



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

# Estudio de curvas planas a partir de parametrizaciones y lugares geométricos

Julian Sneyder Lasso Carrión

**Universidad Pedagógica Nacional de Colombia**

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia

2021



# Estudio de curvas planas a partir de parametrizaciones y lugares geométricos

**Julian Sneyder Lasso Carrión**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
Licenciado en Matemáticas

Asesor:

Benjamín Sarmiento Lugo

**Universidad Pedagógica Nacional de Colombia**

Facultad de Ciencia y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bogotá, Colombia

2021



*A mi madre. Que cada éxito en mi vida sea un reflejo de tus esfuerzos.*

*A ti, Emilia, que me has enseñado la alegría de vivir.*

## Agradecimientos

Mis más profundos agradecimientos a la Universidad Pedagógica Nacional por haberme abierto sus puertas.

Al Departamento de Matemáticas: por sus enseñanzas, sus experiencias, su ayuda y su tiempo en mi proceso académico. Todos ustedes representan un modelo a seguir en mi vida.

Al profesor Benjamín Sarmiento, por compartirme sus ideas y sugerencias en la elaboración de este documento.

A mi madre y mi hermana, por su apoyo en todo momento. A mi abuelo, por acompañarme en mis desvelos nocturnos. A Andrea, por darme mucho más de lo que merezco. A Fabio, por brindarme apoyo cuando nadie más lo hizo.

A mis compañeros, con quienes compartí tantas noches, alegrías y tristezas, y me permitieron llegar a este momento.

*¡Muchas gracias a todos!*

## RESUMEN

Este trabajo de grado se presenta como una herramienta bibliográfica orientada a estudiantes de cálculo vectorial y geometría analítica que se encuentren interesados en las ecuaciones paramétricas, mostrando un estudio de algunas curvas planas definidas como lugares geométricos. Teniendo en cuenta la poca variedad de ejemplos que se muestran usualmente en los libros de texto, se diseña este documento de tal forma que se amplie el conocimiento de otras curvas planas de la siguiente forma: (1) ligera revisión histórica de la curva en cuestión, (2) definición y construcción geométrica empleando el software de geometría dinámica Geogebra, y (3) los pasos para la obtención de las ecuaciones paramétricas de la curva. A modo de facilitar la visualización y exploración de propiedades de cada curva, se crea también un repositorio digital que permite controlar algunos parámetros asociados a su trazo, forma y tamaño. Se espera así que este trabajo sirva como una referencia rápida y una ventana hacia el estudio de otras propiedades generales de las curvas planas y de las ecuaciones paramétricas.

Palabras clave: ecuaciones paramétricas, lugar geométrico, curvas planas, geometría analítica, cálculo, Geogebra

## ABSTRACT

This document is presented as a bibliographic tool aimed at students of vector calculus and analytical geometry who are interested in parametric equations, showing a study of some plane curves being defined as a locus. Considering the limited variety of examples that are usually shown in math textbooks, this document is designed in such a way that the knowledge of different plane curves is expanded as follows: (1) slight historical revision of the curve, (2) definition and geometric construction using the dynamic geometry software Geogebra, and (3) the steps to obtain the parametric equations of the curve. To facilitate the visualization and exploration of the properties of each curve, a digital repository is also created that allows controlling some of the parameters associated with its trace, shape and size. It is thus hoped that this work serves as a quick reading reference and as a window towards the study of other general properties of plane curves and parametric equations.

Keywords: parametric equations, locus, plane curves, analytical geometry, calculus, Geogebra

## ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y aprobados el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado titulado “ESTUDIO DE CURVAS PLANAS A PARTIR DE PARAMETRIZACIONES Y LUGARES GEOMÉTRICOS”, elaborado por el estudiante **JULIAN SNEYDER LASSO CARRIÓN**, identificado con el Código **2014240030** y Cédula **1010228535** el equipo evaluador, abajo firmante, asigna como calificación **cuarenta y siete (47)** puntos.

El mismo equipo evaluador recomienda la siguiente sugerencia de distinción:

Ninguna

Meritoria

Laureada

El Trabajo de Grado, presentado como monografía, constituye un requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

En constancia se firma a los seis (06) días del mes de diciembre de 2021.



Mg. BENJAMÍN RAFAEL SARMIENTO LUGO  
Director del Trabajo de grado



Mg. FELIPE JORGE FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ  
Jurado del Trabajo de grado



Mg. LUIS ALEJANDRO SÁNCHEZ CORTES  
Jurado del Trabajo de grado

# Contenido

<b>Listado de figuras</b>	<b>14</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>15</b>
<b>2 Justificación</b>	<b>16</b>
<b>3 Objetivos</b>	<b>17</b>
<b>4 Preliminares</b>	<b>18</b>
4.1 Espacio Euclídeo . . . . .	18
4.2 Ecuación cartesiana . . . . .	18
4.3 Lugar geométrico en el plano . . . . .	19
4.4 Ecuaciones paramétricas de curvas planas . . . . .	20
4.5 Coordenadas polares y ecuaciones polares . . . . .	20
4.6 Relación entre coordenadas cartesianas y polares . . . . .	21
<b>5 Estudio de curvas</b>	<b>22</b>
5.1 Circunferencia . . . . .	22
5.2 Parábola . . . . .	25
5.3 Elipse . . . . .	28
5.4 Hipérbola . . . . .	32
5.5 Cicloide . . . . .	36
5.6 Trocoide . . . . .	38
5.7 Epicloide . . . . .	40
5.8 Epitrocoide . . . . .	44

5.9	Hipocicloide . . . . .	47
5.10	Hipotrocoide . . . . .	51
5.11	Astroide . . . . .	53
5.12	Tricúspide . . . . .	56
5.13	Curva de Agnesi . . . . .	58
5.14	Curva de ballesta . . . . .	62
5.15	Cisoide de Diocles . . . . .	64
5.16	Trisectriz de Hipias o Cuadratriz de Dinóstrato . . . . .	67
5.17	Bicornio . . . . .	69
5.18	Trisectriz de Maclaurin . . . . .	72
5.19	Curva arácnida . . . . .	75
5.20	Involuta del círculo . . . . .	76
5.21	Lemniscata de Geronio . . . . .	78
5.22	Lemniscata de Bernoulli . . . . .	80
5.23	Óvalos de Cassini . . . . .	84
5.24	Concoide de Nicómedes . . . . .	89
5.25	Estrofoide . . . . .	93
5.26	Curva kappa o curva de Gutschoven . . . . .	96
5.27	Campila de Eudoxo . . . . .	98
5.28	Cruciforme . . . . .	100
5.29	Cardioide . . . . .	102
5.30	Nefroide . . . . .	106
5.31	Caracol de Pascal o limaçon . . . . .	109
5.32	Nefroide de Freeth . . . . .	112
5.33	Folio de Durero . . . . .	116
5.34	Séxtica de Cayley . . . . .	118
5.35	Trisectriz de Deslanges . . . . .	121
5.36	Cornoide . . . . .	123
5.37	Cocleoide . . . . .	126

