,93
$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\frac{r}{d}$	$q$														
40	0,2-0,5	0,27-0,32														
80	0,2-0,5	0,59-0,65														
120	0,2-0,5	0,82-0,93														
			<p>Para el acero</p> <p>1, <math>\sigma_p = 120</math> kgf/mm<sup>2</sup></p> <p>2, <math>\sigma_p = 80</math> kgf/mm<sup>2</sup></p> <p>3, <math>\sigma_p = 40</math> kgf/mm<sup>2</sup></p>													

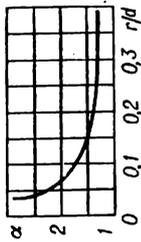
Arboles, ejes con aristas huecas



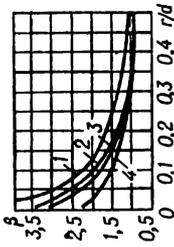
Flexión

Cuando  $d = 30-50$  mm

$$\gamma \frac{D}{d} = 2$$



Cuando  $\frac{D}{d} = 2$ ,

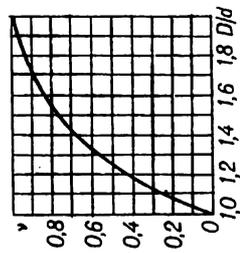


Para el acero  
 1,  $\sigma_p = 120$  kgf/mm<sup>2</sup>  
 2,  $\sigma_p = 100$  kgf/mm<sup>2</sup>  
 3,  $\sigma_p = 80$  kgf/mm<sup>2</sup>  
 4,  $\sigma_p = 40-60$  kgf/mm<sup>2</sup>

Cuando  $\frac{D}{d} < 2$

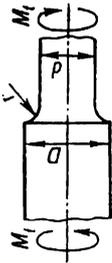
$$\beta_v = 1 + v(\beta - 1)$$

Los valores de  $v$  se hallan del diagrama



Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																																																																																													
<b>Para el acero</b>																																																																																																	
			<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>\frac{D}{d}</math></th> <th rowspan="2"><math>\frac{r}{d}</math></th> <th colspan="3"><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> </tr> <tr> <th>&lt; 50</th> <th>80</th> <th>&gt; 100</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="4">1,05</td> <td>0,02</td> <td>1,70</td> <td>1,88</td> <td>2,05</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>1,48</td> <td>1,57</td> <td>1,63</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>1,28</td> <td>1,33</td> <td>1,36</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>1,20</td> <td>1,23</td> <td>1,25</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">1,1</td> <td>0,20</td> <td>1,16</td> <td>1,20</td> <td>1,22</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>2,00</td> <td>2,24</td> <td>2,47</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>1,64</td> <td>1,70</td> <td>1,75</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>1,37</td> <td>1,42</td> <td>1,45</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">1,25</td> <td>0,15</td> <td>1,27</td> <td>1,31</td> <td>1,34</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,20</td> <td>1,24</td> <td>1,27</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>2,12</td> <td>2,68</td> <td>3,10</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>1,81</td> <td>1,97</td> <td>2,10</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">1,5</td> <td>0,10</td> <td>1,47</td> <td>1,54</td> <td>1,60</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>1,35</td> <td>1,40</td> <td>1,43</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,30</td> <td>1,32</td> <td>1,34</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>2,42</td> <td>—</td> <td>—</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">1,5</td> <td>0,05</td> <td>1,91</td> <td>2,06</td> <td>2,20</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>1,53</td> <td>1,61</td> <td>1,67</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>1,38</td> <td>1,44</td> <td>1,48</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,33</td> <td>1,36</td> <td>1,38</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{D}{d}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>			< 50	80	> 100	1,05	0,02	1,70	1,88	2,05	0,05	1,48	1,57	1,63	0,10	1,28	1,33	1,36	0,15	1,20	1,23	1,25	1,1	0,20	1,16	1,20	1,22	0,02	2,00	2,24	2,47	0,05	1,64	1,70	1,75	0,10	1,37	1,42	1,45	1,25	0,15	1,27	1,31	1,34	0,20	1,20	1,24	1,27	0,02	2,12	2,68	3,10	0,05	1,81	1,97	2,10	1,5	0,10	1,47	1,54	1,60	0,15	1,35	1,40	1,43	0,20	1,30	1,32	1,34	0,02	2,42	—	—	1,5	0,05	1,91	2,06	2,20	0,10	1,53	1,61	1,67	0,15	1,38	1,44	1,48	0,20	1,33	1,36	1,38	
$\frac{D}{d}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>																																																																																															
		< 50	80	> 100																																																																																													
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05																																																																																													
	0,05	1,48	1,57	1,63																																																																																													
	0,10	1,28	1,33	1,36																																																																																													
	0,15	1,20	1,23	1,25																																																																																													
1,1	0,20	1,16	1,20	1,22																																																																																													
	0,02	2,00	2,24	2,47																																																																																													
	0,05	1,64	1,70	1,75																																																																																													
	0,10	1,37	1,42	1,45																																																																																													
1,25	0,15	1,27	1,31	1,34																																																																																													
	0,20	1,20	1,24	1,27																																																																																													
	0,02	2,12	2,68	3,10																																																																																													
	0,05	1,81	1,97	2,10																																																																																													
1,5	0,10	1,47	1,54	1,60																																																																																													
	0,15	1,35	1,40	1,43																																																																																													
	0,20	1,30	1,32	1,34																																																																																													
	0,02	2,42	—	—																																																																																													
1,5	0,05	1,91	2,06	2,20																																																																																													
	0,10	1,53	1,61	1,67																																																																																													
	0,15	1,38	1,44	1,48																																																																																													
	0,20	1,33	1,36	1,38																																																																																													
Para la fundición cuando $d = 12$ mm, $\beta = 1,15$ cuando $d = 50$ mm, $\beta = 1,25$																																																																																																	

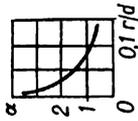
Arboles, ejes con aristas huecas



Torsión

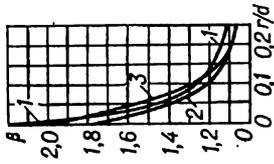
Cuando  $d = 30 - 50$  mm

$$y \frac{D}{d} = 2$$



Para los aceros cuando

$$\frac{D}{d} = 1,4$$



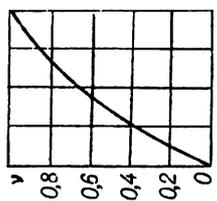
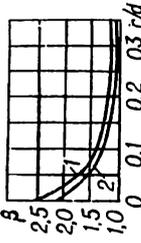
1,  $\sigma_p = 120$  kgf/mm<sup>2</sup>

2,  $\sigma_p = 60$  kgf/mm<sup>2</sup>

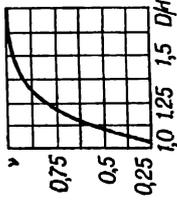
3,  $\sigma_p = 40$  kgf/mm<sup>2</sup>

Cuando  $\frac{D}{d} < 1,4$ ,

$$\beta_y = 1 + v(\beta - 1)$$

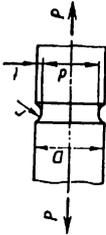
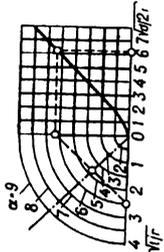
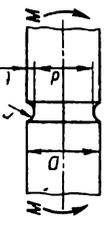
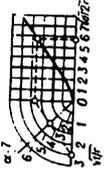
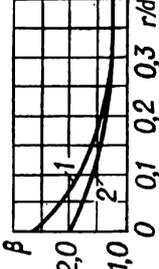
Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																														
			<p data-bbox="323 445 376 772">Los valores de <math>\nu</math> se hallan del diagrama</p>  <p data-bbox="599 478 652 772">Cuando <math>d = 30-50</math> mm y <math>\frac{D}{d} = 2</math></p>  <p data-bbox="870 537 929 772">1, <math>\sigma_p = 120</math> kgf/mm<sup>2</sup> 2, <math>\sigma_p = 50</math> kgf/mm<sup>2</sup></p> <p data-bbox="934 579 981 772">Cuando <math>\frac{D}{d} &lt; 2</math>, <math>\beta_v = 1 + \nu(\beta - 1)</math></p>	<p data-bbox="323 109 411 403">Cuando <math>\frac{D}{d} = 2</math> para los aceros</p> <table border="1" data-bbox="423 117 846 403"> <thead> <tr> <th><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>q</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="5">50</td> <td>0,025</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,65</td> </tr> <tr> <td>0,075</td> <td>0,63</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>0,6</td> </tr> <tr> <td>0,125</td> <td>0,57</td> </tr> <tr> <td rowspan="5">120</td> <td>0,025</td> <td>0,82</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td>0,075</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td>0,1</td> <td>0,77</td> </tr> <tr> <td>0,125</td> <td>0,77</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\frac{r}{d}$	$q$	50	0,025	0,7	0,05	0,65	0,075	0,63	0,1	0,6	0,125	0,57	120	0,025	0,82	0,05	0,8	0,075	0,8	0,1	0,77	0,125	0,77					
$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\frac{r}{d}$	$q$																																
50	0,025	0,7																																
	0,05	0,65																																
	0,075	0,63																																
	0,1	0,6																																
	0,125	0,57																																
120	0,025	0,82																																
	0,05	0,8																																
	0,075	0,8																																
	0,1	0,77																																
	0,125	0,77																																

Los valores de  $\nu$  se hallan del diagrama



Para los aceros

$\frac{D}{r}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_p$ kgf/mm <sup>2</sup>		
		$\leq 50$	80	$> 100$
1,05	0,02	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,15	1,18	1,20
	0,10	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,06	1,08	1,09
1,1	0,20	1,05	1,06	1,07
	0,02	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,12	1,16	1,18
1,25	0,15	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,06	1,08	1,10
	0,02	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,40	1,45	1,48
1,5	0,10	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,15	1,20	1,24
	0,20	1,09	1,13	1,16
	0,02	1,76	1,97	2,14
1,5	0,05	1,48	1,56	1,62
	0,10	1,24	1,32	1,38
	0,15	1,19	1,25	1,29
	0,20	1,10	1,18	1,24

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																		
4	<p>Arboles, ejes con entallas</p>  <p>Tracción-compresión</p>	<p>El esquema de determinación del valor buscado de <math>\alpha</math> se muestra con línea de trazos</p> 	<p>Para la fundición es igual a 1,1-1,4</p> <p>Para la aleación МЛ4 <math>\left( \frac{r}{d} = 0,1 - 1,8 \right) = 0,1 - 0,12</math></p> <p>Para las aleaciones МА2, МА3, МА5, 1,7-2</p> <p>Para las aleaciones АЛ5, АЛ7, АЛ8; АЛ9, 1,3-1,8</p> <p>Para las aleaciones Д16, АК2, АК8, 1,6-1,8</p> <p>Para los aceros <math>\beta</math> se halla de la tabla dada para el esquema 5</p>	<p>Para la aleación</p> <p>МЛ4 <math>\left( \frac{r}{d} = 0,1 - 0,12 \right)</math> es igual a 0,4-0,8</p> <p>Para las aleaciones МА2, МА3, МА5, 0,7-1</p> <p>Para las aleaciones АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9, 0,3 - 0,8</p> <p>Para las aleaciones Д16, АК2, АК8, 0,6-0,8</p>																		
5	<p>Arboles, ejes con entallas</p>  <p>Flexión</p>	<p>El esquema de determinación del valor buscado de <math>\alpha</math> se muestra con línea de trazos</p> 	<p>Para el acero cuando <math>d = 30-50</math> mm y <math>\frac{r}{d} = 1</math></p> 	<p>Para los aceros cuando <math>\sigma_p \leq 50</math> kgf/mm<sup>2</sup></p> <table border="1" data-bbox="799 126 1005 411"> <thead> <tr> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>q</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,5</td> <td>0,02</td> <td>0,6</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0,05</td> <td>0,69</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0,10</td> <td>0,74</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0,15</td> <td>0,75</td> </tr> <tr> <td></td> <td>0,20</td> <td>0,75</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$q$	0,5	0,02	0,6		0,05	0,69		0,10	0,74		0,15	0,75		0,20	0,75
$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$q$																				
0,5	0,02	0,6																				
	0,05	0,69																				
	0,10	0,74																				
	0,15	0,75																				
	0,20	0,75																				

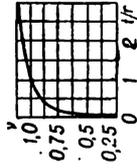
1,  $\sigma_p = 100 \text{ kgf/mm}^2$

2,  $\sigma_p = 50 \text{ kgf/mm}^2$

Cuando  $\frac{f}{r} \neq 1$ ,

$$\beta_v = 1 + \nu(\beta - 1)$$

Los valores de  $\nu$  se hallan del diagrama



Algunos valores de  $\beta$

$\frac{f}{r}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>		
		$< 50$	$80$	$> 100$
0,5	0,02	1,77	2,02	2,22
	0,05	1,72	1,87	1,98
	0,10	1,59	1,69	1,77
	0,15	1,45	1,53	1,59
1,0	0,20	1,37	1,41	1,45
	0,02	1,85	2,12	2,35
	0,05	1,80	1,96	2,10
	0,10	1,65	1,76	1,85
2,0	0,15	1,50	1,58	1,65
	0,20	1,45	1,48	1,50
	0,02	1,92	2,21	2,46
	0,05	1,86	2,03	2,19
2,0	0,10	1,70	1,82	1,92
	0,15	1,54	1,63	1,70
	0,20	1,48	1,52	1,54

1,0	0,02	0,05
	0,05	0,10
	0,10	0,15
	0,15	0,20
	0,20	0,25
2,0	0,02	0,45
	0,05	0,57
	0,10	0,72
	0,15	0,72
	0,20	0,74

Para los aceros cuando  
 $\sigma_p = 80 \text{ kgf/mm}^2$

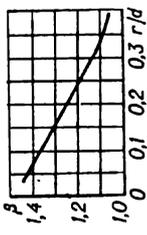
$\frac{f}{r}$	$\frac{r}{d}$	$q$	
		$\frac{f}{r}$	$q$
0,5	0,02	0,78	0,83
	0,05	0,84	0,84
	0,10	0,84	0,84
	0,15	0,84	0,84
1,0	0,20	0,85	0,85
	0,02	0,66	0,71
	0,05	0,71	0,71
	0,10	0,84	0,84
2,0	0,15	0,85	0,85
	0,20	0,86	0,86
	0,02	0,59	0,69
	0,05	0,69	0,69
2,0	0,10	0,84	0,84
	0,15	0,85	0,85
	0,20	0,86	0,86

