

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática



TESIS

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LA ELABORACIÓN DE
MODELOS PARA VISUALIZAR OBJETOS DEL ESPACIO
EUCLIDIANO TETRADIMENSIONAL**

Presentada por:

Br. Emanuel Enrique Sobrino Merino

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

Línea de investigación: Matemática y Estadística

Piura, Perú

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Facultad de Ciencias

Escuela Profesional de Matemática



TESIS

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LA ELABORACIÓN DE
MODELOS PARA VISUALIZAR OBJETOS DEL ESPACIO
EUCLIDIANO TETRADIMENSIONAL**

Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Emanuel Enrique Sobrino Merino".

Emanuel Enrique Sobrino Merino

Tesista

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Robert Ipanaque Chero".

Robert Ipanaque Chero

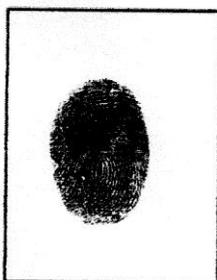
Asesor

Declaración jurada de originalidad de trabajo de investigación

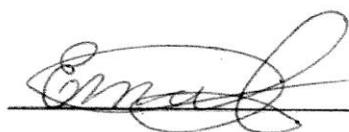
Yo **Emanuel Enrique Sobrino Merino** identificado con el número de **DNI 76435122** en la condición de egresado de la facultad de Ciencias Escuela Profesional de Matemática y domicilio en la Av. San Hilarión Mz. "C" lote dos Sector "c" Nueva Sullana en la provincia de Sullana del departamento de Piura con celular 952464430 Email enrique1995_26xd@hotmail.com

DECLARO BAJO JURAMENTO: que el trabajo de investigación que presento en la oficina central de investigación (OCIN), es Original, no siendo copia parcial ni total de un trabajo de investigación desarrollado, o realizado en el Perú o en el Extranjero, en caso de resultar falsa la información proporciono, me sujeto a los alcances establecidos en el Art.º 411, del código Penal concordante con el Art 32º de la ley N° 27444, y la ley del Procedimiento Administrativo General y las Normas Legales de protección a los derechos de Autor.

En fe de lo cual firmo la presente



Piura 5 de Junio del 2019



DNI N° 76435122

Artículo 411.-El que, en un procedimiento administrativo, hace una falsa declaración en relación a hechos o circunstancias que le corresponde probar, violando la presunción de verdad establecida por ley, será reprimido con pena privativa de la libertad no menor de uno ni mayor de cuatro años.

Art. 4. Inciso 4.12 del reglamento del registro Nacional de Trabajos de Investigación para optar grados académicos y títulos profesionales -RENATI Resolución del Consejo Directivo N° 033-2016-SUNEDU/CD



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

Facultad de Ciencias

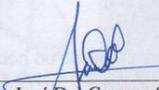
Escuela Profesional de Matemática

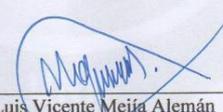


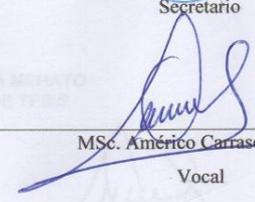
TESIS

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LA ELABORACIÓN DE
MODELOS PARA VISUALIZAR OBJETOS DEL ESPACIO
EUCLIDIANO TETRADIMENSIONAL**

Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico


MSc. José Del Carmen Silva Mechato
Presidente


Dr. Luis Vicente Mejía Alemán
Secretario


MSc. Américo Carrasco Tineo
Vocal



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA FACULTAD DE CIENCIAS



"AÑO DE LA LUCHA CONTRA LA CORRUPCIÓN Y LA IMPUNIDAD"

ACTA DE SUSTENTACIÓN 072-2019-UI-FC-UNP

FACULTAD DE CIENCIAS

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para evaluar la Tesis denominada "FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LA ELABORACIÓN DE MODELOS PARA VISUALIZAR OBJETOS DEL ESPACIO EUCLIDIANO TETRADIMENSIONAL", presentada por el señor Bachiller EMANUEL ENRIQUE SOBRINO MERINO, con el asesoramiento del Lic. Robert Ipanaqué Chero; oídas las observaciones y respuestas a las preguntas formuladas, y de conformidad al Reglamento de Tesis para obtener el Título Profesional en la Facultad de Ciencias, lo declaran:

APROBADO (✓)

DESAPROBADO ()

Con la mención de:

M.V. Y BUENO

(✓) En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo de Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**.

(✓) En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo Universitario de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**; después que el sustentante incorpore la sugerencia del Jurado Calificador.

Piura, 07 de noviembre de 2019.

UNP

Dr. JOSÉ DEL CARMEN SILVA MEHATO
PRESIDENTE DE JURADO DE TESIS

Dr. LUIS VICENTE MEJÍA ALEMÁN
SECRETARIO DE JURADO DE TESIS

Lic. AMÉRICO CARRASCO TINEO, MS.c.
VOCAL DE JURADO DE TESIS



Campus Universitario - Urb. Miraflores S/N. Castilla
PIURA - PERU

DEDICATORIA

Dedico esta investigación a Dios en primer lugar a Él sea la Gloria y Honra, a mis padres por el apoyo incondicional en los años en mi amada Universidad y a todos los profesores que han sido parte de mi formación como profesional.

AGRADECIMIENTOS

A Dios en primer lugar y a todas las personas que han sido participes en el proceso y conclusión de este trabajo principalmente al Lic. Robert Ipanaqué Chero Asesor de esta tesis y maestro, también a una persona muy especial para mí que es mi ayuda idónea y el amor de mi vida.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	2
I. Aspectos de la problemática	4
1.1. Descripción de la realidad problemática	4
1.2. Formulación del problema de investigación	4
1.3. Justificación e importancia de la investigación	4
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo general	5
1.4.2. Objetivos específicos	5
II. Marco teórico	5
2.1. Antecedentes de la investigación	5
2.2. Bases teóricas	6
2.2.1. Sistema de coordenadas rectangulares en \mathbb{R}^3	6
2.2.2. Geometría descriptiva: los sistemas de representación	8
2.2.3. Submersión	9
2.2.4. Base apócrifa	9
2.2.5. Modelo m –dimensional	9
2.2.6. Expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal	10
2.2.7. Obtención de una base apócrifa	10
2.2.8. Utilidad de la expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal	11
2.2.9. Rotaciones en dos dimensiones	14
2.2.10. Rotaciones en tres dimensiones	14
2.2.11. Simulación de rotación en tres dimensiones	15
2.3. Glosario de términos básicos	16
2.3.1. Sistema axonométrico ortogonal asimétrico	16
2.3.2. Sistema axonométrico ortogonal dimétrico	16
2.3.3. Sistema axonométrico ortogonal trimétrico	16
2.3.4. Sistema axonométrico ortogonal tetramétrico	16

2.3.5.	Sistema axonométrico ortogonal pentamétrico	16
2.3.6.	Sistema axonométrico ortogonal simétrico	16
2.4.	Hipótesis.....	16
III.	Marco metodológico.....	17
3.1.	Métodos y procedimientos.....	17
3.2.	Aspectos éticos	17
IV.	Resultados y discusión	17
4.1.	Sistema de coordenadas rectangulares en \mathbb{R}^4	17
4.2.	Expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal	21
4.3.	Obtención de una base apócrifa.....	21
4.4.	Utilidad de la expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal.....	22
4.5.	Rotaciones en cuatro dimensiones	27
4.6.	Simulación de rotación en cuatro dimensiones	29
4.7.	Automatización de las interpretaciones geométricas de los resultados	29
4.7.1.	Funciones previas	29
4.7.2.	La función Graphics4D.....	30
4.7.3.	La función Plot4D	32
4.7.4.	La función ParametricPlot4D	33
4.8.	Ejemplos.....	39
	Conclusiones	43
	Recomendaciones.....	44
	Referencias bibliográficas	45
	Anexos	47
	ANEXO 1.....	48

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto \mathbf{O}	6
Figura 2. Punto $P(x, y, z)$ en un sistema de coordenadas rectangulares.....	7
Figura 3. Tres puntos trazados según el método de proyecciones paralelas.	8
Figura 4. Sistemas axonométricos ortogonales: isométrico (izquierda), dimétrico (centro) y trimétrico (derecha).	9
Figura 5. Obtención de la base apócrifa de un modelo bidimensional dimétrico.....	10
Figura 6. Un cubo visualizado en un modelo bidimensional dimétrico.	11
Figura 7. Paraboloide hiperbólico visualizado en un modelo bidimensional dimétrico.....	11
Figura 8. Arista de un cubo unitario visualizada en un MBD.....	12
Figura 9. “Parche” de un paraboloide hiperbólico visualizado en un MBD.	13
Figura 10. Hélice (izquierda) y paraboloide circular (derecha) visualizados en un MBD.	13
Figura 11. Cubo y paraboloide hiperbólico visualizados en un modelo bidimensional simétrico....	13
Figura 12. Rotación de un punto en el plano.	14
Figura 13. Rotación de un punto en el espacio.	15
Figura 14. Simulación de la rotación de una hélice.	15
Figura 15. Cuatro hiperplanos tridimensionales en \mathbb{R}^4 mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto común \mathbf{O}	18
Figura 16. Seis planos mutuamente perpendiculares en \mathbb{R}^4 que se cortan en el punto común \mathbf{O}	18
Figura 17. Localización de un punto en \mathbb{R}^4	19
Figura 18. Ubicación de los ejes según la proyección trimétrica.	20
Figura 19. Localización de dos puntos específicos en \mathbb{R}^4	20
Figura 20. Obtención de la base apócrifa de un modelo tridimensional trimétrico.	21
Figura 21. A la izquierda el modelo propuesto por Lehmann y a la derecha una generalización natural del mismo.....	22
Figura 22. Un tesseracto (hipercubo) visualizado en un modelo tridimensional trimétrico.....	22
Figura 23. Hiperparaboloide visualizado en un modelo tridimensional trimétrico.	23
Figura 24. Arista de un tesseracto unitario visualizada en un MTT.	24
Figura 25. “Parche” de un hiperparaboloide visualizado en un MTT.	24
Figura 26. Curva (izquierda) y superficie (derecha) visualizados en un MTT.....	26
Figura 27. Hiperparaboloide visualizado en un MTT.	26
Figura 28. Tesseracto e hiperparaboloide visualizados en un modelo tridimensional simétrico.	26
Figura 29. Simulación de la rotación de una curva.	28
Figura 30. Simulación de la rotación de una superficie.	28

Figura 31. Simulación de la rotación de un sólido.....	29
Figura 32. Uso de Graphics4D para graficar primitivas.	40
Figura 33. Uso de Plot4D para graficar sólidos.	41
Figura 34. Uso de Parametric4D para graficar superficies.	41
Figura 35. Uso de Parametric4D para graficar superficies.	42
Figura 36. Uso de Parametric4D para graficar sólidos.	42

RESUMEN

En este trabajo se extiende el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Luego, se define analíticamente dicho modelo con lo que se sientan las bases para definir otros modelos. Se visualizan puntos, curvas, superficies y sólidos en los modelos elaborados. Además, se simula diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados. Finalmente, se automatiza las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.

PALABRAS CLAVE: Espacio tetradimensional, curvas en \mathbb{R}^4 , superficies en \mathbb{R}^4 , sólidos en \mathbb{R}^4 .

ABSTRACT

This work extends the most common two-dimensional model to visualize objects of the three-dimensional Euclidean space to a three-dimensional model to visualize objects of the three-dimensional Euclidean space. Then, this model is defined analytically with what the foundations are laid to define other models. Points, curves, surfaces and solids are displayed in the elaborated models. In addition, different points of view of the objects of the tetradimensional Euclidean space in simulated models are simulated. Finally, the geometric interpretations of the results obtained are automated using the Wolfram Mathematica software.

KEYWORDS: Tetradimensional space, curves in \mathbb{R}^4 , surfaces in \mathbb{R}^4 , solids in \mathbb{R}^4 .

INTRODUCCIÓN

El concepto de multidimensionalidad cobra interés, en el mundo moderno, en la época victoriana (Canales, 1999). Es en esta época, exactamente en 1884, que el eclesiástico inglés Edwin Abbott (O'Connor & Robertson, 2005) publica la novela Flatland (Eldritch Press, 1991) en la cual se describen de manera sencilla y amena temas de profundo significado matemático, relacionadas con los espacios euclidianos uni, bi, tri y tetra dimensionales, que muchas veces resultan difíciles de asimilar aún en la época actual. Con la aparición de las primeras computadoras electromecánicas programables entre los años 1930 y 1940 (Clements, 2014) y su posterior desarrollo empieza a hacerse posible incursionar en la visualización de objetos del espacio euclidiano tetradimensional (Noll, 1967; Hoffmann & Zhou, 1990). A partir de estos trabajos se han realizado muchos más a nivel internacional y nacional, pero en tales trabajos no se mencionan los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los modelos que utilizan para las visualizaciones. No obstante, un trabajo de tesis de maestría (Vilcherrez & Poicón, 2018) y un artículo (Velezmoro & otros, 2019) mencionan conceptos de álgebra lineal en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Es con base en tales conceptos que se pretende realizar este trabajo de tesis.

En este trabajo se establecen los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Para ello se extiende el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Luego se define analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos. Seguidamente se procede a visualizar puntos, curvas, superficies, superficies complejas, sólidos e hipersuperficies en los modelos elaborados y se simulan diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados. Finalmente se automatizan las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.

Este trabajo se realiza porque no se han encontrado los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los diversos modelos utilizados para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional y para establecer los fundamentos matemáticos que permiten la elaboración de tales modelos. Los fundamentos matemáticos que se establecen se utilizan en la elaboración de un paquete de comandos en el software Mathematica que permita graficar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Además, sirve como base para, en un trabajo posterior, hacer

una extensión natural para elaborar modelos que permitan visualizar objetos del espacio euclidiano de dimensión mayor a cuatro.

En la búsqueda de antecedentes relacionados con este trabajo de investigación se pudo tener acceso virtual a cuatro trabajos de investigación (Velezmoro & Ipanaqué, 2015; Velezmoro & Ipanaqué, 2015b; Vilcherrez & Poicón, 2018; Velezmoro & otros, 2019).