---

5.38	Espiral de Arquímedes . . . . .	129
5.39	Espiral hiperbólica . . . . .	131
5.40	Lituus (o espiral de lituus) . . . . .	133
5.41	Rhodonea o rosetón . . . . .	135
5.42	Folio simple u Ovoide de Kepler . . . . .	139
5.43	Bifolio . . . . .	142
5.44	Trifolio . . . . .	145
5.45	Cuatrifolio . . . . .	148
5.46	Piriforme . . . . .	151
5.47	Torpedo . . . . .	154
5.48	Curva del pez . . . . .	157
5.49	Serpentina o anguína . . . . .	160
5.50	Besace . . . . .	162
5.51	Trisectriz de Ceva . . . . .	164
<b>6</b>	<b>Repositorio de curvas</b>	<b>166</b>
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>168</b>
	<b>Referencias</b>	<b>170</b>
	<b>Anexos</b>	<b>172</b>
A	Ecuaciones cartesianas de algunas curvas . . . . .	172
B	Sustitución de Euler-Weierstrass . . . . .	182
C	Créditos de imágenes . . . . .	184



# Índice de figuras

4-1	Conexión entre sistemas coordenados cartesiano y polar . . . . .	21
5-1	Circunferencia . . . . .	23
5-2	Parábola . . . . .	26
5-3	Aplicaciones de la elipse . . . . .	28
5-4	Elipse . . . . .	29
5-5	Elipse horizontal y vertical . . . . .	30
5-6	Deducción de las ecuaciones paramétricas de la elipse . . . . .	31
5-7	Hipérbola . . . . .	33
5-8	Hipérbola horizontal y vertical . . . . .	34
5-9	Deducción de las ecuaciones paramétricas de la hipérbola . . . . .	35
5-10	Cicloide . . . . .	36
5-11	Tipos de cicloides . . . . .	37
5-12	Traza de trocoide acortata . . . . .	38
5-13	Traza de trocoide prolata . . . . .	39
5-14	Trocoides al prolongar el número de revoluciones. . . . .	39
5-15	Trazado de una epicloide . . . . .	40
5-16	Ejemplos de epicloides con distintos parámetros. . . . .	43
5-17	Deducción de las ecuaciones de la epitrocoide . . . . .	44
5-18	Modelo del movimiento planetario con epiciclos . . . . .	45
5-19	Ejemplos de epitrocoides con distintos parámetros . . . . .	46
5-20	Deducción de las ecuaciones de la hipocicloide . . . . .	47
5-21	Ejemplos de hipocicloides con distintos parámetros de $a$ y $b$ . . . . .	49
5-22	Continuación. Ejemplos de hipocicloides con distintos parámetros . . . . .	50

5-23	Deducción de las ecuaciones de la hipotrocoide . . . . .	51
5-24	Trazado de hipotrocoides con distintos parámetros . . . . .	52
5-25	Astroide como hipocicloide . . . . .	53
5-26	Deducción de las ecuaciones de la tricúspide . . . . .	56
5-27	Parametrización 1 de la curva de Agnesi . . . . .	59
5-28	Parametrización 2 de la curva de Agnesi . . . . .	60
5-29	Curva de ballesta . . . . .	62
5-30	Hoja de hiedra . . . . .	64
5-31	Deducción de las ecuaciones de la cisoide de Diocles . . . . .	65
5-32	Cisoide de Diocles . . . . .	66
5-33	Arco de trisectriz de Hippias . . . . .	67
5-34	Cuadratriz de Dinóstrato extendida al plano . . . . .	68
5-35	Sombrero bicornio . . . . .	69
5-36	Deducción de las ecuaciones de la curva bicornio . . . . .	70
5-37	Trisectriz de Maclaurin . . . . .	72
5-38	Curva arácnida . . . . .	75
5-39	Deducción de las ecuaciones de la involuta del círculo . . . . .	76
5-40	Involuta del círculo . . . . .	77
5-41	Deducción de la lemniscata de Geronio . . . . .	78
5-42	Lemniscata de Bernoulli . . . . .	80
5-43	Intervalos de trazado sobre la lemniscata de Bernoulli . . . . .	82
5-44	Gráfico de funciones que componen los óvalos de Cassini . . . . .	86
5-45	Óvalos de Cassini comprimidos y convexos . . . . .	87
5-46	Óvalo de Cassini . . . . .	87
5-47	Pares de óvalos de Cassini . . . . .	88
5-48	Concoide de Nicómedes y concha de mar . . . . .	89
5-49	Deducción de las ecuaciones de la concoide de Nicómedes . . . . .	90
5-50	Concoide de Nicómedes con distintos parámetros . . . . .	92
5-51	Estrofoide recta . . . . .	93

---

5-52	Estrofoides oblicuas . . . . .	95
5-53	Curva kappa y letra griega kappa . . . . .	96
5-54	Campila de Eudoxo . . . . .	98
5-55	Deducción de las ecuaciones de la cruciforme . . . . .	100
5-56	Deducción de las ecuaciones de la cardiode . . . . .	103
5-57	Trazado de cardioides según su ecuación . . . . .	104
5-58	Hojas de la planta <i>Galax Urceolata</i> . . . . .	105
5-59	Trazado de nefroide horizontal . . . . .	107
5-60	Nefroide vertical y horizontal . . . . .	108
5-61	Disección de un riñon de oveja. . . . .	108
5-62	Deducción de las ecuaciones del caracol de Pascal . . . . .	110
5-63	Caracoles de Pascal . . . . .	111
5-64	Deducción de las ecuaciones del Nefroide de Freeth . . . . .	112
5-65	Nefroide de Freeth . . . . .	113
5-66	Trazado del folio de Durero . . . . .	116
5-67	Deducción de las ecuaciones de la séxtica de Cayley . . . . .	118
5-68	Trisectriz de Deslanges . . . . .	121
5-69	Trazado de la cornoide . . . . .	123
5-70	Deducción de las ecuaciones de la cornoide . . . . .	124
5-71	Deducción de las ecuaciones de la cocleoide . . . . .	126
5-72	Trazado de la cocleoide . . . . .	128
5-73	Deducción de las ecuaciones de la espiral de Arquímedes . . . . .	129
5-74	Espiral de Arquímedes . . . . .	130
5-75	Deducción de las ecuaciones de la espiral hiperbólica . . . . .	131
5-76	Espiral hiperbólica . . . . .	132
5-77	Lituus como bastón . . . . .	133
5-78	Deducción de las ecuaciones de la espiral de Lituus . . . . .	133
5-79	Espiral de Lituus . . . . .	134
5-80	Deducción de las ecuaciones de la rosa de Grandi . . . . .	135

