



VARITAS TRIMOV: UN ACERCAMIENTO A LOS POLIEDROS

PRESENTADO POR:

**CINDY LORENA GARZÓN AGUILAR
JASBLEIDY ROCIO VIVAS SARMIENTO**

**TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN
DIRECTORA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C. 2017**

VARITAS TRIMOV: UN ACERCAMIENTO A LOS POLIEDROS

CINDY LORENA GARZÓN AGUILAR

C.C. 1015440789 – COD. 2012140075

JASBLEIDY ROCIO VIVAS SARMIENTO

C.C. 1010213326 – COD. 2012140078

TRABAJO DE GRADO

PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE LICENCIADAS EN MATEMÁTICAS

ASOCIADO A UN GRUPO DE INVESTIGACIÓN O ESTUDIO

GRUPO APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$

DIRECTORA: TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN

MAGISTER EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2017

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB		Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012		Página II de 94

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	<i>Varitas TRIMOV: Un acercamiento a los Poliedros</i>
Autor(es)	Garzón Aguilar, Cindy Lorena; Vivas Sarmiento, Jasbleidy Rocio
Director	Plazas Merchán, Tania Julieth
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Material didáctico, Poliedros, Geometría Tridimensional, Exploración, Conjeturación, Visualización, Conceptualización

2. Descripción
<p>Este Trabajo de Grado es una propuesta de diseño de un material didáctico, de bajo costo, llamado <i>Varitas TRIMOV</i> que permite estudiar la geometría tridimensional en la escuela, específicamente los poliedros (para este caso Prismas). También se diseñan algunas tareas que buscan promover, en el aula, procesos de visualización, conceptualización y conjeturación, utilizando el material <i>Varitas TRIMOV</i>.</p>

3. Fuentes
<p>Durante el desarrollo del documento de Trabajo de Grado se utilizaron 34 referencias bibliográficas:</p> <p>Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, M. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. <i>Números</i>, 85, 75-90.</p> <p>Angarita, Y. y Palacios, B. (2015). <i>Catálogo de materiales y recursos didácticos. (Trabajo de grado)</i>. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.</p> <p>Arbulú, L. (2015). <i>Poliedros Regulares Teoría y Práctica</i>. Lima, Perú: Lumbreras Editores.</p>

- Bachenheimer, H. (23 de abril de 2007). *El color y los métodos de aprendizaje*. Obtenido de Banco de Objeto. Recursos digitales de apoyo a los procesos: <http://drupal.puj.edu.co/?q=node/488>
- Bolivar, C. y Sánchez, B. (2004). *Un Acercamiento a la geometría dinámica sin computador. (Trabajo de grado)*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿Puede tener un Papel protagónico? *Educación Matemática*, 17, 53-76.
- Camargo, L., Perry, P., Samper, C. y Molina, Ó. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias*, 99-116.
- Clemens, S., O'Daffer, P. y Cooney, T. (1984). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Massachusetts, E.U.A.: Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- Douek, N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 89-110.
- Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from of visual perception. *Educational Study of Mathematics*, 163-183.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2002). Análisis del Diseño de Actividades para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls, *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (págs. 341-356). Alicante, España: Universidad de Alicante.
- Gonzato, M., Godino, J. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico matemáticos sobre visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 5-37.
- Guerrero, A. (2002). *Notas de Clase- Geometría en el Plano y en el Espacio*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales. 1992 (pág. www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf). España: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Manrique, A. y Gallego, A. (2013). El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos. *Revista colombiana de Ciencias Sociales*, 4(1), 101-108.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

- Moise, E. y Downs, F. (1964). *Geometría Moderna*. Massachusett, EE.UU: Addison-Wesly Iberoamericana. S.A.
- Moreno, I. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Moreno, V. (2005). *Psicología del color y la forma*. Queretaro: Universidad de Londres.
- Muñoz, C. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas. (Trabajo de grado)*. Logroño, España: Universidad de la Rioja.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en el aula de Geometría de nivel Universidad. En C. Samper, Ó. Molina, P. Perry, y L. Carmargo, *Geometría Plana Un espacio de aprendizaje* (págs. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Robles, V. (2016). *Cuadriláteros Teoría y práctica*. Lima, Perú: Lumbreras Editores.
- Samper, C. y Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática*, 29(1), 36-60.
- Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2013). *Elementos de Geometría*. Bogotá-Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Molina, Ó., Perry, P. y Camargo, L. (2013). *Geometria Plana Un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *In Advanced Mathematical thinking*, 65-81.
- Vittone, F., Gianatti, J. y Alegre, M. (2016). *Medida y Congruencia de Segmentos y Ángulos. Geometría I*. Rosario, Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional de Rosario.
- Wentworth, J. y Smith, D. (1972). *Geometría Plana y del Espacio*. México D.F.: Editorial Porrúa S.A

4. Contenidos

Este documento está organizado así:

Capítulo 1. Justificación y objetivos. Da cuenta del porqué el diseño de un material didáctico de bajo costo para el estudio de la geometría tridimensional en la escuela, así como los objetivos a cumplir con esta propuesta.

Capítulo 2. Marco teórico. Consta del marco didáctico y el marco matemático. El marco didáctico describe los procesos de visualización, conceptualización y conjeturación, además, qué se entiende como material didáctico y cuáles son sus ventajas y desventajas. Por otro lado, el marco matemático da a conocer las definiciones, elementos y propiedades de los objetos matemáticos que se trabajaron en las actividades propuestas.

Capítulo 3. Metodología. Describe las fases que se llevaron a cabo para estructurar el trabajo de grado, así como una presentación general de la población con la cual se realizó el piloto de las actividades y el material *Varitas TRIMOV*.

Capítulo 4. Material Varitas TRIMOV. Responde a preguntas como: ¿De dónde viene el material? ¿Cómo se usa? Además, se proponen actividades para trabajar con él. Por otra parte, se analiza el desarrollo de las actividades en el aula, en las cuales se usan las *varitas TRIMOV*.

Capítulo 5. Consideraciones y conclusiones. Brinda sugerencias para mejorar las actividades y trabajar en otras en donde el material *Varitas TRIMOV* puede ser de gran ayuda. A su vez se describen los aprendizajes que se obtuvieron al trabajar en cada una de las fases que componen el Trabajo de Grado y los alcances de los objetivos propuestos.

Bibliografía. Se encuentran las referencias de los documentos utilizados, para el desarrollo del presente trabajo.

Anexos. Finalmente, en este apartado están las actividades que fueron presentadas a los estudiantes y demás recursos que fueron usados. También, la modificación de dichas actividades, esto como resultado del análisis de la prueba piloto.

5. Metodología

En este Trabajo de Grado se tuvo en cuenta la propuesta de Análisis Didáctico de Gómez (2002). A continuación, se muestra cómo se estructuró el trabajo respecto a las fases que propone este autor:

- Análisis Cognitivo: Marco didáctico, dificultades y errores.
- Análisis de Contenido: Marco matemático.
- Análisis de Instrucción: Descripción del material didáctico y diseño de actividades.
- Análisis de Actuación: Análisis de las actividades.

Además, se hace una descripción de la población a la que se le planteó las actividades y el material *Varitas TRIMOV*.

6. Conclusiones

En el trabajo de grado se destaca de forma general las siguientes conclusiones:

- Las actividades se diseñaron con el fin de promover los procesos de conceptualización y conjeturación, el primer proceso se promueve a partir de la construcción de una figura tridimensional (concepto imagen) y la búsqueda de características necesarias que se encapsularon para formar una definición. Por otro lado, se buscó llegar a algunas propiedades del prisma a través de la visualización y la exploración empírica y dinámica, por medio del material, de dicha figura, tomando algunos datos que permitieran determinar una conjetura, relacionada con una propiedad del objeto.
- Durante el desarrollo de la prueba piloto se observó que el material fue llamativo, generó curiosidad y motivación para trabajar con él, sin embargo, al momento de realizar las construcciones algunos estudiantes no utilizaron de manera adecuada el material.
- El material *Varitas TRIMOV* permite trabajar figuras bidimensionales (Polígonos), conceptos básicos de la geometría (punto, segmentos, colinealidad, punto medio, intersección y ángulos) y figuras tridimensionales (Poliedros; prismas y pirámides).
- Como maestras en formación el desarrollo de este trabajo de grado nos permitió reconocer los procesos de conjeturación y conceptualización, a pesar que dichos procesos se trabajaron durante la carrera de Licenciatura en Matemáticas, estos fueron abordados desde

el rol de estudiante y en este trabajo de grado se abordaron desde el rol de docente, esto nos permitió profundizar en ellos identificando la visualización y la exploración que son necesarios para estos procesos.

- ➔ Este trabajo de grado da cabida a otros, ya que, invita a la exploración del material *Varitas TRIMOV*, buscando proponer nuevas actividades con el uso de este o realizando modificaciones al material para trabajar otros objetos de la geometría. Por otro lado, invita al diseño y construcción de nuevos materiales didácticos que permitan trabajar geometría bidimensional y tridimensional de manera distinta.

Elaborado por:	Cindy Lorena Garzón Aguilar y Jasbleidy Rocio Vivas Sarmiento
Revisado por:	Tania Julieth Plazas Merchán

Fecha de elaboración del Resumen:	01	11	2017
--	----	----	------

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN	1
1. JUSTIFICACIÓN	3
1.1. OBJETIVO GENERAL	9
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	9
2. MARCO TEÓRICO	10
2.1. MARCO DIDÁCTICO.....	10
2.1.1. Proceso de Visualización	10
2.1.2. Proceso de Conceptualización.....	11
2.1.3. Proceso de Conjeturación	13
2.1.4. Material didáctico	14
2.2. MARCO MATEMÁTICO	15
2.2.1. Rectas Paralelas	15
2.2.2. Rectas Perpendiculares	16
2.2.3. Rectas concurrentes	16
2.2.4. Congruencia de segmentos y de ángulos.....	16
2.2.5. Polígonos	17
2.2.5.1. Algunos elementos de los Polígonos (lados, vértices y diagonales)	17
2.2.5.2. Clasificación de los polígonos	18
2.2.6. Triángulos.....	20
2.2.7. Cuadriláteros.....	20
2.2.7.1. Clasificación de los Cuadriláteros.....	21
2.2.8. Poliedros	21
2.2.8.1. Algunos elementos de los Poliedros.....	22

2.2.9. Prismas.....	22
2.2.9.1. Clases de Prismas	22
3. METODOLOGÍA	25
3.1. DESCRIPCIÓN GENERAL.....	25
3.2. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN	26
4. MATERIAL VARITAS TRIMOV	27
4.1. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL <i>VARITAS TRIMOV</i>	27
4.1.1. ¿De dónde vienen las <i>Varitas TRIMOV</i> ?	27
4.1.2. Descripción de Varitas de TRIMOV	27
4.1.3. ¿Cómo usar <i>Varitas TRIMOV</i> ?	30
4.2. DISEÑO DE ACTIVIDADES.....	32
4.2.1. Conocimientos previos.....	32
4.2.2. Descripción de las Actividades.....	32
4.2.2.1. Actividades a Gestionar y Análisis Cognitivo	32
4.2.2.1.1. Actividad 1. Polígonos	33
4.2.2.1.2. Actividad 2. Poliedros	36
4.3. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES	40
4.3.1. Actividad 1. Polígonos	40
4.3.2. Actividad 2. Poliedros.....	43
5. CONSIDERACIONES Y CONCLUSIONES.....	60
BIBLIOGRAFÍA	63

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Materiales Didácticos-Piezas Sólidas.....	4
Tabla 2. Materiales Didácticos-Piezas de Tamaño fijo.....	6
Tabla 3. Algunos Elementos de un Polígono.....	18
Tabla 4. Algunos Polígonos según el número de lados.....	20
Tabla 5. Algunos Elementos de un Poliedro.....	22
Tabla 6. Polígonos Regulares e Irregulares.....	35
Tabla 7. Poliedros a construir.....	37
Tabla 8. Poliedros contruidos.....	45
Tabla 9. Tablitas en Movimiento.....	66
Tabla 10. Polígonos y No Polígonos.....	67
Tabla 11. Definiciones.....	71

ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1. Sólidos Compactos	3
Imagen 2. Sólidos Huecos	4
Imagen 3. Zometool.....	5
Imagen 4. Palitos Chinos	5
Imagen 5. Encajes Conectables	6
Imagen 6. Papiroflexia.....	6
Imagen 7. Desencapsular – Encapsular una definición	13
Imagen 8. Rectas Paralelas	16
Imagen 9. Rectas Perpendiculares	16
Imagen 10. Rectas Concurrentes	16
Imagen 11. Segmentos Congruentes	17
Imagen 12. Ángulos Congruentes	17
Imagen 13. Elementos de un Polígono	18
Imagen 14. Polígono Regular	18
Imagen 15. Polígono Irregular.....	19
Imagen 16. Triángulos	19
Imagen 17. Cuadriláteros.....	19
Imagen 18. Pentágonos.....	19
Imagen 19. Hexágonos	19
Imagen 20. Heptágonos	20
Imagen 21. Octágonos	20
Imagen 22. Nonágonos	20
Imagen 23. Decágonos	20
Imagen 24. Cuadrado.....	21
Imagen 25. Rectángulos	21
Imagen 26. Algunos elementos de los Polígonos	22
Imagen 27. Prisma Recto.....	22
Imagen 28. Prisma Oblicuo	23

Imagen 29. Paralelepípedos	23
Imagen 30. Paralelepípedo Rectángulo	24
Imagen 31. Fases del trabajo	26
Imagen 32. Varita Verde Cerrada.....	27
Imagen 33. Varita Verde Extendida	28
Imagen 34. <i>Varitas TRIMOV</i>	28
Imagen 35. Varita Roja Cerrada.....	28
Imagen 36. Varita Roja Extendida	28
Imagen 37. Conexiones	29
Imagen 38. Conexiones de 90°, 60° y 108°	29
Imagen 39. Medidor de Ángulos	30
Imagen 40. Insertar varita en conexión	30
Imagen 41. Expansión y Reducción de Varitas.....	31
Imagen 42. Medir ángulos en las varitas	31
Imagen 43. Medir Ángulos en las varitas 2	31
Imagen 44. Ejemplos de Polígonos	33
Imagen 45. Elementos de un Polígono	34
Imagen 46. Ejemplos Polígonos Regulares	35
Imagen 47. Ejemplos Polígonos Irregulares.....	35
Imagen 48. No Poliedro.....	36
Imagen 49. Poliedro.....	36
Imagen 50. Elementos de un Poliedro	37
Imagen 51. Planos Paralelos.....	38
Imagen 52. Prismas	38
Imagen 53. Polígono con posible diagonal.....	41
Imagen 54. Diagonales realizadas por estudiantes	42
Imagen 55. Poliedro - caras triangulares	44
Imagen 56. Poliedro - caras cuadriláteros irregulares	44
Imagen 57. Poliedro - caras cuadradas	44
Imagen 58. Poliedro - caras cuatro triángulos y un cuadrado	44

Imagen 59. Intento de realizar el Poliedro - caras dos triángulos y demás paralelogramos	45
Imagen 60. Construcciones incorrectas	45
Imagen 61. Construcción incorrecta puesta en común	46
Imagen 62. Construcción correcta	47
Imagen 63. Elementos de un Poliedro	48
Imagen 64. Medidas tablero	50
Imagen 65. Medidas tablero 2	50
Imagen 66. Prisma Recto 1	51
Imagen 67. Prisma Recto 2	52
Imagen 68. Cubo con diagonales.....	54
Imagen 69. Paralelepípedo con diagonales.....	56
Imagen 70. Construcciones (punto 2 actividad 2)	57
Imagen 71. Respuestas (punto 2 actividad 2)	57
Imagen 72. Respuestas (punto 3 actividad 2)	58
Imagen 73. Respuestas (punto 4 actividad 2)	58
Imagen 74. Respuestas (punto 5 actividad 2)	59
Imagen 75. Polígonos y No Polígonos	68
Imagen 76. Polígonos regulares (Triángulo - Pentágono)	73
Imagen 77. Polígonos Irregulares (Triángulo – Cuadrilátero)	73
Imagen 78. Planos Paralelos	80

INTRODUCCIÓN

Este documento es una monografía que se realiza como trabajo de grado para obtener el título de Licenciatura en Matemáticas, este se realiza en la modalidad asociado al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, $\mathcal{A}\cdot\mathcal{G}$, del Departamento de Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional, dado que se estudian procesos y conceptos de la Geometría.

Después de hacer una revisión, las autoras del trabajo de grado evidencian que, en el estudio de la geometría tridimensional en la escuela, los materiales didácticos usados para trabajar figuras tridimensionales no siempre permiten una exploración dinámica, por esto, se diseñó el material llamado *Varitas TRIMOV* que suple esta dificultad. Con el fin de que dicho material ayude al estudio de la geometría tridimensional, se proponen actividades para promover los procesos conceptualización y conjeturación, a partir de la visualización y exploración de figuras tridimensionales, así mismo, estas se analizan después de gestionadas, en búsqueda de observar las ventajas y desventajas del material proponiendo sugerencias para la guía de gestión y otros usos posibles.

Ahora bien, el presente trabajo se encuentra dividido en cinco capítulos, bibliografía y un apartado de anexos, de la siguiente manera:

- **Capítulo 1.** *Justificación y objetivos.* Cuenta el porqué del diseño de un material didáctico de bajo costo para el estudio de la geometría tridimensional en la escuela, así como los objetivos a cumplir con esta propuesta.
- **Capítulo 2.** *Marco teórico.* Consta del marco didáctico y el marco matemático. El marco didáctico describe los procesos de visualización, conceptualización y conjeturación, además, qué se entiende como material didáctico y cuáles son sus ventajas y desventajas. Por otro lado, el marco matemático da a conocer las definiciones, elementos y propiedades de los objetos matemáticos que se trabajaron en las actividades propuestas.

- **Capítulo 3. Metodología.** Describe las fases que se llevaron a cabo para estructurar el trabajo de grado, así como una presentación general de la población con la cual se realizó el piloto de las actividades y el material *Varitas TRIMOV*.
- **Capítulo 4. Material Varitas TRIMOV.** Responde a preguntas como: ¿De dónde viene el material? ¿Cómo se usa? Además, se proponen actividades para trabajar con él. Por otra parte, se analiza el desarrollo de las actividades en el aula, en las cuales se usan las *varitas TRIMOV*.
- **Capítulo 5. Consideraciones y conclusiones.** Brinda sugerencias para mejorar las actividades y trabajar en otras en donde el material *Varitas TRIMOV* puede ser de ayuda. A su vez se describen los aprendizajes que se obtuvieron al trabajar en cada una de las fases que componen el Trabajo de Grado y los alcances de los objetivos propuestos.
- **Bibliografía.** Se encuentran las referencias de los documentos utilizados, para el desarrollo del presente trabajo.
- **Anexos.** Finalmente, en este apartado están las actividades que fueron presentadas a los estudiantes y demás recursos que fueron usados. También, la modificación de dichas actividades, esto como resultado del análisis de la prueba piloto.