Continuación del apéndice 2

Num. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																																																
Para los aceros cuando $\sigma_p \geq 100 \text{ kgf/mm}^2$																																																				
				<table border="1" data-bbox="444 119 938 411"> <thead> <tr> <th><math>\frac{r}{r_0}</math></th> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>q</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="4">0,5</td> <td>0,02</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,93</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,94</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>0,95</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">1,0</td> <td>0,20</td> <td>0,95</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,82</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,94</td> </tr> <tr> <td rowspan="4">2,0</td> <td>0,15</td> <td>0,94</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>0,94</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>0,71</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>0,10</td> <td>0,93</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>0,15</td> <td>0,94</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>0,20</td> <td>0,94</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{r}{d}$	$q$	0,5	0,02	0,9	0,05	0,93	0,10	0,94	0,15	0,95	1,0	0,20	0,95	0,02	0,8	0,05	0,82	0,10	0,94	2,0	0,15	0,94	0,20	0,94	0,02	0,71	0,05	0,8					0,10	0,93					0,15	0,94					0,20	0,94
$\frac{r}{r_0}$	$\frac{r}{d}$	$q$																																																		
0,5	0,02	0,9																																																		
	0,05	0,93																																																		
	0,10	0,94																																																		
	0,15	0,95																																																		
1,0	0,20	0,95																																																		
	0,02	0,8																																																		
	0,05	0,82																																																		
	0,10	0,94																																																		
2,0	0,15	0,94																																																		
	0,20	0,94																																																		
	0,02	0,71																																																		
	0,05	0,8																																																		
				0,10	0,93																																															
				0,15	0,94																																															
				0,20	0,94																																															
Para la fundición gris cuando $\sigma_p = 29 \text{ kgf/mm}^2$																																																				

Cuando  $d = 8$  mm y

$$\frac{D-d}{D} = 0,33$$



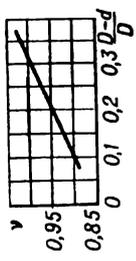
Para las aleaciones

$\left( \frac{D}{d} = 8 \text{ mm}; \frac{D}{d} = 1,25 - 1,5 \right)$   
 MJ14, 0,4 - 1  
 MA2, MA3, MA5, 0,7 - 1  
 AJ15, AJ17, AJ18, AJ19,  
 0-0,3  
 Д16, АК2, АК8, 0,5 - 1

Cuando  $\frac{D-d}{D} \neq 0,33,$

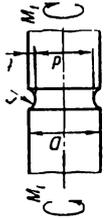
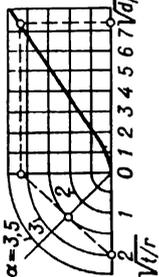
$$\beta_v = v\beta$$

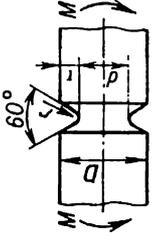
Los valores de  $v$  se hallan del diagrama

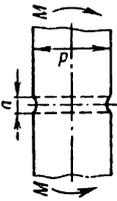
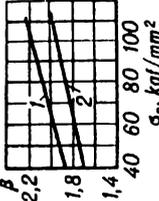


Para las aleaciones ( $d = 8$  mm);

$\frac{D}{d} = 1,25 - 1,5$  MJ14, 1,4-2  
 MA2, MA3, MA5, 1,7-2  
 AJ15, AJ17, AJ18, AJ19, 1-1,3  
 Д16, АК2, АК8, 1,5-2

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$																																																																																																																			
6	<p>Arboles, ejes con entallas</p>  <p>Torsión</p>	<p>El esquema de determinación del valor buscado de <math>\alpha</math> se muestra con línea de trazos</p> 	<p>Para los aceros</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>\frac{r}{d}</math></th> <th rowspan="2"><math>\frac{r}{d}</math></th> <th colspan="3"><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> </tr> <tr> <th><math>\leq 50</math></th> <th>80</th> <th><math>&gt; 100</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">0,5</td> <td>0,02</td> <td>1,46</td> <td>1,61</td> <td>1,73</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>1,43</td> <td>1,52</td> <td>1,60</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>1,36</td> <td>1,42</td> <td>1,46</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">1,0</td> <td>0,15</td> <td>1,27</td> <td>1,32</td> <td>1,36</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,22</td> <td>1,25</td> <td>1,27</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>1,51</td> <td>1,67</td> <td>1,81</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">2,0</td> <td>0,05</td> <td>1,48</td> <td>1,58</td> <td>1,66</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>1,39</td> <td>1,47</td> <td>1,51</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>1,30</td> <td>1,35</td> <td>1,39</td> </tr> <tr> <td rowspan="3"></td> <td>0,20</td> <td>1,27</td> <td>1,29</td> <td>1,30</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>1,56</td> <td>1,73</td> <td>1,87</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>1,51</td> <td>1,62</td> <td>1,71</td> </tr> <tr> <td rowspan="3"></td> <td>0,10</td> <td>1,42</td> <td>1,50</td> <td>1,56</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>1,33</td> <td>1,38</td> <td>1,42</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,29</td> <td>1,30</td> <td>1,32</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>			$\leq 50$	80	$> 100$	0,5	0,02	1,46	1,61	1,73	0,05	1,43	1,52	1,60	0,10	1,36	1,42	1,46	1,0	0,15	1,27	1,32	1,36	0,20	1,22	1,25	1,27	0,02	1,51	1,67	1,81	2,0	0,05	1,48	1,58	1,66	0,10	1,39	1,47	1,51	0,15	1,30	1,35	1,39		0,20	1,27	1,29	1,30	0,02	1,56	1,73	1,87	0,05	1,51	1,62	1,71		0,10	1,42	1,50	1,56	0,15	1,33	1,38	1,42	0,20	1,29	1,30	1,32	<p>Para los aceros cuando <math>\sigma_p \leq 50</math> kgf/mm<sup>2</sup></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>q</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">1,0</td> <td>0,02</td> <td>0,64</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,74</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,81</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">2,0</td> <td>0,15</td> <td>0,91</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,00</td> </tr> <tr> <td>0,02</td> <td>0,49</td> </tr> <tr> <td rowspan="3"></td> <td>0,05</td> <td>0,72</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,76</td> </tr> <tr> <td>0,15</td> <td>0,77</td> </tr> <tr> <td rowspan="3"></td> <td>0,20</td> <td>0,96</td> </tr> </tbody> </table> <p>cuando <math>\sigma_p = 80</math> kgf/mm<sup>2</sup></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>\frac{r}{d}</math></th> <th><math>q</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="3">1,0</td> <td>0,02</td> <td>0,84</td> </tr> <tr> <td>0,05</td> <td>0,89</td> </tr> <tr> <td>0,10</td> <td>0,98</td> </tr> <tr> <td rowspan="3">2,0</td> <td>0,15</td> <td>1,06</td> </tr> <tr> <td>0,20</td> <td>1,07</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$q$	1,0	0,02	0,64	0,05	0,74	0,10	0,81	2,0	0,15	0,91	0,20	1,00	0,02	0,49		0,05	0,72	0,10	0,76	0,15	0,77		0,20	0,96	$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$q$	1,0	0,02	0,84	0,05	0,89	0,10	0,98	2,0	0,15	1,06	0,20	1,07
$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>																																																																																																																					
		$\leq 50$	80	$> 100$																																																																																																																			
0,5	0,02	1,46	1,61	1,73																																																																																																																			
	0,05	1,43	1,52	1,60																																																																																																																			
	0,10	1,36	1,42	1,46																																																																																																																			
1,0	0,15	1,27	1,32	1,36																																																																																																																			
	0,20	1,22	1,25	1,27																																																																																																																			
	0,02	1,51	1,67	1,81																																																																																																																			
2,0	0,05	1,48	1,58	1,66																																																																																																																			
	0,10	1,39	1,47	1,51																																																																																																																			
	0,15	1,30	1,35	1,39																																																																																																																			
	0,20	1,27	1,29	1,30																																																																																																																			
	0,02	1,56	1,73	1,87																																																																																																																			
	0,05	1,51	1,62	1,71																																																																																																																			
	0,10	1,42	1,50	1,56																																																																																																																			
	0,15	1,33	1,38	1,42																																																																																																																			
	0,20	1,29	1,30	1,32																																																																																																																			
$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$q$																																																																																																																					
1,0	0,02	0,64																																																																																																																					
	0,05	0,74																																																																																																																					
	0,10	0,81																																																																																																																					
2,0	0,15	0,91																																																																																																																					
	0,20	1,00																																																																																																																					
	0,02	0,49																																																																																																																					
	0,05	0,72																																																																																																																					
	0,10	0,76																																																																																																																					
	0,15	0,77																																																																																																																					
	0,20	0,96																																																																																																																					
	$\frac{r}{d}$	$\frac{r}{d}$	$q$																																																																																																																				
	1,0	0,02	0,84																																																																																																																				
0,05		0,89																																																																																																																					
0,10		0,98																																																																																																																					
2,0	0,15	1,06																																																																																																																					
	0,20	1,07																																																																																																																					

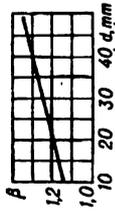
7	<p>Arboles, ejes con entallas</p>  <p>Flexión</p>	<p>Cuando <math>d = 8</math> mm,  <math>\frac{D}{d} = 1,02 - 1,6</math>  <math>r = 0,05</math> mm;  <math>\frac{r}{d} = 0,006</math>;  <math>\frac{t}{r} = 4 - 4,5</math>;  <math>\alpha = 4,5 - 6</math></p>	<p>Para las aleaciones MJ14, 1,8 - 4,3  MA2, MA3, MA5, 1,9 - 2,5  AJ15, AJ17, AJ18, AJ19, 1 - 1,4  AJ16, AK2, AK8, 1,1 - 2,6</p>	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="165 307 291 425">2,0</td> <td data-bbox="165 189 291 307">0,02 0,05 0,10 0,15 0,20</td> <td data-bbox="165 112 291 189">0,47 0,73 0,91 0,91 1,00</td> </tr> <tr> <td colspan="3" data-bbox="315 112 391 425" style="text-align: center;">cuando <math>\sigma_p \geq 100</math> kgf/mm<sup>2</sup></td> </tr> <tr> <td data-bbox="391 307 553 425">1,0</td> <td data-bbox="391 189 553 307">0,02 0,05 0,10 0,15 0,20</td> <td data-bbox="391 112 553 189">1,01 1,02 1,06 1,14 1,15</td> </tr> <tr> <td data-bbox="553 307 703 425">2,0</td> <td data-bbox="553 189 703 307">0,02 0,05 0,10 0,15 0,20</td> <td data-bbox="553 112 703 189">0,76 0,84 1,00 1,00 1,07</td> </tr> </table> <p>Para las aleaciones  MJ14, 0,2 - 0,8  MA2, MA3, MA5,  0,25 - 0,26  AJ15, AJ17, AJ18, AJ19,  0 - 0,07  AJ16, AK2, AK8,  0,03 - 0,27</p>	2,0	0,02 0,05 0,10 0,15 0,20	0,47 0,73 0,91 0,91 1,00	cuando $\sigma_p \geq 100$ kgf/mm <sup>2</sup>			1,0	0,02 0,05 0,10 0,15 0,20	1,01 1,02 1,06 1,14 1,15	2,0	0,02 0,05 0,10 0,15 0,20	0,76 0,84 1,00 1,00 1,07
2,0	0,02 0,05 0,10 0,15 0,20	0,47 0,73 0,91 0,91 1,00														
cuando $\sigma_p \geq 100$ kgf/mm <sup>2</sup>																
1,0	0,02 0,05 0,10 0,15 0,20	1,01 1,02 1,06 1,14 1,15														
2,0	0,02 0,05 0,10 0,15 0,20	0,76 0,84 1,00 1,00 1,07														

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$															
8	Arboles, ejes con agujeros circulares transversales 	2,0 Cuando $\frac{a}{d} = 0,1 - 0,33$	Para los aceros 	Para los aceros, 0,7-1,0															
			$1 - \frac{a}{d} = 0,05 - 0,1$ $2 - \frac{a}{d} = 0,15 - 0,25$ ( $d = 30 - 50$ mm)																
			Algunos valores numéricos de $\beta$ se dan en la tabla																
			<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>\frac{a}{d}</math></th> <th colspan="3"><math>\sigma_p, \text{ kgf/mm}^2</math></th> </tr> <tr> <th>50</th> <th>60</th> <th>80</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,05-0,1</td> <td>1,90</td> <td>1,95</td> <td>2,05</td> </tr> <tr> <td>0,15-0,25</td> <td>1,74</td> <td>1,77</td> <td>1,86</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{a}{d}$	$\sigma_p, \text{ kgf/mm}^2$			50	60	80	0,05-0,1	1,90	1,95	2,05	0,15-0,25	1,74	1,77	1,86	
$\frac{a}{d}$	$\sigma_p, \text{ kgf/mm}^2$																		
	50	60	80																
0,05-0,1	1,90	1,95	2,05																
0,15-0,25	1,74	1,77	1,86																

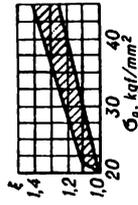
Flexión

Para la fundición gris que tiene  $\sigma_p = 20$  kgf/mm<sup>2</sup> y cuando

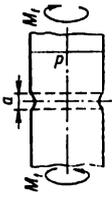
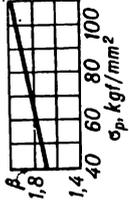
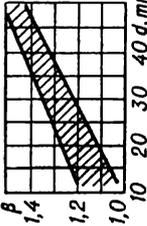
$$\frac{a}{d} = 0,1 - 0,15$$



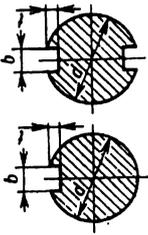
Si los valores de  $\sigma_p$  son otros hay que utilizar el coeficiente de corrección  $\xi$  que se halla mediante el diagrama dado a continuación



El límite superior corresponde a las fundiciones de alta aleación, el inferior, a las de baja aleación

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$				
9	<p>Arboles, ejes con agujero circular transversal</p>  <p>Torsión</p>	-	<p>Para los aceros cuando <math>d = 30 - 50 \text{ mm}</math> y <math>\frac{a}{d} = 0,05 - 0,25</math></p>  <p>Algunos valores numéricos de <math>\beta</math> que corresponden al diagrama se dan en la tabla</p> <table border="1" data-bbox="652 445 758 781"> <thead> <tr> <th><math>\frac{a}{d}</math></th> <th><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,05 - 0,25</td> <td>1,75   1,78   1,83   1,92</td> </tr> </tbody> </table> <p>Para la fundición gris que tiene <math>\sigma_p = 22 \text{ kgf/mm}^2</math> y cuando <math>\frac{a}{d} = 0,1</math></p> 	$\frac{a}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	0,05 - 0,25	1,75   1,78   1,83   1,92	-
$\frac{a}{d}$	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>							
0,05 - 0,25	1,75   1,78   1,83   1,92							

10 Arboles, ejes con uno y dos chaveteros



Flexión

Torsión

Para los cálculos: si hay un chavetero

$$W_f \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$$

si hay dos chaveteros

$$W_f \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$$

siendo  $W_f$  el módulo de la sección durante la flexión.

Para los aceros

$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$
50	1,5
60	1,6
70	1,72
80	1,8
90	1,9
100	2,0

Para los cálculos: si hay un chavetero

$$W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d};$$

si hay dos chaveteros

$$W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d},$$

siendo  $W_t$  el módulo de la sección durante la torsión.