---

<b>5-81</b>	Rosas de Grandi 1 . . . . .	136
<b>5-82</b>	Rosas de Grandi 2 . . . . .	138
<b>5-83</b>	Deducción de las ecuaciones del folio simple . . . . .	139
<b>5-84</b>	Deducción de las ecuaciones del bifolio . . . . .	142
<b>5-85</b>	Deducción de las ecuaciones del trifolio . . . . .	145
<b>5-86</b>	Trifolio en la naturaleza . . . . .	147
<b>5-87</b>	Deducción de las ecuaciones de un cuadrifolio . . . . .	148
<b>5-88</b>	Cuadrifolio en la naturaleza . . . . .	150
<b>5-89</b>	Deducción de las ecuaciones de la piriforme . . . . .	151
<b>5-90</b>	Curvas piriformes variando su parámetro . . . . .	153
<b>5-91</b>	Deducción de las ecuaciones de la curva torpedo . . . . .	154
<b>5-92</b>	Deducción de las ecuaciones de la curva de pez . . . . .	157
<b>5-93</b>	Serpentina . . . . .	160
<b>5-94</b>	Deducción de las ecuaciones de la curva besace . . . . .	162
<b>5-95</b>	Deducción de las ecuaciones de la cicloide de Ceva . . . . .	164
<b>5-96</b>	Cicloide de Ceva como trisectriz . . . . .	165
<b>6-1</b>	Interfaz del repositorio de curvas 1 . . . . .	166
<b>6-2</b>	Interfaz del repositorio de curvas 2 . . . . .	167

# 1. Introducción

Este trabajo de grado presenta el estudio de algunas curvas planas que han surgido, usualmente, gracias a los procesos de exploración, representación, modelación por parte de científicos. A lo largo de la historia se han creado artefactos mecánicos y gráficos cuidadosamente elaborados, recreando curvas que satisficieran condiciones geométricas específicas involucrando el movimiento de los objetos geométricos. No obstante, poner la idea en marcha de estas configuraciones en algunos casos ha sido por serendipia, entendida como esos hallazgos inesperados o accidentales que ocurren al estudiar otros campos de las ciencias: por ejemplo, la observación de la forma de una flor, o ligeras variaciones del movimiento de un disco o engranaje en el diseño de máquinas.

En cualquier caso, el papel central de este documento es la creación de estas curvas a partir del movimiento de figuras geométricas bajo condiciones específicas en el plano. Para esto, teniendo en cuenta la disponibilidad de software de geometría dinámica, la facilidad que brinda prescindir de objetos físicos permite revisar las formas de construir curvas y estudiar características sobre las mismas, siendo las ecuaciones paramétricas una de ellas.

Inicialmente, se abordan como preliminares algunos resultados básicos de la geometría analítica que serán utilizados en secciones posteriores. Luego, se aborda la deducción de las ecuaciones paramétricas de varias curvas planas a partir de su definición como lugar geométrico, no sin antes presentar una revisión sucinta de tipo histórico.

Se espera así que este trabajo sirva como una referencia de consulta para definiciones geométricas de curvas planas, y a la vez, de sus expresiones paramétricas que sirvan para el estudio de otras propiedades geométricas de las mismas.

## 2. Justificación

Este trabajo surge en el marco de las actividades del curso de geometría analítica al abordar el estudio de curvas planas. Al realizar una revisión documental de distintos libros de geometría analítica y cálculo vectorial, se evidencia que hay pocos ejemplos entorno a la variedad de curvas planas presentadas, o que centran su atención principalmente en resultados de las secciones cónicas.

Bajo esta premisa, se propuso desarrollar un recurso bibliográfico que contenga un estudio de curvas planas partiendo de definiciones como lugar geométrico junto con la deducción de sus ecuaciones paramétricas; todo con el ánimo de ampliar el espectro de curvas conocidas que se abordan comúnmente en estos cursos.

Es implícito también, revisar la importancia del estudio de curvas planas en la evolución de las matemáticas, pues han sido fuente de motivación para la conformación de nuevas teorías que han permitido desarrollar otras estrategias frente a cómo pensar un problema matemático.

## 3. Objetivos

A continuación se presentan los objetivos para el desarrollo de la monografía:

### Objetivo general

Elaborar un recurso bibliográfico que aborde la deducción de ecuaciones paramétricas de curvas planas definidas a partir de lugares geométricos.

### Objetivos específicos

- Realizar una revisión y recopilación del estudio de curvas planas presentes en libros de texto de geometría, de cálculo y memorias de eventos.
- Realizar su construcción geométrica a partir de una definición como lugar geométrico, empleando software de geometría dinámica.
- Deducir las ecuaciones paramétricas de las curvas construidas.
- Elaborar un recurso bibliográfico en donde se recopilen las curvas construidas y las deducciones de sus ecuaciones paramétricas.

## 4. Preliminares

Teniendo en cuenta que se estudiarán curvas planas, es necesario presentar algunas generalidades. La información que se muestra a continuación proviene de Spivak(1988) y Lehmann (1989).

### 4.1. Espacio Euclídeo

**Definición 1.** *Un espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  consiste de un conjunto de todas las  $n$ -tuplas*

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_j \text{ es un número real para } j = 1, \dots, n \} \quad (4-1)$$

*El conjunto definido por  $\mathbb{R}^2$  es frecuentemente llamado **plano**.*

Los elementos de  $\mathbb{R}^n$  representan *puntos* en el espacio  $n$ -dimensional, y *vectores de posición*. Consecuentemente,  $\mathbb{R}^n$  es un espacio vectorial luego operaciones de *adición* y *multiplicación escalar* están definidas. Aún más, operaciones en este conjunto como la *distancia* y otras propiedades vectoriales también son bien definidas.

Centrando la atención sobre  $\mathbb{R}^2$ , las duplas de este conjunto usualmente se representan bajo  $(x, y)$  y representan las coordenadas de un punto sobre un plano cartesiano.

### 4.2. Ecuación cartesiana

**Definición 2.** *Una ecuación cartesiana representa un subconjunto  $S$  de un espacio euclídeo  $n$ -dimensional de la forma:*

$$S : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (4-2)$$

La expresión de la izquierda es alguna expresión de las coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Las  $n$ -tuplas de los números  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfacen la ecuación, son coordenadas de los puntos de  $S$ .

Teniendo en cuenta que se aborda el estudio de curvas sobre un *plano euclídeo*, estas ecuaciones cartesianas son de la forma:

$$C : f(x, y) = 0 \tag{4-3}$$

### 4.3. Lugar geométrico en el plano

En el estudio de la geometría analítica, se tienen en cuenta dos problemas fundamentales (Lehmann, 1989, p. 32):

- I. Dada una ecuación, esta se interpreta geoméricamente: la construcción de su gráfica correspondiente y detalles característicos importantes de esta.
- II. Dada una figura geométrica o las condiciones que cumplan los puntos de la misma, determinar la expresión algebraica que la caracteriza.

Sabiendo que  $x$  y  $y$  son valores reales, y que  $(x, y)$  representan las coordenadas de un punto en plano, se presenta la siguiente definición:

**Definición 3.** Un lugar geométrico es el conjunto de puntos y *solamente* aquellos puntos que están determinados por una o varias condiciones específicas. Cuando estos puntos satisfacen la ecuación (4-3), se denominan *lugar geométrico* o también *gráfica de la ecuación*.

Otra definición importante que apoya la anterior es la siguiente:

**Definición 4.** *cualquier* punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación (4-3) *pertenecen al lugar geométrico* de esta.

Estas dos definiciones establecen directamente una relación entre representaciones analíticas y gráficas, en donde se involucran procesos como la interpretación, el cómputo y el trazado según el tipo de expresión.