I. ASPECTOS DE LA PROBLEMÁTICA

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

El concepto de multidimensionalidad cobra interés, en el mundo moderno, en la época victoriana (Canales, 1999). Es en esta época, exactamente en 1884, que el eclesiástico inglés Edwin Abbott (O'Connor & Robertson, 2005) publica la novela Flatland (Eldritch Press, 1991) en la cual se describen de manera sencilla y amena temas de profundo significado matemático, relacionadas con los espacios euclidianos uni, bi, tri y tetra dimensionales, que muchas veces resultan difíciles de asimilar aún en la época actual. Con la aparición de las primeras computadoras electromecánicas programables entre los años 1930 y 1940 (Clements, 2014) y su posterior desarrollo empieza a hacerse posible incursionar en la visualización de objetos del espacio euclidiano tetradimensional (Noll, 1967; Hoffmann & Zhou, 1990). A partir de estos trabajos se han realizado muchos más a nivel internacional y nacional, pero en tales trabajos no se mencionan los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los modelos que utilizan para las visualizaciones (Zhou, 1991; Sakai & Hashimoto, 2006; Wang & otros, 2013; Xiaoqi, 2015; Volkert, 2017; Wuyts, 2017). Sin embargo, es posible asumir que los autores de estos trabajos basan sus resultados en la declaración geométrica del pintor alemán Karl Wilhelm Pohlke (1583), la cual es fundamental para las proyecciones axonométricas y que se conoce como el teorema de Pohlke (Emch, 1918; Wikipedia, 2017; Wikipedia, 2019).

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿Qué fundamentos matemáticos permiten la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional?

1.3. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo se realiza porque no se han encontrado los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los diversos modelos utilizados para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.

Este trabajo se realiza para establecer los fundamentos matemáticos que permiten la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.

Los fundamentos matemáticos que se establecen se utilizan en la elaboración de un paquete de comandos en el software Mathematica que permite graficar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Además, sirve como base para, en un trabajo posterior, hacer una extensión natural para elaborar modelos que permitan visualizar objetos del espacio euclidiano de dimensión mayor a cuatro.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo general

Establecer los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.

1.4.2. Objetivos específicos

- Extender el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.
- Definir analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos.
- Visualizar puntos, curvas, superficies y sólidos en los modelos elaborados.
- Simular diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados.
- Automatizar las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Un primer trabajo es un artículo (Velezmoro & Ipanaqué, 2015) en el que se presentan comandos codificados en el software Mathematica v.11.2 que permiten obtener las gráficas de puntos, curvas, superficies y sólidos inmersos en el espacio euclidiano tetradimensional. En este artículo no se mencionan los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración del único modelo que utilizan para las visualizaciones; únicamente se menciona que se eligen cuatro vectores que parten del centro de un cubo en dirección de cuatro de sus aristas que están sobre una de las caras de dicho cubo. Estos vectores se consideran como los cuatro ejes coordenados.

Un segundo trabajo es un artículo (Velezmoro & Ipanaqué, 2015b) en el que se presentan comandos codificados en el software Mathematica v.11.2 que permiten obtener las gráficas de superficies complejas inmersas en el espacio euclidiano tetradimensional. Para ello se utiliza el mismo modelo que en (Velezmoro & Ipanaqué, 2015) y se aprovecha el hecho que \mathbb{C}^2 y \mathbb{R}^4 son isomorfos para ubicar los puntos de \mathbb{C}^2 que pertenecen a una superficie compleja en el espacio euclidiano tetradimensional.

Un tercer trabajo es una tesis (Vilcherrez & Poicón, 2018) en la que se define el producto cruz en \mathbb{R}^4 , se deducen las fórmulas de Frenet de una curva en \mathbb{R}^4 y se generan cilindros e hipercilindros a partir del tetraedro de Frenet asociado a una curva en \mathbb{R}^4 . En este trabajo sí se mencionan los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los modelos que utilizan para las visualizaciones. Inclusive se adaptan los resultados para definir formalmente el modelo presentado en (Velezmoro & Ipanaqué, 2015). Aunque no se mencionan la simulación de diferentes puntos de vista en \mathbb{R}^4 .

Un cuarto trabajo es un artículo (Velezmoro & otros, 2019) en el que se presenta un paquete codificado en el software Wolfram Mathematica v.11.2 que permite obtener las gráficas de puntos, curvas, superficies, superficies complejas y sólidos inmersos en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones. En este artículo sí se mencionan los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los modelos que utilizan para las visualizaciones y se establecen las bases para simular los diferentes puntos de vista, aunque debido al espacio todo se muestra resumido.

2.2. BASES TEÓRICAS

2.2.1. Sistema de coordenadas rectangulares en \mathbb{R}^3

Según (Lehmann, 1980) en geometría analítica del espacio se emplean varios sistemas de coordenadas. El más usado es el rectangular, el cual se describe a continuación.

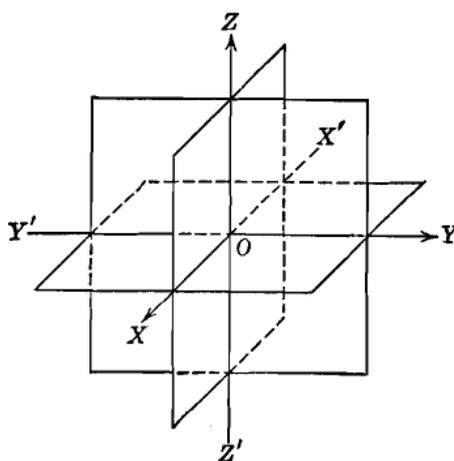


Figura 1. Tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto O .

Fuente: Libro Geometría analítica (Lehmann, 1980)

Consideremos tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto común O , tal como se indica en la Figura 1. Como el punto en el espacio va a localizarse con referencia a estos elementos, los planos se llaman planos coordenados, las rectas de intersección de estos planos ejes coordenados y el punto O origen del sistema de coordenadas rectangulares.

Los ejes coordenados XX' , YY' , ZZ' se llaman, respectivamente, el eje X , el Y y el Z . Estos ejes son rectas dirigidas, cuya dirección positiva está indicada en cada uno por una flecha. Cada plano coordenado se designa por los dos ejes coordenados que contiene. Así, el plano coordenado que contiene al eje X y al eje Y se llama plano XY ; análogamente, tenemos los planos XZ y YZ . Los tres planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas octantes. El octante determinado por las partes positivas de los ejes coordenados se llama primer octante; no se acostumbra asignar ningún número a los siete octantes restantes. El lector puede concebir fácilmente el primer octante considerando una de las esquinas de una habitación rectangular en donde dos paredes adyacentes y el piso representan a los planos coordenados.

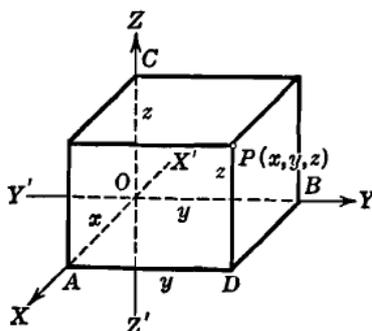


Figura 2. Punto $P(x, y, z)$ en un sistema de coordenadas rectangulares.

Fuente: Libro Geometría analítica (Lehmann, 1980).

En seguida veremos cómo puede localizarse un punto en el espacio por medio del sistema de coordenadas rectangulares. En la práctica, no es necesario representar el sistema de coordenadas como aparece en la Figura 1; será suficiente para nuestros fines trazar solamente los ejes coordenados como se indica en la Figura 2. Sea P un punto cualquiera del espacio. Su posición puede determinarse haciendo pasar por P los planos paralelos a los tres planos coordenados y considerando los puntos A , B y C en que cortan a los ejes X , Y y Z , respectivamente. Estos planos, juntos con los coordenados forman un paralelepípedo recto rectangular. Evidentemente, la posición de P con relación al sistema de coordenadas está determinada por sus distancias a los planos coordenados. Estas distancias están dadas por las longitudes de los segmentos dirigidos OA , OB y OC , llamados x , y y z , respectivamente. Entonces los tres números reales x , y y z constituyen la coordenada x , la coordenada y y la coordenada z de P . Cada coordenada se mide a partir del origen O sobre el eje coordenado correspondiente, y es positiva o negativa según que su dirección sea la misma o la opuesta a la de la dirección positiva del eje. Para el punto P (Figura 2) todas las coordenadas son positivas, y el punto está en el primer octante. Las coordenadas x , y , z de cualquier punto P se escriben en ese orden, se encierran en un paréntesis y el punto se representa por $P(x, y, z)$.

Un punto P en el espacio tiene una y solamente una terna de coordenadas (x, y, z) relativa a un sistema coordenado rectangular especificado. Recíprocamente, una terna de coordenadas (x, y, z) determina uno y solamente un punto P en el espacio con respecto a un sistema coordenado fijo.

Es importante escribir las coordenadas (x, y, z) de un punto P del espacio en su propio orden, ya que la posición de una coordenada en el conjunto indica a lo largo de qué eje se mide la coordenada particular. Por esto, las coordenadas de un punto en el espacio forman una terna ordenada de números reales. Por tanto, en vista de nuestra discusión previa, podemos decir que un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del espacio y una terna ordenada de números reales.

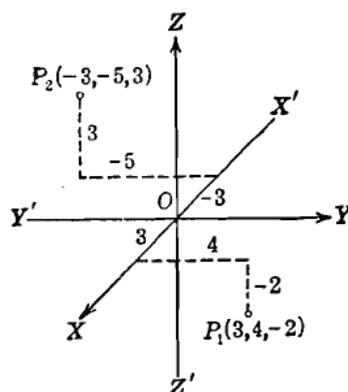


Figura 3. Tres puntos trazados según el método de proyecciones paralelas.

Fuente: Libro Geometría analítica (Lehmann, 1980).

Como en geometría analítica plana, la construcción de figuras apropiadas constituye una parte importante del trabajo desarrollado en la geometría analítica del espacio. Para tal fin haremos uso de un método muy común llamado de proyecciones paralelas. Como se ve en la Figura 2, los ejes X y Z se trazan en este sistema de proyección, perpendiculares entre sí, pero el eje X se traza de tal manera que el ángulo XOY sea mayor de 90° y, usualmente, se toma igual a 135° . Entonces las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, los ejes Y y Z se trazan a escala completa, y las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, el eje X se acortan una cierta cantidad, generalmente hasta alrededor de siete décimos $(\frac{\sqrt{2}}{2})$ de la escala completa. En la Figura 3, los puntos $P_1(3, 4, -2)$ y $P_2(-3, -5, 3)$ están trazados de acuerdo con estos convenios.

2.2.2. Geometría descriptiva: los sistemas de representación

Según (Rodríguez & Álvarez, 1995), el ser humano tiene la necesidad de representar los objetos que le rodean o aquellos que se imagina o proyecta, para dárselos a conocer a los demás. Pero el mundo que nos rodea constituye una realidad tridimensional y los formatos en los que se representa son bidimensionales. Surge entonces el problema de representar sobre el papel, que tiene dos

dimensiones, un objeto cualquiera que tiene tres. Como respuesta al problema nace la Geometría Descriptiva y los Sistemas de Representación.

Según (Rovenski, 2000), los sistemas de representación son un conjunto de operaciones que permiten obtener las proyecciones de un objeto en el espacio sobre un plano que suele ser el papel del dibujo. Una clase de estos sistemas son los sistemas axonométricos o perspectivas. Puede ser axonometría ortogonal u oblicua, en función de cómo sean los rayos proyectantes.

En este trabajo nos interesan los sistemas axonométricos ortogonales los cuales pueden ser

- Sistema axonométrico ortogonal isométrico. El plano de proyección forma tres ángulos iguales con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los tres ejes son idénticas (Figura 4).
- Sistema axonométrico ortogonal dimétrico. Las escalas de dos de los ejes de coordenadas son idénticas, con una escala diferente para el tercero de los ejes (Figura 4).
- Sistema axonométrico ortogonal trimétrico. Las escalas de los tres ejes de coordenadas son diferentes (Figura 4).

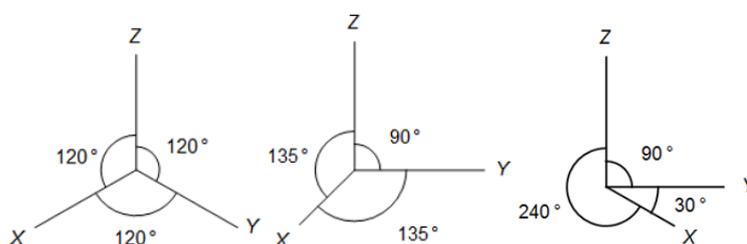


Figura 4. Sistemas axonométricos ortogonales: isométrico (izquierda), dimétrico (centro) y trimétrico (derecha).

Fuente: Elaboración propia.

2.2.3. Submersión

Según (Pham, 1968) un mapeo se denomina submersión si tiene el mismo comportamiento local de una proyección canónica de espacios euclidianos.

2.2.4. Base apócrifa

Según (Velezmoro & otros, 2019) una base apócrifa $\widehat{\mathcal{B}}$ de \mathbb{R}^m consiste de un conjunto de $m + 1$ vectores de \mathbb{R}^m tales que $\text{rang}(\widehat{\mathcal{B}}) = m$.

2.2.5. Modelo m –dimensional

Según (Velezmoro & otros, 2019) un modelo m –dimensional para visualizar objetos inmersos en \mathbb{R}^{m+1} consiste de una triada $\{O, \widehat{\mathcal{B}}, \varphi\}$; donde O es el origen de \mathbb{R}^m , $\widehat{\mathcal{B}} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m+1}\}$ es una base apócrifa de \mathbb{R}^m y φ es una submersión de \mathbb{R}^{m+1} en \mathbb{R}^m , con matriz asociada

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{m+1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1,m} & \cdots & e_{m+1,m} \end{pmatrix}.$$

2.2.6. Expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal

La expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal (bidimensional), con centro en $O = (0,0)$, está dado por $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\varphi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p},$$

donde $\widehat{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base apócrifa de \mathbb{R}^3 .

Aquí la limitación a $m = 2$, con respecto a la definición del apartado 2.2.5, se debe a que la geometría descriptiva tradicional sólo ha trabajado en la proyección de objetos del espacio tridimensional en formatos bidimensionales (apartado 2.2.2).