1. JUSTIFICACIÓN

En la actualidad hay varias herramientas tecnológicas que permiten trabajar en torno a reconocer propiedades de las figuras tridimensionales, evidenciamos que no todas las personas o las instituciones tienen la posibilidad de utilizar dichas herramientas, ya sea porque hay restricciones para su uso o no se cuenta con ellas. A su vez, la enseñanza de la geometría tridimensional puede depender de la disposición del profesor, el currículo de la institución y el tiempo que quede para trabajarla. Además, identificamos que al momento de construir y explorar figuras tridimensionales estas se pueden realizar por medio de material didáctico, tecnología o regla y compás. Si se realizan con ayuda de materiales didácticos, estos permiten ver una representación tridimensional del objeto en cuestión. Por esto, se ha hecho una revisión de diferentes materiales didácticos, los cuales clasificamos (según nuestro criterio) teniendo en cuenta las tareas que se pueden desarrollar con ellos:

- **Materiales didácticos que se componen de piezas sólidas:** las actividades que se pueden realizar con ellos se centran en la clasificación de sólidos y la identificación de sus partes, más no en la construcción a partir de sus propiedades.

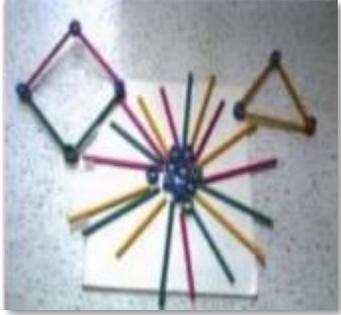
Material didáctico	Descripción
<p data-bbox="347 1247 656 1278">1. Sólidos Compactos</p>  <p data-bbox="310 1766 646 1797">Imagen 1. Sólidos Compactos</p>	<p data-bbox="740 1247 1344 1493">“Consta de 12 sólidos en madera y plástico entre los que se encuentran: cubo, cilindro, prisma, prisma hexagonal, prisma rectangular, prisma triangular, pirámide triangular, pirámide cuadrada, cono, esfera y semiesfera.</p> <p data-bbox="740 1518 1344 1822">Algunas tareas que se pueden realizar con este material son: clasificar sólidos por características como poliedros irregulares, prismas, pirámides, sólidos regulares, platónicos, sólidos de revolución e identificar formas, caras, aristas, vértices y lados de un</p>

	cuerpo geométrico.” (Angarita y Palacios, 2015, p. 35)
<p style="text-align: center;">2. Sólidos Huecos</p>  <p style="text-align: center;">Imagen 2. Sólidos Huecos</p>	<p>Consta de 12 sólidos entre los que se encuentran: cubo, cilindro, prismas, prisma hexagonal, prisma rectangular, prisma triangular, pirámide triangular, pirámide cuadrada, cono, esfera y semiesfera. Se pueden rellenar sus interiores con arena, arroz o cualquier otro material similar para establecer una relación cuantitativa entre el volumen del sólido y la cantidad de material usado. Algunas tareas que se pueden realizar con este material son: clasificar sólidos por características como poliedros irregulares, prismas, pirámides, sólidos regulares, platónicos, sólidos de revolución e identificar formas, caras, aristas, vértices y lados de un cuerpo geométrico. (Angarita y Palacios, 2015, p. 56)</p>

Tabla 1. Materiales Didácticos-Piezas Sólidas¹

- **Materiales didácticos con piezas de tamaño fijo:** estos materiales permiten construir figuras tridimensionales, sin embargo, no dan la posibilidad de cambiar su tamaño después de realizada la construcción, lo que dificulta hacer una exploración dinámica.

¹ Las imágenes fueron recuperadas de Catálogos de Materiales y Recursos Didácticos (Angarita y Palacios, 2015)

Material didáctico	Descripción
<p data-bbox="412 317 594 348">1. Zometool</p>  <p data-bbox="363 726 594 758">Imagen 3. Zometool</p>	<p data-bbox="743 285 1341 814">“El zometool cuenta con: 200 nodos, 384 varas azules (128 de cada longitud: largo, mediano y pequeño), 240 varas amarillas (80 de cada longitud) y 144 varas rojas (48 de cada longitud). Una tarea que se puede realizar con este material es la construcción de polígonos, poliedros (regulares e irregulares) realizando así el estudio de algunas propiedades de estas figuras presentadas en el espacio.” (Angarita y Palacios, 2015, p. 44)</p>
<p data-bbox="380 863 626 894">2. Palitos Chinos</p>  <p data-bbox="337 1262 618 1293">Imagen 4. Palitos Chinos</p>	<p data-bbox="743 835 1341 1087">“Los palitos chinos es un material similar al zometool la única diferencia, es que en este los palos están hechos de madera y los conectores son de caucho.” (Angarita y Palacios, 2015, p. 44)</p>
<p data-bbox="285 1472 605 1503">3. Encajes conectables</p>	<p data-bbox="743 1360 1341 1612">“Piezas plásticas que se conectan entre sí para hacer creaciones en 3D. las piezas vienen en dos formas y 4 colores distintos y calzan en cualquier dirección. Además, uno de los lados es texturizado”²</p>

²Recuperado: <http://didacticoschileltda.blogspot.com.co/2013/03/construccion-y-encaje-material.html?m=1>

 <p>Imagen 5. Encajes Conectables</p>	
<p>4. Papiroflexia</p>  <p>Imagen 6. Papiroflexia</p>	<p>“Este material permite representar y obtener figuras mediante dobleces con papel de colores.</p> <p>Una tarea que se puede realizar con este material es: reconocer poliedros truncados, estrellados y sus propiedades.” (Angarita y Palacios, 2015, p. 43)</p>

Tabla 2. Materiales Didácticos-Piezas de Tamaño fijo³

Teniendo en cuenta los diferentes materiales didácticos mencionados, se puede observar que a pesar de que son útiles para diversas tareas, después de construir o representar figuras tridimensionales estas no siempre pueden variar su tamaño (es decir, son rígidas) y cuando se puede, la representación hecha debe ser desarmada y construida nuevamente para poder obtener otra figura.

Por otro lado, si las representaciones se construyen por medio de la tecnología estas se perciben en un solo plano (pantalla del computador, Tablet o celular) y se puede dar la idea

³ Las imágenes fueron recuperadas de Catálogos de Materiales y Recursos Didácticos (Angarita y Palacios, 2015) y la página Web <http://didacticoschileltda.blogspot.com.co/2013/03/construccion-y-encaje-material.html?m=1>

de figuras bidimensionales, lo que puede representar una dificultad en el estudio de la geometría tridimensional; sin embargo, existen avances tecnológicos para superar dicha dificultad, pero estos se encuentran aún en proceso. Ahora bien, al realizar representaciones con ayuda de la regla y compás se están construyendo también figuras bidimensionales, pues se representan en un solo plano (para este caso el papel representa el plano),

Para abordar los problemas de rigidez y bidimensionalidad mencionados anteriormente, se ha diseñado un material didáctico llamado *Varitas TRIMOV*, que después de representada una figura tridimensional permite variar su tamaño para incentivar una mejor exploración y facilitar la visualización de la tercera dimensión al ser un material tangible. *Varitas TRIMOV* se inspiró a partir del material japonés “Tablitas en movimiento” (Bolívar y Sánchez, 2004) (**Anexo I**) que permiten variaciones en las estructuras hechas y promueven el estudio de las figuras bidimensionales.

Dado lo anterior, se considera que este trabajo de grado es útil para impulsar el estudio de figuras tridimensionales a partir de un material didáctico, de fácil acceso, que podría fomentar procesos de aprendizaje y enseñanza en el colegio, en torno a la geometría tridimensional. En relación con el tratamiento de objetos tridimensionales, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha establecido, por medio de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM) (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM) (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en Matemáticas (2017), que los sistemas geométricos son una *herramienta de exploración y representación del espacio*.

Estos documentos establecen que el pensamiento espacial es:

El conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales. (MEN, 1998, p. 56)

Según los DBA y EBCM se propone trabajarlo en torno a la identificación, comparación, representación, clasificación, construcción, composición y descomposición de objetos tridimensionales, para lograr diferenciar aquellos atributos y propiedades que estos poseen.

Ahora bien, desde nuestra experiencia como estudiantes de la básica y media, y en nuestras prácticas educativas que hacen parte de nuestra formación como profesoras de matemáticas, hemos evidenciado que la geometría es dejada de lado, generalmente para un solo periodo escolar, lo que nos lleva a concluir que la geometría tridimensional, en los colegios, no siempre es trabajada y si lo es, se hace de manera superficial, a pesar que en los documentos anteriores está establecido el trabajo en torno a ella, para desarrollar diferentes competencias y pensamientos.

La realización de este trabajo contribuye a fomentar la enseñanza de la geometría tridimensional en la escuela, además desarrollar procesos como la conceptualización y conjeturación a partir de la visualización y la exploración de materiales didácticos. Así mismo, debido a las dificultades que se pueden presentar con algunos materiales didácticos, que sirven para trabajar figuras tridimensionales, fue importante diseñar un material que supliera algunas de esas deficiencias y contribuyera a ampliar el conjunto de materiales que pueden estar disponibles para profesores y estudiantes.

1.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar e implementar un material didáctico con su respectiva guía de gestión en el aula que promueva los procesos de conceptualización y conjeturación, en torno algunos poliedros, a partir de la visualización y exploración.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Indagar sobre la existencia de material didáctico para trabajar la visualización de figuras tridimensionales, y caracterizar dicho material.
- Caracterizar los procesos de conceptualización, conjeturación, visualización y exploración.
- Diseñar un material didáctico, de bajo costo, que favorezca la exploración dinámica, de objetos tridimensionales, para promover procesos de conceptualización y conjeturación.
- Diseñar tareas que permitan el uso del material didáctico *Varitas TRIMOV*, para promover los procesos de conceptualización y conjeturación.
- Realizar una prueba piloto de las actividades previstas con el uso del material didáctico con estudiantes del ciclo III.
- Analizar el desarrollo de la prueba piloto, para identificar ventajas y desventajas del material y las actividades propuestas, con el fin de mejorar el material y la guía de gestión de clase.

2. MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta que el trabajo de grado tiene como fin diseñar y hacer uso del material didáctico *Varitas TRIMOV*, el cual permite que los estudiantes desarrollen procesos de conceptualización y conjeturación por medio de la visualización y exploración, en relación con objetos tridimensionales y sus propiedades, se hace necesario definir y caracterizar cada uno de los procesos mencionados. Así mismo, definir qué es material didáctico y la importancia de su uso en la educación.

2.1. MARCO DIDÁCTICO

2.1.1. Proceso de Visualización

Según Hershkowitz, BenHaim, Holes, Lappan, Mitchelmore, y Vinner, (1990) (citados por Gal y Linchevski, 2010) la visualización es una habilidad que permite generalizar, representar, transformar, comunicar, documentar y reflexionar a partir de una información visual. Si relacionamos esta definición con el entorno cotidiano, se evidencia que desde una temprana edad los niños reciben diferente información visual, especialmente de figuras tridimensionales, en donde se evoca una representación mental de cierto objeto, al ser nombrado. En relación con la visualización, Camargo, Perry y Samper (2005) mencionan que es una acción en donde se observa y se detectan propiedades de los objetos geométricos, permitiendo así relacionar la imagen conceptual con su representación matemática.

Ahora bien, la visualización tiene en cuenta tres elementos: las *imágenes mentales* que se hacen de objetos físicos, dibujos, relaciones y conceptos (Presmeg citado por Gutiérrez y Jaime, 1991), *procesos* que son la manipulación de las imágenes mentales mencionadas anteriormente (Bishop citado por Gutiérrez y Jaime, 1991) y *habilidades* que ayudan a crear y procesar imágenes visuales. Respecto a las habilidades, del Grande (citado por Gutiérrez y Jaime, 1991), establece que se desarrollan las siguientes:

- **Conservación de la percepción:** permite reconocer que un objeto mantiene su forma a pesar de verse en diferente posición.

- **Reconocimiento de las relaciones espaciales:** permite identificar las características de relaciones entre diferentes objetos.
- **Discriminación visual:** permite comparar varios objetos e identificar semejanzas y diferencias.
- **Memoria visual:** permite recordar las características visuales y de posición de un objeto.

En concordancia con lo anterior y el trabajo alrededor de la geometría tridimensional (Gutiérrez y Jaime, 1991, p. 18) sugieren que se tenga en cuenta que el niño ha venido desarrollando ciertas habilidades de visualización y por ende se plantee estudiarlas, afianzarlas y adecuarlas en pro de lograr aprendizajes en esta geometría.

Por su parte, Gonzato, Godino y Neto (2011) establecen que:

Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (rotación, sección...) (p. 8)

El material *Varitas TRIMOV* permitirá la visualización de figuras tridimensionales, ya que por medio de la manipulación y el movimiento será posible observar transformaciones del objeto y encontrar características que permitan hallar relaciones entre sus partes. Así, por medio de este trabajo se buscará que los estudiantes afiancen habilidades de visualización espacial que han ido desarrollando desde su niñez.

2.1.2. Proceso de Conceptualización

Habitualmente las personas para referirse a un objeto pueden recordar y mencionar su definición o no necesariamente tener conocimiento de esta, y traer a la mente la imagen del objeto o ciertas características asociadas a él. Dependiendo del ámbito donde se encuentren o se desempeñen las personas crean una definición formal de un objeto o simplemente mantienen imágenes mentales para referirse a ellos. Por ejemplo, al nombrar la palabra “ventana” lo que piensa un niño es muy distinto a lo que puede pensar un arquitecto, ya que

para el ámbito en el que se encuentra el profesional es importante tener en cuenta todas las características y propiedades que definen dicho objeto junto con su imagen mental, mientras que es posible que el niño solo tenga la imagen de una ventana sin profundizar en las características o propiedades que la hacen ser este objeto.

Según Vinner, (2002, p. 2), adquirir un concepto no solo es saber la definición formal de este, si no que incluye traer a la mente una imagen, o experiencias relacionadas a él, esto el autor lo llama *concepto imagen*. Es decir, un concepto está formado por el concepto imagen y por la definición formal, si se adquiere solo una de estas no se garantiza la comprensión del concepto. Basándose en ello, se considera la definición como la parte verbal que expresa características esenciales del concepto y que fortalece al concepto imagen.

Dependiendo de lo riguroso que sea el campo donde se trabaje dicha definición, esta cumple con ciertas características, por ejemplo, Samper, Molina y Echeverry (2013, p.23) manifiestan que una definición en geometría debe ser *concisa (se nombran solamente las características esenciales), precisa (omite palabras superfluas), y expresar lo que es y no lo que no es el concepto*. Y esta debe ir acompañada de un argumento, el cual se considera importante para entender el concepto en juego. “*La argumentación (como un discurso lógico, pero no necesariamente deductivo)*” (Douek, 1999) que permite llegar a la conceptualización.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, este trabajo de grado busca, por medio del material *Varitas TRIMOV*, institucionalizar la definición formal del objeto geométrico tratado, para así tener un acercamiento al concepto de dicho objeto, a partir de procesos de visualización y exploración de figuras tridimensionales. Así mismo, el uso del material permite tener una imagen de algunos poliedros específicos y por medio del deslizamiento descubrir características esenciales del objeto matemático en cuestión buscando así, que el estudiante argumente al momento de escoger las propiedades necesarias y por tanto, estas ser parte de la definición, para finalmente llegar a conceptualizar.

Conocer o construir una definición y tener un adecuado concepto imagen que se relacione con ella, no es lo único que se entiende por conceptualizar, este proceso implica también saber

usar la definición que se construye, Samper y Plazas, (2017, p. 44) mencionan que “*saber usar una definición consiste en desencapsular o encapsular propiedades según el tipo de información que provee la situación en la que se va a usar*”. Por ejemplo, si se tiene un sólido al cual se le han encontrado características como tener seis caras planas, sus ángulos congruentes, tal que su medida es 90° y todas sus caras son cuadrados, dichas características se reúnen (encapsulan) para determinar que es un cubo. O si la tarea a realizar es construir un poliedro regular, se tienen en cuenta las características y propiedades que cumple un poliedro regular, listándolas (desencapsulándolas de la definición) de forma tal que se puedan usar las propiedades necesarias para el desarrollo del problema o tarea planteada.

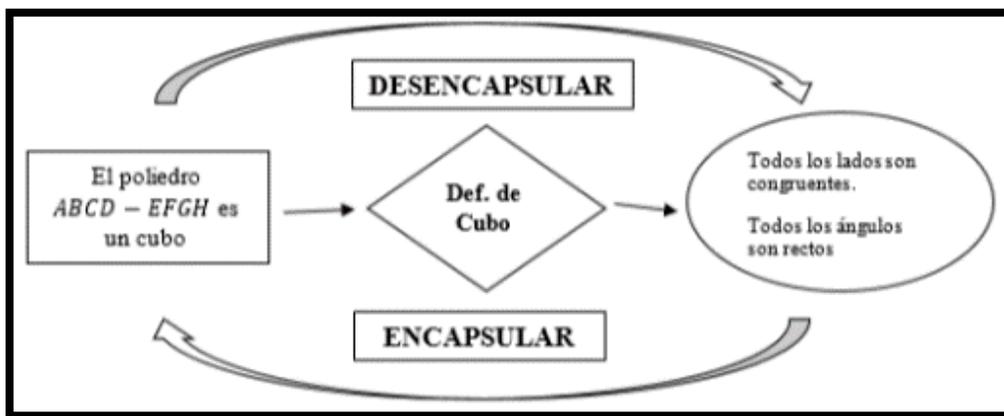


Imagen 7. Desencapsular – Encapsular una definición

2.1.3. Proceso de Conjeturación

El proceso de conjeturación se lleva a cabo por medio, de la exploración y la visualización. La exploración consiste en buscar propiedades, regularidades o relaciones de los objetos involucrados. Según Camargo, Perry, Samper y Molina (2015), la exploración puede ser de tres formas, *exploración empírica* que es aquella que recae sobre las representaciones gráficas de las figuras geométricas, se da cuando se miden lados, ángulos o cuando se realiza una construcción auxiliar que permita enriquecer una figura geométrica; *exploración dinámica* se da cuando la figura geométrica a trabajar es susceptible al movimiento, allí se buscan los invariantes de la figura encontrando propiedades de ella y *exploración teórica* se enfoca en la parte teórica, es decir busca reconocer o identificar enunciados que permitan justificar alguna afirmación.

Visualizar y explorar se dan juntos y permiten formar conjeturas, es decir, “enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no está definido, para el sujeto, este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad” (Perry, Samper, Camargo y Molina , 2013, p. 15).

Para establecer una conjetura hay que detectar e identificar propiedades y luego verificarlas para tener elementos con los cuales escribirla. Según Perry et al, (2013) formular una conjetura es escribir en forma de un enunciado general y en términos matemáticos, un hecho geométrico que se ha reconocido por medio del estudio de varios casos particulares. Corroborarla es comprobar si el enunciado, escrito de forma condicional, de la conjetura se cumple, es decir, si lo que se reporta en el antecedente permite concluir lo que se encuentra en el consecuente, y si este tiene todas las conclusiones posibles.

Por medio del material *Varitas TRIMOV* se espera que los estudiantes, a partir de la exploración y visualización, identifiquen propiedades de las figuras tridimensionales, para determinar conjeturas y así llevar a cabo este proceso.

2.1.4. Material didáctico

Para tener claridad de lo que se busca con el material que se diseña, *Varitas TRIMOV*, se presentarán algunas definiciones de material didáctico.

Moreno (2004) menciona que “*el material didáctico son los productos diseñados para ayudar en los procesos de aprendizaje*”, por otro lado, Godino, Batanero y Font, (2003) afirman que los materiales didácticos que apoyan y potencian el razonamiento matemático, están formados por aquellos objetos físicos que se toman del entorno o se preparan con el fin de que permitan ser medios de expresión, exploración y cálculo en matemáticas.