## 4.4. Ecuaciones paramétricas de curvas planas

Un lugar geométrico que satisface  $f(x, y) = 0$  suele representar una curva plana  $C$ . Esta expresión analítica también puede ser caracterizada a través de un par de ecuaciones de tal forma que  $x$  y  $y$  sean función de una tercera variable  $\theta$  (llamado **parámetro**):

**Definición 5.** Sea  $C$  un conjunto de puntos  $P(x, y)$  cuyas coordenadas  $x$  y  $y$  están definidas por las expresiones

$$x = x(\theta) \quad ; \quad y = y(\theta) \quad ; \quad a \leq \theta \leq b \quad (4-4)$$

en donde  $x(\theta)$  y  $y(\theta)$  son continuas sobre  $[a, b]$ . Estas ecuaciones determinan una **parametrización de la curva plana  $C$** .

Las expresiones en (4-4) se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva*. Además, cualquier punto  $P(x, y)$  cuyas coordenadas  $x$  y  $y$  sean calculadas mediante estas ecuaciones se denomina *punto de la curva  $C$* . De esta forma, un punto  $P(x(\theta), y(\theta))$ , o más bien,  $P(\theta)$  se llama *punto de la curva  $C$  respecto al valor del parámetro  $\theta$* .

Una de las ventajas de usar este tipo de ecuaciones es que muestran la posición de  $P$  para un valor específico  $\theta$  y su dirección del movimiento. En contraste con las ecuaciones cartesianas, no es posible determinar a partir de ellas la dirección del trazado o la posición específica en un momento dado. Por otro lado, las ecuaciones paramétricas vienen con una desventaja y es que el lugar geométrico adquiere más de una forma de describirse analíticamente: dependiendo del punto de partida o dirección del trazado, sus ecuaciones cambian.

## 4.5. Coordenadas polares y ecuaciones polares

El sistema de coordenadas polares usa distancias y ángulos para ubicar puntos en el plano. Básicamente, se escoge un punto fijo  $O$  y se traza un rayo con origen sobre ese punto: estos son los objetos de referencia, el punto se denomina *polo*, y el rayo *eje polar*. Ahora, es posible establecer la coordenada de cualquier punto en el plano de la forma  $P(r, \theta)$  donde  $r$  corresponde a la distancia de  $O$  a  $P$ , y  $\theta$  es el ángulo formado entre el eje polar y  $\overline{OP}$ .

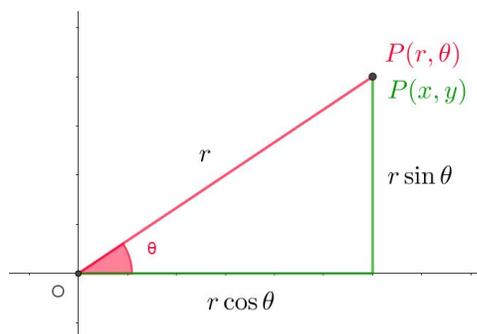
El ángulo  $\theta$  recibe el nombre de *ángulo polar*, mientras que  $\overline{OP}$  se llama *distancia radial* o *radio vector*. Por convención, los ángulos son medidos de forma positiva en sentido contrario a las agujas del reloj, y los valores de  $r < 0$  corresponden a un cambio de dirección (el punto se ubica en el rayo opuesto al punto con radio  $|r|$ ).

Una ecuación que describa el comportamiento de una curva empleando coordenadas polares, se denomina ecuación polar. Debido a la naturaleza circular del sistema, curvas con un comportamiento de este estilo como espirales o rosas poseen una expresión más simple en comparación con el sistema cartesiano.

**Definición 6.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $[a, b]$ . El conjunto de puntos  $P(r, \theta)$  que satisfacen  $r = f(\theta)$  se denomina ecuación polar

## 4.6. Relación entre coordenadas cartesianas y polares

Las coordenadas polares pueden ser cambiadas a coordenadas cartesianas y viceversa. La conexión entre estos dos sistemas de coordenadas se muestra en la figura.



**Figura 4-1:** Conexión entre sistemas coordenados cartesiano y polar

a. Para cambiar de coordenadas polares a cartesianas, se usan las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta$$

b. Para cambiar de coordenadas cartesianas a polares, se usan las ecuaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

# 5. Estudio de curvas

## 5.1. Circunferencia

Es la curva más antigua de la que se tiene registro, y cuyos hallazgos muestran un desarrollo aritmético primitivo. Del latín *circum* (alrededor de) y *ferre*, (cargar), literalmente “cargar alrededor” (Schwartzman, 1994)<sup>1</sup>. Si bien hay registros de la palabra alrededor del siglo I (Folkerts, 2005, p. 151), no fue sino hasta la época medieval que se vió la necesidad de distinguir la línea que encierra al círculo. Los trabajos más antiguos que involucran circunferencias datan de los babilonios en el desarrollo de la rueda y mediciones astronómicas (quizá inspirados por la observación celeste de la Luna y el Sol). El estudio de esta curva ha permitido el desarrollo de la geometría, la astronomía y el cálculo, siendo también fuente de inspiración en el arte hasta el punto de pensarse en la Edad Media como sinónimo de divino o perfección (de ahí las pinturas con el halo sobre la cabeza).

La definición de circunferencia, se presenta en Los Elementos de Euclides: <sup>2</sup>

[**Definición 15**] *Un círculo es una figura plana limitada por una línea curva que se llama circunferencia, respecto de la cual las rectas que sobre ella inciden desde uno de los puntos colocado en el interior de la figura son iguales entre sí.*

[**Definición 16**] *Dicho punto es llamado centro del círculo.*

Basados en estas dos definiciones, se construye la definición actual de circunferencia:

---

<sup>1</sup> Cualquier nota de tipo etimológica que se muestre de aquí en adelante, es a partir de este autor.

<sup>2</sup> Euclides usa un término que hace más referencia a periferia como noción de circunferencia según un fragmento de texto de Los Elementos encontrado en las ruinas de Herculaneum (Russo, 2003, p. 321). Las versiones modernas de Los Elementos incluyen la definición de circunferencia en la de círculo.

**Definición 1.** Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan a otro punto llamado centro.

Dicho de otra forma, es el conjunto de puntos del plano  $P(x, y)$  que están a una distancia  $r$  de un centro  $C(h, k)$ . Esto se expresa matemáticamente como:

$$|CP| = r \quad (5-1)$$

Para desarrollar esta expresión, se usa el teorema de la distancia entre dos puntos y un poco de álgebra<sup>3</sup>, llegando a la expresión general de una circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (5-2)$$

Al igual que con la geometría sintética, todo lo que se necesita para obtener una circunferencia son el centro y el radio; en este caso, las coordenadas del centro y la longitud del radio. Para el caso en que la circunferencia está centrada en el origen, es decir  $h = k = 0$ , la ecuación queda reducida a la forma  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Por otro lado, una definición más mecánica de la circunferencia podría ser la siguiente:

**Definición alternativa.** La circunferencia es el lugar geométrico que determina un segmento al girar en el plano sobre uno de sus extremos manteniéndose fijo.