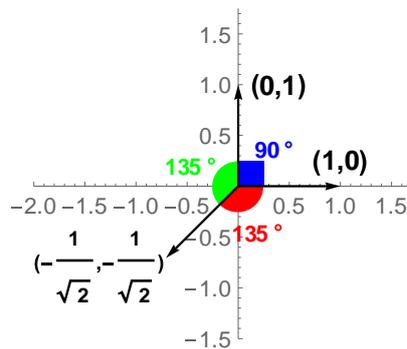


Figura 5. Obtención de la base apócrifa de un modelo bidimensional dimétrico.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.7. Obtención de una base apócrifa

Una base apócrifa se obtiene a partir de las coordenadas, en un sistema coordenado fijado, de los vectores dirección de los ejes que se eligen para el modelo. Finalmente, se asignan factores de escala a las coordenadas de los vectores obtenidos. Así, por ejemplo, para el modelo bidimensional dimétrico se tiene que el primer elemento de la base apócrifa será el vector de coordenadas $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, el cual es vector dirección del eje X; el segundo elemento será $(1,0)$, vector dirección del eje Y; y el tercer elemento será $(0,1)$, vector dirección del eje Z (ver Figura 5). Para este caso los factores de escala son $\frac{3}{5}$, 1 y 1, respectivamente. Por tanto, la base apócrifa para el modelo bidimensional dimétrico será $\widehat{B} = \left\{ \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}\right), (1,0), (0,1) \right\}$.

Esto indica que puede usarse la expresión modelo bidimensional simétrico, dimétrico o trimétrico según sea la naturaleza de la base apócrifa obtenida.

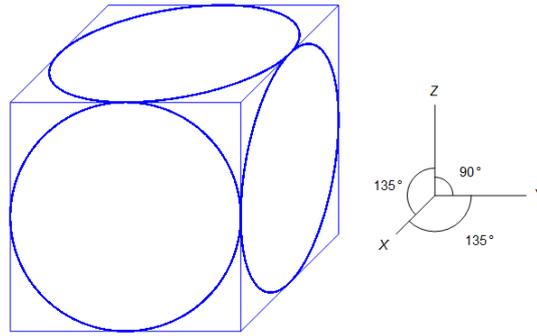


Figura 6. Un cubo visualizado en un modelo bidimensional dimétrico.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.8. Utilidad de la expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal

Las técnicas de la geometría descriptiva son útiles para la visualización de ciertos objetos del espacio tridimensional (Figura 6). No obstante, al tratar de generalizar estas técnicas, para visualizar objetos matemáticos del espacio tridimensional (líneas, superficies y sólidos) a partir de sus respectivas expresiones analíticas se requieren modelos bidimensionales (Figura 7).

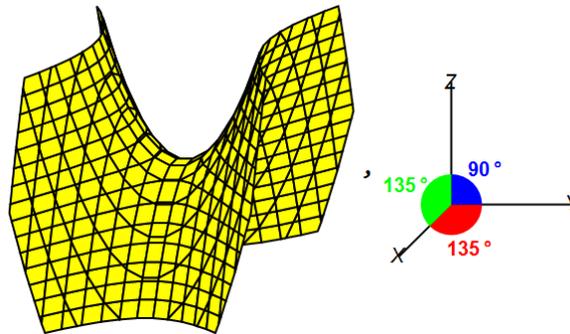


Figura 7. Paraboloides hiperbólico visualizado en un modelo bidimensional dimétrico.

Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, la Figura 6 y la Figura 7 muestran la visualización de un cubo unitario y del paraboloides hiperbólico $x^2 - y^2 - z = 0$, respectivamente, en el modelo bidimensional dimétrico (MBD) $\{O, \widehat{B}, \varphi\}$, donde

$$O = \{0,0\}, \quad \widehat{B} = \left\{ \left(-\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}} \right), (1,0), (0,1) \right\} \quad \text{y} \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para realizar la ubicación de los puntos en este MBD se usa la expresión analítica del sistema axonométrico dimétrico (Figura 4), esto es, $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con

$$\varphi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3p_1}{5\sqrt{2}} + p_2 \\ -\frac{3p_1}{5\sqrt{2}} + p_3 \end{pmatrix}.$$

Así, para visualizar, por ejemplo, la arista del cubo unitario (con centroide en el origen) que va del vértice $v_1 = (-0.5, -0.5, -0.5)$ al vértice $v_2 = (-0.5, -0.5, 0.5)$ basta con trazar la línea que va del punto v'_1 al punto v'_2 , donde

$$v'_1 = \varphi(V_1)^T \approx (-0.2879, -0.2879),$$

$$v'_2 = \varphi(V_2)^T \approx (-0.2879, 0.7121) \text{ (ver Figura 8).}$$

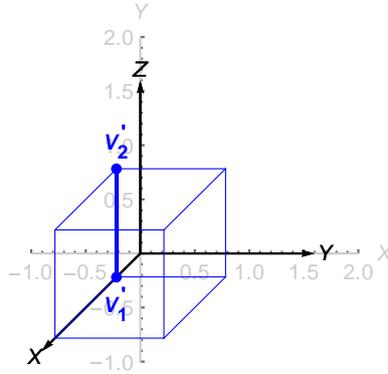


Figura 8. Arista de un cubo unitario visualizada en un MBD.

Fuente: Elaboración propia.

Similarmente, para visualizar el polígono de vértices

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} = \{(0.87, -1.2, 0.67), (0.67, -1.05, 0.67),$$

$$(0.67, -0.93, 0.43), (0.68, -0.93, 0.4),$$

$$(0.93, -1.12, 0.4), (0.93, -1.2, 0.57)\}$$

que “parcha” el paraboloides hiperbólico $x^2 - y^2 - z = 0$, basta con trazar el polígono de vértices

$$V' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6\} = \{(-1.57, 0.3), (-1.33, 0.38), (-1.22, 0.14),$$

$$(-1.22, 0.11), (-1.52, 0), (-1.6, 0.17)\},$$

donde $v'_i = \varphi(v_i)$ (ver Figura 9).

Por otra parte, para visualizar curvas y superficies expresadas en forma paramétrica basta con aplicar la submersión φ a las respectivas parametrizaciones para luego proceder a graficar las transformaciones resultantes. Así, por ejemplo, para visualizar la hélice $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\alpha(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{8} \right), 0 < t < 8\pi,$$

en un MBD, basta con graficar

$$\varphi(\alpha(t)) = (-0.42 \cos t + \sin t, 0.13t - 0.42 \cos t).$$

O para visualizar el paraboloides circular $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$S(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2), \begin{matrix} 0 < u < 2\pi \\ 0 < v < 1 \end{matrix},$$

en un MBD, basta con graficar

$$\varphi(S(u, v)) = (-0.42v \cos u + v \sin u, v^2 - 0.42v \cos u)$$

(ver Figura 10).

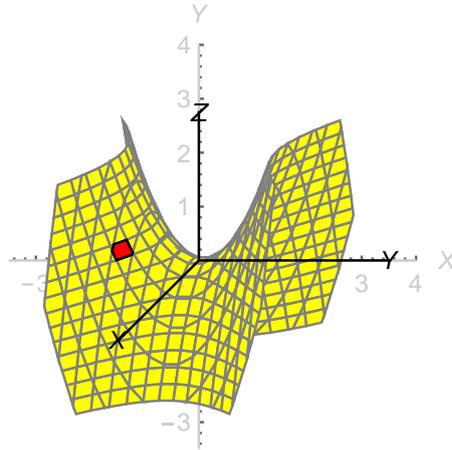


Figura 9. “Parche” de un paraboloid hiperbólico visualizado en un MBD.

Fuente: Elaboración propia.

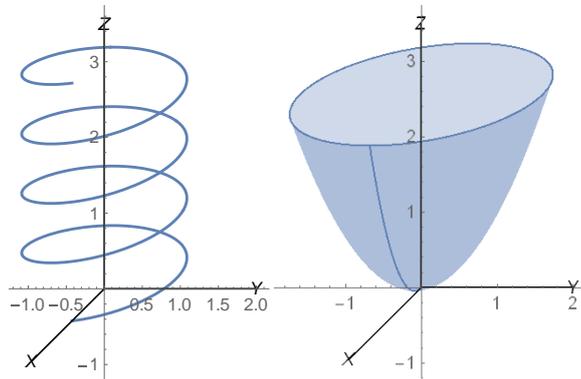


Figura 10. Hélice (izquierda) y paraboloid circular (derecha) visualizados en un MBD.

Fuente: Elaboración propia.

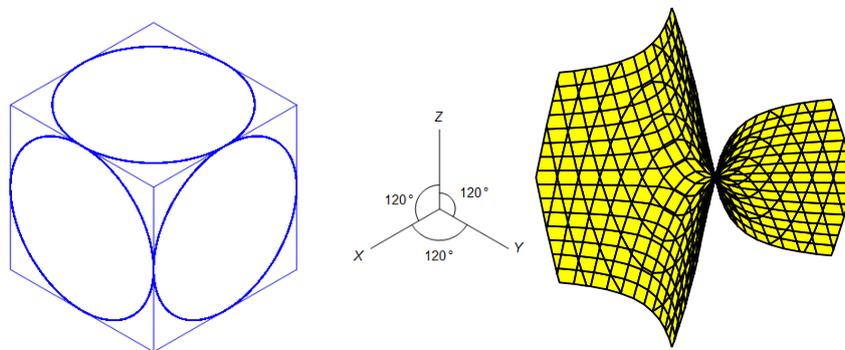


Figura 11. Cubo y paraboloid hiperbólico visualizados en un modelo bidimensional simétrico.

Fuente: Elaboración propia.

Por supuesto que todos estos resultados son válidos para cualquier otro modelo bidimensional (ver Figura 11).

2.2.9. Rotaciones en dos dimensiones

Para deducir la fórmula de rotación de un punto (x, y) a la posición (x', y') (ver Figura 12) expresamos

$$(x, y) = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha)$$

donde $r \geq 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Así pues, si la nueva posición del punto (x, y) resulta de aplicar una rotación de ángulo θ , resultará que

$$(x', y') = (r \cos(\alpha + \theta), r \operatorname{sen}(\alpha + \theta))$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$. De este modo, después de desarrollar el coseno y seno de la suma de dos ángulos se obtiene

$$(x', y') = (r \cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \cos \alpha \operatorname{sen} \theta).$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

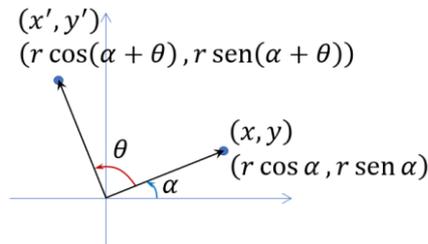


Figura 12. Rotación de un punto en el plano.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.10. Rotaciones en tres dimensiones

De acuerdo con la fórmula de la sección 2.2.9 y la Figura 13, se tiene que las matrices asociadas a las rotaciones alrededor de los ejes X , Y y Z , respectivamente, son

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\operatorname{sen} \delta \\ 0 & \operatorname{sen} \delta & \cos \delta \end{pmatrix},$$

$$R_Y = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\operatorname{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix},$$

$$R_Z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo cual, la rotación de un punto de la posición (x, y, z) a la posición (x', y', z') se expresa en forma matricial de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\text{sen } \delta \\ 0 & \text{sen } \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

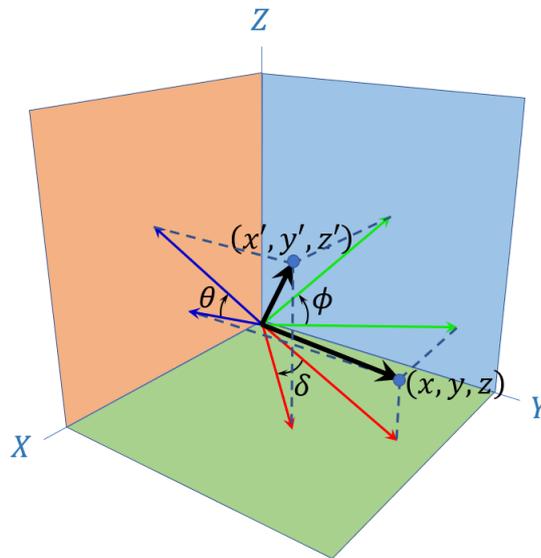


Figura 13. Rotación de un punto en el espacio.

Fuente: Elaboración propia.

2.2.11. Simulación de rotación en tres dimensiones

Teniendo en cuenta la fórmula del apartado 2.2.10 es posible simular en un modelo bidimensional: simétrico, dimétrico o trimétrico (último párrafo del apartado 2.2.7) la rotación de diversos objetos (ver Figura 14).

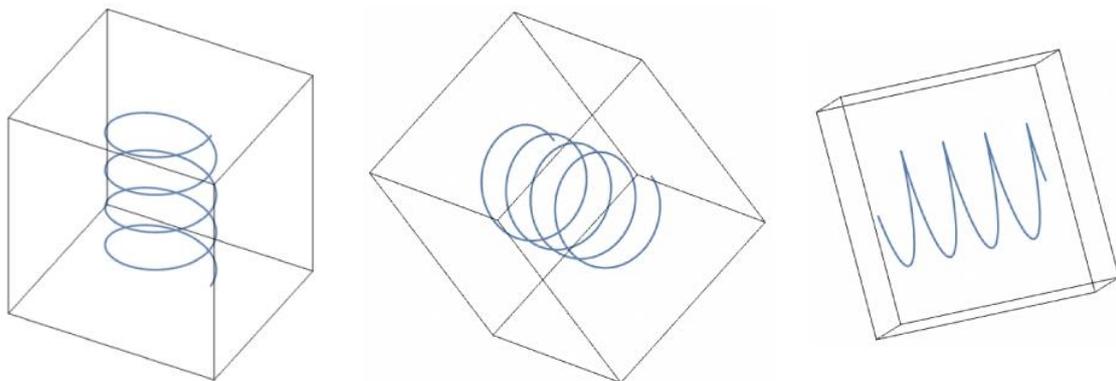


Figura 14. Simulación de la rotación de una hélice.

Fuente: Elaboración propia.

2.3. GLOSARIO DE TÉRMINOS BÁSICOS

2.3.1. Sistema axonométrico ortogonal asimétrico

El plano de proyección forma seis ángulos diferentes con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los seis ejes son distintas.

2.3.2. Sistema axonométrico ortogonal dimétrico

El plano de proyección forma dos ángulos iguales con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los dos ejes son idénticas.