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$														
			<p>Para los aceros</p> <table border="1" data-bbox="370 445 582 764"> <thead> <tr> <th><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> <th><math>\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>50</td><td>1,4</td></tr> <tr><td>60</td><td>1,5</td></tr> <tr><td>70</td><td>1,6</td></tr> <tr><td>80</td><td>1,7</td></tr> <tr><td>90</td><td>1,8</td></tr> <tr><td>100</td><td>1,9</td></tr> </tbody> </table>	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$	50	1,4	60	1,5	70	1,6	80	1,7	90	1,8	100	1,9	
$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$																	
50	1,4																	
60	1,5																	
70	1,6																	
80	1,7																	
90	1,8																	
100	1,9																	
11	<p>Arboles, ejes con tramos estriados (dentados)</p> <p>Flexión</p>	—	<p>Para los aceros, durante el cálculo en el caso de estrias rectas, el módulo de la sección se determina mediante la fórmula</p> $W_f = \xi \frac{\pi d^3}{32},$ <p>siendo <math>d</math> el diámetro interior; <math>\xi</math>, el coeficiente de corrección igual a:</p> <p>para la serie ligera, 1,09—1,16;                      para la serie media, 1,14—1,27;                      para la serie pesada, 1,14—1,39.</p> <p>Los valores menores de <math>\xi</math> corresponden a los mayores de <math>d</math>.</p>	—														

Para las uniones por estrías de evolvente  $W_r$  se determina como para la sección circular maciza con diámetro igual al diámetro del círculo divisor

$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$	
	Estrías rectas (GOST 1139-53)	Estrías de evolvente (GOST 6033-51)
40	1,35	1,35
50	1,45	1,45
60	1,55	1,55
70	1,60	1,60
80	1,65	1,65
90	1,70	1,70
100	1,72	1,72
120	1,75	1,75

### Torsión

Para las estrías rectas

$$\alpha = 2,5-3,2$$

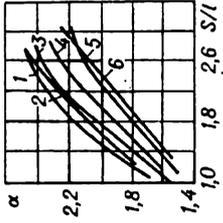
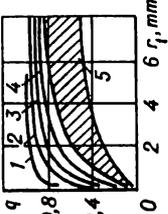
Para las estrías de evolvente

$$\alpha = 1,2-1,5$$

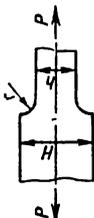
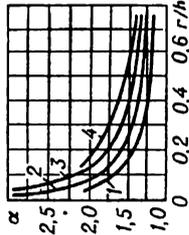
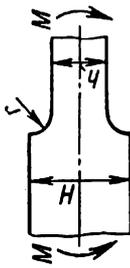
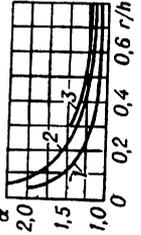
$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$	
	Estrías rectas (GOST 1139-53)	Estrías de evolvente (GOST 6033-51)
40	2,10	1,40
50	2,25	1,43
60	2,35	1,46
70	2,45	1,49
80	2,55	1,52
90	2,65	1,55
100	2,70	1,58
120	2,80	1,60

para las estrías rectas,  
0,5-1,2;  
para las de evolvente,  
0,8-3,0.

Continuación del apéndice 2

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
			<p>El módulo de la sección con estrías rectas durante la torsión</p> $W_t = 2W_t$ <p>Para las uniones por estrías de evolvente <math>W_t</math> se determina como para la sección circular maciza con diámetro igual al diámetro del círculo divisor</p>	
12	<p>Piñones no corregidos de perfil evolvente con el ángulo <math>\alpha = 20^\circ</math> durante la carga aplicada a la cabeza del diente</p>	<p>Si el número de dientes <math>z = 20 \div 80</math></p>  <p style="text-align: right;"><math>J, \frac{r_t}{m} = 0,124 - 0,222</math></p>	<p><math>\beta = 1 + q(\alpha - 1)</math></p>	<p>Para los aceros</p> 

	<p>2, <math>\frac{r_t}{m} = 0,124 - 0,17</math></p> <p>3, <math>\frac{r_t}{m} = 0,258 - 0,36</math></p> <p>4, <math>\frac{r_t}{m} = 0,305 - 0,317</math></p> <p>5, <math>\frac{r_t}{m} = 0,55</math></p> <p>6, <math>\frac{r_t}{m} = 0,495 - 0,6</math></p> <p>siendo <math>s</math> el espesor de la base del diente en la sección peli-grosa; <math>l</math>, el brazo de acción de la fuerza flexionante; <math>m</math>, el módulo del engranaje; <math>r_t</math>, el radio del redondeo de la cabeza del diente</p>	<p>Para la fundición es igual a 1,2-1,3</p>	<p>1, <math>\frac{\sigma_F}{\sigma_p} = 0,8</math></p> <p>2, <math>\frac{\sigma_F}{\sigma_p} = 0,7</math></p> <p>3, <math>\frac{\sigma_F}{\sigma_p} = 0,6</math></p> <p>4, <math>\frac{\sigma_F}{\sigma_p} = 0,55</math></p> <p>5, <math>\frac{\sigma_F}{\sigma_p} = 0,4 - 0,5</math></p>																	
<p>13</p> <p>Uniones por pernos durante tracción-compresión cuando <math>d = 12 m n</math></p>	<p>—</p>	<p>Para los aceros</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2"><math>\sigma_p</math>, kgf/mm<sup>2</sup></th> <th colspan="2"><math>\beta</math></th> </tr> <tr> <th>rosca métrica</th> <th>rosca Whitworth</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>40</td> <td>3,0</td> <td>2,2</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>3,9</td> <td>2,9</td> </tr> <tr> <td>80</td> <td>4,8</td> <td>3,5</td> </tr> <tr> <td>100</td> <td>5,2</td> <td>3,8</td> </tr> </tbody> </table>	$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$		rosca métrica	rosca Whitworth	40	3,0	2,2	60	3,9	2,9	80	4,8	3,5	100	5,2	3,8	<p>—</p>
$\sigma_p$ , kgf/mm <sup>2</sup>	$\beta$																			
	rosca métrica	rosca Whitworth																		
40	3,0	2,2																		
60	3,9	2,9																		
80	4,8	3,5																		
100	5,2	3,8																		

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
14	<p>Tira rectangular escalonada</p>  <p>Tracción-compresión</p>	 <p><math>\alpha</math></p> <p>2,5 2,0 1,5 1,0</p> <p>0 0,2 0,4 0,6 r/h</p> <p><math>H/h = 1,1; 2, \frac{H}{h} = 1,2;</math> <math>3, \frac{H}{h} = 1,5; 4, \frac{H}{h} = 4.</math></p>	$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	<p>Los valores de <math>q</math> pueden tomarse del diagrama dado para el esquema 12</p>
15	<p>Tira rectangular escalonada</p>  <p>Flexión</p>	 <p><math>\alpha</math></p> <p>2,0 1,5 1,0</p> <p>0 0,2 0,4 0,6 r/h</p> <p><math>H/h = 1,1; 2, \frac{H}{h} = 2;</math> <math>3, \frac{H}{h} = 4.</math></p>	$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	<p>Los valores de <math>q</math> pueden tomarse del diagrama dado para el esquema 12</p>

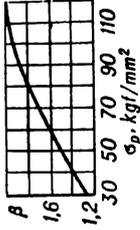
16 -

Placa rectangular con agujero



$\frac{d}{B}$	$\alpha$
0	3,0
0,1	3,03
0,2	3,14
0,3	3,36
0,4	3,74
0,5	4,32

Para los aceros



Tracción-compresión

Para las aleaciones MA2, MA3, MA5,  $\Pi$  16, AK2, AK8, siendo  $B = 40$  mm;  $d = 1 - 6$  mm; el espesor  $h = 1,5 - 5$  mm

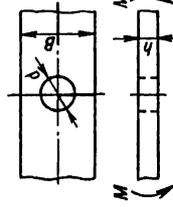
2,5 - 3

1,2 - 1,8

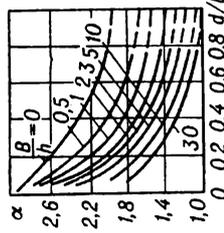
0,1 - 0,53

17

Placa rectangular con agujero



Para los aceros

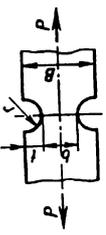
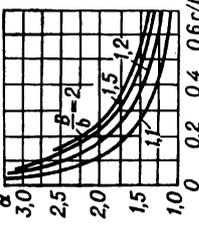
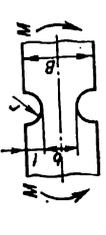
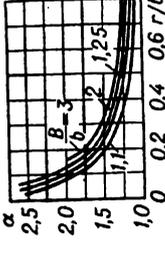
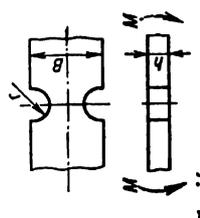


Algunos valores de  $q$ , siendo  $\frac{d}{B/h} = 3$  y  $\frac{d}{B} = 0,1 - 0,9$

Para el acero con  $\sigma_p = 60$  kgf/mm<sup>2</sup>, 0,37 - 1,46;  
 $\sigma_p = 80$  kgf/mm<sup>2</sup>, 0,5 - 2;  
 $\sigma_p = 100$  kgf/mm<sup>2</sup>, 0,63 - 2,5

Flexión

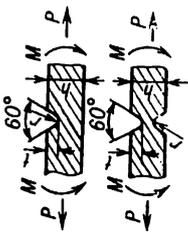
Para las aleaciones MA2, MA3, MA5,  $\Pi$  16, AK2, AK8, siendo  $B = 40$  mm;  $d = 1 - 6$  mm;  $h = 1,5 - 5$  mm

Núm. de orden	Esquema de sollicitación del elemento de la estructura o pieza	Coeficiente teórico de concentración de las tensiones $\alpha$	Coeficiente efectivo de concentración de las tensiones $\beta$	Coeficiente de sensibilidad a la concentración de las tensiones $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
18	<p>Placa rectangular con cortes laterales</p>  <p>Tracción-compresión</p>		$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	<p>Los valores de <math>q</math> pueden tomarse del diagrama dado para el esquema 12</p>
19	<p>Placa rectangular con cortes laterales</p>  <p>Flexión</p>		$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	<p>Los valores de <math>q</math> pueden tomarse del diagrama dado para el esquema 12</p>
20	<p>Placa rectangular con cortes laterales</p>  <p>Flexión</p>	<p>2</p>	<p>1,5-2</p>	<p>0,5-1</p>

Para las aleaciones MA2, MA3, MA5, D16, AK2, AK8, siendo  $B = 12$  mm;  $r = 16$  mm;  $h = 0,5$  mm,

21

Tira con corte uni o bilateral



Tracción-compresión o flexión

4-7

Para las aleaciones MA2, MA3, MA5, siendo  $r = 0,02 - 0,05$  mm;

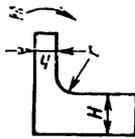
$$\frac{t}{r} \approx 3 - 15; \frac{h}{t} = 20$$

1,2

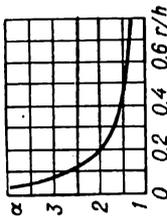
0,03 - 0,07

22

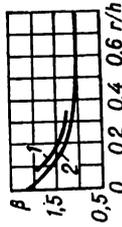
Perfil con ángulo entrante



Flexión



Para los aceros



1, aleado  
( $\sigma_p = 90$  kgf/mm<sup>2</sup>)

2, al carbono  
( $\sigma_p = 50 \div 70$  kgf/mm<sup>2</sup>)

Para el acero con

$$\sigma_p = 90 \text{ kgf/mm}^2$$

$$\frac{r}{h} \quad \quad \quad q$$

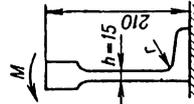
0,1 - 0,3 | 0,33 - 0,47

Para el acero con

$$\sigma_p = 50 \div 70 \text{ kgf/mm}^2$$

0,1 - 0,6 | 0,2 - 0,35

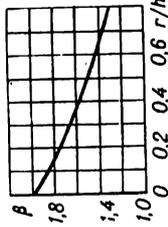
Elemento de la estructura con ángulo entrante



Flexión

Para la fundición con

$$\sigma_p = 29 \text{ kgf/mm}^2$$



**Funciones de Krilov  $S, T, U, V$**

$$S(kz) = \frac{1}{2} (\text{ch } kz + \cos kz);$$

$$T(kz) = \frac{1}{2} (\text{sh } kz + \text{sen } kz);$$

$$U(kz) = \frac{1}{2} (\text{ch } kz - \cos kz);$$

$$V(kz) = \frac{1}{2} (\text{sh } kz - \text{sen } kz),$$

siendo

$$S'(kz) = kV(kz); \quad S''(kz) = k^2 U(kz); \quad S'''(kz) = k^3 T(kz);$$

$$T'(kz) = kS(kz); \quad T''(kz) = k^3 V(kz); \quad T'''(kz) = k^3 U(kz);$$

$$U'(kz) = kT(kz); \quad U''(kz) = k^3 S(kz); \quad U'''(kz) = k^3 V(kz);$$

$$V'(kz) = kU(kz); \quad V''(kz) = k^2 T(kz); \quad V'''(kz) = k^3 S(kz)$$

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,02	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,00000	0,03000	0,00045	0,00000
0,04	1,00000	0,04000	0,00080	0,00001
0,05	1,00000	0,05000	0,00125	0,00002
0,06	1,00000	0,06000	0,00180	0,00004
0,07	1,00000	0,07000	0,00245	0,00006
0,08	1,00000	0,08000	0,00320	0,00009
0,09	1,00000	0,09000	0,00405	0,00012
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,11	1,00001	0,11000	0,00605	0,00022
0,12	1,00001	0,12000	0,00720	0,00029
0,13	1,00001	0,13000	0,00845	0,00037
0,14	1,00002	0,14000	0,00980	0,00046
0,15	1,00002	0,15000	0,01125	0,00056
0,16	1,00003	0,16000	0,01280	0,00068
0,17	1,00003	0,17000	0,01445	0,00082
0,18	1,00004	0,18000	0,01620	0,00097
0,19	1,00005	0,19000	0,01805	0,00115
0,20	1,00007	0,20000	0,02000	0,00134
0,21	1,00008	0,21000	0,02205	0,00155
0,22	1,00010	0,22000	0,02420	0,00178
0,23	1,00012	0,23000	0,02645	0,00203
0,24	1,00014	0,24000	0,02880	0,00231
0,25	1,00016	0,25000	0,03125	0,00261
0,26	1,00019	0,26001	0,03380	0,00293