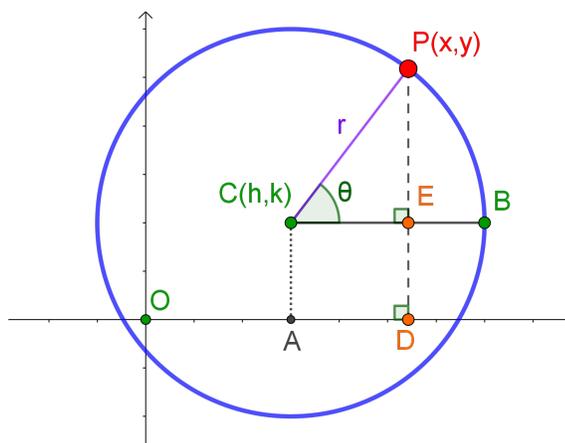


Figura 5-1

Siendo  $\overline{CP}$  con  $C$  fijo sobre el cual gira el segmento, trácese  $\overleftrightarrow{CB}$  de tal forma que sea paralela con el eje  $X$ , y llámese  $\theta$  a la medida del ángulo determinado por  $\angle BCP$  donde se evidencia

<sup>3</sup>Para detalles paso a paso, basta con tomar cualquier texto de geometría analítica.

que  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Por otro lado, sean  $A$  y  $D$  los pies de las perpendiculares de  $C$  y  $P$  respecto al eje  $X$ , y  $E$  el punto de corte entre  $\overleftrightarrow{CB}$  y  $\overleftrightarrow{DP}$ . Se sabe que  $\angle CEP$  es recto por ser ángulo correspondiente con  $\angle ODP$ , y por consiguiente se deduce que  $\triangle ECP$  es rectángulo y que  $\square ADEC$  es rectángulo, luego  $AC = DE$  y  $AD = CE$ . De esta forma, se obtiene:

$$\begin{aligned}x &= OD = OA + AD = OA + CE = h + r \cos \theta \\y &= DP = DE + EP = AC + EP = k + r \sen \theta\end{aligned}$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia son:

$$\boxed{x = h + r \cos \theta \quad ; \quad y = k + r \sen \theta} \quad (5-3)$$

Además, la circunferencia permite una parametrización racional realizando la sustitución de Euler-Weierstrass<sup>4</sup>, donde  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\boxed{x = h + \frac{r(1-t^2)}{(1+t^2)} \quad ; \quad y = k + \frac{2rt}{(1+t^2)}} \quad (5-4)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$  y cuyos puntos en el infinito (es decir, cuando  $t$  tiende a valores muy grandes y muy pequeños) se ubican en  $M(h-r, k)$

---

<sup>4</sup> Ver Anexo B

## 5.2. Parábola

El trabajo mas antiguo que se conoce de la parábola se le atribuye a Menecmo, y data del siglo IV a.C. (Smith, 1923a, p. 92) al estudiar uno de los tres problemas clásicos de la geometría<sup>5</sup>. Sin embargo, la curva recibe su nombre por Apolonio de Perge (Rosenfeld, s.f., p. 11) en su trabajo acerca de las cónicas en la Proposición 11: del griego *para* (junto con, cercano a) y *ballein* (lanzar), literalmente “lo que es cercano a lanzar”. Desde la Antigua Grecia se estudiaron las propiedades geométricas de la parábola donde se destacan los trabajos de Aristóteles y Pappus como los primeros tratados de óptica (Russo, 2003, p. 57) que siglos más tarde retomarían matemáticos para el diseño de telescopios, y varias aplicaciones en la física y la ingeniería.

La definición de parábola como lugar geométrico es:

**Definición 2.** *Una parábola es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo (foco) a una recta (directriz).*

Para hallar las expresiones analíticas de la parábola, llámense  $F$  y  $l$  al foco y directriz de la parábola, respectivamente. El punto ubicado a la mitad de la distancia entre la recta directriz y el foco se denomina *vértice de la parábola*, y por definición, esta hace parte de la parábola. Por conveniencia, ubíquese este vértice en el origen del plano coordenado, y sea  $F(p, 0)$ . Por definición se sabe que la recta directriz debe ser  $x = -p$ . Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera de la parábola, trácese  $\overline{PA}$  de tal forma que  $\overline{PA} \perp l$ .

Se tiene entonces que el conjunto de puntos  $P$  que determinan la parábola deben cumplir:

$$|AP| = |FP| \quad (5-5)$$

Por el teorema de la distancia, se sabe que:

$$|FP| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Y también:

$$|AP| = |x - (-p)| = |x + p|$$

---

<sup>5</sup> Trisección de un ángulo, cuadratura del círculo y duplicación del cubo, todos ellos usando únicamente regla y compás.

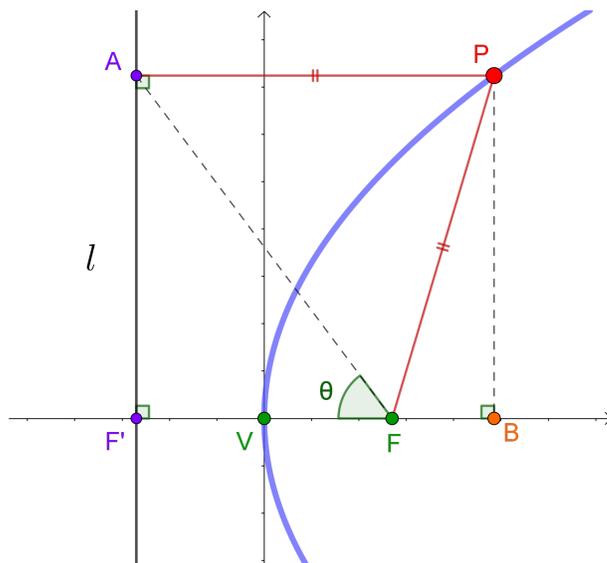


Figura 5-2

Por lo tanto, la condición geométrica en (5-5) queda expresada analíticamente de la forma:

$$|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \quad (5-6)$$

Realizando las operaciones necesarias, se concluye que la ecuación buscada es:

$$y^2 = 4px \quad (5-7)$$

De esta ecuación, se sabe que si  $p > 0$  la parábola abre a la derecha; si  $p < 0$  la parábola abre a la izquierda. Usando el mismo procedimiento puede deducirse la ecuación de la parábola vertical:

$$x^2 = 4py \quad (5-8)$$

De la misma forma, si  $p > 0$  la parábola abre hacia arriba; si  $p < 0$  la parábola abre hacia abajo. Realizando las sustituciones  $x = x' + h$  y  $y = y' + k$  que corresponden a una traslación, se obtienen las ecuaciones de la parábola con centro  $(h, k)$ :

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (5-9)$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (5-10)$$

Por otro lado, para obtener las ecuaciones paramétricas de la parábola, sea  $F'(-p, 0)$  el punto de corte de  $l$  con el eje  $X$ , y llámese  $\theta$  a la medida de  $\angle F'FA$  como se muestra en 5-2. Se sabe que  $l$  es perpendicular al eje  $X$ , luego  $\triangle FF'A$  es rectángulo. Ahora, trácese el

pie de la perpendicular  $B$  de  $P$  en el eje  $X$ , se tiene que  $\triangle FBP$  también es rectángulo.