Manrique y Gallego (2013) mencionan que el material didáctico favorece el aprendizaje en los estudiantes, ya que es un medio de motivación que estimula el desarrollo de la memoria, la motricidad fina y gruesa, entre otros aspectos. Este tipo de materiales permiten llegar a la conceptualización por medio del concepto imagen que se forma a través de la exploración.

Por otra parte, Muñoz (2014) afirma que los materiales didácticos es todo aquello que se puede usar en el aula de clase y los estudiantes pueden ver y manipular, ayudando al aprendizaje. Ahora bien, haciendo énfasis en el uso de materiales didácticos para la enseñanza de un concepto, Muñoz considera que algunas ventajas son:

- Construcción de pensamiento.
- Asimilación de conceptos.
- Recreación de situaciones.
- Manipulación y observación.
- Actúa como agente motivador y promueve la autonomía.

Y algunas desventajas como: es necesaria una optima organización de los estudiantes y suficientes materiales para su uso, contar con un tiempo prudente para el desarrollo de las actividades y poseer conocimientos necesarios de dicho material.

De acuerdo con lo anterior, para este trabajo, se ha establecido como definición de material didáctico a aquellos materiales que se diseñan para ayudar a la exploración, cálculo matemático y otros procesos de aprendizaje.

Además, el uso del material didáctico dentro del aula debería verse como una posibilidad para enriquecer el conocimiento y no como un tiempo perdido. Esto se logra cuando el profesor y el estudiante son conscientes de la importancia del material.

2.2. MARCO MATEMÁTICO

A continuación, se presenta la definición de algunos conceptos que se tendrán en cuenta para el diseño de las tareas, estas se consultaron de autores como Samper, Molina y Echeverry (2013), Clemens, O'Daffer y Cooney (1984), Samper, Molina, Perry y Camargo (2013), Robles (2016), Arbulú (2015), Wentworth y Smith (1972) y Guerrero (2002).

2.2.1. Rectas Paralelas

Dos rectas son *paralelas* si son coplanares y no se intersecan.

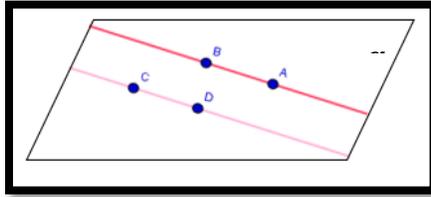


Imagen 8. Rectas Paralelas

2.2.2. Rectas Perpendiculares

Dos rectas son *perpendiculares* si al intersectarse forman ángulos rectos congruentes.

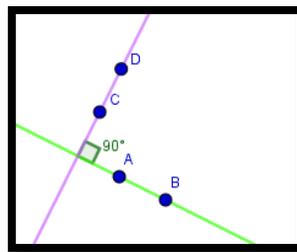


Imagen 9. Rectas Perpendiculares

2.2.3. Rectas concurrentes

Tres o más rectas son *concurrentes* si son coplanares y tienen un punto en común.

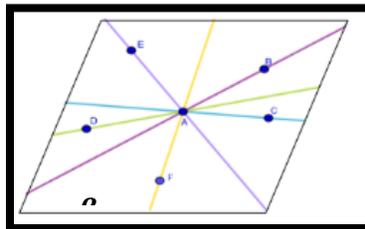


Imagen 10. Rectas Concurrentes

2.2.4. Congruencia de segmentos y de ángulos

- Dos o más segmentos son *congruentes* si y solo si son de igual medida.

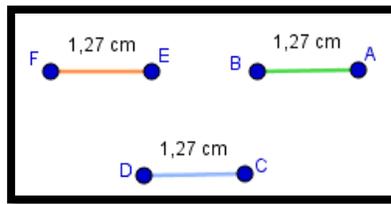


Imagen 11. Segmentos Congruentes

- Dos ángulos son *congruentes* si tienen la misma medida.

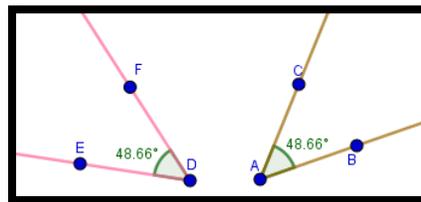


Imagen 12. Ángulos Congruentes

2.2.5. Polígonos

“Dado un conjunto de puntos de un plano, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, un **polígono** es la unión de los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ tales que:

- Si se intersecan un par de segmentos el punto de intersección es un punto extremo.
- Cada punto P_i , es extremo de exactamente dos segmentos.
- Los segmentos con el mismo extremo no son colineales.” (Samper, Molina, y Echeverry, 2013, p. 38)

2.2.5.1. Algunos elementos de los Polígonos (lados, vértices y diagonales)

- **Lado:** Es cada uno de los segmentos que forman el polígono.
- **Vértice:** son los puntos donde se intersecan los lados del polígono.
- **Diagonales:** una *diagonal* de un polígono es un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono.

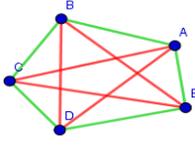
■ Lados	
■ Vértices	
■ Diagonales	

Imagen 13. Elementos de un Polígono

Tabla 3. Algunos Elementos de un Polígono

2.2.5.2. Clasificación de los polígonos

a. Según la medida de sus ángulos y de sus lados.

- Los polígonos pueden ser *equiláteros*, si tienen todos sus lados de igual medida.
- Los polígonos pueden ser *equiángulos*, si tienen todos sus ángulos de igual medida.
- **POLÍGONO REGULAR:** es un polígono equilátero y equiángulo.

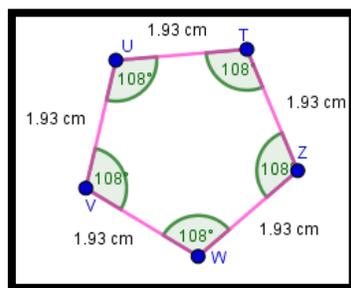


Imagen 14. Polígono Regular

- **POLÍGONO IRREGULAR:** es un polígono en donde la medida de sus lados o la medida de sus ángulos es diferente.

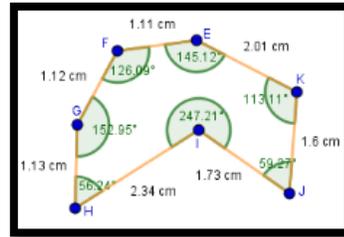
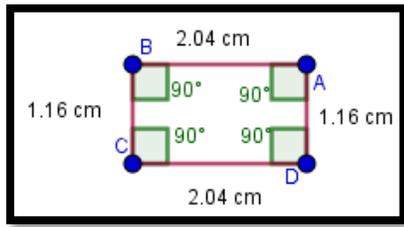


Imagen 15. Polígono Irregular

b. Según el número de lados

Número de lados	Nombre	Figura
Tres lados	<i>Triángulo</i>	<p>Imagen 16. Triángulos</p>
Cuatro lados	<i>Cuadrilátero</i>	<p>Imagen 17. Cuadriláteros</p>
Cinco lados	<i>Pentágono</i>	<p>Imagen 18. Pentágonos</p>
Seis lados	<i>Hexágono</i>	<p>Imagen 19. Hexágonos</p>

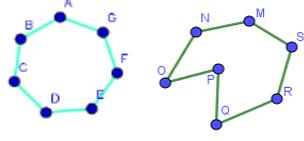
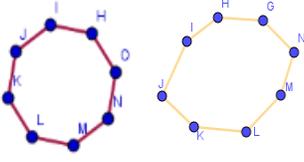
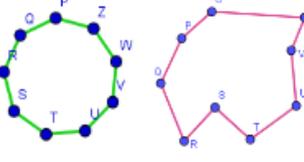
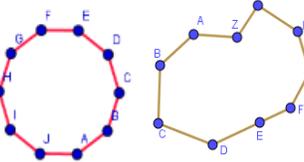
Siete lados	<i>Heptágono</i>	 <p>Imagen 20. Heptágonos</p>
Ocho lados	<i>Octágono</i>	 <p>Imagen 21. Octágonos</p>
Nueve lados	<i>Nonágono</i>	 <p>Imagen 22. Nonágonos</p>
Diez lados	<i>Decágono</i>	 <p>Imagen 23. Decágonos</p>

Tabla 4. Algunos Polígonos según el número de lados

2.2.6. Triángulos

- Dados tres puntos no colineales, un *triángulo* es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.

2.2.7. Cuadriláteros

- Son aquellos polígonos que presentan cuatro lados.

2.2.7.1. Clasificación de los Cuadriláteros

Los cuadriláteros se clasifican según el paralelismo de sus lados en:

❖ Paralelogramo

- Un *paralelogramo* es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.

Entre los paralelogramos se destacan los siguientes:

- **Cuadrado:** es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes.

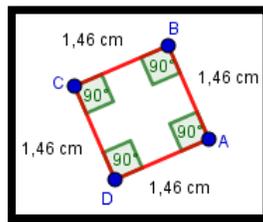


Imagen 24. Cuadrado

- **Rectángulo:** cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.

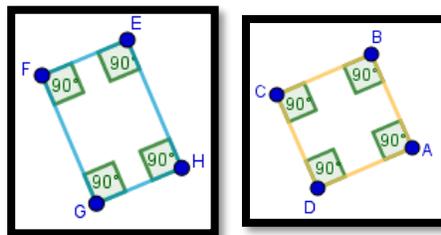


Imagen 25. Rectángulos

2.2.8. Poliedros

- Una figura tridimensional (cuerpo geométrico) es poliedro si y solo si está formada por polígonos donde cada par de polígonos comparten únicamente un lado.

2.2.8.1. Algunos elementos de los Poliedros

- **Caras:** Son los polígonos (triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) que forman los poliedros.
- **Aristas:** lados de cada cara del poliedro.
- **Vértices:** intersecciones de las aristas.
- **Diagonal:** segmento que une dos vértices que no pertenecen a una misma cara.

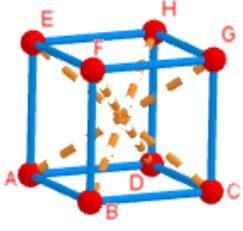
	Aristas	 <p style="text-align: center;">Imagen 26. Algunos elementos de los Polígonos</p>
	Vértices	
	Diagonales	

Tabla 5. Algunos Elementos de un Poliedro

2.2.9. Prismas

- Un *prisma* es un poliedro que satisface estas condiciones:
 1. Hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos llamadas bases.
 2. Todas las demás caras son paralelogramos.

2.2.9.1. Clases de Prismas

❖ Definición de Prisma Recto

- Es un *prisma* en el cual las aristas son perpendiculares a las bases.

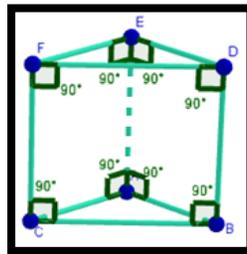


Imagen 27. Prisma Recto

❖ **Definición de Prisma Oblicuo**

- Es un *prisma* en el cual las aristas no son perpendiculares a las bases.

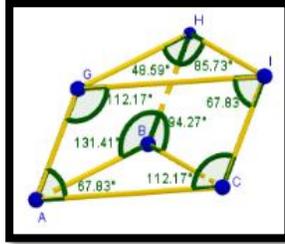


Imagen 28. Prisma Oblicuo

❖ **Paralelepípedo**

- Un *paralelepípedo* es un prisma que tiene como base un paralelogramo.

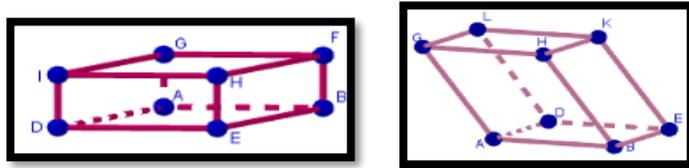


Imagen 29. Paralelepípedos

- **Propiedad.** Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en el punto medio.

Al trazar las diagonales del paralelepípedo y seleccionando dos de ellas resultan ser las diagonales de un paralelogramo y estas se intersecan en su punto medio, entonces al seleccionar de dos en dos las diagonales del paralelepípedo por transitividad se intersecan en su punto medio.

❖ **Paralelepípedo Rectángulo**

- Es un *paralelepípedo* en el cual sus caras y sus bases son rectángulos.

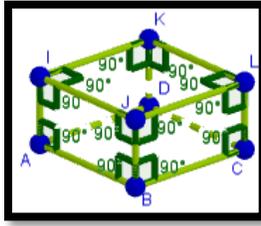


Imagen 30. Paralelepípedo Rectángulo

- **Propiedad.** Si un paralelepípedo es rectángulo sus diagonales tienen igual medida.

Al trazar las diagonales del paralelepípedo rectángulo y seleccionando dos de ellas, estas resultan ser las diagonales de un rectángulo, las cuales son congruentes, por tanto, al seleccionar de dos en dos las diagonales del paralelepípedo rectángulo, por transitividad encontramos que todas son congruentes entre sí.

3. METODOLOGÍA

3.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

Este Trabajo de Grado es un estudio cualitativo descriptivo, en donde se indagó sobre material didáctico, su uso en las escuelas y la frecuencia con la que se ve la geometría tridimensional en estas. Además, se diseñó un material didáctico llamado *Varitas TRIMOV* que permitió trabajar figuras tridimensionales y sus propiedades mediante exploración dinámica y se especificó cómo es su uso adecuado y los tipos de trabajos que permite realizar.

Por otro lado, se diseñaron actividades que permitieron usar el material *Varitas TRIMOV* y que fomentaron procesos de conceptualización y conjeturación en el aula por medio de la visualización y exploración. Para ello, se tuvieron en cuenta las habilidades de visualización, del Grande (citado por Gutiérrez y Jaime, 1991) (Ver apartado **2.1.1**), y se implementaron con un grupo de estudiantes de grado séptimo para observar y analizar las ventajas y desventajas del material *Varitas TRIMOV* y proponer mejoras tanto al material como a las actividades presentadas, si fuese necesario.

Ahora bien, lo anterior está basado en la propuesta de Análisis didáctico de Gómez⁴ (2002), en donde el diseño y la puesta en práctica de las actividades se estructuran en cuatro fases: (a) Análisis Cognitivo: Describe las dificultades y errores que pueden cometer los estudiantes en el desarrollo de las actividades además de los procesos que se pueden desarrollar. (b) Análisis de Contenido: Presenta las definiciones y hechos geométricos relacionados con el objeto matemático en el que se basa las actividades propuestas. (c) Análisis de Instrucción: Describe las actividades que se llevarán al aula de clase, así como los materiales y recursos con los que contarán para ello. (d) Análisis de Actuación: Describe la actuación de los estudiantes y profesores durante el desarrollo de las actividades en el aula. Estas fases se tienen en cuenta durante el desarrollo del trabajo de grado sin explicitar cada una de ellas. A continuación, se muestra cómo se estructuró el trabajo respecto a las cuatro fases mencionadas:

⁴ *Recuperado:* <http://funes.uniandes.edu.co/370/2/GomezP02-2639.PDF>



Imagen 31. Fases del trabajo

3.2. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

Las actividades diseñadas se implementaron en la ciudad de Bogotá (Colombia), en el Colegio Integral ERVID, el cual se encuentra ubicado en carrera 15 # 54 A – 29, es un colegio privado fundado en 1950 como el colegio femenino de bachillerato y comercio, en 1993 se cambia el nombre por Colegio Integral ERVID en honor al escritor, poeta y docente Ernesto Vidales y se convierte en un colegio mixto. Lleva 67 años de formación de estudiantes de básica primaria y secundaria y media. Tiene jornada única de 6:45 am a 2:00 pm, además, el colegio ofrece cursos de refuerzo en el horario de 2:00 pm a 3:30 pm, para aquellos estudiantes que presenten dificultades en alguna materia y deseen adquirir este servicio.

El curso escogido es el grado séptimo que consta de 18 estudiantes de los cuales diez son niñas y ocho son niños, se encuentran en una edad de 12 a 14 años, de acuerdo a las observaciones durante la aplicación de las actividades se evidenció que son estudiantes activos, se comunican mucho entre sí, participan en clase realizando preguntas de lo que no entienden o realizando aportes de acuerdo a lo que se esté hablando en el aula de clase, la gran mayoría son interesados por las clases, por realizar todas las actividades que se plantean logrando así una clase enriquecedora, tanto para el aprendizaje de los estudiantes como para la realización de la misma por parte del profesor.

4. MATERIAL VARITAS TRIMOV

4.1. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL VARITAS TRIMOV

4.1.1. ¿De dónde vienen las Varitas TRIMOV?

El nombre de *Varitas TRIMOV* tiene inmersas dos palabras principales que aluden a su fin, **T**ridimensional y **M**ovimiento. Este material se diseñó para trabajar figuras tridimensionales, inspirado de las tablitas en movimiento (**Anexo I**) y de la necesidad de encontrar un material que permita construir figuras tridimensionales, que sea de bajo costo y asequible en las distintas instituciones.

El material *Varitas TRIMOV* permite una exploración dinámica en las figuras tridimensionales realizadas, es decir, se pueden realizar movimientos para variar la medida de sus lados sin necesidad de reconstruir nuevamente la figura. De esta manera se pueden trabajar distintas propiedades de las figuras tridimensionales, entre ellas, congruencia de aristas y diagonales.

4.1.2. Descripción de Varitas de TRIMOV

El material *Varitas TRIMOV* consta de:

- 15 varitas verdes de plástico deslizantes, las cuales permiten cambiar su tamaño sin que se separen las varitas, cada una de estas tiene una medida de 17 *cm* cuando están cerradas y 32 *cm* de largo cuando están totalmente extendidas. Estas medidas fueron escogidas teniendo en cuenta que al trabajar con el material su manipulación fuera fácil y el espacio utilizado óptimo para trabajar en el aula. Cada una de estas varitas tiene marcas en su superficie, las cuales están a un centímetro de distancia.



Imagen 32. Varita Verde Cerrada



Imagen 33. Varita Verde Extendida

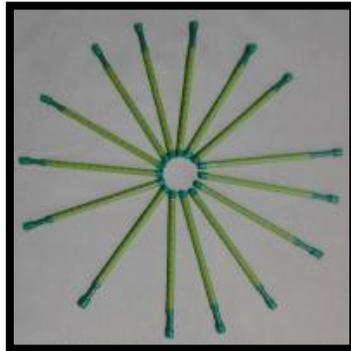


Imagen 34. Varitas TRIMOV

- 4 varitas rojas de plástico deslizantes, las cuales permiten cambiar su tamaño sin que se separen las varitas, cada una de estas tiene una medida de 26 *cm* cuando están cerradas y 50 *cm* de largo cuando están totalmente extendidas. Estas medidas se escogieron en relación con las medidas de las varitas verdes. Cada una de estas varitas tiene marcas en su superficie, las cuales están a un centímetro de distancia.



Imagen 35. Varita Roja Cerrada



Imagen 36. Varita Roja Extendida

- 15 conexiones de icopor (**Imagen 37**), cada una de ellas tiene 11 huecos los cuales están distribuidos en distintos ángulos (90° , 60° y 108°) como se muestra en la **Imagen 38**, para conectar las varitas en la posición que se desee según la tarea que se esté realizando.