2.3.3. Sistema axonométrico ortogonal trimétrico

El plano de proyección forma tres ángulos iguales con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los tres ejes son idénticas.

2.3.4. Sistema axonométrico ortogonal tetramétrico

El plano de proyección forma cuatro ángulos iguales con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los cuatro ejes son idénticas.

2.3.5. Sistema axonométrico ortogonal pentamétrico

El plano de proyección forma cinco ángulos iguales con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los cinco ejes son idénticas.

2.3.6. Sistema axonométrico ortogonal simétrico

El plano de proyección forma seis ángulos iguales con los ejes de coordenadas y por tanto las escalas de los seis ejes son idénticas.

2.4. HIPÓTESIS

Es posible establecer los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.

III. MARCO METODOLÓGICO

3.1. MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

Se extenderá el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. Luego se definirá analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos. Seguidamente se procederá a visualizar puntos, curvas, superficies, superficies complejas, sólidos e hipersuperficies en los modelos elaborados y se simularán diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados.

Finalmente, se elaborarán algoritmos que permitirán codificar programas para automatizar todo el proceso. En particular se usará el software de cálculo simbólico Wolfram Mathematica v.11.2, instalado en una computadora portátil de las siguientes características:

- Nombre del dispositivo: DESKTOP-0DHVL9C,
- Procesador: Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.60 GHZ
- RAM instalado: 8.00 GB (7.30 GB usable)

3.2. ASPECTOS ÉTICOS

Se utilizará una licencia del Mathematica v.11.2 financiada por la Universidad Nacional de Piura para realizar investigaciones.

Este trabajo de investigación es original no siendo copia parcial ni total de un trabajo de investigación desarrollado, y/o realizado en el Perú o en el Extranjero.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES EN \mathbb{R}^4

Consideremos cuatro hiperplanos tridimensionales en \mathbb{R}^4 mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto común O , tal como se indica en la Figura 15. Como el punto en \mathbb{R}^4 va a localizarse con referencia a estos elementos, los hiperplanos se llaman *hiperplanos coordenados*, los planos de intersección de estos hiperplanos *planos coordenados* (Figura 16), las rectas de intersección de estos planos *ejes coordenados* y el punto O *origen del sistema de coordenadas rectangulares*.

Los ejes coordenados XX' , YY' , ZZ' WW' se llaman, respectivamente, el *eje X*, el *Y*, el *Z* y el *W*. Estos ejes son rectas dirigidas, cuya dirección positiva está indicada en cada uno por una flecha. Cada plano coordenado se designa por los dos ejes coordenados que contiene. Así, el plano

coordenado que contiene al eje X y al eje Y se llama plano XY ; análogamente, tenemos los planos XZ , XW , YZ , YW y ZW . Cada hiperplano coordenado se designa por los tres ejes coordenados que contiene. Así, el hiperplano coordenado que contiene al eje X , al eje Y y al eje Z se llama hiperplano XYZ ; análogamente, tenemos los hiperplanos XYW , XZW y YZW . Los cuatro hiperplanos coordenados dividen \mathbb{R}^4 en dieciséis regiones llamadas *hexadecantes*. El hexadecante determinado por las partes positivas de los ejes coordenados se llama *primer hexadecante*; no se acostumbra asignar ningún nombre a los quince hexadecantes restantes.

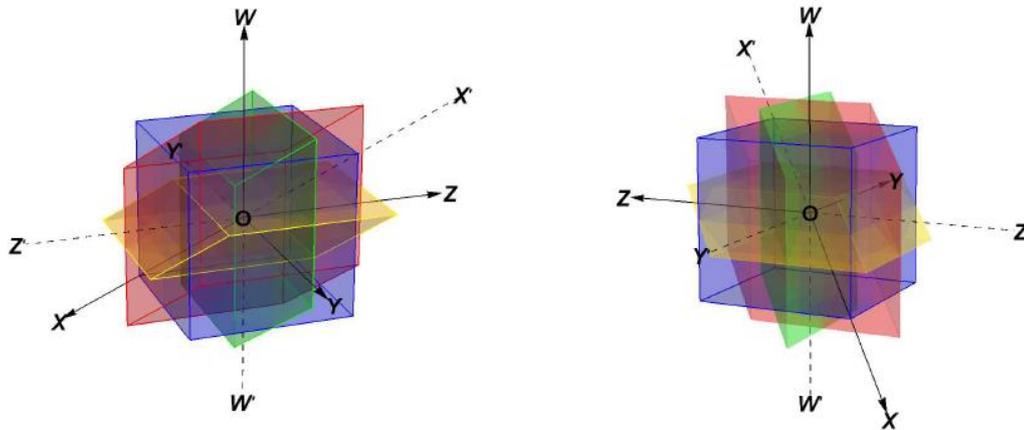


Figura 15. Cuatro hiperplanos tridimensionales en \mathbb{R}^4 mutuamente perpendiculares que se cortan en el punto común O .

Fuente: Elaboración propia.

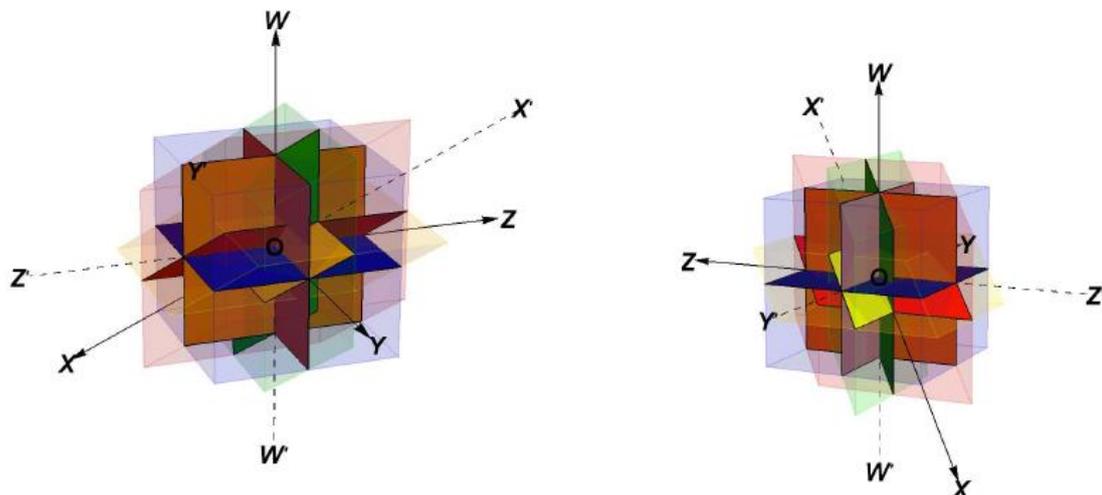


Figura 16. Seis planos mutuamente perpendiculares en \mathbb{R}^4 que se cortan en el punto común O .

Fuente: Elaboración propia.

En seguida veremos cómo puede localizarse un punto en \mathbb{R}^4 por medio del sistema de coordenadas rectangulares. En la práctica, no es necesario representar el sistema de coordenadas trazando los hiperplanos coordenados como aparecen en la Figura 15; será suficiente para nuestros

finés trazar solamente los ejes coordenados como se indica en Figura 17. Sea P un punto cualquiera de \mathbb{R}^4 . Su posición puede determinarse haciendo pasar por P hiperplanos paralelos a los cuatro hiperplanos coordenados y considerando los puntos A, B, C y D en que cortan a los ejes X, Y, Z y W , respectivamente. Estos planos, juntos con los coordenados forman un hiperparalelepípedo recto rectangular. Evidentemente, la posición de P con relación al sistema de coordenadas está determinada por sus distancias a los hiperplanos coordenados. Estas distancias están dadas por las longitudes de los segmentos dirigidos OA, OB, OC y OD , llamados x, y, z, w , respectivamente. Entonces los tres números reales x, y, z y w constituyen la coordenada x , la coordenada y , la coordenada z y la coordenada w de P . Cada coordenada se mide a partir del origen O sobre el eje coordenado correspondiente, y es positiva o negativa según que su dirección sea la misma o la opuesta a de la dirección positiva del eje. Para el punto P (Figura 17) todas las coordenadas son positivas, y el punto está en el primer hexadecante. Las coordenadas x, y, z, w de cualquier punto P se escriben en ese orden, se encierran en un paréntesis y el punto se representa por $P(x, y, z, w)$.

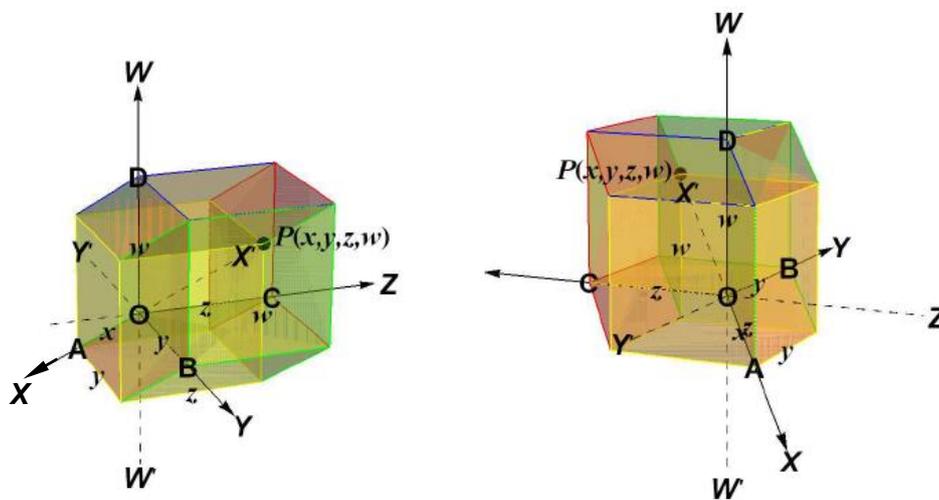


Figura 17. Localización de un punto en \mathbb{R}^4 .

Fuente: Elaboración propia.

Un punto P en \mathbb{R}^4 tiene una y solamente una cuaterna de coordenadas (x, y, z, w) relativa a un sistema coordenado rectangular especificado. Recíprocamente una cuaterna de coordenadas (x, y, z, w) determina uno y solamente un punto P en \mathbb{R}^4 con respecto a un sistema coordenado fijo.

Es importante escribir las coordenadas (x, y, z, w) de un punto P de \mathbb{R}^4 en su propio orden, ya que la posición de una coordenada en el conjunto indica a lo largo de qué eje se mide la coordenada particular. Por esto, las coordenadas de un punto en \mathbb{R}^4 forman una cuaterna ordenada de números reales. Por tanto, en vista de nuestra discusión previa, podemos decir que *un sistema de coordenadas rectangulares en \mathbb{R}^4 establece una correspondencia biunívoca entre cada punto de \mathbb{R}^4 y una cuaterna ordenada de números reales.*

Para realizar la construcción de objetos apropiados haremos uso de un método muy común llamado de proyecciones paralelas. Como se ve en la Figura 19, los ejes X y W se trazan, en este sistema de proyección, perpendiculares entre sí, pero el eje X se traza de tal manera que los ángulos XOY , XOZ y XOW sean mayores de 90° y, usualmente, se tomarán iguales a $125^\circ 15' 51,803''$ (proyección trimétrica, ver Figura 18). Entonces las distancia medidas a lo largo de, o paralelas a, los ejes Y , Z y W se trazan a escala completa, y las distancias medidas a lo largo de, o paralelas a, el eje X se acortan una cierta cantidad, generalmente hasta alrededor de seis décimos $\left(\frac{3}{5}\right)$ de la escala completa. En la Figura 19 los puntos $P_1(3,4,-2,-1)$ y $P_2(-3,-5,3,1)$ están trazados de acuerdo con estos convenios.

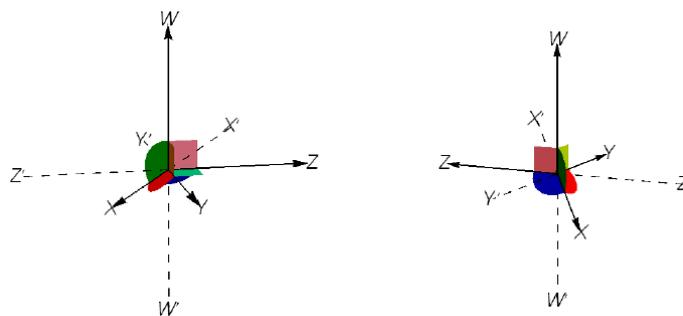


Figura 18. Ubicación de los ejes según la proyección trimétrica.

Fuente: Elaboración propia.

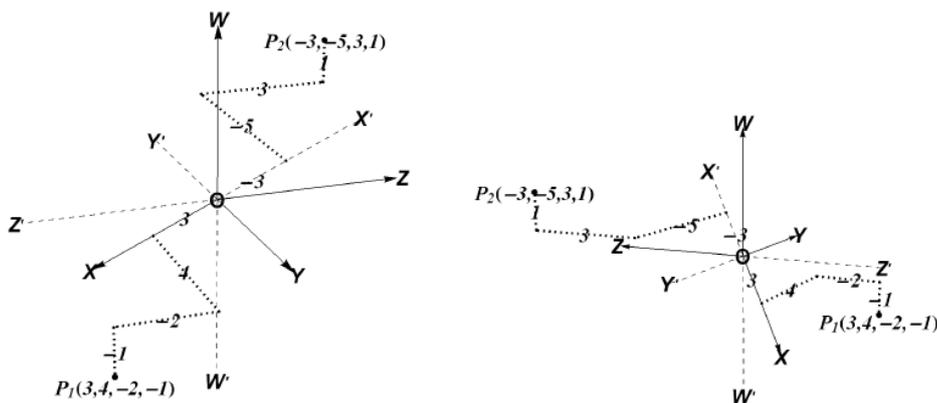


Figura 19. Localización de dos puntos específicos en \mathbb{R}^4 .

Fuente: Elaboración propia.

Recalquemos que las pantallas de una computadora tradicional son planas. Si contásemos con pantallas tridimensionales (en forma de paralelepípedos) podríamos, de manera natural, comprender la extensión de los modelos 2D para graficar objetos en \mathbb{R}^3 a modelos 3D para graficar objetos en \mathbb{R}^4 . Ante la limitación de no contar con este tipo de pantallas usaremos los comandos del Mathematica que ofrecen una buenísima representación de objetos de \mathbb{R}^3 .