Sea también  $\triangle FPA$ . Por definición,  $AP = FP$ , y por consiguiente  $\triangle FPA$  es isósceles. Como  $\overleftrightarrow{AP} \perp l$  y  $\overleftrightarrow{F'F} \perp l$ , se deduce que  $\overleftrightarrow{F'F} \parallel \overleftrightarrow{AP}$ . Luego,  $\angle PAF \cong \angle F'FA$  por ser ángulos alternos internos, y por ser triángulo isósceles  $\angle PAF \cong \angle AFP$ . Por lo tanto:

$$\pi = 2\theta + \angle PFB \iff \angle PFB = \pi - 2\theta$$

Luego, por relaciones trigonométricas se obtiene:

$$x = VB = VF + FB = p + BP \cdot \cot(\pi - 2\theta)$$

$$y = BP = F'A = F'F \cdot \tan \theta = 2p \tan \theta$$

Resolviendo la expresión para  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= p + 2p \tan \theta \cot(\pi - 2\theta) = p + 2p \tan \theta \left( \frac{\cos(\pi - 2\theta)}{\sin(\pi - 2\theta)} \right) = p + 2p \tan \theta \left( \frac{-\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} \right) \\ &= p + 2p \tan \theta \left( \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \right) = p + 2p \tan \theta \left( \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} \right) \\ &= p + p \tan^2 \theta - p = p \tan^2 \theta \end{aligned}$$

Se concluye esta forma que las ecuaciones paramétricas de la parábola son:

$$\boxed{x = p \tan^2 \theta \quad ; \quad y = 2p \tan \theta} \quad (5-11)$$

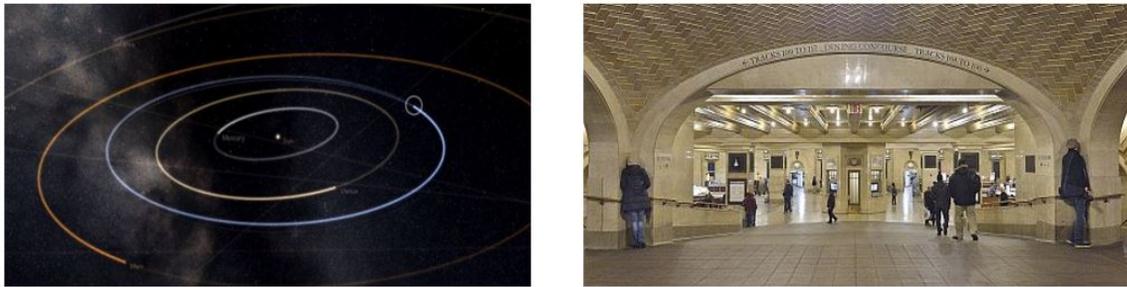
Haciendo la sustitución  $t = \tan \theta$ , la parametrización toma la forma:

$$\boxed{x = pt^2 \quad ; \quad y = 2pt} \quad (5-12)$$

Un detalle a tener en cuenta es que esta parametrización corresponde a una parábola cuyo eje es horizontal. En cambio, si se desea que tenga eje vertical basta con intercambiar las parametrizaciones de  $x$  y  $y$ .

### 5.3. Elipse

Recibe este nombre gracias a Apolonio de Perge, del griego *elleipsis* que significa “que queda corto”. En su tratado sobre las cónicas, en el Libro I - Proposición 13, Apolonio define la elipse a partir del ángulo de corte del plano: cuando este es menor que el ángulo del cono, la sección “se queda corta”<sup>6</sup>. La elipse es una figura muy recurrente en física, ingeniería, y especialmente en astronomía.



**Figura 5-3:** A la izquierda, se muestran elipses como modelos de trayectoria de varios cuerpos celestes del Sistema Solar. A la derecha, la cámara de susurros de la Estación Gran Central de la ciudad de Nueva York: lo que se diga en las esquinas ubicadas diagonalmente, se escucha en la otra a pesar de los 15m que las separa. El arquitecto Rafael Gustavino diseñó la cámara inspirado en las propiedades acústicas de la elipse.

La definición de elipse como lugar geométrico es la siguiente:

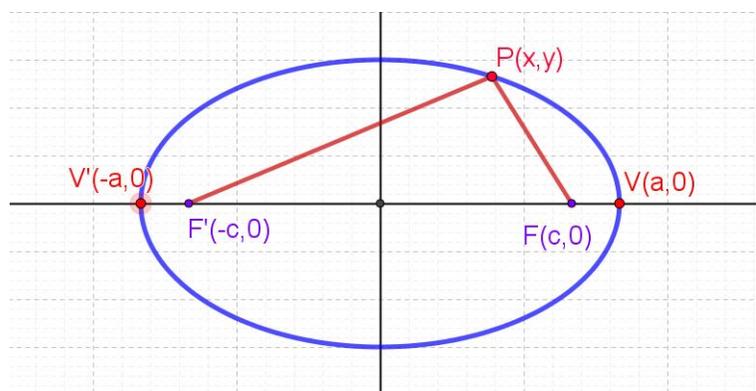
**Definición 3.** *Una elipse es el conjunto de puntos del plano tal que la suma de las distancias a dos puntos de ese plano (llamados focos) es constante.*

Para deducir la expresión analítica de la elipse, sean  $F$  y  $F'$  los focos de la elipse situados sobre el eje  $X$ , con coordenadas  $F(c, 0)$  y  $F'(-c, 0)$ . Sea  $V(a, 0)$  uno de los vértices de la elipse, se tiene que:

<sup>6</sup> Es de resaltar que la forma en que Apolonio “define” las cónicas viene siendo más una descripción, y es demasiado larga para los estándares actuales. La razón es que muchas de sus proposiciones son hechas a través de palabras, sin ningún símbolo que acorte o condense sus afirmaciones.

$$|F'V| = a - (-c) = a + c$$

$$|FV| = a - c$$



**Figura 5-4**

Luego, la suma de las distancias de los focos al vértice es  $(a + c) + (a - c) = 2a$ . Sea  $P(x, y)$  el conjunto de puntos de la elipse, y sabiendo que  $V(a, 0)$  hace parte de la elipse, la suma de las distancias a cualquier punto  $P(x, y)$  es  $2a$ . Por lo tanto, siguiendo la definición de elipse se tiene que:

$$|FP| + |F'P| = 2a \quad (5-13)$$

Usando el teorema de la distancia:

$$|FP| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$|F'P| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

De manera que la condición geométrica de forma analítica es:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a \quad (5-14)$$

Elevando al cuadrado y simplificando términos, se obtiene la ecuación:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (5-15)$$

Sea  $b^2 = a^2 - c^2$ . A partir de  $\triangle FPF'$  puede deducirse que la suma de las distancias de  $P$  a

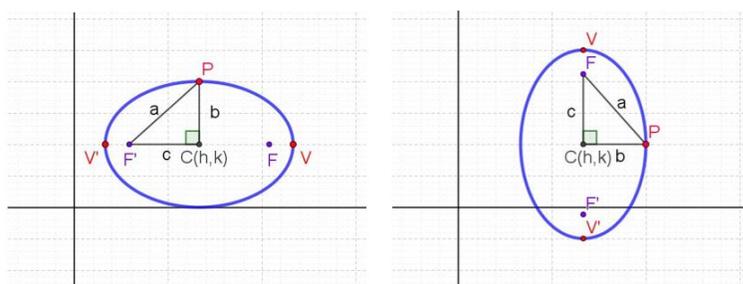
los focos es mayor que la distancia entre los focos<sup>7</sup>, es decir  $2a > 2c$ , luego se tiene que  $a > c$  y  $a^2 - c^2 > 0$ . De esta manera, se obtiene la ecuación más conocida de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a > b > 0 \quad (5-16)$$

Realizando las sustituciones  $x = x' + h$  y  $y = y' + k$ , se obtienen las ecuaciones de la elipse con centro  $(h, k)$ :

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (5-17)$$

Esta ecuación corresponde a una elipse con eje focal paralelo al eje  $X$ ; en caso de una elipse con eje focal paralelo al eje  $Y$ , los denominadores  $a^2$  y  $b^2$  se intercambian. El valor de  $a$  corresponde a la longitud del semieje mayor, el valor de  $b$  al semieje menor, y el valor de  $c$  es la distancia del foco al centro de la elipse.