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
0,27	1,00022	0,27001	0,03645	0,00328
0,28	1,00026	0,28001	0,03920	0,00366
0,29	1,00029	0,29001	0,04205	0,00407
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,31	1,00038	0,31002	0,04805	0,00497
0,32	1,00044	0,32003	0,05120	0,00546
0,33	1,00049	0,33003	0,05445	0,00599
0,34	1,00055	0,34004	0,05780	0,00655
0,35	1,000625	0,35004	0,06125	0,00715
0,36	1,00070	0,36005	0,06480	0,00778
0,37	1,00078	0,37006	0,06845	0,00844
0,38	1,00086	0,38006	0,07220	0,00915
0,39	1,00096	0,39007	0,07605	0,00989
0,40	1,00106	0,40008	0,08000	0,01067
0,41	1,00117	0,41009	0,08405	0,01149
0,42	1,00129	0,42011	0,08820	0,01235
0,43	1,00142	0,43012	0,09245	0,01325
0,44	1,00156	0,44014	0,09681	0,01420
0,45	1,00171	0,45015	0,10126	0,01519
0,46	1,00186	0,46017	0,10581	0,01625
0,47	1,00203	0,47019	0,11047	0,01731
0,48	1,00221	0,48021	0,11522	0,01844
0,49	1,00240	0,49023	0,12007	0,01961
0,50	1,00260	0,50026	0,12502	0,02084
0,51	1,00280	0,51029	0,13007	0,02211
0,52	1,00304	0,52031	0,13522	0,02344
0,53	1,00329	0,53024	0,14048	0,02481
0,54	1,00354	0,54038	0,14583	0,02624
0,55	1,00381	0,55042	0,15129	0,02773
0,56	1,00410	0,56046	0,15684	0,02927
0,57	1,00440	0,57050	0,16250	0,03037
0,58	1,00471	0,58054	0,16825	0,03253
0,59	1,00505	0,59060	0,17411	0,03424
0,60	1,00540	0,60074	0,18006	0,03601
0,61	1,00577	0,61070	0,18612	0,03784
0,62	1,00616	0,62076	0,19228	0,03973
0,63	1,00656	0,63082	0,19853	0,04169
0,64	1,00699	0,64089	0,20489	0,04369
0,65	1,00742	0,65097	0,21136	0,04578
0,66	1,00790	0,66104	0,21791	0,04793
0,67	1,00830	0,67112	0,22458	0,05013
0,68	1,00891	0,68121	0,23134	0,05248
0,69	1,00945	0,69130	0,23820	0,05477
0,70	1,01000	0,70140	0,24516	0,05718
0,71	1,01059	0,71150	0,25223	0,05967
0,72	1,01120	0,72161	0,25939	0,06223

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
0,73	1,01183	0,73173	0,26666	0,06486
0,74	1,01249	0,74185	0,27403	0,06756
0,75	1,01318	0,75198	0,28149	0,07034
0,76	1,01390	0,76211	0,28906	0,07319
0,77	1,01465	0,77226	0,29674	0,07612
0,78	1,01542	0,78240	0,30451	0,07913
0,79	1,01623	0,79256	0,31238	0,08228
0,80	1,01707	0,80273	0,32036	0,08538
0,81	1,01794	0,81290	0,32844	0,08862
0,82	1,01884	0,82309	0,33662	0,09194
0,83	1,01978	0,83328	0,34490	0,09535
0,84	1,02075	0,84348	0,35329	0,09885
0,85	1,02175	0,85380	0,36177	0,10242
0,86	1,02280	0,86392	0,37036	0,10608
0,87	1,02388	0,87415	0,37905	0,10983
0,88	1,02500	0,88440	0,38785	0,11366
0,89	1,02615	0,89465	0,39674	0,11758
0,90	1,02735	0,90492	0,40573	0,12159
0,91	1,02858	0,91520	0,41483	0,12570
0,92	1,02986	0,92549	0,42404	0,12990
0,93	1,03118	0,93082	0,43335	0,13418
0,94	1,03254	0,94612	0,44275	0,13856
0,95	1,03395	0,95645	0,45227	0,14303
0,96	1,03540	0,96679	0,46188	0,14761
0,97	1,03690	0,97716	0,47161	0,15297
0,98	1,03845	0,98753	0,48143	0,15704
0,99	1,04005	0,99793	0,49136	0,16190
1,00	1,04169	1,00833	0,50139	0,16687
1,01	1,04338	1,01876	0,51152	0,17193
1,02	1,04513	1,02920	0,52176	0,17710
1,03	1,04693	1,03953	0,53211	0,18237
1,04	1,04878	1,05014	0,54256	0,18774
1,05	1,05068	1,06064	0,55311	0,19322
1,06	1,05264	1,07116	0,56377	0,19880
1,07	1,05466	1,08169	0,57454	0,20449
1,08	1,05673	1,09225	0,58540	0,21029
1,09	1,05887	1,10283	0,59638	0,21620
1,10	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,11	1,06333	1,12405	0,61865	0,22835
1,12	1,06562	1,13469	0,62995	0,23460
1,13	1,06800	1,14536	0,64134	0,24095
1,14	1,07044	1,15605	0,65285	0,24742
1,15	1,07295	1,16677	0,66446	0,25401
1,16	1,07552	1,17750	0,67619	0,26071
1,17	1,07816	1,18828	0,68801	0,26753
1,18	1,08087	1,19908	0,69995	0,27447
1,19	1,08365	1,20990	0,71200	0,28153

Continuación del apéndice 3

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
1,20	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,21	1,08934	1,23163	0,73641	0,29601
1,22	1,09243	1,24254	0,74878	0,30344
1,23	1,09550	1,25348	0,76196	0,31099
1,24	1,09865	1,26444	0,77385	0,31867
1,25	1,10187	1,27545	0,78658	0,32647
1,26	1,10518	1,28648	0,79936	0,33439
1,27	1,10856	1,29750	0,81228	0,34245
1,28	1,11203	1,30866	0,82531	0,35064
1,29	1,11557	1,31980	0,83845	0,35896
1,30	1,11920	1,33097	0,85163	0,36741
1,31	1,12292	1,34218	0,86507	0,37600
1,32	1,12673	1,35343	0,87855	0,38471
1,33	1,13062	1,36471	0,89214	0,39357
1,34	1,13460	1,37604	0,90585	0,40256
1,35	1,13867	1,38740	0,91966	0,41169
1,36	1,14283	1,39881	0,93336	0,42096
1,37	1,14709	1,41026	0,94764	0,43035
1,38	1,15144	1,42175	0,96180	0,43991
1,39	1,15588	1,43329	0,97607	0,44959
1,40	1,16043	1,44487	0,99047	0,45933
1,41	1,16507	1,45655	1,00497	0,46941
1,42	1,16982	1,46817	1,01959	0,47952
1,43	1,17466	1,47990	1,03434	0,48980
1,44	1,17961	1,49167	1,04920	0,50021
1,45	1,18467	1,50349	1,06417	0,51078
1,46	1,18984	1,51537	1,07926	0,52149
1,47	1,19510	1,52728	1,09448	0,53237
1,48	1,20048	1,53926	1,10981	0,54339
1,49	1,20597	1,55130	1,12526	0,55456
1,50	1,21157	1,56338	1,14083	0,56590
1,51	1,21729	1,57553	1,15653	0,57738
1,52	1,22312	1,58773	1,17235	0,58903
1,53	1,22907	1,59999	1,18828	0,60083
1,54	1,23514	1,61231	1,20435	0,61279
1,55	1,24132	1,62469	1,22053	0,62492
1,56	1,24769	1,63714	1,23679	0,63720
1,57	1,25407	1,64965	1,25327	0,64965
1,58	1,26063	1,66222	1,26983	0,66226
1,59	1,26732	1,67486	1,28652	0,67504
1,60	1,27413	1,68757	1,30333	0,68800
1,61	1,28108	1,70034	1,32027	0,70112
1,62	1,28815	1,71319	1,33734	0,71441
1,63	1,29536	1,72608	1,35453	0,72786
1,64	1,30271	1,73910	1,37186	0,74149
1,65	1,31019	1,75216	1,38932	0,75530
1,66	1,31782	1,76530	1,40690	0,76928

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
1,67	1,32558	1,77852	1,42462	0,78344
1,68	1,33348	1,79181	1,44248	0,79778
1,69	1,34154	1,80519	1,46046	0,81229
1,70	1,34974	1,81864	1,47858	0,82699
1,71	1,35808	1,83219	1,49683	0,84186
1,72	1,36657	1,84581	1,53523	0,85692
1,73	1,37522	1,85952	1,53375	0,87216
1,74	1,38401	1,87331	1,55242	0,88759
1,75	1,39297	1,88820	1,57122	0,90321
1,76	1,40208	1,90117	1,59016	0,91903
1,77	1,41135	1,91524	1,60924	0,93502
1,78	1,42078	1,92940	1,62846	0,95120
1,79	1,43038	1,94366	1,64783	0,96759
1,80	1,44013	1,95801	1,66734	0,98416
1,81	1,45006	1,97246	1,68699	1,00093
1,82	1,46015	1,98697	1,70679	1,02191
1,83	1,47042	2,00166	1,72673	1,03507
1,84	1,48086	2,01642	1,74682	1,05244
1,85	1,49147	2,03128	1,76706	1,07001
1,86	1,50225	2,04625	1,78745	1,08778
1,87	1,51322	2,06133	1,80798	1,10576
1,88	1,52437	2,07652	1,82868	1,12394
1,89	1,53570	2,09182	1,84952	1,14233
1,90	1,54722	2,10723	1,87051	1,16093
1,91	1,55892	2,12276	1,89166	1,17974
1,92	1,57081	2,13841	1,91297	1,19877
1,93	1,58290	2,15418	1,93443	1,21800
1,94	1,59518	2,17006	1,95605	1,23745
1,95	1,61265	2,18608	1,97783	1,25713
1,96	1,62032	2,20222	1,99977	1,27701
1,97	1,63319	2,21849	2,02187	1,29712
1,98	1,64626	2,23489	2,04415	1,31745
1,99	1,65954	2,25142	2,06707	1,33800
2,00	1,67302	2,26808	2,08918	1,35878
2,01	1,68671	2,28337	2,11193	1,37828
2,02	1,70062	2,30181	2,13487	1,40102
2,03	1,71474	2,31889	2,15797	1,42249
2,04	1,72907	2,33611	2,18125	1,44418
2,05	1,74362	2,35347	2,20470	1,46611
2,06	1,75840	2,37098	2,22832	1,48827
2,07	1,77360	2,38864	2,25212	1,51068
2,08	1,78861	2,40645	2,27609	1,53332
2,09	1,80405	2,42441	2,30024	1,55620
2,10	1,81973	2,44253	2,32458	1,57933
2,11	1,83565	2,46081	2,34910	1,60269
2,12	1,85179	2,47925	2,37380	1,62630

Continuación del apéndice 3

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
2,13	1,86817	2,49785	2,39868	1,65017
2,14	1,88479	2,51661	2,42375	1,67428
2,15	1,90165	2,53554	2,44902	1,69865
2,16	1,91876	2,55464	2,47447	1,72327
2,17	1,93612	2,57392	2,50011	1,74813
2,18	1,95373	2,59337	2,52594	1,77326
2,19	1,97158	2,61300	2,55198	1,79865
2,20	1,98970	2,63208	2,57820	1,81431
2,21	2,00807	2,65279	2,60464	1,85022
2,22	2,02671	2,67296	2,63126	1,87640
2,23	2,04560	2,69332	2,65810	1,90285
2,24	2,06476	2,71388	2,68513	1,92956
2,25	2,08420	2,73462	2,71237	1,95655
2,26	2,10390	2,75556	2,73982	1,98381
2,27	2,12387	2,77670	2,76748	2,01135
2,28	2,14412	2,79804	2,79536	2,03916
2,29	2,16465	2,81958	2,82345	2,06725
2,30	2,18547	2,84133	2,85175	2,09563
2,31	2,20657	2,86329	2,88027	2,12429
2,32	2,22795	2,88546	2,90902	2,15324
2,33	2,24964	2,90785	2,93798	2,18247
2,34	2,27161	2,93045	2,96717	2,21200
2,35	2,29388	2,95328	2,99659	2,24182
2,36	2,31645	2,97634	3,02624	2,27193
2,37	2,33932	2,99962	3,05612	2,30234
2,38	2,36250	3,02312	3,08624	2,33306
2,39	2,38598	3,04686	3,11658	2,36406
2,40	2,40978	3,07084	3,14717	2,39539
2,41	2,43389	3,09506	3,17800	2,42700
2,42	2,45832	3,11952	3,20907	2,45895
2,43	2,48307	3,14423	3,24039	2,49119
2,44	2,50814	3,16919	3,27196	2,52375
2,45	2,53354	3,19439	3,30378	2,55664
2,46	2,56927	3,21986	3,33585	2,58983
2,47	2,58535	3,24558	3,36817	2,62335
2,48	2,61174	3,27156	3,40076	2,65720
2,49	2,63848	3,29781	3,43360	2,69136
2,50	2,66557	3,32433	3,46672	2,72587
2,51	2,69300	3,35113	3,50010	2,76070
2,52	2,72079	3,37820	3,53374	2,79584
2,53	2,74893	3,40555	3,56765	2,83137
2,54	2,77742	3,43318	3,60175	2,86722
2,55	2,80627	3,46110	3,63632	2,90342
2,56	2,83549	3,48931	3,67107	2,93995
2,57	2,86507	3,51780	3,70061	2,97683

Continuación del apéndice 3

<i>kz</i>	<i>S(kz)</i>	<i>T(kz)</i>	<i>U(kz)</i>	<i>V(kz)</i>
2,58	2,89502	3,54660	3,74144	3,01408
2,59	2,92535	3,57571	3,77705	3,05167
2,60	2,95606	3,60511	3,81295	3,08962
2,61	2,98714	3,63483	3,84915	3,12793
2,62	3,01862	3,66486	3,88565	3,16660
2,63	3,05047	3,69521	3,92235	3,20564
2,64	3,08273	3,72587	3,95955	3,24505
2,65	3,11538	3,75186	3,99696	3,28483
2,66	3,14843	3,78818	4,03469	3,32499
2,67	3,18188	3,81984	4,07273	3,36552
2,68	3,21755	3,85182	4,11108	3,40645
2,69	3,25001	3,88415	4,14926	3,44775
2,70	3,28470	3,91682	4,18877	3,48944
2,71	3,31980	3,94985	4,22810	3,53152
2,72	3,35533	3,92321	4,26717	3,57401
2,73	3,39128	4,01695	4,30777	3,61688
2,74	3,42767	4,05105	4,34811	3,66017
2,75	3,46449	4,08550	4,38879	3,70384
2,76	3,50175	4,12034	4,42982	3,74794
2,77	3,53945	4,15554	4,47120	3,79244
2,78	3,57760	4,19112	4,51293	3,83736
2,79	3,61619	4,22709	4,55503	3,88271
2,80	3,65525	4,26345	4,59748	3,92847
2,81	3,69476	4,30020	4,64030	3,97465
2,82	3,73493	4,33735	4,68330	4,02127
2,83	3,77520	4,37490	4,72705	4,06832
2,84	3,81612	4,41285	4,77098	4,11582
2,85	3,85751	4,45122	4,81530	4,16375
2,86	3,89940	4,49001	4,86000	4,21212
2,87	3,94176	4,52921	4,90510	4,26095
2,88	3,98461	4,56884	4,95059	4,31028
2,89	4,02796	4,60891	4,99648	4,35996
2,90	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
2,91	4,11617	4,69034	5,08947	4,46082
2,92	4,16103	4,73173	5,13658	4,51195
2,93	4,20640	4,77357	5,18410	4,56355
2,94	4,25230	4,81586	5,23206	4,61563
2,95	4,29875	4,85862	5,28042	4,66820
2,96	4,34567	4,90181	5,32923	4,72124
2,97	4,39315	4,94553	5,37846	4,77478
2,98	4,44117	4,98970	5,42814	4,82881
2,99	4,48972	5,03435	5,47825	4,88335
3,00	4,53883	5,07949	5,52883	4,93838
3,01	4,58850	5,12513	5,57985	4,99392
3,02	4,63872	5,17127	5,63133	5,04998
3,03	4,68950	5,21791	5,68327	5,10655