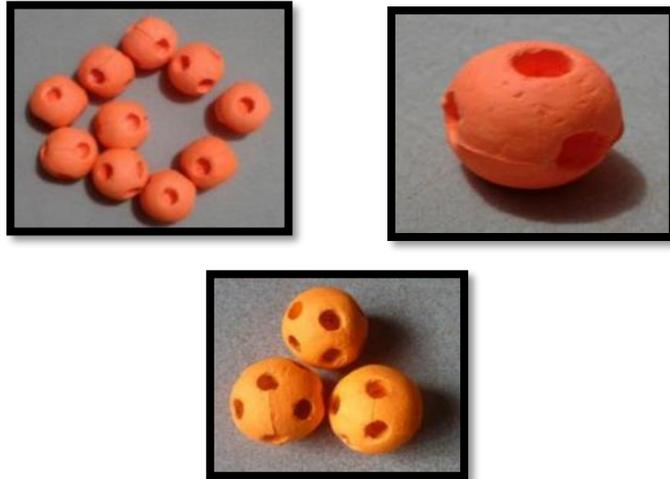


Imagen 37. Conexiones

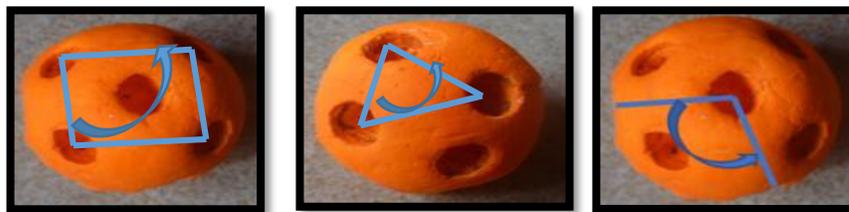


Imagen 38. Conexiones de 90° , 60° y 108°

- El medidor de ángulos, tiene marcados los ángulos de 0° a 180° , este permite medir los ángulos que se realicen en las construcciones con las conexiones y las varitas anteriormente mencionadas, facilitando ver la medida del ángulo con el deslizador café, el cual permite ver la medida aproximada.

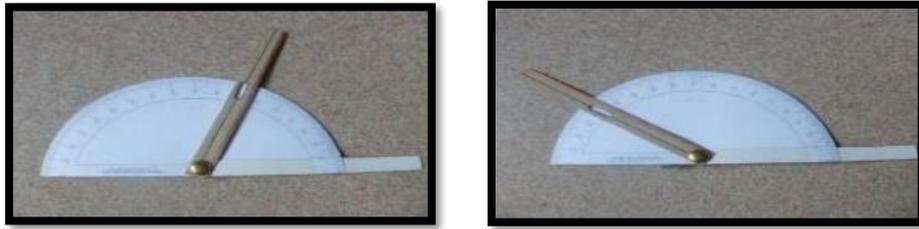


Imagen 39. Medidor de Ángulos

Los colores que tienen el material *Varitas TRIMOV* fueron seleccionados con el fin de estimular la mente de los estudiantes. En la educación el uso de los colores ayuda al aprendizaje y a la motivación del estudiante, esto se debe a lo llamativo que puede llegar a ser para las personas los distintos colores, en general lo ideal es tener un contraste de colores primarios y colores secundarios. Para este caso los colores que se usan son el rojo (color primario), el verde y el naranja (colores secundarios).

Se usa el verde en algunas varitas, ya que, “*Representa tranquilidad, frescura y es reconfortante*” (Moreno, 2005, p. 27) además, ayuda a la concentración. Rojo en las demás varitas porque representa “*Motivación, el interés y el compromiso*” (Bachenheimer, 2007, p. 1) y el naranja en las bolas, ya que, “*estimula, excita y motiva la creatividad*” y ayuda a mejorar el funcionamiento neuronal (Moreno, 2005, p. 27).

4.1.3. ¿Cómo usar *Varitas TRIMOV*?

Para usar *Varitas TRIMOV* se debe tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Al insertar una varita en un hueco de una conexión (pelota) hágalo girando el palo hacia un solo lado hasta que la varita haya ingresado totalmente en el hueco realice la misma acción para separar la conexión de la varita.



Imagen 40. Insertar varita en conexión

- Para cambiar la medida de las varitas hale de los extremos **expandiendo** la varita o **reduciéndola** según lo desee.



Imagen 41. Expansión y Reducción de Varitas

- Para tomar la medida de un ángulo con el medidor de ángulos de *Varitas TRIMOV*, siga las siguientes instrucciones:
 - Ubique el centro del medidor encima de la conexión (pelota) que corresponde al vértice del ángulo que va a medir.

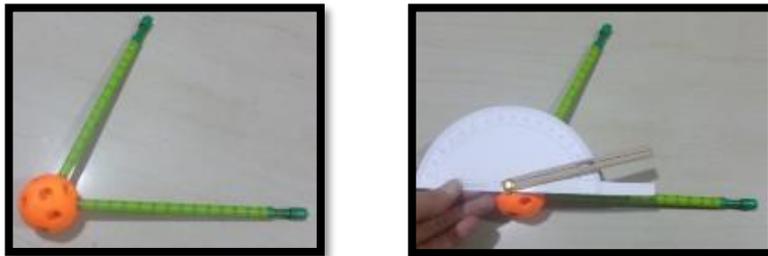


Imagen 42. Medir ángulos en las varitas

- Luego, ubique el segmento blanco (aquel que no se puede mover) en una de las varitas del ángulo y el segmento café (aquel que se puede mover) ubíquelo sobre la otra varita y observe por la ranura la medida que le corresponde.

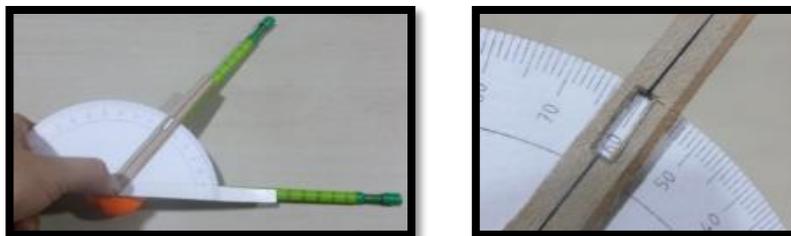


Imagen 43. Medir Ángulos en las varitas 2

- No fuerce la varita cuando se encuentra en una conexión (pelota), para su facilidad y el buen uso del material busque el hueco apropiado que le permita encontrar la inclinación que desea obtener para su construcción.

4.2. DISEÑO DE ACTIVIDADES

4.2.1. Conocimientos previos

Se espera que los estudiantes reconozcan los siguientes objetos geométricos y su definición:

- Rectas.
- Colinealidad.
- Ángulos.
- Medida de ángulos.
- Congruencia de ángulos.
- Segmentos.
- Medida de segmentos.
- Congruencia de segmentos.

4.2.2. Descripción de las Actividades

4.2.2.1. Actividades a Gestionar y Análisis Cognitivo

Errores y dificultades asociados al material:

- Hacer mal uso de la herramienta para medir ángulos.
- Hacer mal uso de las conexiones.

Errores y dificultades asociados a los conceptos y preconceptos:

- No identificar los ángulos cada uno de los polígonos.
- Identificar como polígono el interior de la figura geométrica.
- Identificar como poliedro el interior de la figura geométrica.
- No identificar los elementos de un polígono y de un poliedro.
- No identificar los planos que contienen las caras de los poliedros.
- No identificar los planos paralelos en el poliedro.
- No reconocer las diagonales de un polígono.
- No reconocer las diagonales de un poliedro.

4.2.2.1.1. Actividad 1. Polígonos

Objetivos de enseñanza:

- Abordar la definición de polígonos, su representación gráfica y los tipos de polígono según la medida de sus ángulos y lados.

Objetivos de aprendizaje:

- Reconocer polígonos a partir de la definición.
- Identificar polígonos, lados, vértices y diagonales a partir de su representación gráfica.
- Identificar polígonos regulares e irregulares a partir de su definición.

Descripción de la Actividad 1. Polígonos

MOMENTO 1. Definición de Polígono y sus elementos

Para un primer momento, las maestras en formación darán a conocer la siguiente definición de polígono:

*Un **polígono** es una figura geométrica, formada por segmentos que se unen solo en sus extremos, de tal forma que un extremo conecta exactamente a dos segmentos y los segmentos que comparten un extremo no son colineales.*

Se realizará la explicación de la definición dada, por medio de ejemplos de figuras, que las maestras llevarán dibujadas y serán pegadas en el tablero, como las siguientes:

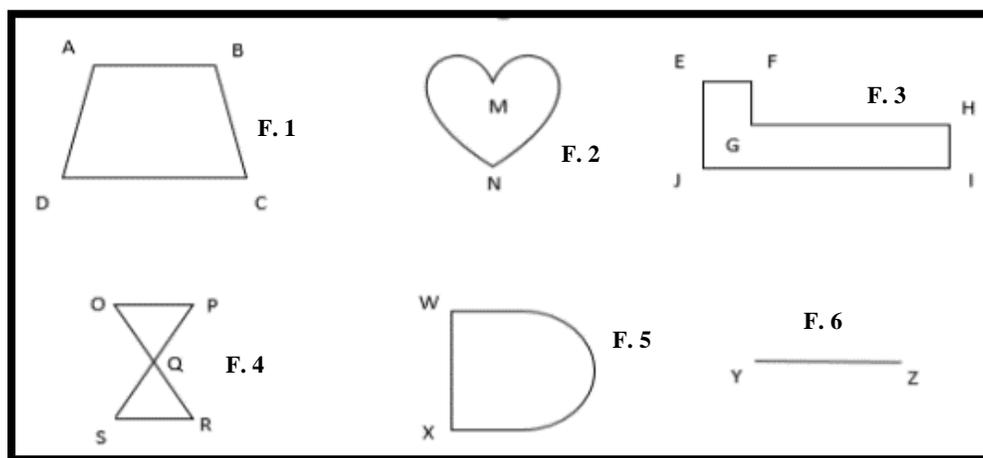


Imagen 44. Ejemplos de Polígonos

Y se les preguntará a los estudiantes:

- “¿La figura ___ es un polígono? ¿Por qué?”

Se espera que los estudiantes mencionen que las *figuras 1 y 3* (F.1 y F.3 **Imagen 44**) son polígonos porque cumplen con la definición dada, por otra parte, las *figuras 2,4,5 y 6* (F.2, F.4, F.5 y F.6) no lo son, ya que la *figura 2* no está formada por segmentos, la *figura 4* no cumple que en los extremos de un segmento se conecte únicamente dos segmentos o podrían también mencionar que los segmentos no se están uniendo en sus extremos, la *figura 5* no es una figura formada por segmentos y la *figura 6* no es la unión de segmentos ya que solo es uno.

Ahora bien, seleccionando una de las figuras que son polígonos (*figura 1 o figura 3*) se identificarán, con ayuda de los estudiantes, elementos como: vértices, diagonales y lados.

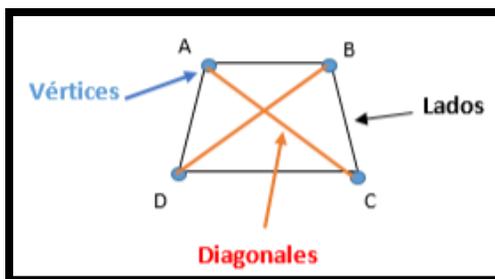


Imagen 45. Elementos de un Polígono

Para finalizar con la explicación de la definición de polígono y sus elementos, se entregará a cada estudiante seis figuras (**Anexo II**), estas deberán ser pegadas en cada recuadro (polígonos y no polígonos), a partir de la definición, luego los estudiantes deberán seleccionar un polígono e identificar los lados de color azul, los vértices de color rojo y dibujar las diagonales de color morado.

MOMENTO 2. Polígonos regulares e irregulares

Al iniciar este momento, las maestras en formación entregarán a cada estudiante una hoja con definiciones, para tener más claridad de algunos objetos geométricos que se mencionarán durante el desarrollo de las actividades propuestas (**Anexo III**).

Se indicará a los estudiantes las siguientes definiciones:

D. Polígono irregular, un polígono es irregular si y solo si la medida de sus lados o la medida de sus ángulos es diferente.

D. Polígono regular, un polígono es regular si y solo si tiene todos sus lados y todos sus ángulos de igual medida.

Luego se dará un ejemplo de cada uno de estos tipos de polígonos en el tablero y se explicará porqué son regulares o irregulares.

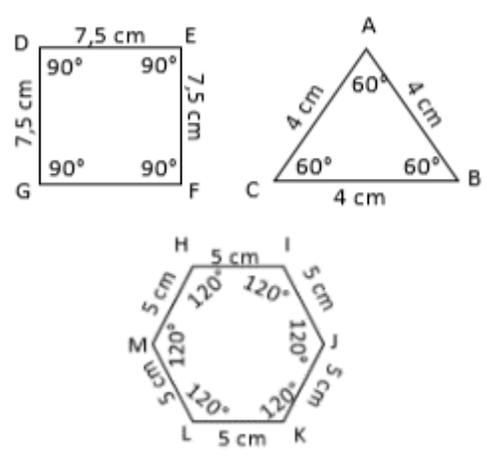
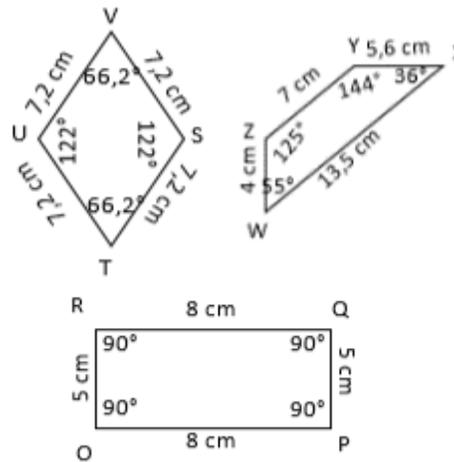
Polígonos regulares	Polígonos Irregulares
 <p data-bbox="292 1218 779 1268">Imagen 46. Ejemplos Polígonos Regulares</p>	 <p data-bbox="893 1218 1347 1268">Imagen 47. Ejemplos Polígonos Irregulares</p>

Tabla 6. Polígonos Regulares e Irregulares

Seguido a esto, se le entregará a cada estudiante un grupo de imágenes de polígonos (**Anexo IV**) y se solicitará que los clasifiquen en polígonos regulares o irregulares, para ello cada una de las figuras se clasificará con ayuda de todo el curso realizando las siguientes preguntas:

- ¿Esta figura es polígono regular o irregular?
- ¿Por qué creen que es regular o irregular?

Y luego se pegarán en el cuaderno.

4.2.2.1.2. Actividad 2. Poliedros

Objetivos de enseñanza:

- Estudiar la definición de poliedro, sus partes, el prisma y los tipos de prismas.

Objetivos de Aprendizaje:

- Reconocer poliedros a partir de su definición.
- Identificar los elementos que componen a los poliedros.
- Reconocer los prismas por medio de su definición y su representación gráfica.
- Identificar algunas clases de prismas como el prisma recto y el paralelepípedo.
- Identificar una propiedad de las diagonales del paralelepípedo.

Descripción de la actividad 2. Poliedros

En esta actividad se parte de la definición (D) de poliedro presentada a continuación:

D. Poliedro *Una Figura tridimensional (cuerpo geométrico) es poliedro si y solo si está formada por polígonos donde cada par de polígonos comparten únicamente un lado.*

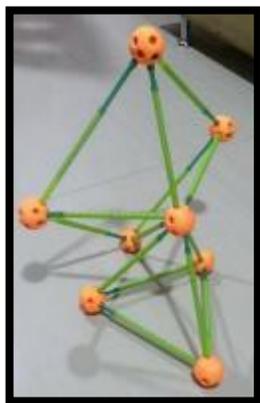


Imagen 48. No Poliedro

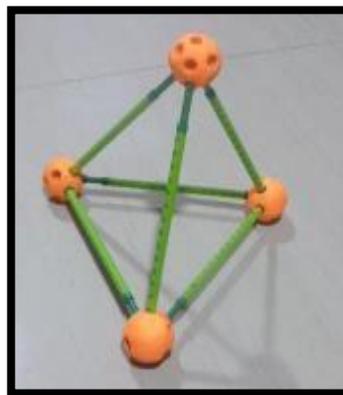


Imagen 49. Poliedro

Seguido a esto, con ayuda de un modelo de poliedro y uno que no lo es (construidos con las *Varitas TRIMOV*), se les formularán a los estudiantes las siguientes preguntas para aclarar la definición:

- ¿Esta figura está formada por polígonos?
- ¿Qué polígonos la conforman?

Se espera que después de realizadas las preguntas, se logre concluir cuál modelo es poliedro y cuál no lo es. Teniendo en cuenta el modelo de poliedro, se identificarán algunos elementos que lo conforman (caras, vértices y aristas, ver **Imagen 50**).

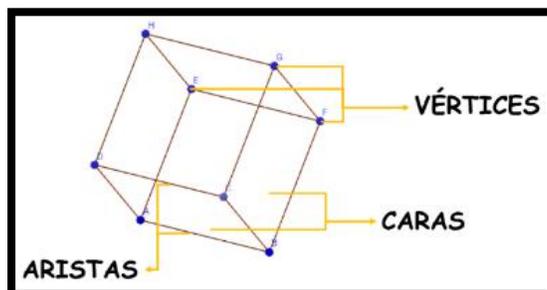


Imagen 50. Elementos de un Poliedro

Luego, se organizarán grupos de tres estudiantes, se les entregará un paquete de *Varitas TRIMOV* y se les pedirá construir un poliedro. Con el fin de que todas las representaciones sean distintas a cada grupo se les designará ciertas características como las siguientes:

Un poliedro donde todas sus caras sean triángulos regulares.
Un poliedro donde todas sus caras sean triángulos irregulares.
Un poliedro donde sus caras sean cuadriláteros irregulares.
Un poliedro donde sus caras sean cuadrados (recuerda que este es un cuadrilátero regular).
Un poliedro en el cual cuatro caras sean triángulos y una cara sea un cuadrado.
Un poliedro donde dos de sus caras sean pentágonos y las demás sean paralelogramos
Un poliedro donde dos de sus caras sean triángulos y las demás sean paralelogramos

Tabla 7. Poliedros a construir

Cada una de estas construcciones se presentará a todos los estudiantes, con el fin de que identifiquen diferentes poliedros. Luego, se realizarán las siguientes preguntas:

- ¿Es un poliedro? Justifique su respuesta.
- ¿Cuáles son los vértices del poliedro?
- ¿Qué polígonos conforman el poliedro?
- ¿Cuántas aristas tiene el poliedro?

MOMENTO 2. Descripción de la actividad PRISMA

Las maestras en formación presentan la definición de planos paralelos y la ejemplifican.