**Figura 5-5:** A la izquierda, la ecuación  $(x - h)^2/a^2 + (y - k)^2/b^2 = 1$ . A la derecha, la ecuación  $(x - h)^2/b^2 + (y - k)^2/a^2 = 1$ . Nótese la diferencia al intercambiar los valores de  $a$  y  $b$  en los denominadores.

Por otro lado, una definición alternativa de la elipse podría ser la siguiente:

**Definición alternativa.** Sean dos circunferencias concéntricas y un rayo que gira alrededor de su centro. Siendo  $A$  y  $B$  los puntos de corte del rayo con las circunferencias, trácese  $l_1$  paralela al eje  $Y$  por  $A$ , y  $l_2$  paralela al eje  $X$  por  $B$ . Luego, el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que corresponden a la intersección de  $l_1$  y  $l_2$  se denomina elipse.

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la elipse, ubíquese el centro de las circunferencias de radio  $a$  y  $b$  en el origen, de tal forma que  $A$  y  $B$  se encuentran en la circunferencia

<sup>7</sup>Teorema de la desigualdad triangular

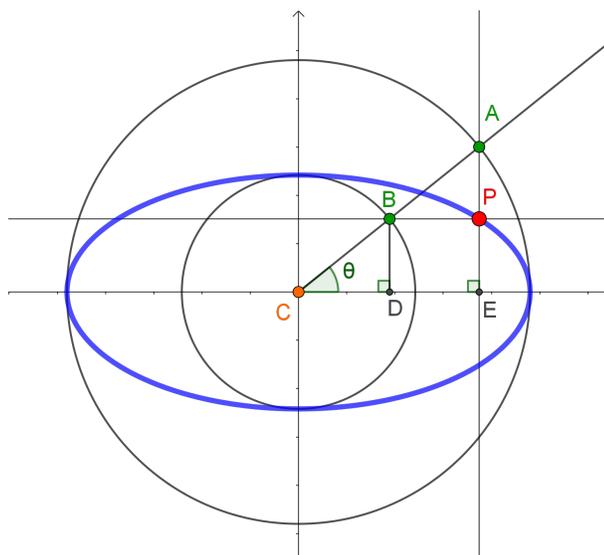


Figura 5-6

de radio mayor y menor, respectivamente. Llámese  $\theta$  al ángulo de giro del rayo respecto al eje  $X$ , y sean  $D$  y  $E$  el pie de la perpendicular de  $B$  y el punto de corte de  $l_1$  con el eje  $X$ , respectivamente. Se determina  $\square DEPB$ , de donde se deduce que es paralelogramo y rectángulo, luego  $\overline{EP} \cong \overline{DB}$ . De esta forma, siendo  $\triangle CDB$  y  $\triangle CEA$  rectángulos, se deduce por relaciones trigonométricas que:

$$x = CE = a \cos \theta \qquad y = EP = DB = b \operatorname{sen} \theta$$

Es decir, las parametrizaciones de la elipse son de la forma:

$$\boxed{x = a \cos \theta \quad ; \quad y = b \operatorname{sen} \theta} \qquad (5-18)$$

Un punto a tener en cuenta es que en la parametrización se consideró  $a > b$ , luego la elipse trazada es horizontal. Si se desea una elipse vertical, basta con intercambiar los valores de  $a$  y  $b$  de las ecuaciones. Teniendo en cuenta su similitud con la circunferencia, una parametrización racional de la elipse es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{2at}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}} \qquad (5-19)$$

haciendo la sustitución de Euler - Weierstrass. Nótese también que cuando  $a = b$ , las parametrizaciones equivalen a las de la circunferencia.

## 5.4. Hipérbola

El primer registro de trabajos de la hipérbola es por parte de Menecmo, es sus investigaciones relacionadas con el problema de Delos (duplicación del volumen del cubo). Se refería a ella como “secciones de conos obtusos”. Apolonio fue quien le acuñó el nombre de hipérbola en su tratado sobre las cónicas en el Libro I - Proposición 12, siendo *huper* (sobre, encima) y *ballein* (lanzar), literalmente “lanzar más allá” aludiendo a una expresión de que es algo excesivo. Se cree que Apolonio hacía referencia a cuando el ángulo de corte del plano es mayor que el ángulo del cono. Por otro lado, se destaca que muchos objetos matemáticos tienen su origen o se fundamentan en la hipérbola: las funciones hiperbólicas, la geometría de Lobachevsky, o los espacios girovectores (un modelo geométrico reciente que se aplica en la mecánica cuántica y la relatividad).

La definición de hipérbola como lugar geométrico es la siguiente (nótese que es muy similar a la de la elipse):

**Definición 4.** *La hipérbola es el conjunto de puntos del plano en donde la diferencia de distancias desde dos puntos fijos (llamados focos) es una constante.*

Para deducir la expresión analítica de la hipérbola, se sigue casi que el mismo proceso que con la elipse. Sean  $F$  y  $F'$  los focos de la hipérbola situados sobre el eje  $X$ , con coordenadas  $F(c, 0)$  y  $F'(-c, 0)$ . Sea  $V(a, 0)$  uno de los vértices de la hipérbola, se verifica que:

$$|F'V| = a - (-c) = a + c$$

$$|FV| = c - a$$

La diferencia entre estos dos valores es  $(a+c) - (c-a) = 2a$ , y también,  $(c-a) - (a+c) = -2a$ . Sea  $P(x, y)$  el conjunto de puntos que satisface esta condición, se tiene por definición que:

$$|FP| - |F'P| = \pm 2a \quad (5-20)$$

Y, sin pérdida de generalidad, esta expresión también puede escribirse como:

$$||FP| - |F'P|| = 2a \quad (5-21)$$

Usando el teorema de la distancia al igual que con la ecuación de la elipse, se obtiene la

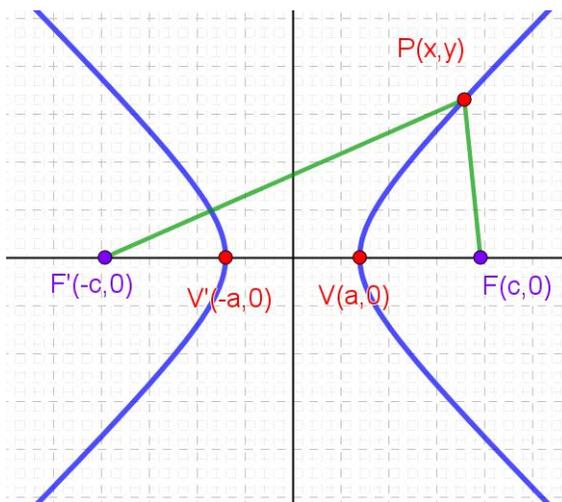


Figura 5-7

expresión analítica:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (5-22)$$