4.2. EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN SISTEMA AXONOMÉTRICO ORTOGONAL

La expresión analítica de un sistema axonométrico ortogonal (tridimensional), con centro en $O = (0,0,0)$, está dado por $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\varphi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} & e_{41} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & e_{42} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & e_{43} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p},$$

donde $\widehat{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ es una base apócrifa de \mathbb{R}^4 .

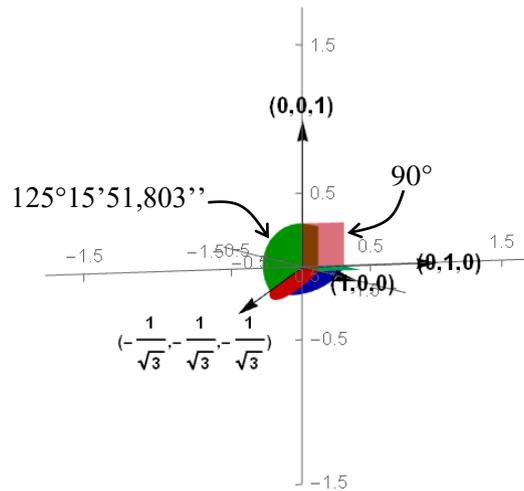


Figura 20. Obtención de la base apócrifa de un modelo tridimensional trimétrico.

Fuente: Elaboración propia.

4.3. OBTENCIÓN DE UNA BASE APÓCRIFA

Como ya se mencionó en el apartado 2.2.7, una base apócrifa se obtiene a partir de las coordenadas, en un sistema coordenado fijado, de los vectores dirección de los ejes que se eligen para el modelo. Finalmente, se asignan factores de escala a las coordenadas de los vectores obtenidos. Así, por ejemplo, para el modelo tridimensional simétrico-simétrico se tiene que el primer elemento de la base apócrifa será el vector de coordenadas $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, el cual es vector dirección del eje X; el segundo elemento será $(1,0,0)$, vector dirección del eje Y; el tercer elemento será $(0,1,0)$, vector dirección del eje Z; y el tercer elemento será $(0,0,1)$, vector dirección del eje W (ver Figura 1). Para este caso los factores de escala son $\frac{3}{5}$, 1,1 y 1, respectivamente. Por tanto, la base apócrifa para el modelo tridimensional trimétrico será

$$\widehat{B} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5} \right), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \right\}.$$

Esto indica que puede usarse la expresión modelo tridimensional asimétrico, dimétrico, trimétrico, tetramétrico, pentamétrico y hexamétrico según sea la naturaleza de la base apócrifa obtenida.

Note que, si se tiene un cuadrado de lado uno ubicado en el primer cuadrante, la base apócrifa obtenida a partir del modelo propuesto por (Lehmann, 1980) está conformada por dos vectores en dirección de dos lados del cuadrado y un vector en dirección de la prolongación de la diagonal del mismo. De manera similar se tiene que, para el primer modelo propuesto en esta sección partimos de un cubo ubicado en el primer octante y la respectiva base apócrifa estará constituida por tres vectores en dirección de tres aristas del cubo y un vector en dirección de la prolongación de la diagonal de dicho cubo (Figura 21).

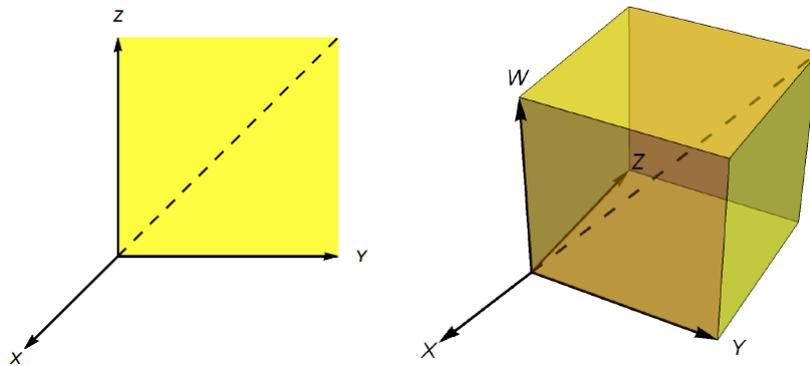


Figura 21. A la izquierda el modelo propuesto por Lehmann y a la derecha una generalización natural del mismo.

Fuente: Elaboración propia.

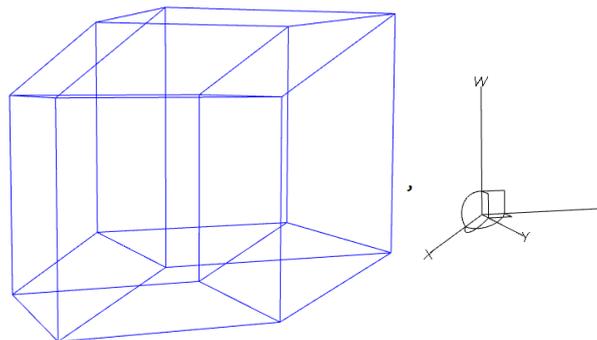


Figura 22. Un tesseracto (hipercubo) visualizado en un modelo tridimensional trimétrico.

Fuente: Elaboración propia.

4.4. UTILIDAD DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UN SISTEMA AXONOMÉTRICO ORTOGONAL

Extendiendo, de manera natural, las técnicas de la geometría descriptiva clásica es posible obtener la visualización de ciertos objetos del espacio tetradimensional (Figura 22). No obstante, al tratar de generalizar estas técnicas, para visualizar objetos matemáticos del espacio tetradimensional (líneas, superficies, sólidos e hipsólidos) a partir de sus respectivas expresiones analíticas se requieren modelos tridimensionales (Figura 23).

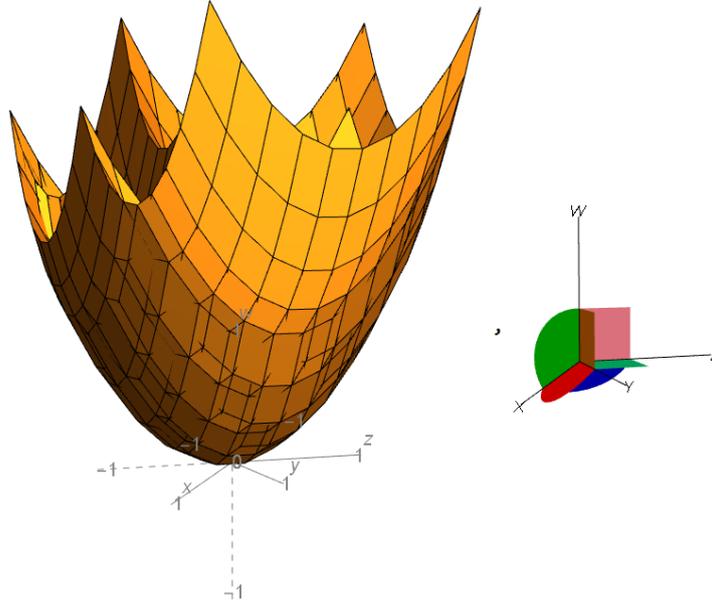


Figura 23. Hiperparaboloide visualizado en un modelo tridimensional trimétrico.

Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, la Figura 21 y la Figura 22 muestran la visualización de un tesseracto unitario y del hiperparaboloide $x^2 + y^2 + z^2 - w = 0$, respectivamente, en el modelo tridimensional trimétrico (MTT) $\{O, \widehat{B}, \varphi\}$, donde

$$O = \{0,0,0\}, \quad \widehat{B} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{5} \right), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \right\} \quad \text{y}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para realizar la ubicación de los puntos en este MBD se usa la expresión analítica del sistema axonométrico dimétrico (Figura 4), esto es, $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\varphi \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}p_1}{5} + p_2 \\ -\frac{\sqrt{3}p_1}{5} + p_3 \\ -\frac{\sqrt{3}p_1}{5} + p_4 \end{pmatrix}.$$

Así, para visualizar, por ejemplo, la arista del tesseracto unitario (con centroide en el origen) que va del vértice $v_1 = (-0.5, -0.5, -0.5, 0.5)$ al vértice $v_2 = (-0.5, -0.5, 0.5, 0.5)$ basta con trazar la línea que va del punto v'_1 al punto v'_2 , donde

$$v'_1 = \varphi(V_1)^T \approx (-0.326795, -0.326795, 0.673205),$$

$$v'_2 = \varphi(V_2)^T \approx (-0.326795, 0.673205, 0.673205)$$

(ver Figura 24).

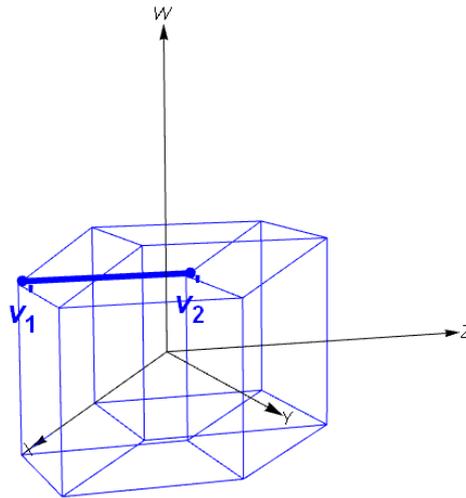


Figura 24. Arista de un tesseracto unitario visualizada en un MTT.
Fuente: Elaboración propia.

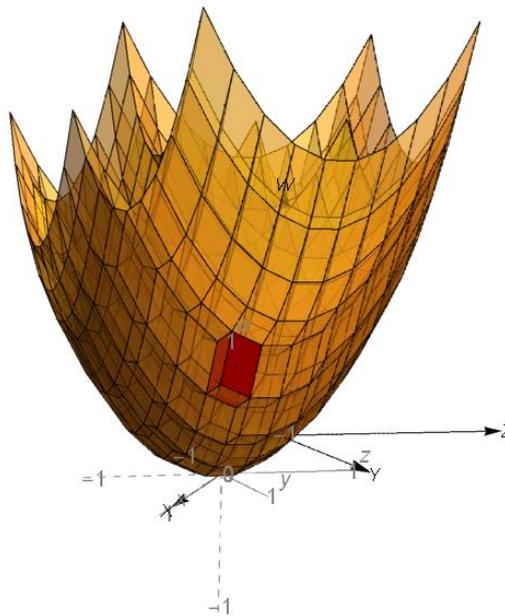


Figura 25. “Parche” de un hiperparaboloide visualizado en un MTT.
Fuente: Elaboración propia.

Similarmente, para visualizar el poliedro de vértices

$$\begin{aligned}
 V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\} = \\
 &= \{(1, 1.0857, -0.0254132, 1.03632), (1, 1.0857, 0.196809, 0.93755), \\
 &\quad (1, 1.16268, 0.0515668, 1.1133), (1, 1.16268, 0.273789, 1.01453), \\
 &\quad (1, 1.30792, -0.0254132, 1.43138), (1, 1.30792, 0.196809, 1.33261), \\
 &\quad (1, 1.3849, 0.0515668, 1.50836), (1, 1.3849, 0.273789, 1.40959)\}
 \end{aligned}$$

que “parcha” el hiperparaboloide $x^2 + y^2 + z^2 - w = 0$, basta con trazar el poliedro de vértices

$$\begin{aligned} V' &= \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6, v'_7, v'_8\} = \\ &= \{(0.739288, -0.371823, 0.689905), (0.739288, -0.149601, 0.591114), \\ &\quad (0.816268, -0.294843, 0.766885), (0.816268, -0.0726211, 0.66812), \\ &\quad (0.96151, -0.371823, 1.08497), (0.96151, -0.149601, 0.986201), \\ &\quad (1.03849, -0.294843, 1.16195), (1.03849, -0.0726211, 1.06318)\}, \end{aligned}$$

donde $v'_i = \varphi(v_i)$ (ver Figura 25).

Por otra parte, para visualizar curvas, superficies y sólidos expresados en forma paramétrica basta con aplicar la submersión φ a las respectivas parametrizaciones para luego proceder a graficar las transformaciones resultantes. Así, por ejemplo, para visualizar la curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ con

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t), 0 < t < 2\pi,$$

en un MTT, basta con graficar

$$\varphi(\alpha(t)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \cos t + \sin t, -\frac{\sqrt{3}}{5} \cos t + \cos 2t, -\frac{\sqrt{3}}{5} \cos t + \sin 2t \right).$$

Para visualizar la superficie $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con

$$S(u, v) = \left(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v, \frac{u+v}{8} \right), \begin{matrix} 0 < u < 2\pi \\ 0 < v < 4\pi \end{matrix}$$

en un MTT, basta con graficar

$$\begin{aligned} \varphi(S(u, v)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \cos u \cos v + \cos v \sin u, -\frac{\sqrt{3}}{5} \cos u \cos v + \sin v, \right. \\ \left. \frac{u+v}{8} - \frac{\sqrt{3}}{5} \cos u \cos v \right) \end{aligned}$$

(ver Figura 26).

O para visualizar el hiperparaboloide circular $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con

$$S(u, v, w) = (w \cos u \cos v, w \sin u \cos v, w \sin v, w^2), \begin{matrix} 0 < u < 2\pi, \\ 0 < v < 2\pi, \\ 0 < w < 1 \end{matrix}$$

en un MTT, basta con graficar

$$\begin{aligned} \varphi(S(u, v, w)) = \left(w \sin u \cos v - \frac{\sqrt{3}}{5} w \cos u \cos v, w \sin v - \frac{\sqrt{3}}{5} w \cos u \cos v, \right. \\ \left. w^2 - \frac{\sqrt{3}}{5} w \cos u \cos v \right) \end{aligned}$$

(ver Figura 27).

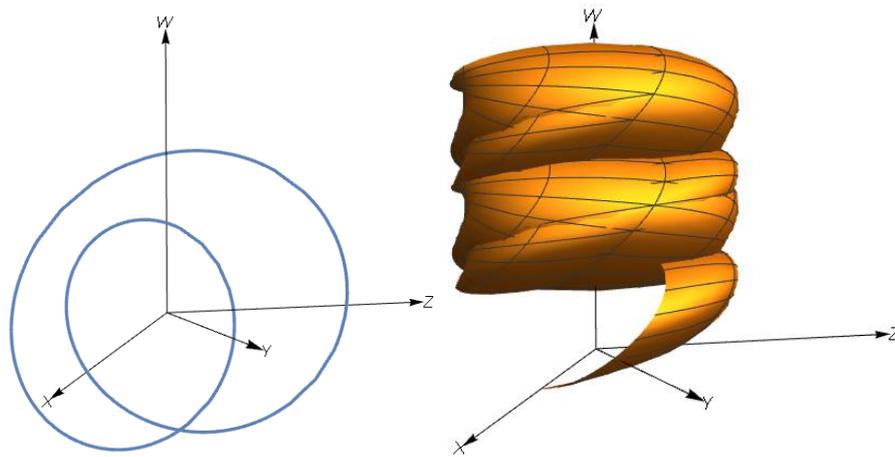


Figura 26. Curva (izquierda) y superficie (derecha) visualizados en un MTT.