Continuación del apéndice 3

kz	S(kz)	T(kz)	U(kz)	V(kz)
3,04	4,74085	5,26556	5,73569	5,16364
3,05	4,79277	5,31272	5,78858	5,22126
3,06	4,84527	5,36090	5,84195	5,27942
3,07	4,89836	5,40963	5,89580	5,33810
3,08	4,95204	5,45888	5,95014	5,39734
3,09	5,00631	5,50868	6,00498	5,45711
3,10	5,06118	5,55901	6,06032	5,51744
3,11	5,11666	5,60990	6,11616	5,57832
3,12	5,17275	5,66135	6,17252	5,63976
3,13	5,22931	5,71336	6,22936	5,70177
3,14	5,28678	5,76594	6,28678	5,76435
3,15	5,34475	5,81910	6,34471	5,82751
3,16	5,40316	5,87284	6,40317	5,89125
3,17	5,46257	5,92717	6,46217	5,95657
3,18	5,52245	5,98209	6,52171	6,02049
3,19	5,58298	6,03762	6,58182	6,08601
3,20	5,64418	6,09375	6,64247	6,15213
3,21	5,70603	6,15050	6,70369	6,21885
3,22	5,76855	6,20787	6,76349	6,28621
3,23	5,83161	6,26588	6,82800	6,35417
3,24	5,89564	6,32451	6,89080	6,42277
3,25	5,96021	6,38379	6,95384	6,49199
3,26	6,02535	6,44372	7,01848	6,56185
3,27	6,09145	6,50431	7,08322	6,63236
3,28	6,15813	6,56555	7,14857	6,70352
3,29	6,22552	6,62747	7,21454	6,77533
3,30	6,29364	6,69006	7,28112	6,84782
3,31	6,36248	6,75334	7,34833	6,92095
3,32	6,43206	6,81732	7,41619	6,99478
3,33	6,50238	6,88199	7,48460	7,06928
3,34	6,57345	6,94737	7,55383	7,14448
3,35	6,64527	7,01346	7,62363	7,22036
3,36	6,71786	7,08027	7,69410	7,29696
3,37	6,79121	7,14782	7,76524	7,37425
3,38	6,86534	7,21610	7,83706	7,45226
3,39	6,94026	7,28513	7,90957	7,53099
3,40	7,01597	7,35491	7,98277	7,61045
3,41	7,09247	7,42546	8,05666	7,69065
3,42	7,16978	7,49676	8,13028	7,77159
3,43	7,24790	7,56885	8,20661	7,85326
3,44	7,32685	7,64172	8,28266	7,93573
3,45	7,40662	7,71539	8,35945	8,01893
3,46	7,48723	7,78986	8,38697	8,10291
3,47	7,51858	7,86514	8,51535	8,18768
3,48	7,65099	7,94124	8,59427	8,27322
3,49	7,73415	8,01816	8,67407	8,35956

Continuación del apéndice 3

<i>kz</i>	<i>S(kz)</i>	<i>T(kz)</i>	<i>U(kz)</i>	<i>V(kz)</i>
3,50	7,81818	8,09592	8,75464	8,44671
3,51	7,90309	8,17453	8,83599	8,53466
3,52	7,98888	8,25398	8,91813	8,62343
3,53	8,07556	8,33431	9,00107	8,71302
3,54	8,16315	8,41550	9,08482	8,80346
3,55	8,25164	8,49717	9,16938	8,89472
3,56	8,34104	8,58054	9,25478	8,98685
3,57	8,43137	8,61440	9,34100	9,07982
3,58	8,52264	8,74917	9,42807	9,17367
3,59	8,61485	8,83485	9,51599	9,26838
3,60	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,61	8,80213	9,00902	9,69442	9,46048
3,62	8,89772	9,09751	9,78495	9,55788
3,63	8,99330	9,18696	9,87637	9,65618
3,64	9,09035	9,27738	9,96870	9,75541
3,65	9,18845	9,36878	10,06193	9,85557
3,66	9,28747	9,46116	10,15608	9,95666
3,67	9,38754	9,55453	10,25115	10,05869
3,68	9,48864	9,64891	10,34717	10,16168
3,69	9,59077	9,74430	10,44414	10,26564
3,70	9,68159	9,84072	10,54206	10,37057
3,71	9,79819	9,93819	10,64095	10,47648
3,72	9,90349	10,03670	10,74082	10,58339
3,73	10,00986	10,13626	10,84169	10,69130
3,74	10,11732	10,23690	10,94355	10,80023
3,75	10,22587	10,33861	11,04643	10,91017
3,76	10,33552	10,44141	11,15033	11,02116
3,77	10,44630	10,54533	11,25526	11,13318
3,78	10,55819	10,65034	11,36124	11,24627
3,79	10,67123	10,75649	11,46878	11,36041
3,80	10,78540	10,87377	11,57638	11,47564
3,81	10,90074	10,97221	11,68555	11,59195
3,82	11,01725	11,08180	11,79582	11,70935
3,83	11,13493	11,19255	11,90719	11,82786
3,84	11,25380	11,30449	12,01969	11,94750
3,85	11,37389	11,41763	12,13329	12,06826
3,86	11,49518	11,53198	12,24803	12,19017
3,87	11,61769	11,64754	12,36393	12,31322
3,88	11,74145	11,76434	12,48099	12,43745
3,89	11,86646	11,88238	12,59922	12,56285
3,90	11,99271	12,00166	12,71864	12,68944
3,91	12,12024	12,12224	12,83926	12,81723
3,92	12,24905	12,24407	12,96109	12,94623
3,93	12,37917	12,36722	13,08415	13,07645
3,94	12,51059	12,49167	13,20844	13,20797
3,95	12,64333	12,61744	13,33398	13,34063
3,96	12,77740	12,74453	13,46079	13,47460

Continuación del apéndice 3

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
3,97	12,91283	12,87299	13,58888	13,60966
3,98	13,04960	13,00280	13,71825	13,74637
3,99	13,18775	13,13398	13,84893	13,88421
4,00	13,32730	13,26656	13,98094	14,02366
4,01	13,46823	13,40053	14,11427	14,16384
4,02	13,61057	13,53593	14,24895	14,30565
4,03	13,75435	13,67275	14,38500	14,44882
4,04	13,89955	13,81102	14,52242	14,59335
4,05	14,04622	13,95074	14,66122	14,73228
4,06	14,19435	14,09195	14,80144	14,88658
4,07	14,34395	14,23464	14,94306	15,03530
4,08	14,49506	14,37883	15,08613	15,18545
4,09	14,64767	14,52455	15,23065	15,33703
4,10	14,80180	14,67179	15,37663	15,43007
4,11	14,95747	14,82058	15,57408	15,64456
4,12	15,11470	14,97095	15,67304	15,80055
4,13	15,27350	15,12288	15,82351	15,96304
4,14	15,43386	15,27641	15,97551	16,11703
4,15	15,59533	15,43157	16,12905	16,27755
4,16	15,75942	15,58835	16,28415	16,43962
4,17	15,92464	15,74676	16,44082	16,60324
4,18	16,09150	15,90648	16,59909	16,76844
4,19	16,26001	16,06860	16,75896	16,93522
4,20	16,43020	16,23204	16,92046	17,10363
4,21	16,60208	16,39721	17,08360	17,27121
4,22	16,77568	16,56409	17,24841	17,44530
4,23	16,95099	16,73272	17,41490	17,61862
4,24	17,12806	16,90312	17,58307	17,79360
4,25	17,30687	17,07529	17,75297	17,97028
4,26	17,48746	17,24926	17,92458	18,14867
4,27	17,66985	17,42505	18,09795	18,32878
4,28	17,85405	17,60266	18,27309	18,51064
4,29	18,04008	17,78214	18,45002	18,69425
4,30	18,22794	17,96367	18,62874	18,87964
4,31	18,41767	18,14670	18,80929	19,06683
4,32	18,60928	18,33183	18,99168	19,25583
4,33	18,80280	18,51889	19,17594	19,44667
4,34	18,99823	18,70790	19,36207	19,63935
4,35	19,19558	18,89887	19,55010	19,83392
4,36	19,39491	19,09182	19,74005	20,03037
4,37	19,59620	19,28677	19,93194	20,22872
4,38	19,79949	19,48374	20,12579	20,42901
4,39	20,00479	19,68277	20,32162	20,63121
4,40	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,41	20,42150	20,08701	20,71931	21,04164
4,42	20,63296	20,29229	20,92120	21,24985

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
4,43	20,84651	20,49968	21,12516	21,46007
4,44	21,06217	20,70922	21,33120	21,67235
4,45	21,27996	20,92093	21,53935	21,88670
4,46	21,49991	21,13483	21,74963	22,10315
4,47	21,72204	21,35094	21,96236	22,32170
4,48	21,94635	21,56927	22,17665	22,54240
4,49	22,17288	21,78587	22,39345	22,76524
4,50	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,51	22,63270	22,23791	22,83371	23,21750
4,52	22,86602	22,46540	23,05722	23,44695
4,53	23,10165	22,69524	23,28303	23,67865
4,54	23,33965	22,92744	23,51114	23,91962
4,55	23,57990	23,16204	23,74159	24,14888
4,56	23,82259	23,39905	23,97439	24,38796
4,57	24,06766	23,63850	24,20957	24,62888
4,58	24,31766	23,88041	24,44916	24,87166
4,59	24,56510	24,12481	24,68719	25,11733
4,60	24,81752	24,37172	24,92967	25,36541
4,61	25,07242	24,62117	25,17463	25,61593
4,62	25,32984	24,87318	25,42210	25,86892
4,63	25,58980	25,12777	25,67210	26,12438
4,64	25,85233	25,38498	25,92467	26,38236
4,65	26,11746	25,64483	26,14981	26,64288
4,66	26,38520	25,90734	26,43757	26,90597
4,67	26,65559	26,17254	26,69797	27,17164
4,68	26,92865	26,44046	26,96103	27,43994
4,69	27,20440	26,71113	27,22678	27,71087
4,70	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
4,71	27,76410	27,26079	27,76799	28,26079
4,72	28,04810	27,53985	28,04045	28,53982
4,73	28,33490	27,82177	28,31729	28,82160
4,74	28,62454	28,106555	28,59693	29,10618
4,75	28,91704	28,39327	28,87944	29,39356
4,76	29,21242	28,68490	29,16483	29,68378
4,77	29,51072	28,97852	29,45314	29,97686
4,78	29,81197	29,27513	29,74440	30,27285
4,79	30,11619	29,57477	30,03855	30,57176
4,80	30,42341	29,87746	30,33591	30,87363
4,81	30,73367	30,18325	30,73367	31,17849
4,82	31,04699	30,49215	30,93959	31,48637
4,83	31,36340	30,80420	31,24607	31,79729
4,84	31,68295	31,11943	31,55569	32,11130
4,85	32,00565	31,43787	31,86847	32,42842
4,86	32,33153	31,75955	32,18445	32,74868
4,87	32,66063	32,08450	32,53670	33,07212
4,88	32,99298	32,41277	32,82615	33,39876
4,89	33,32862	32,74438	33,15194	33,72865

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
4,90	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
4,91	34,00976	33,41774	33,81353	34,39828
4,92	34,35554	33,79570	34,14942	34,73810
4,93	34,70464	34,10486	34,48879	35,08128
4,94	35,05718	34,45367	34,83153	35,42788
4,95	35,41320	34,80602	35,17782	35,77792
4,96	35,77275	35,16195	35,52765	36,13145
4,97	36,13585	35,52149	35,88107	36,48849
4,98	36,50253	35,88467	36,23810	36,84908
4,99	36,87284	36,25155	36,59878	37,21326
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
5,6	67,99531	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80633
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2 $\pi$	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	203,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
$\frac{5}{2}\pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714

Continuación del apéndice 3

$kz$	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,18393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2473,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56071	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3 $\pi$	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3339,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5506,19606	5506,34442	5507,03599	5506,88844

Apéndice 4

Funciones de Krilov para el cálculo de vigas de sección constante sobre base elástica

$\xi$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$
0	1	0	0	0
0,010	1,0000	0,01000	0,00005	0,00000
0,020	1,0000	0,02000	0,00020	0,00000
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
$\pi/2$	0,0000	1,2546	1,1507	0,6273

$\xi$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$
1,60	-0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,70	-0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,80	-0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,90	-1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
2,00	-1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,10	-2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,20	-2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,30	-3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,40	-4,0976	-0,1386	1,8461	1,9461
2,50	-4,9128	-0,5885	1,8105	2,1293
2,60	-5,8003	-1,1236	1,7256	2,3065
2,70	-6,7565	-1,7509	1,5827	2,4725
2,80	-7,7759	-2,4770	1,3721	2,6208
2,90	-8,8471	-3,3079	1,0838	2,7443
3,00	-9,9669	-4,2485	0,7069	2,8346
3,10	-11,1119	-5,3023	0,2303	2,8823
3,20	-12,2656	-6,4711	-0,3574	2,8769
3,30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,8068
3,40	-14,5008	-9,1507	-1,9121	2,6589
3,50	-15,5198	-10,6525	-2,9014	2,4195
3,60	-16,4218	-12,2508	-4,0459	2,0735
3,70	-17,1622	-13,9315	-5,3544	1,6049
3,80	-17,6875	-15,6761	-6,8343	0,9969
3,90	-17,9387	-17,4599	-8,4909	0,2321
4,00	-17,8498	-19,2524	-10,3265	-0,7073
4,10	-17,3472	-21,0160	-12,3404	-1,8392
4,20	-16,3505	-22,0755	-14,5274	-3,1812
4,30	-14,7722	-24,2669	-16,8773	-4,7501
4,40	-12,5180	-25,6373	-19,3743	-6,5615
4,50	-9,4890	-26,7447	-21,9959	-8,6290
4,60	-5,5791	-27,5057	-24,7117	-10,9638
4,70	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,5732
4,80	5,3164	-27,6052	-30,2589	-16,4604
4,90	12,5239	-26,7239	-32,9814	-19,6232
5,00	21,0504	-25,0565	-35,5775	-23,0525
5,10	30,9997	-22,4661	-37,9619	-26,7317
5,20	42,4661	-18,8057	-40,0350	-30,6346
5,30	55,5317	-13,9201	-41,6826	-34,7246
5,40	70,2637	-7,6440	-42,7727	-38,9524
5,50	86,7044	-0,1901	-43,1593	-43,2557
5,60	104,8687	9,7544	-42,6775	-47,5558
5,70	124,7352	21,2199	-41,1454	-51,7563
5,80	146,2448	34,7564	-38,3640	-55,7429
5,90	169,2837	50,5203	-34,1198	-59,0363
6,00	196,1881	70,6079	-27,4846	-62,7889
6,10	221,8019	91,4992	-19,4005	-65,1503
6,20	245,5231	112,5249	-10,2356	-66,4981
2 $\pi$	267,7468	133,8725	0	-66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	-66,9175
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	-63,3105
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	-13,2842