*Dos o más **planos son paralelos** si y solo si no se intersecan en algún punto.*

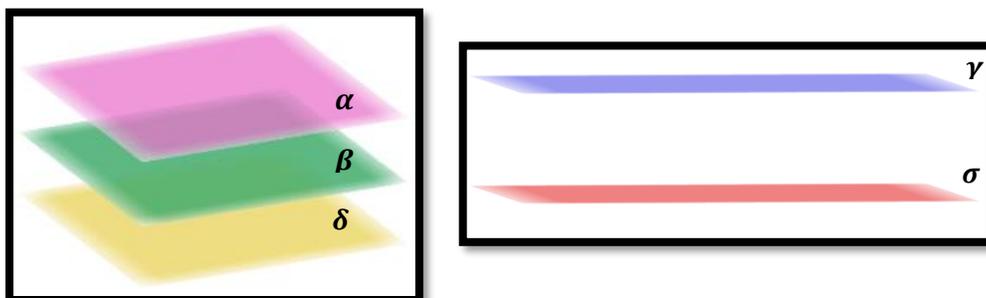


Imagen 51. Planos Paralelos

Luego, se presenta a los estudiantes la siguiente definición de prisma:

D. Prisma *Un poliedro es prisma si y solo si tiene dos caras paralelas, de igual forma y tamaño, llamadas bases y las demás caras son paralelogramos, llamadas caras laterales del prisma.*⁵

Luego, se les mostrará las siguientes representaciones de prismas:

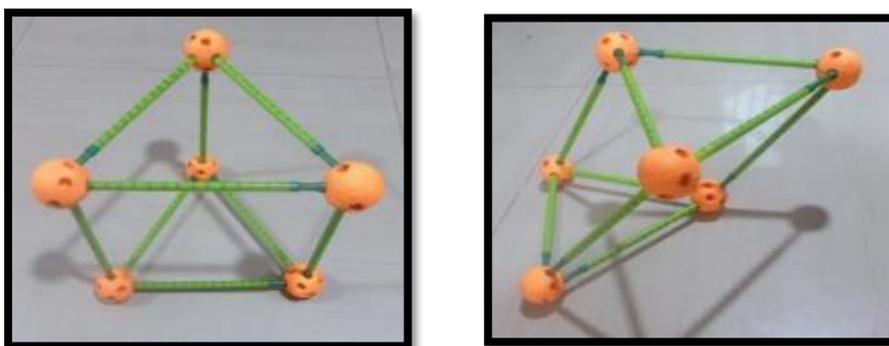


Imagen 52. Prismas

Y se explicará porqué cada una de ellas cumple con la definición de prisma con la ayuda de preguntas como:

- ¿Es un poliedro? ¿Por qué?
- ¿Es un prisma? ¿Por qué?

⁵ Para esta definición, excluimos el cilindro como prisma.

- ¿Cuáles son sus bases? ¿Por qué?

Seguido a esto, a cada grupo de estudiantes se les entregará una réplica de la figura 2, luego se les pedirá tomar medidas tanto de segmentos como de lados de las caras laterales que conforman la figura, con el objetivo de identificar sus características y definir Prisma recto.

D. Prisma recto: un prisma es recto si y solo si sus caras laterales son rectángulos”

Luego, se les pregunta a los estudiantes ¿qué pasa si las bases y caras laterales del prisma recto son cuadrados? ¿qué figura se forma? Esto con el fin de que mencionen el cubo, ya que es una figura muy conocidos entre los estudiantes.

Seguido a esto, se les pide a los grupos de estudiantes que construyan un cubo e identifiquen sus elementos, es decir, que mencionen cuáles son sus aristas, vértices, bases y caras laterales y que señalen cuales son las diagonales de este, teniendo en cuenta que:

La diagonal de un poliedro son los segmentos que une a dos vértices no consecutivos y no son diagonales de los polígonos que forman al poliedro.

Se espera que los estudiantes con ayuda del material *Varitas TRIMOV* realicen la construcción de las diagonales del prisma, luego se les pedirá que las midan y se les preguntará si se encontró alguna característica respecto a las diagonales del poliedro construido.

Se busca que los estudiantes concluyan que ***si es un prisma recto con todas sus caras cuadradas (cubo) entonces sus diagonales tienen la misma medida y se encuentran en un solo punto***, encontrando así una propiedad de los cubos.

Finalmente, se les dirá la siguiente definición a los estudiantes:

D. Paralelepípedo “Un prisma es paralelepípedo si y solo si tiene como base un paralelogramo”

Se le harán preguntas como:

- ¿El cubo es un paralelepípedo? ¿Por qué?

- ¿Qué características en general se pueden mencionar del cubo? (es decir, es un poliedro?, ¿es prisma recto?, ¿es paralelepípedo?)
- ¿Cómo sería otra construcción de un paralelepípedo?

Las maestras en formación pasarán por cada grupo de estudiantes realizando preguntas como ¿Qué figura estas construyendo? ¿Qué pasa con la figura si se mueve un lado? ¿Sigue siendo el mismo tipo de poliedro? ¿Esta figura es un paralelogramo? Luego, las construcciones hechas por cada uno de los grupos se socializarán con los demás para tener claridad de la definición de paralelepípedo.

Seguido a esto, se les pedirá construir las diagonales del paralelepípedo y se les preguntará ¿Qué ocurre con las diagonales de un paralelepípedo? Esto con el fin de llegar a que *las diagonales de un paralelepípedo se intersecan en un mismo punto.*

Se les preguntará cómo sería un *paralelepípedo rectángulo*, y qué características tienen sus caras, esto con el fin de concluir que *en un paralelepípedo rectángulo todas sus caras son rectángulos.*

Para finalizar, se les entregará a los grupos de estudiantes un taller (**Anexo VI**) que consolida lo trabajado sobre prisma y permitirá conjeturar algunas propiedades relacionadas con los vértices, aristas, caras laterales y cantidad de lados del polígono de la base.

4.3. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

4.3.1. Actividad 1. Polígonos

MOMENTO 1. Definición de polígono y sus elementos

Esta actividad tenía como fin reconocer polígonos a partir de la siguiente definición:

Un polígono es una figura geométrica, formada por segmentos que se unen solo en sus extremos, de tal forma que un extremo conecta únicamente a dos segmentos y los segmentos que comparten un extremo no son colineales.

La cual fue presentada a los estudiantes, explicada y se propusieron algunos ejemplos (**Imagen 44**). Seguido a esto, se entregó a cada estudiante, seis figuras geométricas planas y

una guía en la cual se encontraba un recuadro y ciertas actividades que los estudiantes debieron desarrollar (**Anexo II**).

Para la clasificación que se les pidió, los estudiantes tuvieron dificultades al momento de decidir si la figura de la **Imagen 53** era polígono o no.

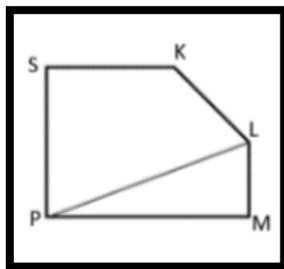


Imagen 53. Polígono con posible diagonal

Algunos de ellos consideraron que la imagen era un polígono con una diagonal dibujada, ya que momentos antes de realizar la actividad se habían explicado los elementos de un polígono (vértice, lados y diagonales), otros estudiantes consideraron que era una diagonal debido al grosor del segmento, ya que, es más delgado que los demás. Sin embargo, las maestras en formación no se percataron de aclarar antes de realizar la actividad, que al darles una figura se les indicaría si había o no diagonales trazadas y esto también influyó en que se presentara esta dificultad. A pesar de ello la mayoría de los estudiantes pudieron clasificar las imágenes en polígonos y no polígonos.

En el siguiente punto, se les pidió a los estudiantes identificar los elementos de un polígono, se evidenció que tuvieron facilidad para reconocer los vértices y los lados del polígono, sin embargo, para este caso se presentó dificultad al identificar todas las diagonales, ya que varios estudiantes identificaban solo algunas de ellas como se muestra en la **Imagen 54**.

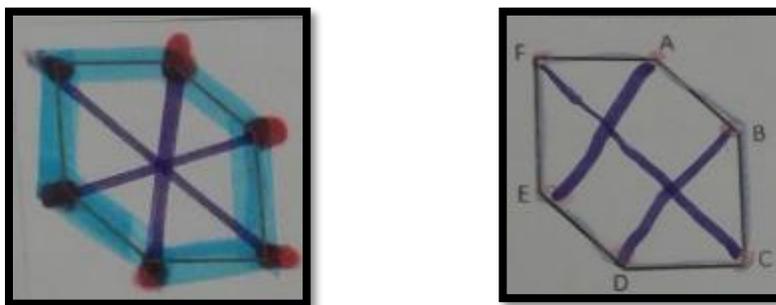


Imagen 54. Diagonales realizadas por estudiantes

MOMENTO 2. Polígonos regulares e irregulares

Se les dio a conocer la definición de polígono irregular, luego se dibujaron algunos ejemplos (Tabla 6 - Imagen 47) y con ayuda de los estudiantes se reconocieron las características que hacían que estos polígonos fueran irregulares, ellos partieron de la definición dada. Luego se les preguntó ¿Cuál sería la definición de polígono regular? A la cual un estudiante dio la siguiente definición:

- *Estudiante: “Un Polígono es regular si y solo si la medida de sus ángulos y de sus lados son iguales”*

Fragmento 1. Diálogo sobre definición de Polígono Regular

El estudiante para generar esta definición se guió de la definición de polígono irregular y se infiere que también tuvo en cuenta las proposiciones lógicas, por esta razón cambió el “o” por el “y”. Finalmente, se tomó esta definición para polígono regular en el curso.

Posterior a esto se hizo entrega de cuatro figuras de polígonos para clasificarlas en polígonos regulares o irregulares y pegarlas en el cuaderno, esto se dejó de tarea.

Al iniciar la siguiente sesión, se hizo un breve resumen de los temas tratados hasta el momento (Polígonos y Polígonos regulares e irregulares) y se pasó por cada uno de los puestos a revisar la tarea de la sesión anterior. Respecto a la actividad no hubo ningún inconveniente. Seguido a esto se les entregó una hoja con algunas definiciones importantes (Anexo III) y estas fueron aclaradas para todos los estudiantes.

Ahora bien, se pudo evidenciar el proceso de conceptualización en los momentos 1 y 2 de la actividad de polígonos, ya que, el estudiante usa la definición de polígono, polígono regular e irregular, cuando se le pide clasificar las figuras entregadas, desencapsulando características de estas para verificar cuales figuras cumplen la definición y cuáles no. Así mismo, en el *Fragmento 1* se evidencia nuevamente este proceso dado que el estudiante redacta una definición de polígono regular, haciendo una analogía con la definición de polígono irregular. Por otra parte, se evidencia el proceso de visualización mediante la habilidad de discriminación visual, porque los estudiantes, teniendo en cuenta la definición, comparan las figuras buscando semejanzas o diferencias para poder clasificarlas.

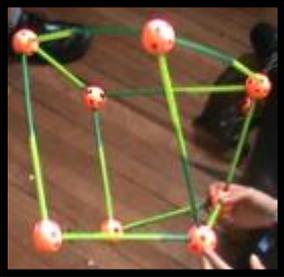
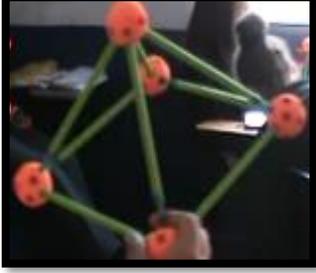
4.3.2. Actividad 2. Poliedros

MOMENTO 1. Poliedros.

Las maestras en formación iniciaron la actividad de poliedros dando la definición y explicándola por medio de un ejemplo y un no ejemplo. Luego se pidió formar grupos de tres estudiantes y se les entregó un paquete de *Varitas TRIMOV*, se mencionó de qué constaba cada paquete de material y se explicó cómo se debía usar (**Anexo V**). Después de esto, se pasó por cada grupo para que eligieran un papel al azar (**Actividad 2. Poliedros - Tabla 7**) donde se decía la construcción que debían realizar, se les informó que se dejarían unos minutos para que trataran de construirla.

Luego, la maestra en formación pasó por cada grupo verificando el uso correcto del material y guiando a los estudiantes en las construcciones correspondientes. A pesar de que se dieron las instrucciones necesarias para el uso del material, se presentaron dificultades en algunos grupos, ya que forzaron los huecos de las conexiones buscando realizar la construcción.

Seguido a esto, se mostraron las construcciones hechas en cada grupo y se leyó la frase correspondiente para verificar que la construcción fuera correcta. Para esta actividad se obtuvieron las siguientes construcciones:

<p>Un poliedro donde todas sus caras sean triángulos regulares.</p>	 <p>Imagen 55. Poliedro - caras triangulares</p>
<p>Un poliedro donde todas sus caras sean cuadriláteros irregulares.</p>	 <p>Imagen 56. Poliedro - caras cuadriláteros irregulares</p>
<p>Un poliedro donde sus caras sean cuadrados (recuerda que este es un cuadrilátero regular)</p>	 <p>Imagen 57. Poliedro - caras cuadradas</p>
<p>Un poliedro en el cual cuatro caras sean triángulos y una cara sea un cuadrado.</p>	 <p>Imagen 58. Poliedro - caras cuatro triángulos y un cuadrado</p>

<p>Un poliedro donde dos de sus caras sean triángulos y las demás sean paralelogramos</p>	 <p>Imagen 59. Intento de realizar el Poliedro - caras dos triángulos y demás paralelogramos</p>
---	---

Tabla 8. Poliedros contruidos

Debido a que no se logró la construcción correcta para el último poliedro, cuyas características eran tener como caras dos triángulos y tres paralelogramos, se les dio un poco más de tiempo y se les solicitó a todos los grupos intentar construirlo. De allí salieron construcciones como las siguientes (**Imagen 60**):

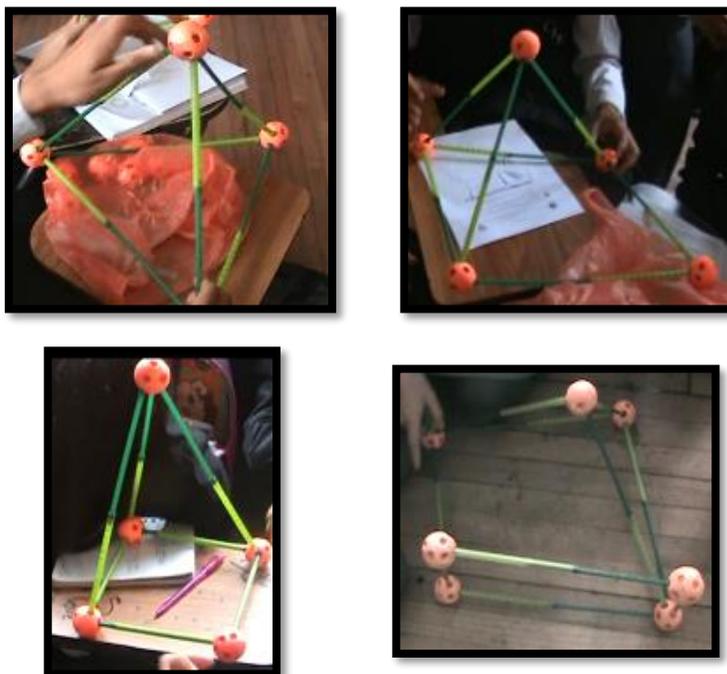


Imagen 60. Construcciones incorrectas

Se evidencia que se presentaron dificultades al construir el poliedro, porque los estudiantes creyeron que los dos triángulos debían compartir un lado y al iniciar la construcción de esta

forma no lograban obtener los tres paralelogramos o resultaba una figura que no era poliedro, como se observa a continuación:

- *Maestra: “¿Ya acabaron? ¿Por qué?”*
- *Estudiante: “Acá hay dos triángulos y el resto son cuadrados”*
- *Maestra: “¿Y si es un poliedro? ¿qué características tiene un poliedro? Primero ¿está formado por polígonos?”*
- *Estudiante: “No”*
- *Maestra: ¿Por qué?*
- *Estudiante:” Porque hace falta una línea... pero si la hacemos quedan tres triángulos”*

Fragmento 2. Diálogo sobre el intento de construcción Poliedro - Dos caras triangulares y tres paralelogramos

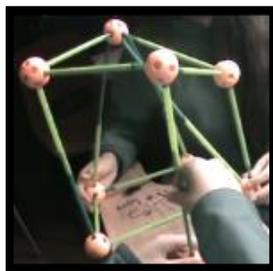


Imagen 61. Construcción incorrecta puesta en común

Además, se cree que se presentó esta dificultad porque era una figura nueva para los estudiantes, al no ser tan conocida como posiblemente si lo era la pirámide y el cubo.

Después de unos minutos un grupo construyó la figura que cumplía las características establecidas “Tener como caras dos triángulos y tres paralelogramos” y se presentó dicha configuración a los demás estudiantes, identificando por qué cumplía la definición de poliedro.

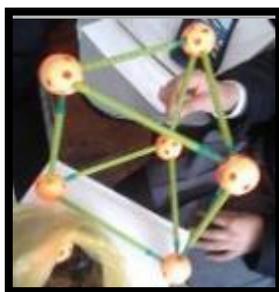


Imagen 62. Construcción correcta

- *Maestra: “¿Es un poliedro?”*
- *Estudiantes: “¡¡¡Sí!!!”*
- *Maestra: “¿Por qué?”*
- *Estudiante A: “Porque está formado por polígonos”*
- *Maestra: “¿Y es la construcción que se pedía?”*
- *Estudiante B: “Si, porque tiene dos triángulos y tres cuadrados”*
- *Estudiante C: “Dos triángulos y tres paralelogramos”*
- *Maestra: “Sí, recuerden que el cuadrado es un paralelogramo”*

Fragmento 3. Diálogo sobre la construcción correcta del poliedro

Se evidencia el proceso de visualización en la actividad de las construcciones por grupos, porque los estudiantes debían tener la imagen mental de los polígonos para entender la construcción que les correspondió al azar, y de igual forma la imagen mental de un poliedro para poder construirlo (habilidad de memoria visual). Además, se percibió la habilidad de conservación de la percepción, cuando la maestra en formación mostró las construcciones en distintas posiciones a los estudiantes y ellos identificaron el mismo poliedro.

Por otro lado, el proceso de conceptualización se hace presente al momento de saber usar la definición, cuando la maestra en formación interactuaba con el estudiante preguntándole si estaba construyendo un poliedro, él desencapsuló características de su definición listándolas (*Fragmento 2* y *Fragmento 3*) para verificar que la construcción hecha fuera correcta.

MOMENTO 2. Poliedros

Teniendo la construcción de un prisma recto con base triangular y uno no recto con base triangular, llevados por la maestra en formación, se procede a dar la definición de prisma, y se muestra porque la construcción hecha cumple la definición. Para esto es necesario aclarar qué son planos paralelos, esto se hace con una analogía a las rectas paralelas y con ayuda de cuadernos los cuales representaban planos.

Luego, se mencionan los elementos de un poliedro (teniendo en cuenta que un prisma es un poliedro):

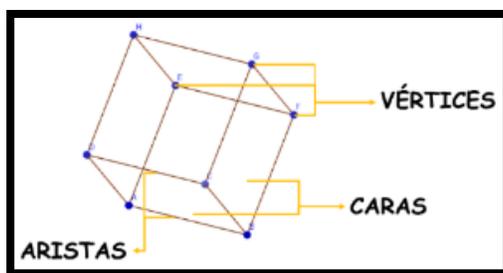


Imagen 63. Elementos de un Poliedro

Después de esto, se le pide a cada grupo construir un prisma igual al mostrado (prisma recto de base triangular⁶), las maestras en formación pasaron puesto por puesto y revisando que la construcción sí fuera de un prisma recto triangular, luego de que todos tuvieran la figura como el modelo, se les pidió anotar en el cuaderno la medida de las aristas teniendo en cuenta las líneas para medir, que trae el material y la medida de los ángulos de las caras laterales. Estos datos se dejaron pendientes para trabajar en la siguiente sesión.