Fuente: Elaboración propia.

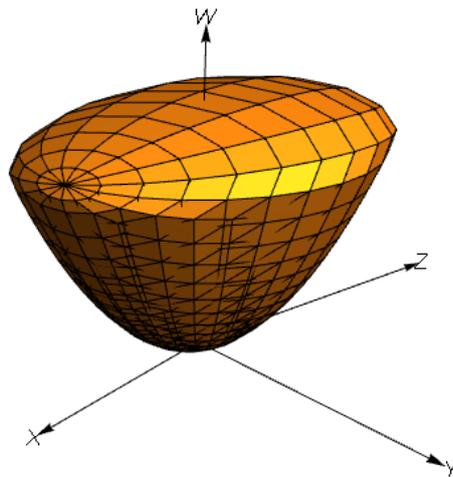


Figura 27. Hiperparaboloide visualizado en un MTT.

Fuente: Elaboración propia.

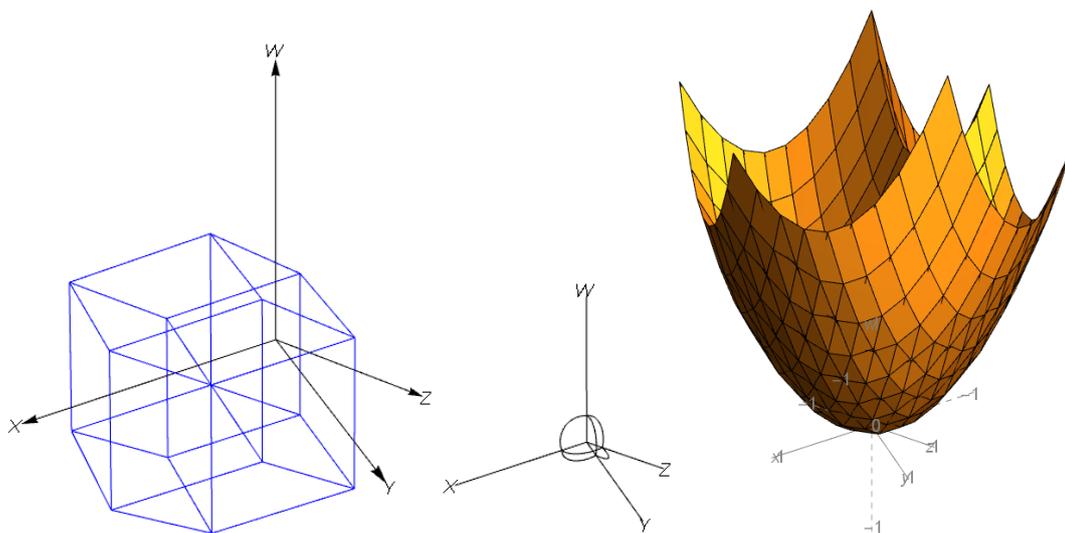


Figura 28. Tesseracto e hiperparaboloide visualizados en un modelo tridimensional simétrico.

Fuente: Elaboración propia.

Por supuesto que todos estos resultados son válidos para cualquier otro modelo tridimensional (ver Figura 28).

4.5. ROTACIONES EN CUATRO DIMENSIONES

Según (Xiaoqi, 2015) las matrices de rotación alrededor de los planos XY , XZ , XW , YZ , YW , y ZW son

$$R_{XY} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\text{sen } \delta & 0 & 0 \\ \text{sen } \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{XZ} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\text{sen } \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen } \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{XW} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R_{YZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ 0 & \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{YW} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$R_{ZW} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Por lo cual, la rotación de un punto de la posición (x, y, z, w) a la posición (x', y', z', w') se expresa en forma matricial de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & -\text{sen } \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ 0 & \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\text{sen } \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen } \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\text{sen } \delta & 0 & 0 \\ \text{sen } \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

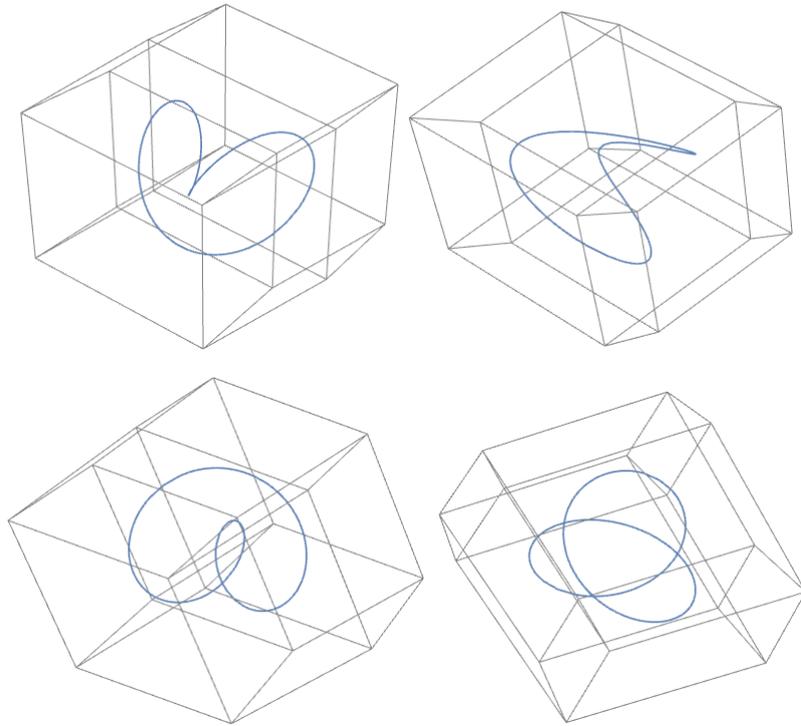


Figura 29. Simulación de la rotación de una curva.

Fuente: Elaboración propia.

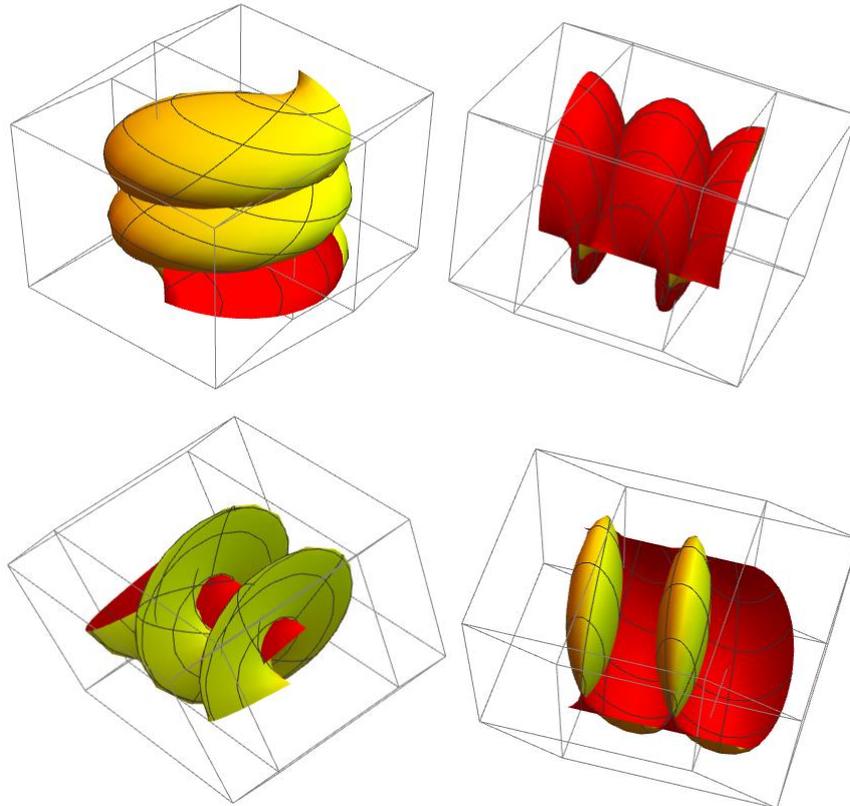


Figura 30. Simulación de la rotación de una superficie.

Fuente: Elaboración propia.

4.6. SIMULACIÓN DE ROTACIÓN EN CUATRO DIMENSIONES

Teniendo en cuenta el apartado 4.5 es posible simular en un modelo tridimensional: asimétrico, dimétrico, trimétrico, tetramétrico, pentamétrico o simétrico (apartados del 2.3.1 al 2.3.6) la rotación de diversos objetos (ver Figura 29, Figura 30 y Figura 31).

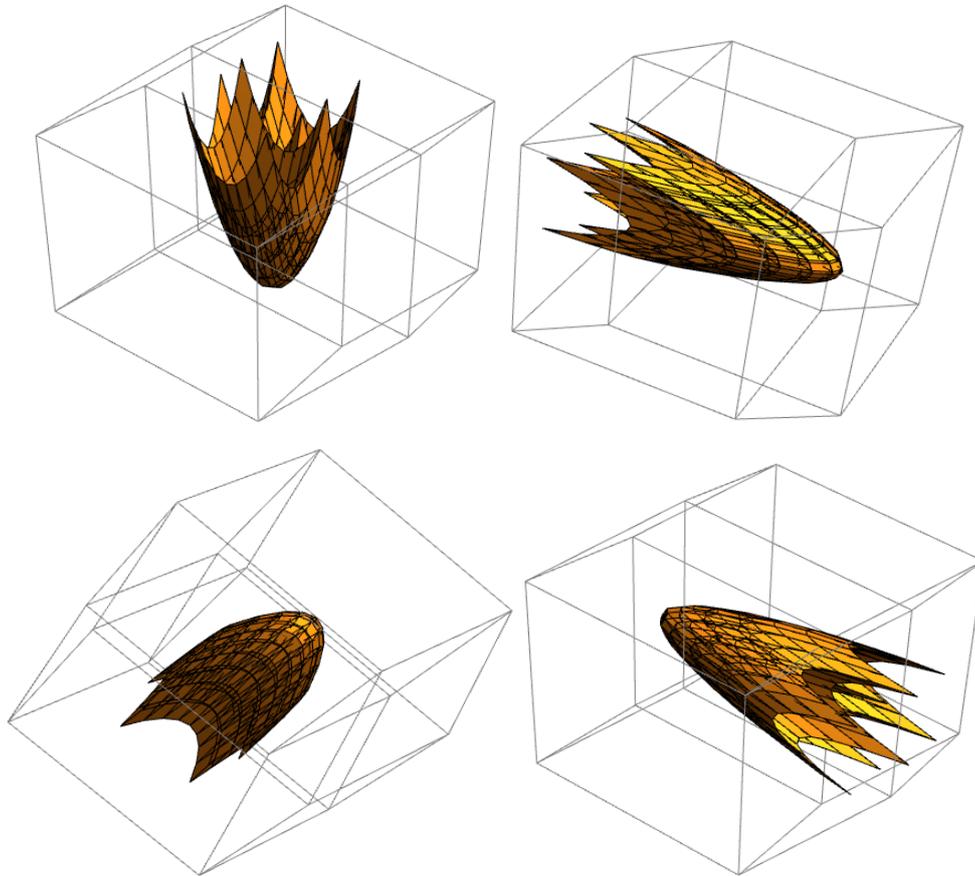


Figura 31. Simulación de la rotación de un sólido.

4.7. AUTOMATIZACIÓN DE LAS INTERPRETACIONES GEOMÉTRICAS DE LOS RESULTADOS

En este apartado se hace una descripción de las nuevas funciones implementadas en el sistema de álgebra computacional Mathematica para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.

4.7.1. Funciones previas

```
MakeMesh[v1_List] :=  
  Block[{l = v1, l1 = Map[RotateLeft, v1], mesh},  
    mesh = {l, l1, RotateLeft[l1], RotateLeft[l]};  
    mesh = Map[Drop[#, -1] &, mesh, {1}];  
    mesh = Map[Drop[#, -1] &, mesh, {2}];  
    Transpose[Map[Flatten[#, 1] &, mesh]]
```

```

]

MakePolyhedrons[vl_List] :=
Block[{newvl, mesh3d, faces = {{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {1, 2, 6,
5}, {8, 7, 3, 4},
{2, 3, 7, 6}, {1, 5, 8, 4}}, n, newfaces},
newvl = vl /. {x_, y_, z_, w_} /; Head[x] != List :> x $e1 + y $e2 +
z $e3 + w $e4;
mesh3d = Map[MakeMesh, newvl];
mesh3d = Map[Flatten[#, 1] &, Map[Thread, Partition[mesh3d, 2, 1]],
{2}];
mesh3d = Flatten[mesh3d, 2];
newfaces = Table[faces + 8 (i - 1), {i, Length[mesh3d]/8}];
GraphicsComplex[mesh3d, GraphicsGroup[Polygon /@ newfaces]]
]

```

4.7.2. La función Graphics4D

```

Graphics4D[obj___, Ops___Rule] :=
Module[{ax, al, ae, as, ls, ap, an, bp, bn, cp, cn, dp, dn, options,
dim, dim2},
{ax, al, ae, as,
ls} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle} /.
Flatten[{Ops}] /. Options[Graphics4D];
options =
FilterRules[{Ops},
Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
options = FilterRules[options, Options[Graphics3D]];
Graphics3D[{obj}/. Point[p : {p1_, p2_, p3_, p4_}] :>
Tooltip[Point[p1 $e1 + p2 $e2 + p3 $e3 + p4 $e4], p] /; Head[p1]
!= List /.
Point[p : {{_, _, _, _} ..}] :>
(Tooltip[Point#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4,
#] & /@ p) /.
Line[p : {{_, _, _, _} ..}] :>
Line[({#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) & /@ p]
/.
Arrow[p : {{_, _, _, _} ..}] :>
Arrow[({#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) & /@ p]
/.
Arrow[Tube[p : {{_, _, _, _} ..}, ops___]] :>
Arrow[Tube[({#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) &
/@ p, ops]] /.
Tube[p : {{_, _, _, _} ..}, ops___] :>
Tube[({#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) & /@ p,
ops] /.