*Continuación del apéndice 4*

$\xi$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$
7,50	313,3700	580,6710	423,9858	133,6506
$5/2\pi$	0	643,9927	643,9926	321,9964
8,00	-216,8647	628,8779	737,3101	422,8713
8,50	-1479,3701	241,4136	981,0984	860,3917
9,00	-3691,4815	-1010,8800	834,8607	1340,3007
$3\pi$	-6195,8239	-3097,9120	0	1548,9560
9,50	-6660,9594	-3581,4756	-250,9959	1539,7410
10,0	-9240,8733	-7616,1462	-2995,7095	812,3636

## INDICE DE MATERIAS

- Alargamiento absoluto 7, 144
  - untario medio 7, 143, 148
  - — verdadero 7
- Amplitud del ciclo 559
  - de las oscilaciones 510
- Analogías nuevas 608
- Anillo de distancia (de rigidez) 430
  - , esfuerzos y desplazamientos durante su sollicitación 376
- Anisotropía 9
- Angulo de giro de la sección durante la flexión 8
  - — — — —, su determinación 237
  - — — — —, sus valores para las vigas hiperestáticas 341, 356
  - — — — —, sus valores para las vigas isostáticas 268
  - de torsión 8, 208
  - — — untario 8, 208
- Apoyo articulado inmóvil 106
  - — móvil 106
- Arbol 207
  - , su cálculo a la resistencia 210, 295, 440
  - , su velocidad crítica de rotación 518
- Area de la sección 27
- Articulación plástica 443
- Autooscilaciones 508
  
- Balandin, criterio de 178
- Barra 5
  - comprimida, su estabilidad 445
  - de igual resistencia a la compresión 182
  - escalonada 182
  - , su tracción 181
  - , sus oscilaciones 508, 527, 531
- Base de los ensayos a la fatiga 561
- Bernoulli, hipótesis de 143
- Betti, teorema de 309
- Botkin-Miroliúbov, criterio de 178
- Bóveda 6
  - de paredes delgadas cónica 435
  - — — cilíndrica 434
  - — — esférica 432
  - — — toroidal 436
  
- Cálculo de árboles (durante la torsión) 210
  - de barras comprimidas a la estabilidad 454
  - — — a la tracción 181
  - de bóvedas de paredes delgadas 425
  - de características geométricas de secciones planas 22
  - por carga de impacto 578
  - de cilindros compuestos 410
  - — — de paredes gruesas 405
- Cálculo al cizallamiento 196
  - de la costura soldada de flanco 204
  - — — — frontal 204
  - de discos giratorios 416
  - por los estados límites 437
  - a la flexión considerando las fuerzas de inercia 254
  - de hilos flexibles 187
  - a la resistencia durante las cargas repetidas ciclicamente 568
  - de resortes helicoidales 219
  - de sistemas hiperestáticos 323
  - de vigas durante la flexión 230
  - — — de sección variada (durante la flexión) 248
  - — — sobre base elástica 261
  - de viguetas planas curvas 384
- Capacidad de amortiguación 516
- Características del ciclo 559
  - de los ciclos 575
  - energéticas del material 148
  - geométricas de secciones planas 10, 27
  - mecánicas del material 143
  - de la plasticidad del material 147
  - de la resistencia del material 146
- Carga 101
  - aplicada momentáneamente 102
  - crítica 445, 459
  - dinámica 102
  - distribuida 101
  - estática 102
  - de impacto 102, 578
  - , su intensidad 101
  - limite 147
  - lineal 101
  - repetida ciclicamente 102, 568
- Castigliano, teorema de 315
- Centro de flexión 258
  - de gravedad 10
  - de rigidez 258
- Ciclo de las tensiones 559
  - — — de pulsación 560
  - — — simétrico 560
- Ciclos de las tensiones, denominación y características 575
  - — — — semejantes 560
- Círculo de inercia 18
  - de Mohr 160
  - de las tensiones 160
- Coefficiente de asimetría del ciclo 559
  - de amplificación dinámica 514
  - de blandura 175
  - de concentración de las tensiones 150, 642
  - — — efectivo (real) 151, 564, 642
  - — — — para la pieza 566
  - — — teórico 151, 642
  - de crecimiento de las oscilaciones 514
  - de dilatación lineal 614
  - de disminución de la tensión admisible a la compresión 455

- Coefficiente de estabilidad 452, 459
  - dinámico 578, 586
  - de influencia de las dimensiones absolutas 565
  - de Poisson 145, 154, 614
  - de reducción 450, 459
  - de seguridad 153
  - — — durante la carga dinámica 584
  - — — — estática 153
  - — — durante las cargas repetidas cíclicamente 568
  - — — contando con la carga dinámica 584
  - — — por peandeo 454
  - de sensibilidad a la concentración de las tensiones 564, 642
  - de la tensión admisible convencional a la compresión 455, 498
  - que toma en consideración la masa del elemento golpeado 586
- Compresión 7
  - , condición de resistencia 181
  - , ensayo 149
  - excéntrica 289, 290
- Concentración de las tensiones 150
  - — — durante la flexión 233
  - — — — durante la tracción-compresión 150
  - — — — durante la torsión 221
  - — — —, su influencia sobre el límite de resistencia a la fatiga 564
- Concentradores de las tensiones 150
- Condición de resistencia 119
  - — — de la costura soldada frontal 204
  - — — — — de flanco al cizallamiento 204
  - — — — — durante el deslizamiento puro 199
  - — — — — durante el estado tensional compuesto 168
  - — — — — uniaxial 168
  - — — — — para el hilo flexible 193
  - — — — — del perno al cizallamiento 200
  - — — — — de los remaches al aplastamiento 202
  - — — — — al cizallamiento 202
  - — — — — durante la torsión del árbol 210
  - — — — — durante la tracción 145, 181
  - — — — — de rigidez 119
  - — — — — durante la torsión 210
  - — — — — durante la tracción 145
- Costuras soldadas, su cálculo 203
- Coulomb, criterio de 177
- Coulomb-Mohr, criterio de 171, 177
- Criterio de Balandin 178
  - de Botkin-Miroliúbov 178
  - de Drucker-Prager 178
  - de Clebsch-Rankine 176
  - de Coulomb 177
  - de Coulomb-Mohr 171, 177
  - de las deformaciones lineales unitarias 169, 176
  - de la energía unitaria de variación de la forma 170, 175
  - de Galileo-Leibnitz 176
  - de Huber-Mises-Henke 177
  - de Kusmenko 180
  - de Mariotte-Grashof 176
  - de la resistencia 168
  - — — — de Davidénkov-Fridman 174
  - — — — de Pisarenko-Lébedev 173, 179
  - — — — de Yagn-Buginski 173, 177
  - de las tensiones normales máximas 169, 176
- Criterio de las tensiones tangenciales máximas 169, 177
  - — — — octaédricas 177
  - de Vólkov S. D. 179
- Curva de Wöhler 561
  - de amplitud de la resonancia 514
  - de la fatiga 561
- D'Alembert, principio de 506, 514, 520
- Deformación 7
  - de contacto 589
  - , sus componentes 9
  - elástica 7
  - de un elemento 307
  - espacial 166
  - durante el estado tensional especial 166
  - excesiva 437
  - permanente 7, 147
  - plástica 7, 437
  - , sus tipos 7
  - total 144
  - transversal 144
  - — absoluta 144
  - — unitaria 145
  - unitaria 7, 144
  - — angular 9
  - — lineal 7,9
- Dependencias diferenciales durante la flexión de barras curvas planas 115
  - — — — de las vigas 110
- Desfasaje 510
- Deslizamiento 7, 196
  - absoluto 7, 199
  - puro 197
  - , condiciones de resistencia 199
  - relativo 8, 197
- Desplazamiento, su determinación durante la flexión de barras curvas 389
  - , su determinación en los sistemas hiperestáticos 335
  - durante la flexión 8
  - — —, su determinación 242, 244
  - generalizado 300
  - , métodos de su determinación 300
  - originado por el cambio de temperatura 311
  - unitario 301
- Diagrama de compresión 149
  - de la fatiga 560
  - de Haigh 563
  - de Prandtl 437
  - primario de tensión 148
  - de Smith 562
  - de las tensiones 148
  - — — — límites 562
  - — — — verdaderas 149
  - de torsión 207
  - de tracción 146
- Diagramas de los esfuerzos interiores 102
  - — — — para las barras curvas 113
  - — — — para las barras espaciales 116
  - — — — para los pórticos 112
  - — — —, reglas de construcción 104
  - de las fuerzas cortantes y los momentos flectores para las vigas 107, 120
- Disco giratorio 416
- Dispositivo de apoyo de las vigas 106
- Drucker-Prager, criterio de 178
- Ecuación canónica del método de fuerzas 326
  - diferencial de las oscilaciones de torsión 531

- Ecuación diferencial de las oscilaciones de sistemas con un grado de libertad, forzadas 513, 516
- — — — —, libres 509, 511, 514
- — — — — con varios grados de libertad 520, 524, 525
- — — — — longitudinales 528
- — — — — transversales 531
- — del eje flexionado (de la línea elástica) 237, 238
- — — — — durante la flexión longitudinal y transversal simultánea 457
- — — — — de la viga sobre base elástica 261
- — — — — de la viga en voladizo de altura variable 257
- — — — — para las vigas hiperestáticas 341
- — — — — de sección constante 268
- — de la estática 183
- — de equilibrio 107
- — física 225
- — de frecuencia de las oscilaciones longitudinales y torsionales 529, 531, 549
- — — — — transversales 534, 552
- — — — — para el sistema con varios grados de libertad 524
- — — — — de Lagrange 521
- — — — — de Laplace 427
- — — — — de simultaneidad de las deformaciones 184
- — — — — de los tres momentos 329
- — — — — universal de la línea elástica 246
- Eje flexionado de la viga 237
- de la viga 106
- Ejes de inercia centrifugos 13
- — —, determinación de su dirección 15
- — — principales 13
- Elasticidad, límite de 147
- Energía potencial de la deformación (véase también trabajo de fuerzas interiores) 166
- — — — — en caso general 314
- — — — — durante el deslizamiento 199
- — — — — durante el impacto 579
- — — — — durante la tracción 167
- — — unitaria 167
- — — — — durante el deslizamiento 199
- — — — — durante la tracción 167
- — — — — de variación de la forma 167, 170
- — — — — del volumen 167
- Ensayo a compresión 149
- a la fatiga 556, 560
- a tracción 145
- Entrenamiento, su influencia sobre el límite de resistencia a la fatiga 568
- Esbeltez de la barra 453
- Esfuerzos, sus diagramas 102
- en la sección (véase fuerza interior) 101
- en las secciones de las vigas 107
- en los sistemas de barras más simples (tabla 13) 186
- Estabilidad 5
- de barras comprimidas 445
- de equilibrio elástico 445
- Estado deformacional 9, 156
- límite de la estructura 437
- tensional 156
- — biaxial 157, 158
- —, sus direcciones principales 157
- — espacial 157
- — homogéneo 157
- Estado tensional límite (peligroso) 168
- — lineal 157
- — plano 158
- — triaxial 157, 162
- — uniaxial 157
- tensional-deformacional límite 168
- — — — —, sus criterios 176
- Euler, fórmula de 446
- Factor de escala 565
- Factores interiores de fuerza 102
- Fase de las oscilaciones 509
- Fatiga (véase también resistencia a la fatiga) 558
- , límite de 558
- , postulados de la teoría 559
- Flecha de las vigas 8, 237
- — — — —, fórmulas para vigas hiperestáticas 341, 356
- — — — —, fórmulas para vigas de igual resistencia a la flexión 255
- — — — —, fórmulas para vigas de sección transversal constante 268
- Fluencia, límite de 147
- Flexión 8, 224
- compuesta 285
- desviada 285
- longitudinal 446
- longitudinal y transversal simultánea 457
- no plana 285
- plana 105
- pura 224
- con torsión 295
- con tracción 289
- de vigas, cuyo material no sigue la ley de Hooke 265
- — sobre base elástica 261
- — de viguetas curvas 384
- Formas de las oscilaciones longitudinales 529, 549
- — — — — del sistema con varios grados de libertad 523
- — — — — de torsión 549
- — — — — transversales 534, 552
- Fórmula de Bredt 215
- de Euler 446
- de Lamé 407
- de Maxwell 310
- de Maviér 226
- de Reyleigh 540, 541
- de Vereschaguin 313
- de Zhuravski 228
- Frecuencia de las oscilaciones 507
- — — — — angular 510
- — — — —, métodos aproximados de su determinación 536
- — — — — por segundo 510
- Frecuencias de las oscilaciones de sistemas con uno y dos grados de libertad 542
- — — — — transversales de las barras cargadas con fuerzas longitudinales 557
- Fuerza concentrada 101
- cortante 103
- crítica 447
- exterior 101
- generalizada 300
- de inercia 254, 509, 513
- interior 101
- longitudinal 103
- de masa 102
- perturbadora 508
- de resistencia proporcional a la velocidad 514