Al iniciar la nueva sesión se realizó una breve explicación de las definiciones de cuadrado y rectángulo, esto con el fin de que los estudiantes observaran que *todo cuadrado es un rectángulo, pero no todo rectángulo es un cuadrado*. Como se evidencia en la siguiente conversación:

- Maestra: “¿Qué ven ustedes de los lados? (señalando la imagen de rectángulo)”

⁶ Bases triangulares y caras rectángulos.

- *Estudiante A: “Que tiene diferentes lados”*
 - *Maestra: “¿Todos son diferentes?”*
 - *Estudiante B: “El de arriba con el de abajo y el de los lados son iguales”*
 - *Estudiante C: “Estos dos lados son iguales (señalando la imagen de rectángulo)”*
 - *Maestra: “¿Cuál característica tienen en común estos dos polígonos?”*
 - *Estudiante D: “Que uno es más alargado que otro”*
 - *Estudiante E: “Que tienen cuatro lados”*
 - *Estudiante C: “Los 90 grados”*
 - *Maestra: “La medida de sus ángulos es igual, ahora que pueden decir de la medida de los lados...”*
- Pensando en la definición de rectángulo que dice que la medida de los ángulos sea de 90 grados y que dos a dos sean lados congruentes (señalando dos lados opuestos del rectángulo), es decir que tienen la misma medida... podríamos decir que este (señalando el cuadrado) ¿Es también un rectángulo?”*
- *Estudiante D: “¡¡¡Sí!!!”*
 - *Maestra: “¿Tiene la medida de 90 grados?”*
 - *Estudiantes: “Sí”*
 - *Maestra: “Si miramos dos a dos ¿Tienen la misma medida de los lados?”*
 - *Estudiantes: “Sí”*
 - *Maestra: “Entonces vamos a decir que todo cuadrado es un rectángulo”*

Fragmento 4. Diálogo de propiedad todo cuadrado es rectángulo

Luego, la maestra en formación preguntó a cada grupo de estudiantes las medidas de ángulos y aristas que tomaron en la clase anterior, a partir de ellas se realizó un cuadro en el tablero con los datos obtenidos de cada grupo, con el fin de que los estudiantes observaran que las medidas de los ángulos eran de 90° y las medidas de las aristas de las caras laterales eran iguales. A continuación, se presenta el dialogo entre la maestra y los estudiantes:

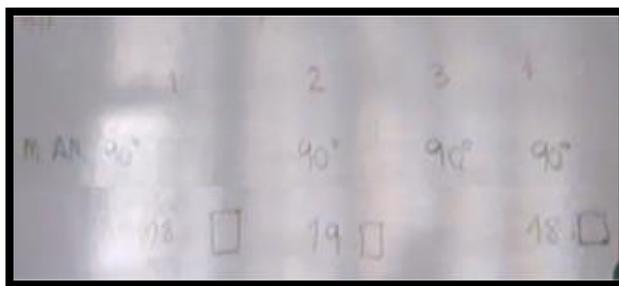


Imagen 64. Medidas tablero

- *Maestra: ¿Qué notan en la medida de los ángulos?*
- *Estudiante F: “Todos son iguales”*
- *Estudiante G: “a todos nos dio 90”*
- *Maestra: “¿Y de los lados?”*
- *Estudiante M: “Todas son diferentes”*
- *Maestra: “ Por ejemplo, en el grupo uno la medida fue 18 cm, es decir que todos los lados midieron eso”*

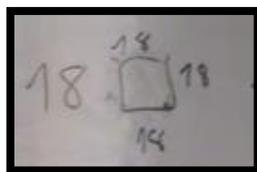


Imagen 65. Medidas tablero 2

Entonces ¿qué se puede decir si sus lados miden igual y sus ángulos son de 90°?

- *Estudiante H: “Son cuadrados... todos son cuadrados”*
- *Maestra: “Pero recuerden que todo cuadrado es un ...”*
- *Estudiantes: “Rectángulo”*

Fragmento 5. Diálogo del análisis de los datos escritos en el tablero

Estos datos ayudaron a deducir, que dichas caras laterales eran cuadrados o rectángulos.

Luego, la maestra en formación pidió a los estudiantes que teniendo en cuenta las características que se observaron del prisma construido (prisma recto) lo definieran. Algunas de estas definiciones fueron:

- *“Todo prisma puede llegar a ser un rectángulo si y solo si al menos dos de sus lados y ángulos son iguales”.*
- *“Un poliedro es un prisma si tiene dos caras paralelas de igual forma y tamaño y sus ángulos miden 90° y sus lados miden 14 cm”.*
- *“Figura que tiene dos caras triangulares y tres cuadrados”.*
- *“Poliedro es un prisma cuando todas sus caras laterales son de una misma figura, son cuadrados y todas sus bases son triángulos”.*

Utilizando las definiciones que dieron los estudiantes y el cuadro hecho en el tablero (**Imagen 64** e **Imagen 65**) la maestra en formación realizó comentarios de las definiciones, para destacar las características necesarias que permitan formar la definición de prisma recto, en el siguiente dialogo se evidencia esto:

- *Maestra: “Hay que tener en cuenta que esa figura ya es un prisma, entonces hay características que se pueden quitar de algunas definiciones que dieron, ahora nos podemos enfocar en las figuras o polígonos que conforman el poliedro... ¿Qué polígono es esta cara lateral?”*



Imagen 66. Prisma Recto 1

- *Estudiantes: “Que es un cuadrado”*
- *Maestra: “Y si alargo la figura de esta manera... ¿Qué polígono es esta cara lateral ahora?”*



Imagen 67. Prisma Recto 2

- *Estudiantes: “Un rectángulo”*
- *Maestra: “Esta figura sigue siendo un prisma solo que con una característica importante en las caras laterales, entonces se puede quitar las medidas específicas en algunas definiciones que dieron y poner cuadrados o rectángulos... Los ángulos de ¿los cuadrados o rectángulos son?”*
- *Estudiantes: “Son rectos”*
- *Maestra: “Entonces a este prisma con una característica especial lo vamos a llamar prisma recto, entonces la definición sería es un prisma recto si y solo si las caras laterales son...”*
- *Estudiantes: “Son iguales”*
- *Maestra: “Sí, pero ¿qué otra característica tiene?”*
- *Estudiantes: “Cuadrados”*
- *Maestra: “Sí, o aparte de cuadrados pueden ser...”*
- *Estudiantes: “Rectángulos”*
- *Maestra: “Bueno formulen ustedes la definición”*
- *Estudiante A: “Es un prisma recto si y solo si sus caras laterales son cuadrados o más allá pueden ser rectángulos y las otras dos son triángulos”*
- *Maestra: “Enfoquémonos solo en las características de las caras laterales por ahora no pensemos en las bases”*
- *Estudiante B: “Un prisma es recto si y solo si las caras laterales son iguales y son cuadrados o rectángulos”*

Fragmento 6. Diálogo de la relación entre definiciones dadas por los estudiantes y datos del tablero

Como se observa en el ***Fragmento 6***, la maestra en formación guio a los estudiantes para llegar a la definición de prisma recto, quitando cosas innecesarias de las definiciones que ellos habían dado inicialmente, finalmente, la definición de prisma recto se planteó de la siguiente forma para los estudiantes:

D. Prisma recto: un prisma es recto si y solo si sus caras laterales son rectángulos.

Ahora bien, en el desarrollo de la actividad de poliedros (momento 1), se evidenció el proceso de conceptualización cuando los estudiantes encuentran propiedades de la figura entregada y tratan de escribir la definición, allí se encapsulan propiedades que permitieron formar la definición y con la ayuda de la maestra en formación se destacaron las cosas necesarias e innecesarias para construirla de forma concisa y como un enunciado bicondicional (***Fragmento 5 y Fragmento 6***). Durante el proceso para llegar a la definición de prisma recto, se tuvo en cuenta la definición de cuadrado desencapsulando algunas características de esta, permitiendo identificar que es una figura con cuatro ángulos rectos y reconociendo, a su vez, que el rectángulo también posee dicha característica, lo que permitió escribir de forma general la definición de prisma recto (***Fragmento 6***).

Por otro lado, se observó la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales que hace parte del proceso de visualización, cuando la maestra en formación tiene la conversación con los estudiantes (***Fragmento 5 y Fragmento 6***), ellos relacionan las características de la definición de cuadrado con la definición de rectángulo. Así mismo, se observó un pequeño intento de justificación del porqué en la definición de prisma recto se mencionó que las caras laterales son rectángulos, teniendo en cuenta que los estudiantes mencionaron que dichas caras podrían ser cuadrados (***Fragmento 4 y Fragmento 6***).

A continuación, la maestra preguntó a los estudiantes ¿Qué pasa si las bases y caras laterales del prisma recto son cuadrados? ¿Qué figura se forma? A lo que los estudiantes mencionaron “cubo” y se les pidió construirlo con ayuda de las *Varitas TRIMOV*.

Durante la construcción hubo preguntas como:

- *Maestra: “¿qué polígonos forman un cubo?”*
- *Estudiantes: “Cuadrados”*

- *Maestra: “¿qué características tienen los cuadrados?”*
- *Estudiantes: “Tienen igual medida de lados”*
- *Maestra: “¿y los ángulos?”*
- *Estudiantes: “son de 90”*
- *Maestra: “¿el cubo es un poliedro?”*
- *Estudiantes: “sí”*
- *Maestra: “¿es un prisma recto? recuerden la definición de prisma recto
(Después de revisar la definición de prisma recto en el cuaderno)*
- *Estudiantes: “sí”*

Fragmento 7. Diálogo de las características del cubo

Seguido a esto, se pidió que señalaran los vértices (conexiones naranjas), aristas (varitas verdes), y cuando se preguntó ¿Cuáles eran las bases? una estudiante respondió:

- *Estudiante: “cualquiera ¿no? Son iguales”*

Fragmento 8. Diálogo de las características del Cubo 2

Para continuar con el trabajo de poliedros, se definió diagonal en esta figura, para ello se recordó que al trabajar polígonos uno de sus elementos eran las diagonales con el fin de que relacionaran los conceptos, y se aclaró que las diagonales de un poliedro no eran las mismas diagonales del polígono que lo conforman (esto con ayuda de una construcción de un poliedro), dicha definición fue copiada en el tablero para que los estudiantes la escribieran en sus cuadernos. Luego, se les solicitó que construyeran las diagonales del cubo.

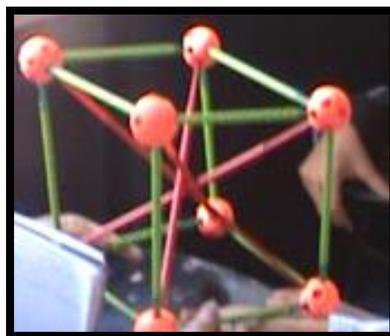


Imagen 68. Cubo con diagonales

Seguido a esto la maestra solicitó medir las diagonales del cubo y mencionar características que pudieran observar de ellas, algunas fueron:

- *Maestra: “¿Qué pueden decir de las medidas de las diagonales de un cubo?”*
- *Estudiante A: “Que miden igual”*
- *Maestra: “¿Cuándo una medida es igual? Recuerdan de ¿qué otra forma se puede decir?”*
- *Estudiante B: “Que son congruentes”*
- *Maestra: “¿Siempre pasa eso en las diagonales de un cubo? ¿Ustedes que creen?”*
- *Estudiantes: “Que no”*
- *Maestra: “Ejemplo el grupo 2 tiene un cubo más grande que el grupo 4, y en el grupo 2 las diagonales todas midieron 32 y en el grupo 4 todas las diagonales midieron 28, es decir que son congruentes las diagonales, intenten cada grupo con su construcción agrandar el cubo o reducirlo y miren de nuevo las medidas de las diagonales y respondan la pregunta ¿siempre las diagonales de un cubo son congruentes?”*
- ...
- *Estudiantes: “Si nos dan igual, entonces la respuesta es sí”*
- *Maestra: “Ya tenemos una característica y es que las diagonales miden igual o sea que son congruentes, ahora ¿Qué otra característica se puede notar de las diagonales que no tiene que ver con las medidas ni con el color?”*
- *Estudiantes: “Que se chocan”*
- *Maestra: “Y ¿dónde se chocan?”*
- *Estudiantes: “En el centro”*

Fragmento 9. Diálogo de las características de las diagonales del cubo

Con lo anterior se llegó a que las diagonales de un cubo son congruentes y se cortan en un mismo punto, esta conjetura fue escrita en el cuaderno.

Ahora bien, la maestra en formación presentó la definición de paralelepípedo y preguntó si el cubo es un paralelepípedo, a lo que los estudiantes respondieron que sí lo era. Luego, se

les pidió construir un paralelepípedo y sus diagonales las cuales debían medir para encontrar características de ellas (como se realizó con la construcción del cubo):

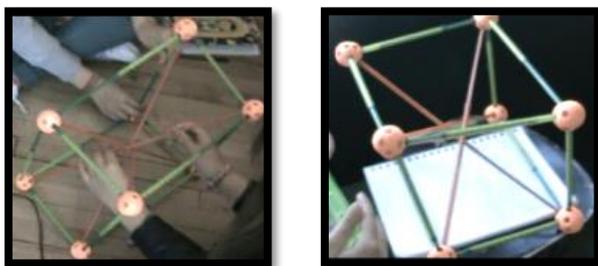


Imagen 69. Paralelepípedo con diagonales

- *Maestra:* “¿Qué pueden decir de las diagonales?”
- *Estudiante 1:* “que son congruentes, como en el cubo”
- *Maestra:* “y ¿podrías decir algo más?”
- *Estudiante 2:* “Qué se chocan en el centro (señalando la intersección)”

Fragmento 10. Diálogo de las características de las diagonales del paralelepípedo rectángulo

Así se logró llegar a la conjetura que las diagonales de un paralelepípedo son congruentes y se intersecan en un mismo punto, esto teniendo en cuenta que todos los estudiantes construyeron paralelepípedos rectángulos, pero la maestra en formación no se percató de aclarar que la conjetura encontrada solo ocurría en este tipo de paralelepípedo y además no se alcanzó a dar la definición de este.

En esta parte de la actividad (diagonales del paralelepípedo y del cubo y definición de paralelepípedo) se evidencia el proceso de visualización con la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales, cuando los estudiantes relacionaron las diagonales de un polígono y las diagonales de un poliedro e identificaron que las diagonales de un paralelepípedo se intersecaban en un mismo punto y eran congruentes (***Fragmento 10***), además, estas relaciones se encontraron por medio de la exploración dinámica de la figura tridimensional en donde la visualización y la exploración permitieron determinar una conjetura respecto a las diagonales de un paralelepípedo. Por otro lado, el proceso de conceptualización también está presente, cuando se pidió construir un prisma donde todas

sus caras fueran cuadrados, el estudiante debió usar la definición de cuadrado desencapsulando las características de este para construir la figura solicitada (**Fragmento 7**).

Luego, se propuso realizar la última actividad (**Anexo VI**) desde el punto dos (2), las siguientes construcciones se obtuvieron de dicho proceso (Imagen 70) con las cuales completaron el cuadro (**Imagen 71**):

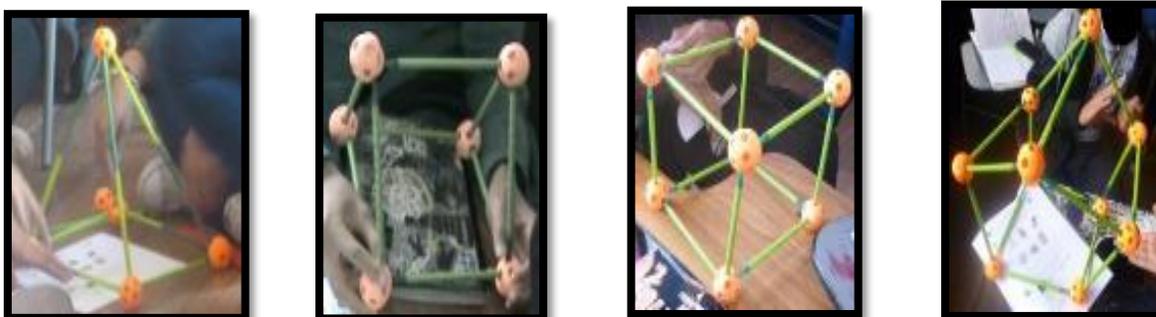


Imagen 70. Construcciones (punto 2 actividad 2)

	Cantidad de lados del polígono de la base	Cantidad de vértices	Cantidad de caras laterales	Cantidad de aristas
Con bases triangulares	3 ✓	6 ✓	4 ✗	9 ✓
Con bases Cuadradas	2 ✗	8 ✓	4 ✓	12 ✓
Con bases pentagonales	2 ✗	—	—	—

	Cantidad de lados del polígono de la base	Cantidad de vértices	Cantidad de caras laterales	Cantidad de aristas
Con bases triangulares	3 ✓	6 ✓	3 ✓	9 ✓
Con bases Cuadradas	4 ✓	8 ✓	4 ✓	12 ✓
Con bases pentagonales	5 ✓	10 ✓	5 ✓	15 ✓

	Cantidad de lados del polígono de la base	Cantidad de vértices	Cantidad de caras laterales	Cantidad de aristas
Con bases triangulares	3 ✓	4 ✗	4 ✗	6 ✗
Con bases Cuadradas	4 ✓	8 ✓	4 ✓	12 ✓
Con bases pentagonales	—	—	—	—

Imagen 71. Respuestas (punto 2 actividad 2)

Para este punto se percibe que algunos estudiantes no tenían clara la definición de prisma, porque en lugar de construir un prisma con base triangular construyeron una pirámide, por ende, los datos de la exploración realizada, que obtuvieron no fueron correctos. Además, se presentaron dificultades para identificar los elementos de un prisma y esto también produjo datos erróneos.