```

```

Polygon[p : {{_, _, _, _} ..}, ops___] :=
  Polygon[({#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) & /@
p, ops] /.
  Text[text_, {p1_, p2_, p3_, p4_}, ops___] :=
  Text[text, p1 $e1 + p2 $e2 + p3 $e3 + p4 $e4, ops] /; Head[p1] !=
List ,
If[ax,
dim = Dimensions[a1];
Which[dim === {2}, a1 = First[{{#, #, #, #} & /@ {a1}],
dim === {1, 2}, a1 = First[{{#, #, #, #} & /@ a1]];
dim2 = Dimensions[ae];
Which[dim2 === {}, ae = First[{{#, #, #, #} & /@ {ae}],
dim2 === {1}, ae = First[{{#, #, #, #} & /@ ae]];
{{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = a1;
{First[ls],
MapThread[
Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
{{"X", "Y", "Z", "W"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}}],
(*MapThread[
Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
{{"X'", "Y'", "Z'", "\[CapitalXi]'"}, {an $e1, bn $e2, cn $e3, dn
$e4}}],*)
First[as], Arrowheads[Medium],
Arrow[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3,
dp $e4}),
Dashed,
Line[{{#, {0, 0, 0}}} & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3,
dn $e4}),
MapThread[
If[#1, Table[
Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]],
i #2],
{i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4},
al}]
}, {}]],
Boxed -> False, options, PlotRange -> All]
]

```

4.7.3. La función Plot4D

```
Plot4D[expr_, {u_, u0_, u1_}, {v_, v0_, v1_}, {w_, w0_, w1_}, Ops___Rule]
:=
Module[{ax, al, ae, as, ls, pp, du, dv, dw, opt, aux, dim, dim2, an,
  ap, bn, bp, cn, cp, dn, dp, options, DirAux},
  {ax, al, ae, as, ls, pp} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
  LabelStyle, PlotPoints} /.
  Flatten[{Ops}] /. Options[ParametricPlot4D];
  If[pp === Automatic, pp = 10];
  {du, dv, dw} = {(u1 - u0), (v1 - v0), (w1 - w0)}/(pp - 1);
  options =
  FilterRules[{Ops},
  Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
  opt = FilterRules[options, {PlotStyle}] /. {PlotStyle -> d_} :> d;
  DirAux =
  Directive[RGBColor[0.88, 0.611, 0.142],
  Specularity[GrayLevel[1], 3],
  Lighting -> {"Ambient", RGBColor[0.301, 0.224, 0.09]},
  {"Directional", RGBColor[0.264, 0.1833, 0.042],
  ImageScaled[{0, 2, 2}]},
  {"Directional", RGBColor[0.264, 0.1833, 0.042],
  ImageScaled[{2, 2, 2}]},
  {"Directional", RGBColor[0.264, 0.1833, 0.042],
  ImageScaled[{2, 0, 2]}}];
  opt = Join[DirAux, Directive @@ opt];
  options = FilterRules[options, Options[Graphics3D]];
  aux = Table[N[{u, v, w, expr}], {u, u0, u1, du}, {v, v0, v1, dv}, {w,
w0, w1, dw}];
  Show[
  Graphics3D[{opt, MakePolyhedrons[aux]}, Boxed -> False,
  Axes -> False, Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All],
  If[ax, Graphics3D[dim = Dimensions[al];
  Which[dim === {2}, al = First[{#, #, #, #} & /@ {al}],
  dim === {1, 2}, al = First[{#, #, #, #} & /@ al]];
  dim2 = Dimensions[ae];
  Which[dim2 === {}, ae = First[{#, #, #, #} & /@ {ae}],
  dim2 === {1}, ae = First[{#, #, #, #} & /@ ae]];
  {{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;
  {First[ls],
  MapThread[
```

```

Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
  Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
{"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}}],
First[as],
Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}),
Dashed,
Line[#{#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3, dn $e4}),
MapThread[
  If[#1, Table[
    Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]], i #2],
    {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4}, al}]
], {}] ] ]

```

4.7.4. La función ParametricPlot4D

Curvas

```

ParametricPlot4D[alpha : {a1_, a2_, a3_, a4_}, {t_, t0_, t1_}, Ops___Rule]
:=
Module[{ax, al, ae, as, ls, dim, dim2, an, ap, bn, bp, cn, cp, dn, dp,
options},
  {ax, al, ae, as, ls} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
LabelStyle} /.
  Flatten[{{Ops}} /. Options[ParametricPlot4D];
options =
  FilterRules[{{Ops},
  Except[{{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}}]];
options = FilterRules[options, Options[ParametricPlot3D]];
Show[
  ParametricPlot3D[a1 $e1 + a2 $e2 + a3 $e3 + a4 $e4, {t, t0, t1},
  Boxed -> False, Axes -> False,
  Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All],
  If[ax,
  Graphics3D[dim = Dimensions[al];
  Which[dim === {2}, al = First[#{#, #, #, #} & /@ {al}],
  dim === {1, 2}, al = First[#{#, #, #, #} & /@ al]];
  dim2 = Dimensions[ae];
  Which[dim2 === {}, ae = First[#{#, #, #, #} & /@ {ae}],
  dim2 === {1}, ae = First[#{#, #, #, #} & /@ ae]];
  {{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;
  {First[ls],
  MapThread[

```

```

Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
      Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
{"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}]],
First[as],
Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3,
      dp $e4}),
Dashed,
Line[{-#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3,
      dn $e4}),
MapThread[
  If[#1, Table[
    Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]],
          i #2],
    {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4},
  al}}
]], {}] ] ]

```

```

ParametricPlot4D[alpha : {{_, _, _, _} ..}, {t_, t0_, t1_}, Ops___Rule] :=
Module[{ax, al, ae, as, ls, cf, dim, dim2, an, ap, bn, bp, cn, cp, dn,
  dp, options},
  {ax, al, ae, as, ls} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
LabelStyle} /.
  Flatten[{Ops]} /. Options[ParametricPlot4D];
  cf = (#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) & /@ alpha;
  options =
  FilterRules[{Ops},
  Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
  options = FilterRules[options, Options[ParametricPlot3D]];
  Show[
  ParametricPlot3D[Evaluate[cf], {t, t0, t1}, Boxed -> False, Axes ->
False,
  Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All],
  If[ax, Graphics3D[dim = Dimensions[al];
  Which[dim === {2}, al = First[{-#, #, #, #} & /@ {al}],
  dim === {1, 2}, al = First[{-#, #, #, #} & /@ al]];
  dim2 = Dimensions[ae];
  Which[dim2 === {}, ae = First[{-#, #, #, #} & /@ {ae}],
  dim2 === {1}, ae = First[{-#, #, #, #} & /@ ae]];
  {{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;
  {First[ls],
  MapThread[

```

```

Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
      Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
{"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}}],
First[as],
Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3,
      dp $e4}),
Dashed,
Line[{-#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3,
      dn $e4}),
MapThread[
  If[#1, Table[
    Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]],
      i #2],
    {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4},
  al}]
}], {}] ] ]

```

Superficies

```

ParametricPlot4D[x : {a1_, a2_, a3_, a4_}, {u_, u0_, u1_}, {v_, v0_, v1_},
Ops___Rule] :=
Module[{ax, al, ae, as, ls, dim, dim2, an, ap, bn, bp, cn, cp, dn, dp,
options},
  {ax, al, ae, as, ls} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
LabelStyle} /.
  Flatten[{Ops]} /. Options[ParametricPlot4D];
options =
  FilterRules[{Ops},
  Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
options = FilterRules[options, Options[ParametricPlot3D]];
Show[
  ParametricPlot3D[
    a1 $e1 + a2 $e2 + a3 $e3 + a4 $e4, {u, u0, u1}, {v, v0, v1},
    Boxed -> False, Axes -> False,
    Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All],
  If[ax, Graphics3D[dim = Dimensions[al];
    Which[dim === {2}, al = First[{-#, #, #, #} & /@ {al}],
      dim === {1, 2}, al = First[{-#, #, #, #} & /@ al]];
    dim2 = Dimensions[ae];
    Which[dim2 === {}, ae = First[{-#, #, #, #} & /@ {ae}],
      dim2 === {1}, ae = First[{-#, #, #, #} & /@ ae]];
    {{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;

```

```

{First[ls],
 MapThread[
   Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
     Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
   {"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}}],
 First[as],
 Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3,
   dp $e4}),
 Dashed,
 Line[{-#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3,
   dn $e4}),
 MapThread[
   If[#1, Table[
     Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]],
       i #2],
     {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4},
   al}}
 ], {}] ] ]

ParametricPlot4D[x : {{_, _, _, _}..}, {u_, u0_, u1_}, {v_, v0_, v1_},
Ops___Rule] :=
Module[{ax, al, ae, as, ls, dim, dim2, an, ap, bn, bp, cn, cp, dn, dp,
sf, options},
 {ax, al, ae, as, ls} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
LabelStyle} /.
  Flatten[{Ops]} /. Options[ParametricPlot4D];
sf = (#[[1]] $e1 + #[[2]] $e2 + #[[3]] $e3 + #[[4]] $e4) & /@ x;
options =
  FilterRules[{Ops},
  Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
options = FilterRules[options, Options[ParametricPlot3D]];
Show[
  ParametricPlot3D[
    Evaluate[sf], {u, u0, u1}, {v, v0, v1},
    Boxed -> False, Axes -> False,
    Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All],
  If[ax, Graphics3D[dim = Dimensions[al];
    Which[dim === {2}, al = First[{-#, #, #, #} & /@ {al}],
      dim === {1, 2}, al = First[{-#, #, #, #} & /@ al]];
    dim2 = Dimensions[ae];
    Which[dim2 === {}, ae = First[{-#, #, #, #} & /@ {ae}],

```

```

dim2 === {1}, ae = First[#, #, #, #] & /@ ae];
{{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;
{First[ls],
 MapThread[
  Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
    Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
  {"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}]],
 First[as],
 Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3,
  dp $e4}),
 Dashed,
 Line[{-#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3,
  dn $e4}),
 MapThread[
  If[#1, Table[
    Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]],
      i #2],
    {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4},
  al}]
}], {}] ] ]

```

Sólidos

```

ParametricPlot4D[x : {a1_, a2_, a3_, a4_}, {u_, u0_, u1_}, {v_, v0_, v1_},
{w_, w0_, w1_}, Ops__Rule] :=
Module[{ax, al, ae, as, ls, pp, du, dv, dw, opt, aux, dim, dim2, an,
  ap, bn, bp, cn, cp, dn, dp, options, DirAux},
{ax, al, ae, as, ls, pp} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
LabelStyle, PlotPoints} /.
  Flatten[{Ops]} /. Options[ParametricPlot4D];
If[pp === Automatic, pp = 10];
{du, dv, dw} = {(u1 - u0), (v1 - v0), (w1 - w0)}/(pp - 1);
options =
  FilterRules[{Ops},
    Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
opt = FilterRules[options, {PlotStyle}] /. {PlotStyle -> d_} := d;
DirAux =
  Directive[RGBColor[0.88, 0.611, 0.142],
    Specularity[GrayLevel[1], 3],
    Lighting -> {"Ambient", RGBColor[0.301, 0.224, 0.09]},
    {"Directional", RGBColor[0.264, 0.1833, 0.042]},
    ImageScaled[{{0, 2, 2}}],

```

```

    {"Directional", RGBColor[0.264, 0.1833, 0.042],
     ImageScaled[{2, 2, 2}]},
    {"Directional", RGBColor[0.264, 0.1833, 0.042],
     ImageScaled[{2, 0, 2}]}}];
opt = Join[DirAux, Directive @@ opt];
options = FilterRules[options, Options[Graphics3D]];
aux = Table[N[x], {u, u0, u1, du}, {v, v0, v1, dv}, {w, w0, w1, dw}];
Show[
Graphics3D[{opt, MakePolyhedrons[aux]}, Boxed -> False,
  Axes -> False, Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All],
If[ax, Graphics3D[dim = Dimensions[al];
  Which[dim === {2}, al = First[{#, #, #, #} & /@ {al}],
    dim === {1, 2}, al = First[{#, #, #, #} & /@ al]];
  dim2 = Dimensions[ae];
  Which[dim2 === {}, ae = First[{#, #, #, #} & /@ {ae}],
    dim2 === {1}, ae = First[{#, #, #, #} & /@ ae]];
  {{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;
  {First[ls],
   MapThread[
    Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
      Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
    {"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}}],
  First[as],
  Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}),
  Dashed,
  Line[#{#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3, dn $e4}),
  MapThread[
    If[#1, Table[
      Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]], i #2],
      {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4}, al}
    ]], {}] ] ]
ParametricPlot4D[x : {{_, _, _, _}..}, {u_, u0_, u1_}, {v_, v0_, v1_},
{w_, w0_, w1_}, Ops__Rule] :=
Module[{ax, al, ae, as, ls, pp, du, dv, dw, opt, aux, dim, dim2, an,
  ap, bn, bp, cn, cp, dn, dp, options, DirAux, n = Length[x]},
  {ax, al, ae, as, ls, pp} = {Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle,
LabelStyle, PlotPoints} /.
  Flatten[{Ops]} /. Options[ParametricPlot4D];
If[pp === Automatic, pp = 10];
{du, dv, dw} = {(u1 - u0), (v1 - v0), (w1 - w0)}/(pp - 1);

```

```

options =
  FilterRules[{Ops},
    Except[{Axes, AxesLength, AxesEdge, AxesStyle, LabelStyle}]];
opt = FilterRules[options, {PlotStyle}] /. {PlotStyle -> d_} := d;
opt = cyclestyles[opt, n];
options = FilterRules[options, Options[Graphics3D]];
aux = Table[N[#], {u, u0, u1, du}, {v, v0, v1, dv}, {w, w0, w1, dw}]& /@
x;
Show[
  MapThread[Graphics3D[{{#1, MakePolyhedrons[#2]}}, Boxed -> False,
    Axes -> False, Evaluate[Sequence @@ options], PlotRange -> All]&, {opt,
aux}],
  If[ax, Graphics3D[dim = Dimensions[al];
    Which[dim === {2}, al = First[{{#, #, #, #} & /@ {al}],
      dim === {1, 2}, al = First[{{#, #, #, #} & /@ al]];
    dim2 = Dimensions[ae];
    Which[dim2 === {}, ae = First[{{#, #, #, #} & /@ {ae}],
      dim2 === {1}, ae = First[{{#, #, #, #} & /@ ae]];
    {{an, ap}, {bn, bp}, {cn, cp}, {dn, dp}} = al;
    {First[ls],
    MapThread[
      Text[Style[#1, Italic, Last[ls]],
        Scaled[.045 ($e1 + $e2 + $e3 + $e4), #2]] &,
      {"x", "y", "z", "w"}, {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}],
    First[as],
    Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ (1.05 {ap $e1, bp $e2, cp $e3, dp $e4}),
    Dashed,
    Line[{{#, {0, 0, 0}}] & /@ (1.05 {an $e1, bn $e2, cn $e3, dn $e4}),
    MapThread[
      If[#1, Table[
        Text[Style[PaddedForm[i, {2, 0}], First[as], Last[as]], i #2],
        {i, #3[[1]], #3[[2]]}], {}] &, {ae, {$e1, $e2, $e3, $e4}, al}
    ]], {}] ] ]

```

4.8. EJEMPLOS

Para obtener las gráficas que se muestra en este apartado es preciso copiar los códigos del apartado previo y luego ejecutar cada uno de ellos presionando simultáneamente las teclas SHIFT+ENTER.