- Fuerza superficial 101
  - volumétrica 102
- Funciones de Krilov para el cálculo de vigas sobre base elástica 678
  - — — S, T, U, V 666
- Galileo—Leibnitz, criterio de 176
- Grado de hiperestaticidad del sistema 323
- Hilo flexible 187
- Hiperestaticidad 323
- Hipótesis de Bernoulli 143
  - sobre la continuidad del material 9
  - sobre la dependencia lineal entre las deformaciones y las cargas 9
  - sobre la elasticidad perfecta 9
  - sobre la homogeneidad e isotropía 9
  - sobre la pequenez de las deformaciones 9
  - de las secciones planas 9, 143, 181, 208, 224, 385
- Hooke, ley de 6, 144
  - — — generalizada 164
  - — — para el deslizamiento 198, 199
- Huber—Mises—Henke, criterio de 177
- Incógnitas superfluas 323
- Integral de Mohr 310, 312, 318
- Intensidad de la carga 101
  - de las tensiones 164
- Krilov, funciones de 263, 533, 666, 678
- Kuzmenko V. A., criterio de 177
- Lagrange, ecuación de 521
  - , teorema de 315, 316
- Lamé, fórmula de 407
  - , problema de 417
- Laplace, ecuación de 427, 428
- Ley de Hooke 6, 144
  - — — generalizada 164
  - — — para el deslizamiento 198, 199
  - de reciprocidad de las tensiones tangenciales 159
- Límite de elasticidad 147
  - — — convencional 147
  - de fluencia 147
  - de proporcionalidad 147
  - de resistencia 147
  - — — a la fatiga 558
  - — — —, métodos de su determinación 560
- Línea de cadena 190
  - elástica 237
  - —, su ecuación 240, 268, 500
  - —, su ecuación diferencial 238
  - neutra 226
- Longitud de la costura soldada 205
  - crítica de la barra 182
  - del hilo 194
  - límite de la barra 182
  - reducida 450
- Mariotte-Grashof, criterio de 176
- Masa del elemento golpeado, su consideración 580, 586
  - reducida 539
- Material anisótropo 9
  - armado 9
  - , sus características mecánicas en la tracción y compresión 143
  - , su ensayo 145
  - frágil 168, 437
  - isótropo 9
  - plástico 168, 437
  - sus propiedades físico-mecánicas 614
- Maxwell, fórmula de 310
  - , teorema de 309
- Menabrea, teorema de 317
- Método de Búbnov-Galerkin 541
  - de determinación de las características de amortiguación 516
  - de desplazamientos 324
  - de Fourier 528
  - de fuerzas 324
  - — —, ecuaciones canónicas 326
  - gráfico-analítico de determinación de los desplazamientos en las secciones de la viga 242
  - de Mohr 243
  - — — de determinación de los desplazamientos 309
  - de multiplicación de los diagramas 310.
  - de parámetros iniciales 244
  - de Reyleigh 539
  - de Ritz 540
  - de secciones 102
  - de Vereschaguin 312
- Módulo de deformación espacial 166
  - — — durante el deslizamiento 154 198
  - — — durante la tracción 143, 149, 154, 614
  - de elasticidad de segundo género 198
  - de la sección 24, 26, 226
  - — — — axial 21
  - — — — polar 21
  - de Young 143
- Momento estático de área 10
  - flector 103
  - — en el anillo 376
  - — en la barra voladiza circular 141, 142
  - — en la pórtico cerrado 372
  - — — — en I' 359
  - — — — en II 366
  - — en vigas hiperestáticas de un solo tramo 341, 356
  - — — — isostáticas 120
  - de inercia axial 11
  - — — centrífugo 13
  - — — durante el giro de los ejes de coordenadas 15
  - — — — ecuatorial 11
  - — — de figuras planas 14, 26
  - — — polar 12
  - — — respecto a los ejes paralelos 14
  - — — de secciones compuestas 13, 26
  - resistente plástico en la flexión 443, 444
  - — — en la torsión 441
  - torsional 103
- Momentos de inercia principales 15
- Navier, fórmula de 226
- Núcleo central de la sección 290
  - — — —, su forma y dimensiones 293
- Número crítico de revoluciones 518
  - de oscilaciones por segundo 510

- Oscilaciones amortiguadas 506, 516
  - , clasificación 506
  - elásticas 508
  - forzadas 513, 516
  - libres (propias) 507, 514, 520, 527, 531
  - longitudinales 527
  - de los sistemas con un grado de libertad 507, 509, 513, 514, 516
  - — — con varios grados de libertad 520
  - teniendo en cuenta la resistencia 514
  - torsionales 530
  - transversales 531
  
- Pausas, su influencia sobre el límite de resistencia a la fatiga 568
- Perfil abierto 218
  - cerrado 215
- Período de las oscilaciones 506
  - — —, su determinación 511, 512, 529, 534
- Plano de flexión 288
  - de fuerza 105
- Planos principales 156
- Plasticidad, sus características 147
- Poisson, coeficiente de 145, 154, 614
- Prandtl, diagrama de 437
- Principio de conservación de la energía durante las oscilaciones 535
  - de D' Alembert 509, 511, 520
  - de desplazamientos posibles 306
  - de Saint-Venant 143
  - de suma de la acción de las fuerzas 285
  - de superposición 285
- Problema de determinación de las deformaciones angulares y los desplazamientos lineales de deslizamiento durante el deslizamiento separado de la barra 609, 610
  - — de las fuerzas y los desplazamientos longitudinales durante la tracción—compresión axial de la barra 608, 609
  - — de los momentos torsionales y los ángulos de torsión durante la torsión de la barra 609
  - hiperestático 184
  - de Lamé 417
  
- Radio de giro 18
  - — —, valores para secciones planas 27
- Reacciones de apoyo, cálculo 107
  - — — en las vigas 107
- Reciprocidad de los desplazamientos 308, 328
  - de los trabajos 308
  - de las tensiones tangenciales 159
- Reducción absoluta 7
  - unitaria 7, 148
- Regla de signos para la fuerza cortante 108
  - — — para las fuerzas longitudinales 104
  - — — para el momento flector 108
  - — — para el momento torsional 104
  - — — para las tensiones normales 158
  - — — — tangenciales 158
- Reglas de construcción de los diagramas de los esfuerzos interiores 104
- Resistencia 5
  - , condición 119
  - — al aplastamiento 201
  - — para la bóveda de paredes delgadas 427
  - — en caso general de acción de las fuerzas sobre la viga 299
  - — durante el deslizamiento puro 199
  - — durante la flexión 231
  - — — — de barra curva 389
- Resistencia durante la flexión desviada 288
  - — — — con torsión 297
  - — durante las tensiones de contacto 593
  - — durante la torsión 210, 213
  - — durante la tracción 145, 181
  - — — — excéntrica 291
  - , criterios de 168
  - a la fatiga del material 558
  - provisional 147
  - , teorías de 168
- Resonancia 516
- Resortes cilíndricos 219
  - cónicos 221
  - helicoidales, su cálculo 219
- Resultante de la carga distribuida 101
- Reyleigh, fórmula de 540, 541
  - , método de 539
- Rigidez 5
  - del árbol durante la torsión 209
  - de la barra durante la tracción (compresión) 144
  - a la flexión de la sección transversal 238, 249
  - de la sección transversal de la barra durante la torsión 209
  - — — — — — — — la tracción (compresión) 144
  
- Saint-Venant, principio de 143
- Sección, sus características geométricas 10, 27
  - peligrosa 145
- Sistema básico 324
  - equivalente 324
  - hiperestático 323
  - oscilatorio 511
  - — de dos grados de libertad 520
  - — de un grado de libertad 509
  - — con varios grados de libertad 523
- Sobrecargas, su influencia sobre el límite de resistencia a la fatiga 568
- Superficie, la influencia de su estado sobre el límite de resistencia a la fatiga 567
  
- Temperatura, su influencia sobre el límite de resistencia a la fatiga 568
- Tensado del hilo 186
- Tensión 117, 156
  - admisible 119
  - — durante el deslizamiento 199
  - — — la tracción 152, 154
  - de aplastamiento 201
  - en bóvedas de paredes delgadas 432
  - cíclica 558
  - en el cilindro de paredes gruesas 407, 422
  - circunferencial 426
  - de contacto 589
  - crítica 452
  - dinámica durante el impacto 578
  - — — — torsional 582
  - — — durante la flexión de impacto 583
  - en el disco giratorio 418
  - durante el deslizamiento 196
  - — la flexión compuesta (no plana) 285
  - — — longitudinal y transversal 458
  - — — — con tracción 289
  - — — — con torsión 295
  - — — la tracción 143
  - — — la torsión 209
  - equivalente 169, 176
  - límite para la carga cíclica 562
  - meridional 426
  - en el momento de la rotura 147

Tensión normal 117, 157  
— — durante la flexión 224  
— en los planos inclinados 158  
— principal 156  
— tangencial 117, 156  
— en la flexión 227  
— térmica en el cilindro de paredes gruesas 412  
— total 117, 157  
Teorema de Betti 309  
— de Castigliano 315  
— de Lagrange 315, 316  
— de Maxwell 309  
— de Menabrea 317  
— sobre el mínimo de la energía potencia 317  
— de reciprocidad de los trabajos y los desplazamientos 308  
— del trabajo mínimo 317  
Teoría membranal 425  
— de la plasticidad de Saint-Venant 438  
— de la resistencia 168, 172  
Torsión 8, 207  
— de barras de paredes delgadas de perfil abierto 218  
— — — de sección no circular 212  
— con flexión 295  
— de perfiles cerrados de paredes delgadas 215  
Trabajo de la deformación 148  
— — — — específico 148  
— de las fuerzas exteriores 302  
— — — — interiores 303  
— invertido en la tracción 148  
—, teorema de la reciprocidad 308  
Tracción 7, 181  
— de barras contando con el pesomuerto 181  
— con flexión 289  
—, condición de resistencia 145  
— — de rigidez 145  
—, ensayo de los materiales 145  
— excéntrica 290  
—, módulo de elasticidad 143, 153  
—, tensiones admisibles 145, 152, 155  
—, tensiones y deformaciones 143

Velocidad crítica de rotación del árbol 518  
Vereschaguin, fórmula de 313  
—, procedimiento de 313  
Viga ficticia (recíproca) 243, 244  
Vigas, sus apoyos 105  
—, su cálculo 230, 248, 442  
— continuas 106, 329  
—, su deformabilidad 237  
—, sus desplazamientos 248  
— de dos apoyos 106  
—, esfuerzos y momentos en sus secciones 107, 120  
—, su flexión 108  
— hiperestáticas 106, 329, 341  
— de igual resistencia a la flexión 251, 255  
— isostáticas 106, 120  
— de una luz 106, 120, 341  
—, sus reacciones de apoyo 107, 120, 341  
— de sección variada 248  
— sobre base elástica 261  
— voladizas 106, 137  
Vigueta 5  
— curva 384, 388  
—, su cálculo a la resistencia 389  
— —, determinación de los desplazamientos 389  
— de curvatura grande 384, 385, 389  
— — — pequeña 384, 389

Wöhler, curvas de 561

Yagn-Buginski, criterio de resistencia 173, 177

Zhuravski, fórmula de 228

## LISTA DE LAS TABLAS

Tabla 1.	Características geométricas de secciones planas . . . . .	26
Tabla 2.	Acero laminado angular de alas iguales (GOST 8509—72) . . . . .	88
Tabla 3.	Acero laminado angular de alas desiguales (GOST 8510—72) . . . . .	92
Tabla 4.	Perfiles canal con inclinación de las aristas interiores de las alas (GOST 8240—72) . . . . .	95
Tabla 5.	Perfiles canal con aristas paralelas de las alas (GOST 8240—72) . . . . .	97
Tabla 6.	Vigas doble T (GOST 8239—72) . . . . .	99
Tabla 7.	Reacciones de apoyo, fuerzas cortantes y momentos flectores en las vigas isostáticas. . . . .	120
Tabla 8.	Momento flector $M$ , fuerza normal $N$ y cortante $Q$ en la barra circular voladiza cargada en su plano. . . . .	141
Tabla 9.	Momento flector $M_{f1}$ y torsional $M_t$ en la barra voladiza circular cargada perpendicularmente a su plano . . . . .	142
Tabla 10.	Módulos de elasticidad y coeficientes de Poisson. . . . .	154
Tabla 11.	Valores aproximados de las tensiones admisibles principales de tracción y compresión . . . . .	155
Tabla 12.	Criterios del estado límite de los materiales isótropos (para carga crítica) . . . . .	176
Tabla 13.	Esfuerzos en los sistemas de barras más simples . . . . .	186
Tabla 14.	Tensiones admisibles para acoplamientos soldados . . . . .	204
Tabla 15.	Tensiones admisibles para la madera . . . . .	206
Tabla 16.	Fórmulas de cálculo aproximadas para la determinación de la tensión tangencial máxima $\tau_{m\acute{a}x}$ por medio del ángulo de torsión unitario $\theta$ de las barras de sección no circular. . . . .	216
Tabla 17.	Esquemas de vigas reales y ficticias que corresponden a ellas . . . . .	244
Tabla 18.	Vigas de igual resistencia a la flexión . . . . .	255
Tabla 19.	Ecuaciones de la línea elástica y del ángulo de giro de las secciones transversales de la viga en voladizo de altura variada . . . . .	256
Tabla 20.	Ecuaciones de la línea elástica, flechas máximas y ángulos de giro de las secciones de extremo y de apoyo en las vigas isostáticas de sección transversal constante . . . . .	268
Tabla 21.	Forma y dimensiones del núcleo central de la sección . . . . .	293
Tabla 22.	Expresiones de la integral de Mohr $\int \bar{M}_i M_p dz$ para diferentes combinaciones de los diagramas de $\bar{M}_i$ y $M_p$ . . . . .	318
Tabla 23.	Áreas y coordenadas de los centros de gravedad de algunas figuras elementales . . . . .	321
Tabla 24.	Reacciones de apoyo, fuerzas transversales, momentos flectores y desplazamientos en vigas hiperestáticas de un solo tramo . . . . .	341

T a b l a 25.	Fórmulas de cálculo que toman en consideración los desplazamientos de los apoyos y cambios de temperatura en vigas hiperestáticas ( $EJ$ es constante) . . . . .	356
T a b l a 26.	Momentos flectores en el pórtico en $\Gamma$ . . . . .	359
T a b l a 27.	Momentos flectores en el pórtico en $\Pi$ . . . . .	366
T a b l a 28.	Momentos flectores en el pórtico cerrado . . . . .	372
T a b l a 29.	Esfuerzos y desplazamientos del anillo cargado en su plano .	376
T a b l a 30.	Radio de curvatura de la capa neutra $r_n$ para las secciones de diferente forma . . . . .	391
T a b l a 31.	Valor del coeficiente $k$ en la fórmula $e = kR$ . . . . .	394
T a b l a 32.	Desplazamientos del extremo libre de la barra circular en voladizo de sección constante al solicitarla en su plano . . .	399
T a b l a 33.	Desplazamientos del extremo libre de la barra circular en voladizo de sección constante al solicitarla en el plano perpendicular . . . . .	401
T a b l a 34.	Valores de las integrales definidas que se encuentran frecuentemente al determinar los desplazamientos en barras curvas .	403
T a b l a 35.	Fórmulas de cálculo para cilindros de paredes gruesas . . .	422
T a b l a 36.	Fórmulas de cálculo para determinar las tensiones y los desplazamientos en bóvedas de paredes delgadas . . . .	432
T a b l a 37.	Momentos resistentes plásticos para algunas secciones de vigas . . . . .	444
T a b l a 38.	Coeficientes $\nu$ y $\eta$ para determinar la carga crítica de barras comprimidas centralmente mediante la fórmula $P_{\text{crít}} =$ $= \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$ . . . . .	459
T a b l a 39.	Cargas críticas para la banda y algunas vigas de doble T. .	490
T a b l a 40.	Coeficientes de la tensión admisible convencional a la compresión $\varphi$ . . . . .	498
T a b l a 41.	Ecuaciones del momento flector $M(z)$ y la línea elástica $w(z)$ para algunos casos de la flexión longitudinal y transversal simultánea de vigas de sección transversal constante. . . .	500
T a b l a 42.	Frecuencias propias de las oscilaciones de sistemas con uno y dos grados de libertad . . . . .	542
T a b l a 43.	Ecuaciones de frecuencia y formas propias de las oscilaciones longitudinales y torsionales de barras de sección constante . . . . .	549
T a b l a 44.	Ecuaciones de frecuencia y formas propias de las oscilaciones transversales de barras de sección constante . . . .	552
T a b l a 45.	Raíces de las ecuaciones de frecuencia de las oscilaciones transversales de barras de sección constante sobre apoyos elásticos . . . . .	553
T a b l a 46.	Raíces de las ecuaciones de frecuencia de las oscilaciones transversales de barras de sección constante con masas concentradas $m$ . . . . .	555