A continuación, se presentan las conjeturas obtenidas en los puntos 3, 4 y 5 del taller, a partir de la exploración realizada en el punto 2:

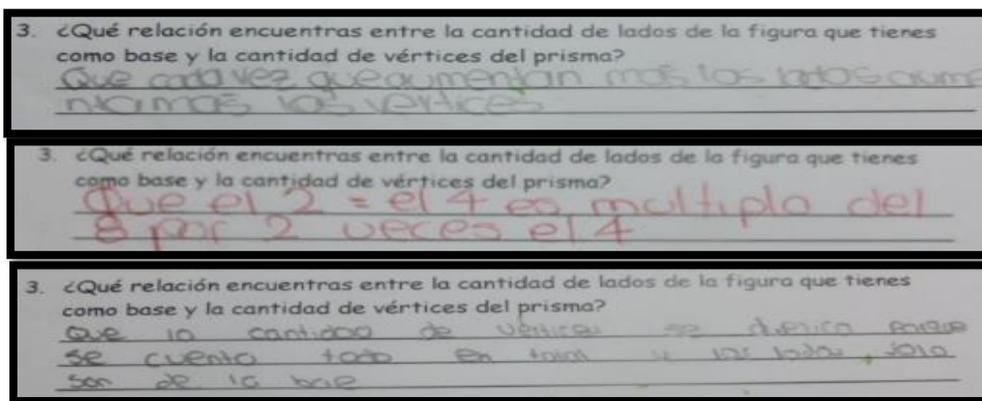


Imagen 72. Respuestas (punto 3 actividad 2)

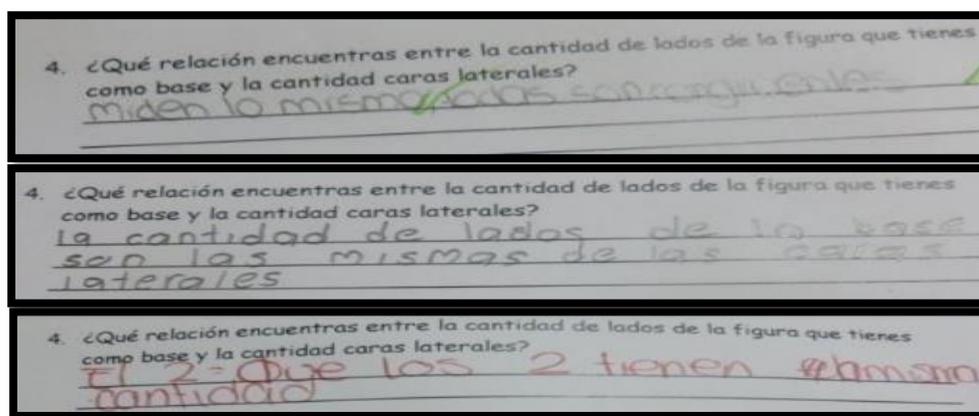


Imagen 73. Respuestas (punto 4 actividad 2)

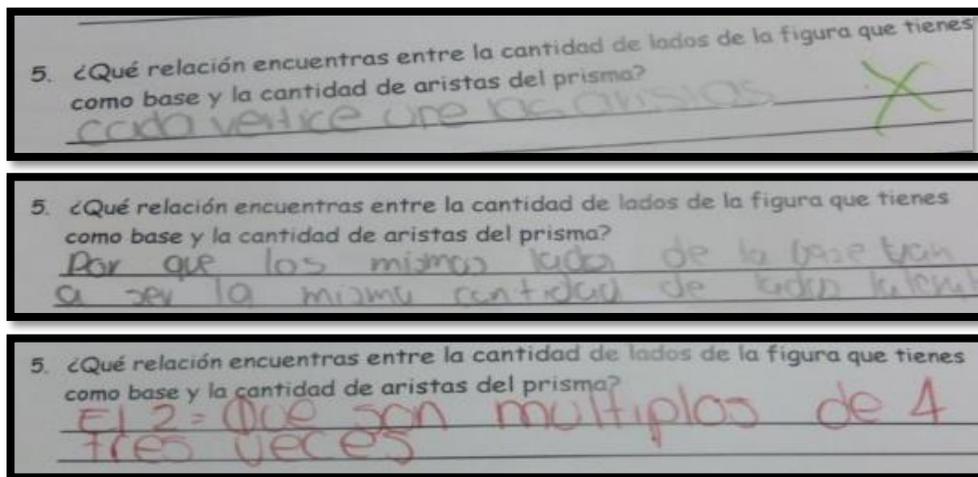


Imagen 74. Respuestas (punto 5 actividad 2)

En estas respuestas de los estudiantes se evidencia el proceso de conjeturación, de la siguiente manera:

En las conjeturas hechas en el tercer punto se pudo observar que los estudiantes vieron una relación entre las dos cantidades, al tratar de escribir la conjetura vieron características como, que una cantidad era el doble que la otra o que eran múltiplos, sin embargo, no escribieron de forma clara dichas características o al tratar de corroborarlas no hubo claridad. Ahora bien, en el cuarto punto del taller escribir la conjetura fue más fácil para la mayoría de los estudiantes, ya que las cantidades eran iguales, en algunos casos se presentó confusión por creer que si las cantidades eran iguales entonces eran congruentes, pero esto no es así, ya que no se están refiriendo a una medida que relaciona dos objetos geométricos sino a cantidades.

Finalmente, en el punto cinco del taller hubo estudiantes que lograron ver que las cantidades se triplicaban e intentaron escribir la conjetura, sin embargo, como consecuencia de no tener correctos algunos datos de la tabla del punto dos se dificultó la escritura de esta. Además, se percibe que algunos estudiantes posiblemente, por la falta de tiempo, no leyeron bien la pregunta o no lograron comprenderla, por tanto, sus respuestas no fueron acorde con lo que se preguntaba.

5. CONSIDERACIONES Y CONCLUSIONES

A lo largo del desarrollo del trabajo de grado se realizó un estudio del material didáctico para trabajar figuras tridimensionales, a partir de ello se diseñó el material *Varitas TRIMOV* que se enfocó en la exploración dinámica, intentando superar las dificultades que se pudieron observar en los materiales consultados. Además, se diseñaron actividades para fomentar los procesos de conceptualización y conjeturación, por medio de la exploración y visualización que permite el material *Varitas TRIMOV*, estas actividades fueron analizadas con el fin de encontrar ventajas y desventajas del material y la guía de gestión. Teniendo en cuenta todo lo anterior se tienen las siguientes conclusiones:

- ➔ Existe material didáctico para trabajar figuras tridimensionales, pero no todos facilitan la exploración dinámica. Respecto a los software de Geometría Dinámica, aunque existen varios que permiten el trabajo en tres dimensiones, no todas las instituciones educativas y estudiantes tiene acceso a ellos.
- ➔ Las *Varitas TRIMOV*, es un material que se puede construir con varitas de plástico de diferente diámetro y conexiones de icopor, los cuales son económicos y asequibles. El icopor para las conexiones es el resultado de probar con otros materiales (plástico, imanes, madera y caucho), siendo este, el que mejor se acopló a lo buscado por las autoras.
- ➔ Las actividades se diseñaron con el fin de promover los procesos de conceptualización y conjeturación, el primer proceso se promueve a partir de la construcción de una figura tridimensional (concepto imagen) y la búsqueda de características necesarias que se encapsularon para formar una definición. Por otro lado, se buscó llegar a algunas propiedades del prisma a través de la visualización y la exploración empírica y dinámica, por medio del material, de dicha figura, tomando algunos datos que permitieran determinar una conjetura, relacionada con una propiedad del objeto.

- En el diseño de las actividades se realizó una introducción de polígonos (2D) que permitió dar paso al estudio de poliedros (3D), en el cual se enfoca el uso del material *Varitas TRIMOV*.
- Durante el desarrollo de la prueba piloto se observó que el material fue llamativo, generó curiosidad y motivación para trabajar con él, sin embargo, al momento de realizar las construcciones algunos estudiantes no utilizaron de manera adecuada el material.
- El material *Varitas TRIMOV* con las líneas que tiene trazadas en ellas facilitó la toma de la medida de los lados de una figura tridimensional, el medidor de ángulos al tener la propiedad de deslizarse, permitió encontrar con facilidad la medida del ángulo. Así mismo, al tener la construcción de una figura tridimensional fue posible cambiar su posición desarrollando el proceso de visualización (habilidad de conservación de la percepción) y esto ayudó a identificar características de las figuras tridimensionales que posibilitó el proceso de conceptualización. Por otra parte, con el material *Varitas TRIMOV* se realizó una exploración empírica y dinámica que junto con las habilidades de la visualización (Conservación de la percepción, reconocimiento de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual), permitieron llegar al proceso de conjeturación mediante un enunciado general de las características encontradas respecto a la figura tridimensional que se estudió.
- Una desventaja del material *Varitas TRIMOV* se encuentra en las conexiones debido a que, al forzarlas inadecuadamente, el hueco se puede agrandar y esto genera que la varita se salga fácilmente, esto se puede evitar si se usa adecuadamente el material, para ello se deben seguir las instrucciones establecidas para este.
- Como acciones de mejoras de las actividades se sugieren los siguientes cambios:
 - Para un mejor aprendizaje es necesario anexar más ejemplos y no ejemplos de poliedro, prismas y demás objetos geométricos, que se trabajen con esta metodología de enseñanza.
 - **Actividad 1.** Anexar ciertas propiedades de polígonos (**Anexo VII**).
 - **Actividad 2.** Anexar más ejemplos de prisma recto (**Anexo VIII**)

- Al tratar el tema de la intersección de diagonales, esta sea menos formal, es decir tomarla como un choque entre ellas, debido a que las varitas no se intersecan sino se chocan.
- El material *Varitas TRIMOV* permite trabajar figuras bidimensionales (Polígonos), conceptos básicos de la geometría (punto, segmentos, colinealidad, punto medio, intersección y ángulos) y figuras tridimensionales (Poliedros; prismas y pirámides).
- Es necesario que haya de por medio actividades, para que el uso del material *Varitas TRIMOV* ayude en el aprendizaje de la geometría.
- Como maestras en formación el desarrollo de este trabajo de grado nos permitió reconocer los procesos de conjeturación y conceptualización, a pesar que dichos procesos se trabajaron durante la carrera de Licenciatura en Matemáticas, estos fueron abordados desde el rol de estudiante y en este trabajo de grado se abordaron desde el rol de docente, esto nos permitió profundizar en ellos identificando la visualización y la exploración, que son necesarios para estos procesos.
- Durante el diseño y construcción del material *Varitas TRIMOV*, surgieron ideas que no se habían tenido en cuenta en un inicio y que hicieron modificar el material varias veces, sin embargo, se logró llegar a lo deseado con el material, esto nos enseñó que el diseñar un material didáctico no es tarea fácil, pero con perseverancia se puede lograr.
- Teniendo en cuenta las actividades diseñadas para el uso del material y los objetivos alcanzados con ellas (construcción de figuras tridimensionales y procesos de conceptualización, conjeturación y visualización) evidenciamos que en nuestras vidas laborales podemos hacer uso del material *Varitas TRIMOV* con las actividades diseñadas en el trabajo de grado o proponiendo otras.
- Este trabajo de grado da cabida a otros, ya que, invita a la exploración del material *Varitas TRIMOV*, buscando proponer nuevas actividades con el uso de este o realizando modificaciones al material para trabajar otros objetos de la geometría. Por otro lado, invita al diseño y construcción de nuevos materiales didácticos que permitan trabajar geometría bidimensional y tridimensional de manera distinta.

BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E., & Soler, M. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números*, 85, 75-90.
- Angarita, Y., & Palacios, B. (2015). *Cátalogo de materiales y recursos didácticos. (Trabajo de grado)*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Arbulú, L. (2015). *Poliedros Regulares Teoría y Practica*. Lima, Perú: Lumbreras Editores.
- Bachenheimer, H. (23 de abril de 2007). *El color y los métodos de aprendizaje*. Obtenido de Banco de Objeto. Recursos digitales de apoyo a los procesos: <http://drupal.puj.edu.co/?q=node/488>
- Bolívar, C., & Sánchez, B. (2004). *Un Acercamiento a la geometría dinámica sin computador. (Trabajo de grado)*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿Puede tener un Papel protagónico? *Educación Matemática*, 17, 53-76.
- Camargo, L., Perry, P., Samper, C., & Molina, Ó. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias*, 99-116.
- Clemens, S., O'Daffer, P., & Cooney, T. (1984). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. Massachusetts, E.U.A.: Addison Wesley Publishing Company, Inc.
- Douek, N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school . *Educational Studies in Mathematics* , 89-110.
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from of visual perception. *Educational Study of Mathematics*, 163-183.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.

- Gómez, P. (2002). Análisis del Diseño de Actividades para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. En M. Penalva, G. Torregrosa , & J. Valls, *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (págs. 341-356). Alicante, , España: Universidad de Alicante.
- Gonzato, M., Godino, J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico matemáticos sobre visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 5-37.
- Guerrero, A. (2002). *Notas de Clase- Geometría en el Plano y en el Espacio*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1991). Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales. 1992 (pág. www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf). España: Departamento de Didáctica de la Matemática .
- Manrique, A., & Gallego, A. (2013). El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos. *Revista colombiana de Ciencias Sociales*, 4(1), 101-108.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Moise, E., & Downs, F. (1964). *Geometría Moderna* . Massachusett, EE.UU: Addison-Wesly Iberoamericana. S.A.
- Moreno, I. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Moreno, V. (2005). *Psicología del color y la forma*. Queretaro: Universidad de Londres.

- Muñoz, C. (2014). *Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas. (Trabajo de grado)*. Logroño, España: Universidad de la Rioja.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2013). Innovación en el aula de Geometría de nivel Universidad. En C. Samper, Ó. Molina, P. Perry, & L. Carmargo, *Geometría Plana Un espacio de aprendizaje* (págs. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Robles, V. (2016). *Cuadriláteros Teoría y práctica*. Lima, Perú: Lumbreras Editores.
- Samper, C., & Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática*, 29(1), 36-60.
- Samper, C., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2013). *Elementos de Geometría*. Bogotá-Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., Molina, Ó., Perry, P., & Camargo, L. (2013). *Geometria Plana Un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *In Advanced Mathematical thinking*, 65-81.
- Vittone, F., Gianatti, J., & Alegre, M. (2016). Medida y Congruencia de Segmentos y Ángulos. *Geometría I*. Rosario, Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional de Rosario.
- Wentworth, J., & Smith, D. (1972). *Geometría Plana y del Espacio*. México D.F.: Editorial Porrúa S.A.

ANEXOS

Anexo I. MATERIAL TABLITAS EN MOVIMIENTO

El material Las Tablitas en Movimiento fue elaborado por el profesor japonés Noboru Hisamichi y permite realizar diversas construcciones de figuras geométricas planas que posean segmentos, permitiendo desplazamientos y modificación de las figuras realizadas. Dicho material consta de diez tablitas de diferentes tamaños y con características particulares que se adhieren a un tablero metálico (complemento diseñado para el trabajo de grado) gracias a que en sus extremos posee imanes (Bolívar y Sánchez, 2004).

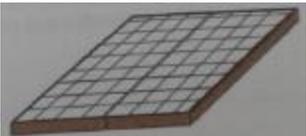
Característica	Imagen
Cuatro tablitas que tienen imanes fijos en sus extremos. Miden 26 <i>cm</i>	
Dos tablitas que tienen dos imanes que se deslizan a lo largo de ellas. Miden 75 <i>cm</i>	
Dos tablitas que tienen un imán fijo en un extremo y otro que se desliza a lo largo de ellas. Miden 75.5 <i>cm</i>	
Dos tablitas que tienen imanes fijos en sus extremos y un mecanismo que les permite variar su tamaño. Miden 31 <i>cm</i> – 55 <i>cm</i>	
Un tablero metálico con cuadrícula de 50 <i>cm</i> × 50 <i>cm</i>	

Tabla 9. Tablitas en Movimiento

Anexo II. ACTIVIDAD 1. POLÍGONOS

	Universidad Pedagógica Nacional <i>Polígono y sus elementos</i>	
	Realizado por las maestras en formación: Cindy Lorena Garzón Aguilar Jasbleidy Rocio Vivas Sarmiento	
Nombre:	Fecha:	Curso:



➡ Observa las figuras dadas y desarrolla:

- a. Pega en el recuadro “**SON POLÍGONOS**” aquellas figuras que cumplen la definición de polígono.
- b. Pega en el recuadro “**NO SON POLÍGONOS**” aquellas figuras que no cumplen con la definición de polígono
- c. Escoge una figura que hayas pegado en el recuadro “**SON POLÍGONOS**” y retíñe de **azul** los lados del polígono, de **rojo** los vértices y con **morado** traza las diagonales.

Son Polígonos	No son polígonos

Tabla 10. Polígonos y No Polígonos

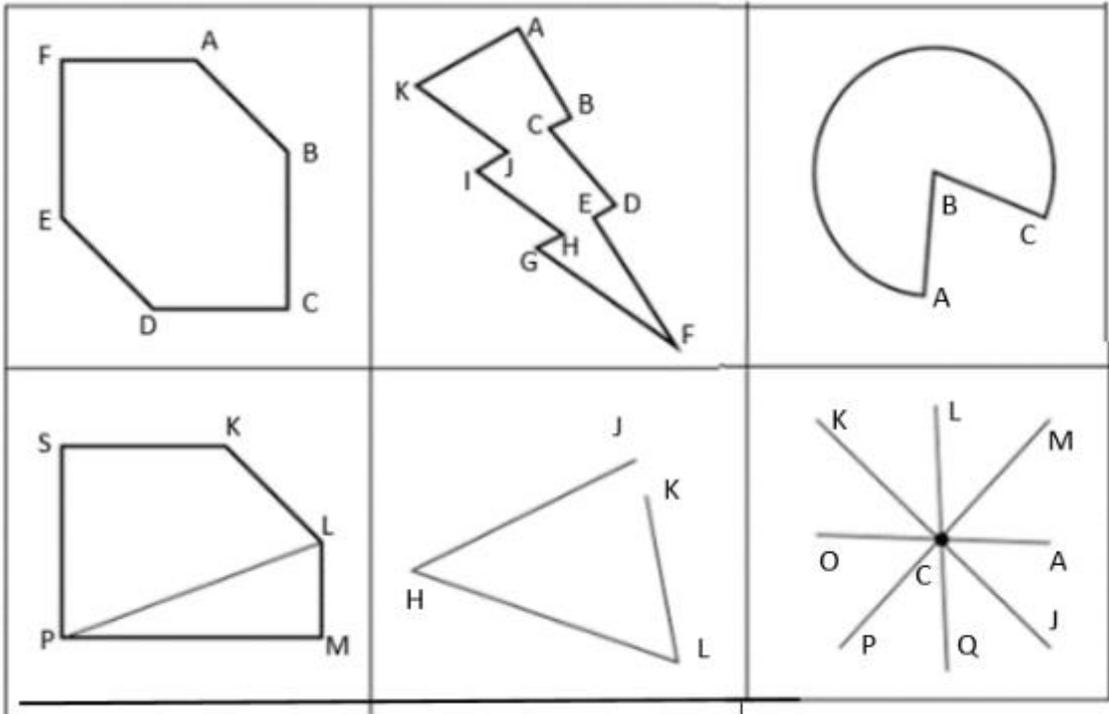
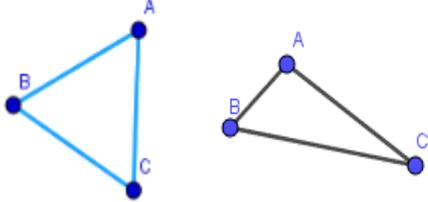
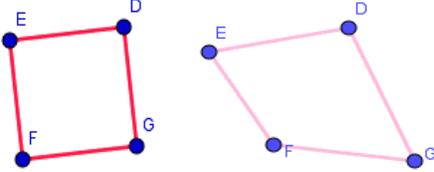
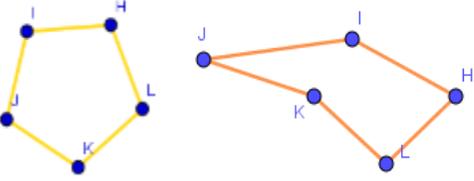
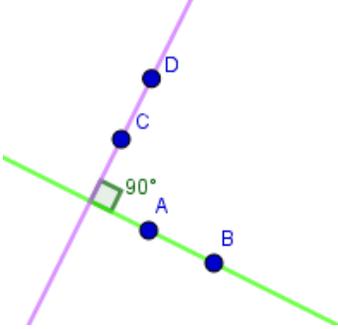
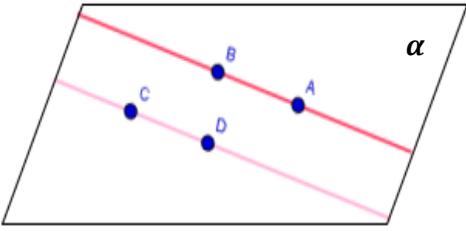
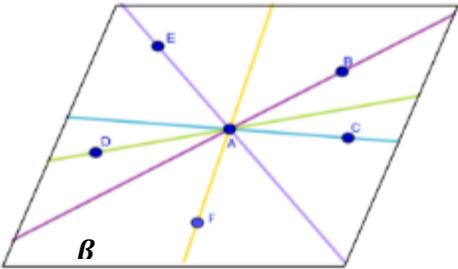
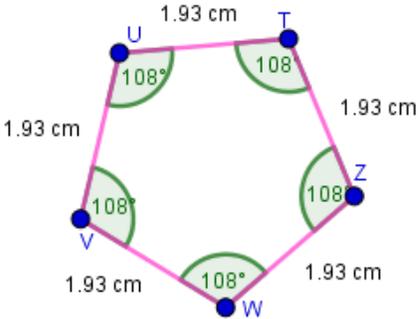
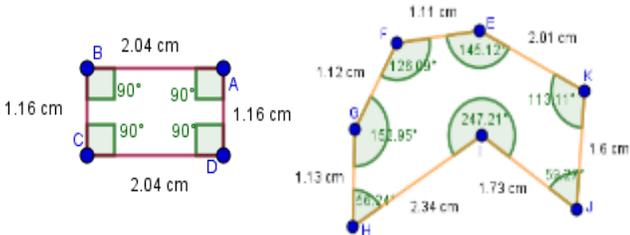