Gráficas de puntos, líneas, flechas y un polígono con Graphics4D.

```
Graphics4D[{{Green, Thick, Line[{{0,0,0,0}, {1,0, -1,0}}, Line[{{0,0,0,0}, {1,0,1,0}}],
Red, Arrowheads[0.05], Arrow[Tube[{{1,0,1,0}, {1,0, -1,0}}, 0.015]},
Blue, PointSize[0.03], Point[{{1,0,1,0}}, Point[{{1,0, -1,0}}, Point[{{0,0,0,0}},
{Pink, Polygon[{{0,0,0,0}, {1,0, -1,0}, {1,0,1,0}},
VertexColors -> {Red, Green, Blue}}]}, AxesLength -> {-1,1},
Axes -> True, AxesEdge -> True, PlotRange -> All],
```

Ver Figura 32

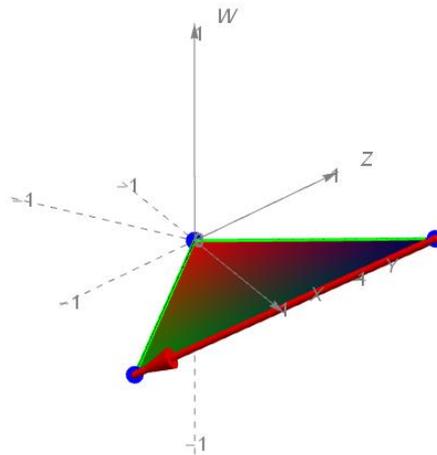


Figura 32. Uso de Graphics4D para graficar primitivas.

Gráfica del sólido $w = x^2 + y^2 + z^2$ con Plot4D.

```
Plot4D[x^2 + y^2 + z^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}]
```

Ver Figura 33

Gráfica de la curva $\alpha(t) = \left(\cos\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right), \sin\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right), \cos\left(\frac{2u}{\sqrt{5}}\right), \sin\left(\frac{2u}{\sqrt{5}}\right) \right)$ con ParametricPlot4D.

```
ParametricPlot4D[{{Cos[ $\frac{u}{\sqrt{5}}$ ], Sin[ $\frac{u}{\sqrt{5}}$ ], Cos[ $2 \frac{u}{\sqrt{5}}$ ], Sin[ $2 \frac{u}{\sqrt{5}}$ ]}, {u, 0, 5\pi}, AxesLength -> {-1,2}}
```

Ver Figura 34

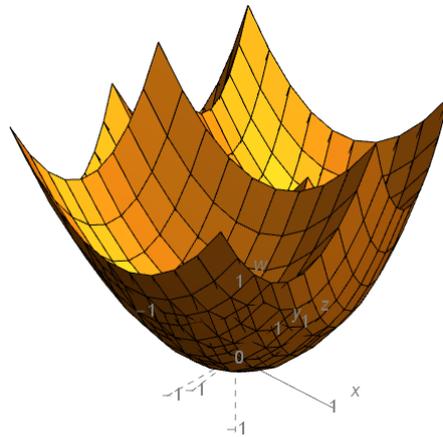


Figura 33. Uso de Plot4D para graficar sólidos.

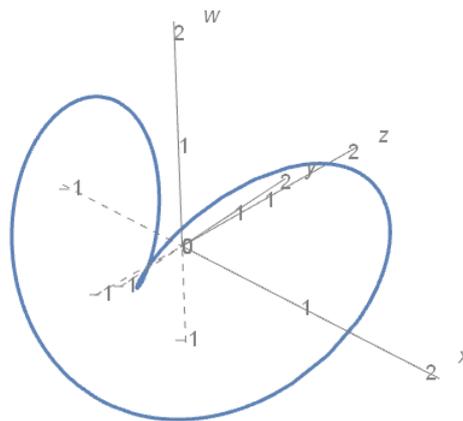


Figura 34. Uso de Parametric4D para graficar superficies.

Mathematica

Gráfica de la superficie $x(u, v) = (u, v, u^2 + v^2, -2uv)$ con ParametricPlot4D.

```
ParametricPlot4D[{u, v, u^2 + v^2, -2uv}, {u, -1, 1}, {v, -1, 1}, PlotPoints -> 15,
PlotStyle -> Directive[Opacity[0.8]], AxesLength -> {-3, 3}]
```

Ver Figura 35

Mathematica

Gráfica del sólido $x(u, v, w) = (u^2 - v^2, 2uv, w, u)$ con ParametricPlot4D.

```
ParametricPlot4D[{u, v, u^2 + v^2, -2uv}, {u, -1, 1}, {v, -1, 1}, PlotPoints -> 15,
PlotStyle -> Directive[Opacity[0.8]], AxesLength -> {-3, 3}]
```

Ver Figura 35

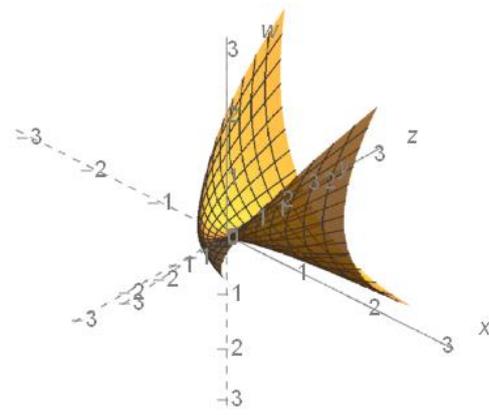


Figura 35. Uso de Parametric4D para graficar superficies.

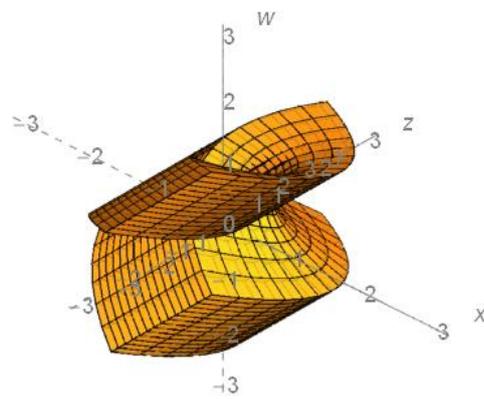


Figura 36. Uso de Parametric4D para graficar sólidos.

CONCLUSIONES

1. Se estableció los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, esto es, la submersión, la base apócrifa y las matrices de rotación. La submersión posee una matriz asociada cuyas columnas están constituidas por los vectores de base apócrifa. Al aplicarse la submersión a un punto cualquiera del espacio euclidiano tetradimensional se consigue obtener su respectiva proyección sobre el espacio euclidiano tridimensional. Si se tiene un conjunto de puntos del espacio euclidiano tetradimensional y se les aplica submersión se obtendrá la proyección de dicho conjunto que podría ser: una curva, una superficie o un sólido. Finalmente, las matrices de rotación permiten obtener una simulación del cambio de puntos de vista de algún subconjunto de puntos específico.
2. Se extendió el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.
3. Se definió analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos.
4. Se visualizaron puntos, curvas, superficies y sólidos en los modelos elaborados.
5. Se simuló diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados.
6. Se automatizó las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.

RECOMENDACIONES

Se hace las siguientes recomendaciones:

1. Incluir los resultados obtenidos en el dictado del curso de geometría diferencial.
2. Realizar una investigación similar a la de este trabajo con un software libre.
3. Utilizar una computadora de características superiores a una Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.60 GHZ para ejecutar los ejemplos mostrados en este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Canales, E. (1999). *La Inglaterra victoriana*. Madrid: Ediciones Akal S A.
- Clements, A. (2014). Obtenido de History of the Computer: http://www.cengage.com/resource_uploads/downloads/1111987041_374938.pdf
- Eldritch Press. (1991). Obtenido de Flatland: A Romance of Many Dimensions: <https://web.archive.org/web/20040822085318/http://www.eldritchpress.org/ea/FL.HTM>
- Emch, A. (1918). Proof of Pohlke's Theorem and Its Generalizations by Affinity. *American Journal of Mathematics*, 366-374. Obtenido de https://www.jstor.org/stable/2370435?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents
- Hoffmann, C. M., & Zhou, J. (1990). *Visualization of Surfaces in Four-Dimensional Space*. Indiana: Purdue University Libraries.
- Lehmann, C. (1980). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- Noll, A. M. (1967). A Computer Technique for Displaying n-Dimensional Hyperobjects. *Communications of the ACM*, 469-473.
- O'Connor, J., & Robertson, E. (Febrero de 2005). Obtenido de Edwin Abbott: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Abbott.html>
- Pham, F. (1968). Some Notions of Local Differential Topology. *Symposia on Theoretical Physics and Mathematics* (págs. 65-100). Boston: Springer.
- Rovenski, V. (2000). *Geometry of curves and surfaces with Maple*. Boston: Birkhäuser Basel.
- Sakai, Y., & Hashimoto, S. (2006). Interactive Four-Dimensional Space Visualization Using Five-Dimensional Homogeneous Processing for Intuitive Understanding. *The Journal of The Institute of Image Information and Television Engineers*, 1630-1647.
- Velezmoro, R., & Ipanaque, R. (2015). Un modelo para visualizar objetos en 4D con el Mathematica. *ECIPerú*, 12-18.
- Velezmoro, R., & Ipanaque, R. (2015b). Representación gráfica de las funciones complejas con el Mathematica. *ECIPerú*, 53-57.
- Velezmoro, R., & otros. (2019). A Mathematica package for visualizing objects immersed in R4. *International Conference on Computational Science and its Applications* (págs. 1-15). San Petersburgo: Springer.
- Vilcherrez, R. D., & Poicón, H. M. (2018). *Interpretación geométrica de las fórmulas de Frenet de curvas en el espacio euclidiano tetradimensional con el Mathematica*. Piura: Universidad Nacional de Piura.
- Volkert, K. (2017). On Models for Visualizing Four-Dimensional Figures. *Springer Science+Business Media*, 27-35.
- Wang, W. M., & otros. (2013). Interactive Exploration of 4D Geometry with Volumetric Halos. *Pacific Graphics*.

- Wikipedia. (25 de Junio de 2017). Obtenido de Pohlke's theorem:
https://en.wikipedia.org/wiki/Pohlke%27s_theorem
- Wikipedia. (13 de Agosto de 2019). Obtenido de Karl Wilhelm Pohlke:
https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Wilhelm_Pohlke
- Wuyts, G. (2017). Obtenido de Wugi's QBComplex: <http://home.scarlet.be/wugi/qbComplex.html>
- Xiaoqi, Y. (2015). *New Directions in Four-Dimensional Mathematical Visualization*. Singapur: Nanyang Technological University.
- Zhou, J. (1991). *Visualization of Four Dimensional Space and Its Applications*. Department of Computer Science Technical Reports.

ANEXOS

ANEXO 1

Título: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS EN LA ELABORACIÓN DE MODELOS PARA VISUALIZAR OBJETOS DEL ESPACIO EUCLIDIANO TETRADIMENSIONAL			
Nombre del tesista: Emanuel Enrique Sobrino Merino			
Problemas	Objetivos	Hipótesis	Metodología
<p>General ¿Será posible establecer los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional?</p> <p>Específicos</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Será posible extender el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional? 2. ¿Será posible definir analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio 	<p>General Establecer los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.</p> <p>Específicos</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Extender el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. 2. Definir analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos. 	<p>General Es posible Establecer los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.</p> <p>Específicos</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Es posible extender el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. 2. Es posible definir analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos. 3. Es posible visualizar puntos, curvas, superficies y sólidos en los modelos elaborados. 4. Es posible simular diferentes puntos de vista de los objetos del espacio 	<p>Métodos</p> <ul style="list-style-type: none"> - Extender el modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional a un modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional. - Definir analíticamente el modelo tridimensional para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional, obtenido a partir de la extensión del modelo bidimensional más común para visualizar objetos del espacio euclidiano tridimensional, y otros modelos. - Visualizar puntos, curvas, superficies y sólidos en los modelos elaborados. - Simular diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados. - Automatizar las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.

<p>euclidiano tridimensional, y otros modelos?</p> <p>3. ¿Será posible visualizar puntos, curvas, superficies y sólidos en los modelos elaborados?</p> <p>4. ¿Será posible simular diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados?</p> <p>5. ¿Será posible automatizar las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica?</p>	<p>3. Visualizar puntos, curvas, superficies y sólidos e en los modelos elaborados.</p> <p>4. Simular diferentes puntos de vista de los objetos del espacio euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados.</p> <p>5. Automatizar las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.</p>	<p>euclidiano tetradimensional en los modelos elaborados.</p> <p>5. Es posible automatizar las interpretaciones geométricas de los resultados obtenidos con ayuda del software Wolfram Mathematica.</p> <p>Justificación Este trabajo se realizará porque no se han encontrado los fundamentos matemáticos en los que se basa la elaboración de los diversos modelos utilizados para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.</p> <p>Importancia Este trabajo se realizará para establecer los fundamentos matemáticos en la elaboración de modelos para visualizar objetos del espacio euclidiano tetradimensional.</p>	
--	---	---	--