Tabla 47.	Valores de algunas integrales que se utilizan en los cálculos de las oscilaciones transversales de las barras ( $\varphi_i$ es la $i$ -ésima forma propia de las oscilaciones) . . . . .	556
Tabla 48.	Frecuencias propias de las oscilaciones transversales de barras de sección constante cargadas con fuerzas longitudinales. . . . .	557
Tabla 49.	Características de los ciclos de sollicitación alternativa . .	575
Tabla 50.	Valores del coeficiente $\alpha$ que toma en consideración la masa del elemento golpeado en la fórmula para el coeficiente dinámico. . . . .	586
Tabla 51.	Fórmulas de cálculo para determinar los parámetros de contacto de dos cuerpos . . . . .	594
Tabla 52.	Valores numéricos de los coeficientes $n_a, n_b, n_p, n_{\Delta}$ . . .	606
Tabla 53.	Presiones admisibles en la zona de contacto para el contacto inicial por la línea y la sollicitación estática . . . . .	607

# INDICE

<b>Capítulo 1. Introducción . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Resistencia de materiales como ciencia. Objetos estudiados . . .	5
§ 2. Tipos de las deformaciones. Noción sobre el estado deformado del material . . . . .	7
§ 3. Hipótesis principales . . . . .	9
<b>Capítulo 2. Características geométricas de las secciones planas . . .</b>	<b>10</b>
§ 4. Momento estático de área. Centro de gravedad de área . . .	10
§ 5. Momentos de inercia de figuras planas . . . . .	11
§ 6. Momentos de inercia de secciones compuestas . . . . .	13
§ 7. Momentos de inercia respecto a los ejes paralelos. . . . .	14
§ 8. Dependencia entre los momentos de inercia durante el giro de los ejes de coordenadas . . . . .	15
§ 9. Determinación de la dirección de los ejes de inercia principales. Momentos de inercia principales . . . . .	15
§ 10. Representación gráfica de los momentos de inercia. Noción sobre el radio y elipse de inercia . . . . .	18
§ 11. Módulos de la sección . . . . .	21
§ 12. Orden del cálculo . . . . .	22
<b>Capítulo 3. Fuerzas exteriores e interiores. Método de secciones. Diagramas de fuerzas interiores. Tensiones en la sección . . .</b>	<b>101</b>
§ 13. Clasificación de las fuerzas exteriores . . . . .	101
§ 14. Fuerzas interiores. Método de secciones. Diagramas de las fuerzas interiores . . . . .	102
§ 15. Vigas y sus apoyos . . . . .	105
§ 16. Cálculo de las reacciones . . . . .	107
§ 17. Esfuerzos y momentos en las secciones de la viga. Construcción de los diagramas de $Q$ y $M$ . . . . .	107
§ 18. Dependencias diferenciales durante la flexión de las vigas. Algunas particularidades de los diagramas de $Q$ y $M$ . . . . .	110
§ 19. Construcción de los diagramas para los pórticos estáticamente determinados . . . . .	112
§ 20. Construcción de los diagramas para las barras curvas. . . . .	113
§ 21. Dependencias diferenciales durante la flexión de barras curvas planas . . . . .	115
§ 22. Construcción de los diagramas de fuerzas interiores para las barras espaciales . . . . .	116
§ 23. Tensiones en la sección . . . . .	117
§ 24. Condiciones de resistencia y rigidez . . . . .	119

<b>Capítulo 4. Características mecánicas del material en la tracción y compresión. Concentración de tensiones. Tensiones admisibles.</b>	<b>143</b>
§ 25. Tensiones y deformaciones durante tracción y compresión. . . . .	143
§ 26. Ensayo de los materiales a tracción y compresión. . . . .	145
§ 27. Concentración de las tensiones . . . . .	150
§ 28. Tensiones admisibles . . . . .	152
<b>Capítulo 5. Estado tensional y deformacional . . . . .</b>	<b>156</b>
§ 29. Tensiones en un punto. Planos principales y tensiones principales . . . . .	156
§ 30. Estado tensional lineal . . . . .	157
§ 31. Estado tensional plano . . . . .	158
§ 32. Problema directo durante el estado tensional plano. Círculo de las tensiones . . . . .	160
§ 33. Problema inverso durante el estado tensional plano. . . . .	161
§ 34. Estado tensional espacial . . . . .	162
§ 35. Deformaciones durante el estado tensional espacial. Ley de Hooke generalizada . . . . .	164
§ 36. Energía potencial de la deformación . . . . .	166
<b>Capítulo 6. Criterios de resistencia . . . . .</b>	<b>168</b>
§ 37. Teorías principales de resistencia . . . . .	168
§ 38. Noción sobre algunas nuevas teorías de resistencia. . . . .	172
<b>Capítulo 7. Tracción y compresión . . . . .</b>	<b>181</b>
§ 39. Cálculo de las barras a tracción (compresión) contando con el peso muerto . . . . .	181
§ 40. Barra de igual resistencia a la tracción (compresión). Barra escalonada . . . . .	182
§ 41. Estructuras estáticamente indeterminadas . . . . .	183
§ 42. Cálculo de hilos flexibles . . . . .	187
<b>Capítulo 8. Deslizamiento. . . . .</b>	<b>196</b>
§ 43. Deslizamiento. Cálculo al cizallamiento . . . . .	196
§ 44. Deslizamiento puro . . . . .	197
§ 45. Algunos ejemplos del cálculo al cizallamiento. . . . .	200
<b>Capítulo 9. Torsión . . . . .</b>	<b>207</b>
§ 46. Tensiones y deformaciones durante la torsión . . . . .	207
§ 47. Torsión de barras de sección no circular. . . . .	212
§ 48. Cálculo de resortes helicoidales . . . . .	219
§ 49. Concentración de las tensiones durante la torsión. . . . .	221
<b>Capítulo 10. Flexión . . . . .</b>	<b>224</b>
§ 50. Tensiones normales durante la flexión plana . . . . .	224
§ 51. Tensiones tangenciales en la flexión . . . . .	227
§ 52. Cálculo a la resistencia durante la flexión . . . . .	230
§ 53. Concentración de las tensiones en la flexión . . . . .	233
§ 54. Ecuación diferencial del eje flexionado de la viga (línea elástica) . . . . .	237
§ 55. Determinación de los desplazamientos en las vigas por el método de parámetros iniciales . . . . .	244
§ 56. Cálculo de vigas de sección variada a la resistencia y la rigidez. . . . .	248
§ 57. Cálculo a la flexión considerando las fuerzas de inercia. . . . .	254

§ 58. Tensiones tangenciales durante la flexión de vigas de perfil de paredes delgadas. Centro de flexión . . . . .	258
§ 59. Acerca del cálculo de vigas sobre base elástica. . . . .	261
§ 60. Flexión de vigas, cuyo material no sigue la ley de Hooke. . . . .	265
<b>Capítulo 11. Resistencia compuesta . . . . .</b>	<b>285</b>
§ 61. Flexión compuesta y desviada . . . . .	285
§ 62. Flexión con tracción . . . . .	289
§ 63. Flexión con torsión . . . . .	295
<b>Capítulo 12. Teoremas generales sobre sistemas elásticos. Métodos generales de determinación de los desplazamientos. . . . .</b>	<b>300</b>
§ 64. Fuerzas y desplazamientos generalizados . . . . .	300
§ 65. Trabajo de las fuerzas exteriores . . . . .	302
§ 66. Trabajo de las fuerzas interiores . . . . .	303
§ 67. Aplicación del principio de desplazamientos posibles a los sistemas elásticos . . . . .	306
§ 68. Teoremas de reciprocidad de los trabajos y los desplazamientos. . . . .	308
§ 69. Fórmulas generales para determinar los desplazamientos. Procedimiento de Mohr . . . . .	309
§ 70. Desplazamientos originados por el cambio de temperatura. . . . .	311
§ 71. Cálculo de la integral de Mohr por el procedimiento de Vereschaguin . . . . .	312
§ 72. Energía potencial de la deformación . . . . .	314
§ 73. Teorema de Castigliano. Teorema de Lagrange . . . . .	315
§ 74. Teorema sobre el mínimo de la energía potencial. . . . .	316
<b>Capítulo 13. Sistemas hiperestáticos . . . . .</b>	<b>323</b>
§ 75. Etapas principales del cálculo de sistemas hiperestáticos. . . . .	323
§ 76. Ecuaciones canónicas del método de fuerzas . . . . .	326
§ 77. Vigas continuas. Ecuación de los tres momentos . . . . .	329
§ 78. Cálculo de barras curvilíneas hiperestáticas . . . . .	332
§ 79. Determinación de los desplazamientos en los sistemas hiperestáticos . . . . .	335
§ 80. Sobre el cálculo de sistemas de pórtico espaciales . . . . .	338
<b>Capítulo 14. Cálculo de viguetas planas curvas . . . . .</b>	<b>384</b>
§ 81. Determinación de las tensiones en las viguetas de curvatura grande . . . . .	384
§ 82. Cálculo a la resistencia . . . . .	389
§ 83. Determinación de los desplazamientos . . . . .	389
<b>Capítulo 15. Cálculo de cilindros de paredes gruesas y discos giratorios . . . . .</b>	<b>405</b>
§ 84. Cilindro de paredes gruesas sujeto a presión interior y exterior. . . . .	405
§ 85. Cálculo de cilindros compuestos . . . . .	410
§ 86. Tensiones térmicas en los cilindros de paredes gruesas . . . . .	412
§ 87. Cálculo de discos giratorios . . . . .	416
<b>Capítulo 16. Cálculo de bóvedas de paredes delgadas . . . . .</b>	<b>425</b>
§ 88. Cálculo de bóvedas de paredes delgadas por la teoría membranaral . . . . .	425
§ 89. Anillos de distancia en las bóvedas . . . . .	430

<b>Capítulo 17. Cálculo de las estructuras por los estados límites. . .</b>	<b>437</b>
§ 90. Nociones fundamentales sobre el estado límite . . . . .	437
§ 91. Cálculos durante tracción y compresión . . . . .	438
§ 92. Cálculo durante la torsión . . . . .	440
§ 93. Cálculo durante la flexión . . . . .	442
<b>Capítulo 18. Estabilidad de barras comprimidas . . . . .</b>	<b>445</b>
§ 94. Equilibrio elástico estable e inestable . . . . .	445
§ 95. Fórmula de Euler para determinar la carga crítica de la barra comprimida . . . . .	446
§ 96. Influencia de las condiciones de sujeción de los extremos de la barra sobre la magnitud de la fuerza crítica. . . . .	449
§ 97. Sobre la pérdida de estabilidad cuando las tensiones rebasan el límite de proporcionalidad del material . . . . .	452
§ 98. Cálculo de las barras comprimidas por pandeo mediante los coeficientes de disminución de la tensión admisible básica. . . . .	454
§ 99. Elección del material y de la forma racional de las secciones transversales de barras comprimidas . . . . .	456
§ 100. Flexión longitudinal y transversal simultánea . . . . .	457
<b>Capítulo 19. Oscilaciones elásticas . . . . .</b>	<b>506</b>
§ 101. Clasificación de las oscilaciones mecánicas . . . . .	506
§ 102. Oscilaciones libres de sistemas de un grado de libertad. . . . .	509
§ 103. Oscilaciones forzadas de los sistemas de un grado de libertad cuando la excitación es armónica . . . . .	513
§ 104. Oscilaciones libres del sistema de un grado de libertad teniendo en cuenta la resistencia proporcional a la velocidad . . . . .	514
§ 105. Oscilaciones forzadas de los sistemas de un grado de libertad teniendo en cuenta la resistencia proporcional a la velocidad. . . . .	516
§ 106. Velocidad crítica de rotación del árbol . . . . .	518
§ 107. Oscilaciones libres de los sistemas elásticos con varios grados de libertad . . . . .	520
§ 108. Oscilaciones longitudinales y de torsión de las barras. . . . .	527
§ 109. Oscilaciones transversales de barras prismáticas. . . . .	531
§ 110. Principio de conservación de la energía durante las oscilaciones . . . . .	535
§ 111. Algunos métodos aproximativos de determinación de las frecuencias propias de las oscilaciones de sistemas elásticos . . . . .	536
<b>Capítulo 20. Resistencia de los materiales a la acción de tensiones cíclicas . . . . .</b>	<b>558</b>
§ 112. Fenómeno de fatiga de los materiales . . . . .	558
§ 113. Métodos de determinación del límite de resistencia a la fatiga. Diagramas de la fatiga . . . . .	560
§ 114. Influencia de los factores de construcción y tecnológicos sobre el límite de resistencia a la fatiga del material. . . . .	564
§ 115. Cálculo a la resistencia durante las cargas repetidas cíclicamente . . . . .	568
<b>Capítulo 21. Cálculo por carga de impacto. . . . .</b>	<b>578</b>
§ 116. Cálculo por impacto durante la acción axial de la carga. . . . .	578
§ 117. Tensión durante el impacto torsional . . . . .	582
§ 118. Cálculo por impacto durante la flexión . . . . .	583

Capítulo 22. Tensiones de contacto . . . . .	589
§ 119. Conceptos y fórmulas principales para determinar las tensiones y deformaciones de contacto . . . . .	589
§ 120. Comprobación de la resistencia durante las tensiones de contacto	593
Suplemento. Nueve analogías nuevas en la resistencia de materiales . . .	608
Apéndices . . . . .	614
1. Propiedades físico-mecánicas de los materiales. . . . .	614
2. Coeficientes de concentración y de sensibilidad a la concentra- ción de las tensiones . . . . .	642
3. Funciones de Krilov $S, T, U, V$ . . . . .	666
4. Funciones de Krilov para el cálculo de vigas de sección constante sobre base elástica . . . . .	678
Índice de materias . . . . .	681
Lista de las tablas . . . . .	686

## **A NUESTROS LECTORES:**

**„Mir” edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.**

**Dirijan sus opiniones a la Editorial „Mir”, 1 Rizhski per., 2 129820, Moscú, GSP, URSS.**

*Feodósiev V.*

**Resistencia de materiales**

*(3ª edición)*

La obra comprende un curso completo de resistencia de materiales, ciencia que estudia la solidez y la rigidez de las construcciones de la ingeniería moderna.

Por lo tanto, se estudian las siguientes secciones: tensión, sistemas estáticamente indeterminados (método de fuerzas), teoría de esfuerzos, teoría de la solidez, paredes de tubos gruesos, discos, láminas, revestimientos, varillas delgadas, solidez para esfuerzos variables, cálculo para deformaciones plásticas, estabilidad, oscilaciones de sistemas elásticos y métodos de prueba. El material se expone con un gran rigor científico y elevada maestría pedagógica. Para facilitar la asimilación de la teoría se incluyen ejemplos de problemas con su solución, lo cual permite aclarar el aspecto físico del fenómeno.

Este libro utilizan como texto los estudiantes de las escuelas técnicas superiores, es un manual práctico para los ingenieros que se dedican a los cálculos de resistencia.