Imagen 75. Polígonos y No Polígonos

Anexo III. DEFINICIONES

<p>Triángulo: Un triángulo es un Polígono de tres lados</p>	
<p>Cuadrilátero: Un cuadrilátero es un Polígono de cuatro lados</p>	
<p>Pentágono: Un pentágono es un Polígono de cinco lados</p>	
<p>Rectas perpendiculares Se cortan formando un ángulo de 90°</p>	

<p>Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas si y solo si nunca se cortan</p>	
<p>Rectas secantes: Dos o más rectas son secantes si cortan en un punto</p>	
<p>Polígono regular: Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y todos sus ángulos de igual medida</p>	
<p>Polígono irregular: Un polígono irregular es aquel cuya medida de sus lados o ángulos es diferente</p>	

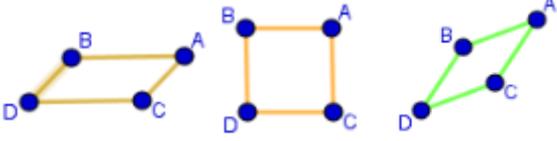
<p>Paralelogramo: Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y congruentes</p>	 <p>The image contains three diagrams of parallelograms. The first is a slanted parallelogram with vertices labeled D (bottom-left), B (top-left), A (top-right), and C (bottom-right). The second is a square with vertices labeled B (top-left), A (top-right), C (bottom-right), and D (bottom-left). The third is a rhombus with vertices labeled D (bottom-left), B (top-left), A (top-right), and C (bottom-right). All diagrams are drawn with blue dots for vertices and colored lines (yellow, orange, and green) for the sides.</p>
---	---

Tabla 11. Definiciones

Anexo IV. POLÍGONOS REGULARES E IRREGULARES

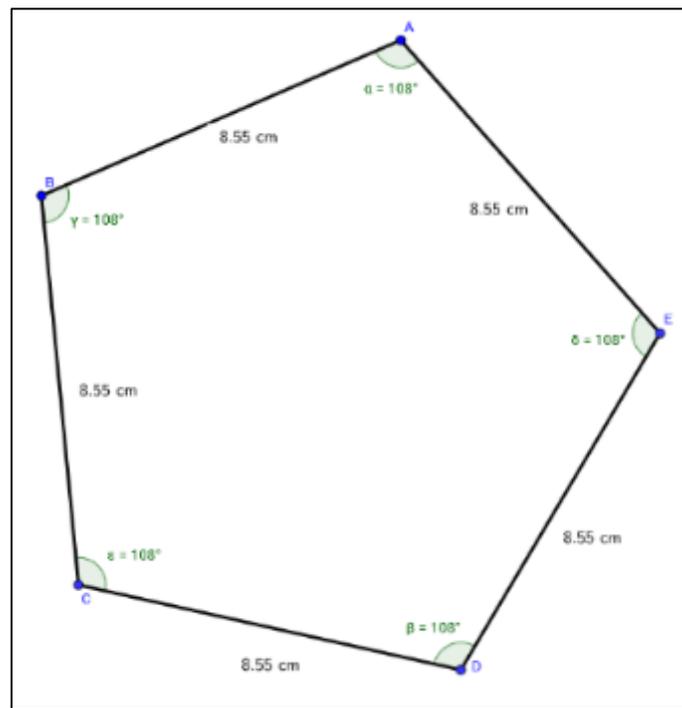
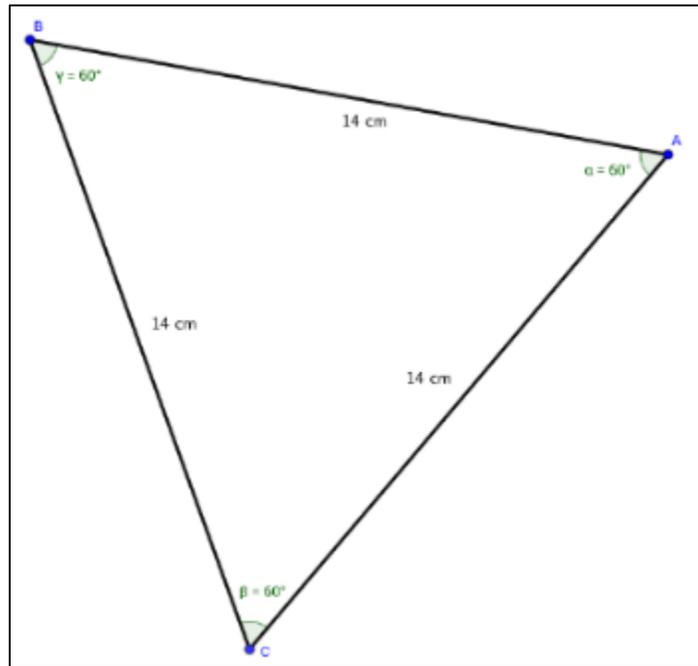


Imagen 76. Polígonos regulares (Triángulo - Pentágono)

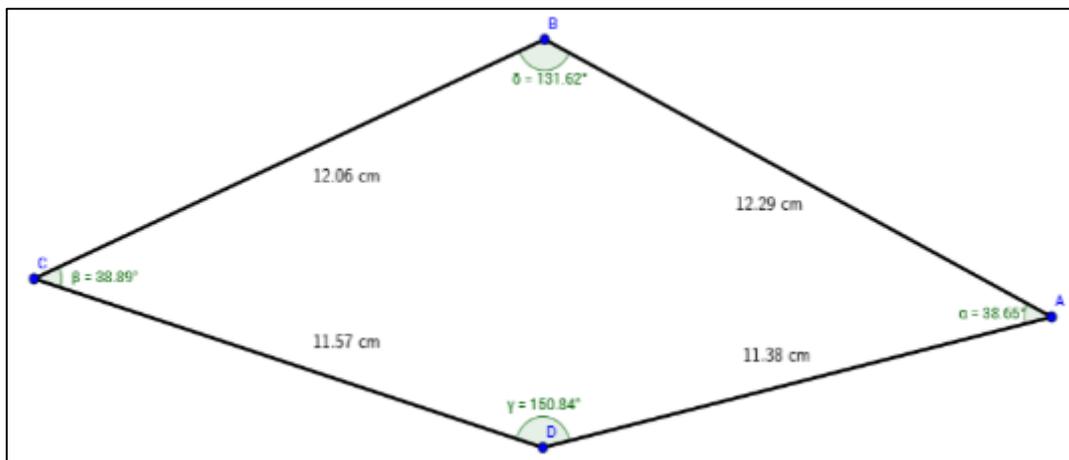
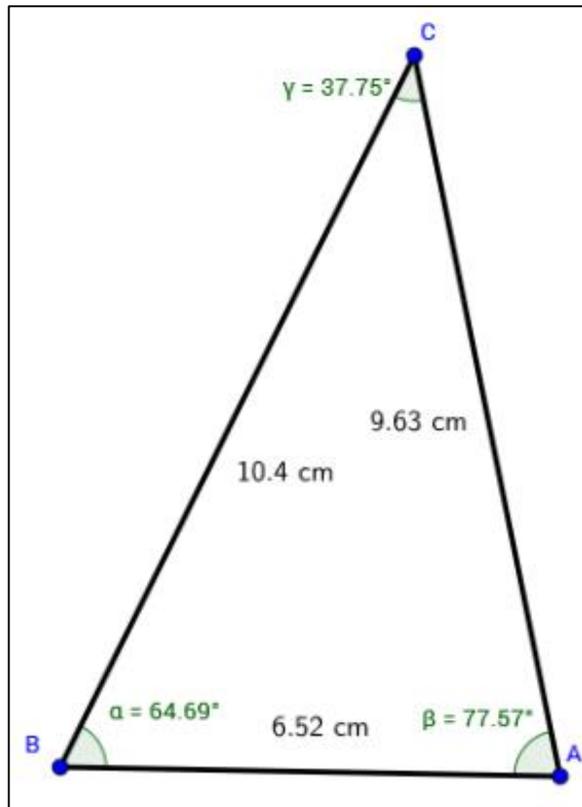


Imagen 77. Polígonos Irregulares (Triángulo – Cuadrilátero)

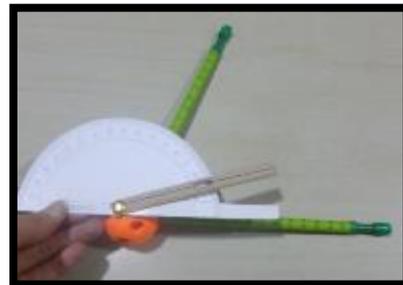
Anexo V. MANUAL DE INSTRUCCIÓN *Varitas TRIMOV*

Para usar *Varitas TRIMOV* se debe tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

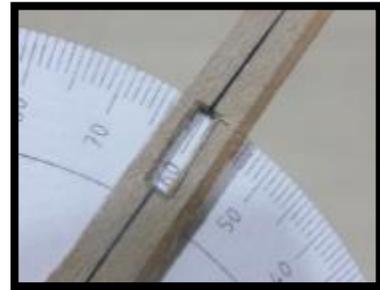
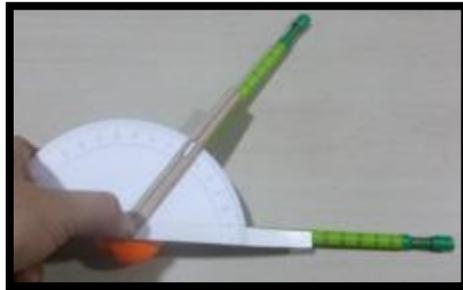
- Al insertar una varita en un hueco de una conexión (pelota) hágalo girando el palo hacia un solo lado hasta que la varita haya ingresado totalmente en el hueco realice la misma acción para separar la conexión de la varita.



- Para cambiar la medida de las varitas hale de los extremos expandiendo la varita o reduciéndola según lo desee.
- Para tomar la medida de un ángulo con el medidor de ángulos de *Varitas TRIMOV*, siga las siguientes instrucciones:
 - Ubique el centro del medidor encima de la conexión (pelota) que corresponde al vértice del ángulo que va a medir.



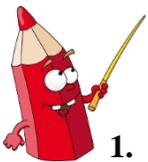
- Luego, ubique el segmento blanco (aquel que no se puede mover) en una de las varitas del ángulo y el segmento café (aquel que se puede mover) ubíquelo sobre la otra varita y observe por la ranura la medida que le corresponde.



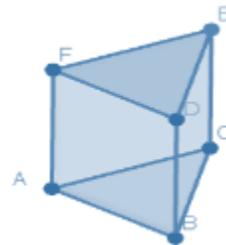
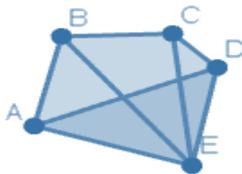
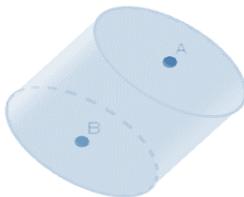
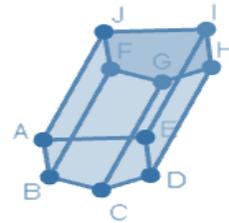
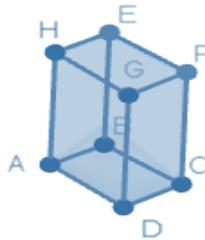
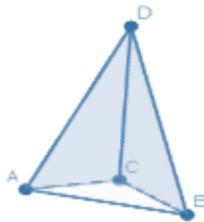
- No fuerce la varita cuando se encuentra en una conexión (pelota), para su facilidad y el buen uso del material busque el hueco apropiado que le permita encontrar la inclinación que desea obtener para su construcción.

Anexo VI. ACTIVIDAD 2. PRISMAS

	Colegio Integral ERVID Universidad Pedagógica Nacional <i>Prismas</i>	
	Realizado por las maestras en formación: Cindy Lorena Garzón Aguilar Jasbleidy Rocio Vivas Sarmiento	
Nombres:	Fecha:	Curso:



1. Encierre con color rojo aquellas figuras que son prismas, explique por qué lo son:





2. Con ayuda del material *Varitas TRIMOV* construya un prisma con las características mencionadas en el siguiente cuadro y complételo:

	Cantidad de lados del polígono que es base	Cantidad de vértices	Cantidad de caras laterales	Número de aristas
Con bases triangulares				
Con bases Cuadradas				
Con bases pentagonales				

3. ¿Qué relación encuentra entre la cantidad de lados de la figura que tienes como base y la cantidad de vértices del prisma?

4. ¿Qué relación encuentra entre la cantidad de lados de la figura que tienes como base y la cantidad de caras laterales?

5. ¿Qué relación encuentra entre la cantidad de lados de la figura que tienes como base y la cantidad de aristas del prisma?

Anexo VII. SUGERENCIA ACTIVIDAD 1

Teniendo en cuenta la **Actividad 1. Polígonos** se sugiere anexar ciertas propiedades de los polígonos, estas pueden ser finalizando el momento 1 o el momento 2 de dicha actividad con el fin de que puedan servir más adelante en el estudio de poliedros.

A continuación, se muestra un fragmento de la última parte de la actividad 1 momento 1 con dicho anexo:

... Seguido a esto, se entregará a cada estudiante seis figuras (**Anexo II**), estas deberán ser pegadas en cada recuadro (polígonos y no polígonos), a partir de la definición, luego los estudiantes deberán seleccionar un polígono e identificar los lados de color azul, los vértices de color rojo y dibujar las diagonales de color morado.

Finalmente, con ayuda de la maestra en formación se estudiarán propiedades de los polígonos como:

- Todo cuadrado es un rectángulo.
- Todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles.

Nota: para el estudio de estas propiedades el profesor puede abordarlas mediante la búsqueda de características e ir socializando con los estudiantes lo encontrado...

Ahora, un fragmento de la última parte de la actividad 1 momento 2 con dicho anexo:

... Seguido a esto, se le entregará a cada estudiante un grupo de imágenes de polígonos (**Anexo IV**) y se solicitará que los clasifiquen en polígonos regulares o irregulares, para ello cada una de las figuras se clasificará con ayuda de todo el curso realizando las siguientes preguntas:

- ¿Esta figura es polígono regular o irregular?
- ¿Por qué creen que es regular o irregular?

Y luego se pegarán en el cuaderno.

Finalmente, con ayuda de la maestra en formación se estudiarán propiedades de los polígonos como:

- Todo cuadrado es un rectángulo.
- Todo triángulo equilátero es un triángulo isósceles.

Nota: para el estudio de estas propiedades el profesor puede abordarlas mediante la búsqueda de características e ir socializando con los estudiantes lo encontrado...

Anexo VIII. SUGERENCIA ACTIVIDAD 2. MOMENTO 2

Teniendo en cuenta la **Actividad 2. Poliedros, momento 2**, se sugiere anexar más ejemplos de prisma recto con diferentes bases para que al momento de definir este, no se tenga en cuenta las características de las bases si no de las caras laterales.

A continuación, se muestra un fragmento de la actividad 2 momento 2 con dicho anexo:

...Las maestras en formación presentan la definición de planos paralelos y la ejemplifican.

*Dos o más **planos son paralelos** si y solo si no se intersecan en algún punto.*

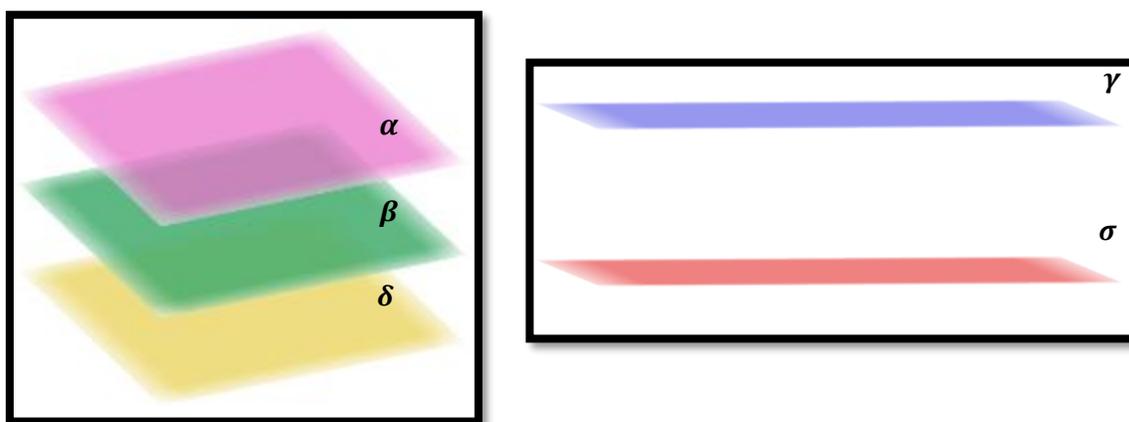


Imagen 78. Planos Paralelos

Luego, se presenta a los estudiantes la siguiente definición de prisma:

D. Prisma *Un poliedro es prisma si y solo si tiene dos caras paralelas, de igual forma y tamaño, llamadas bases y las demás caras son paralelogramos, llamadas caras laterales del prisma.*

Luego, se les mostrará representaciones de prismas (con ayuda de las *Varitas TRIMOV*) como: prismas rectos donde sus bases sean un polígono de tres lados, de cuatro lados y de cinco lados y prismas no rectos donde sus bases sean los mismos tipos de polígonos mencionados anteriormente.

Y se explicará porqué cada una de ellas cumple con la definición de prisma con la ayuda de preguntas como:

- ¿Es un poliedro? ¿Por qué?

- ¿Es un prisma? ¿Por qué?
- ¿Cuáles son sus bases? ¿Por qué?

Seguido a esto, a cada grupo de estudiantes se les entregará una réplica cualquiera de uno de los prismas rectos mostrados, luego se les pedirá tomar medidas tanto de segmentos como de lados de las caras laterales que conforman la figura, con el objetivo de identificar sus características y definir Prisma recto.

D. Prisma recto: un prisma es recto si y solo si sus caras laterales son rectángulos” ...