Nuevamente trasponiendo términos, elevando al cuadrado y simplificando términos, se obtiene la ecuación:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (5-23)$$

Sea  $b^2 = c^2 - a^2$ . Teniendo  $\triangle FPF'$  se deduce<sup>8</sup> que  $2a < 2c$ , luego se tiene que  $c > a$  y  $c^2 - a^2 > 0$ . Simplificando una vez más se obtiene la ecuación de la hipérbola más conocida:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a > b > 0 \quad (5-24)$$

Realizando las sustituciones  $x = x' + h$  y  $y = y' + k$ , se obtienen las ecuaciones de la hipérbola con centro  $(h, k)$ :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (5-25)$$

Esta última ecuación corresponde a una hipérbola con eje focal paralelo al eje  $X$ . De forma análoga se puede mostrar que para una hipérbola con eje focal paralelo al eje  $Y$  es la ecuación:

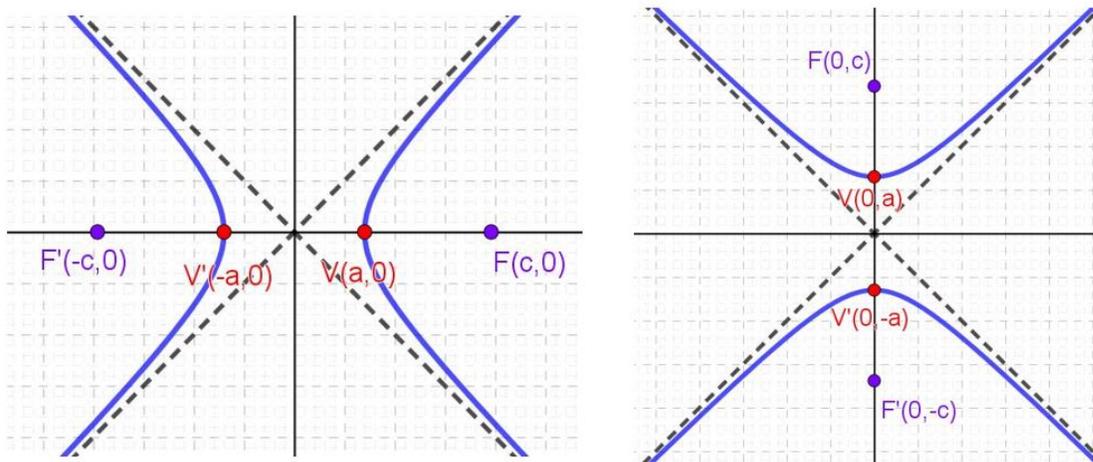
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (5-26)$$

<sup>8</sup>Teorema: la diferencia de dos lados de un triángulo es menor que el lado restante

Nótese que en comparación con la elipse, en la hipérbola es muy importante el orden de los valores de la ecuación: cambiar el orden de la diferencia representa una hipérbola horizontal o vertical. Otro detalle a destacar es la existencia de asíntotas oblicuas, ya que al despejar  $y$  de la ecuación (5-23) se obtiene:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \quad (5-27)$$

Luego, para valores muy grandes de  $x$  la hipérbola *tiende* a comportarse como las rectas  $y = \pm(b/a)x$ . Puede verificarse análogamente que la pendiente de las asíntotas de hipérbolas verticales cambia a  $a/b$ .



**Figura 5-8:** En la izquierda, la hipérbola horizontal  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  con sus asíntotas  $y = \pm(b/a)x$ . En la derecha, la hipérbola vertical  $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$  con sus asíntotas  $y = \pm(a/b)x$

Por otro lado, para hallar las ecuaciones paramétricas de la hipérbola es conveniente trazar la siguiente circunferencia auxiliar:

Considérese una hipérbola horizontal centrada en el origen y trácese la circunferencia de radio  $a$  (es decir, la distancia del origen al vértice de la hipérbola) y centro  $O$ . Sea un punto  $B$  que se mueve sobre la circunferencia, llámese  $\theta$  al ángulo parámetro asociado a la medida de  $\angle VOB$ , y trácese la tangente a la circunferencia por  $B$  siendo  $A$  al punto de corte con el eje  $X$ . Seguidamente, trácese la perpendicular al eje  $X$  por  $A$  que corta a la hipérbola en  $P(x, y)$ .

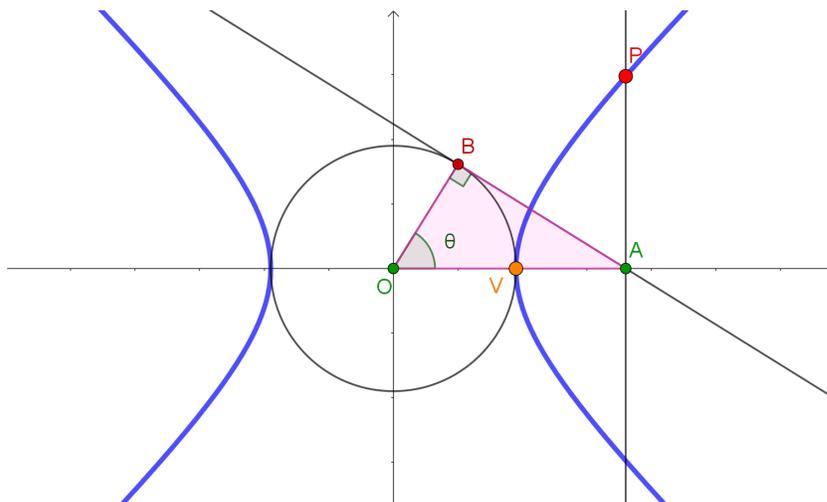


Figura 5-9

Ya con esto, sea  $\triangle ACB$  se deduce que es rectángulo, luego por relaciones trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{a}{OA} \iff OA = x = a \sec \theta \quad (5-28)$$

Para obtener el valor de  $y$ , se sustituye el valor de  $x$  en (5-24):

$$\begin{aligned} \frac{(a \sec \theta)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ -\frac{y^2}{b^2} &= 1 - \sec^2 \theta \\ y^2 &= b^2(\sec^2 \theta - 1) \\ y^2 &= b^2 \tan^2 \theta \\ y &= \pm b \tan \theta \end{aligned} \quad (5-29)$$

Teniendo en cuenta que el signo en  $y$  corresponde a dirección, se omite el signo negativo obteniendo las ecuaciones paramétricas de la forma:

$$\boxed{x = a \sec \theta \quad ; \quad y = b \tan \theta} \quad (5-30)$$

Si se desea una parametrización racional de la hipérbola, se realiza la sustitución de Euler - Weierstrass haciendo  $t = \tan(\theta/2)$  obteniendo:

$$\boxed{x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \quad ; \quad y = \frac{2bt}{1-t^2}} \quad (5-31)$$

## 5.5. Cicloide

Esta curva ha sido estudiada por numerosos matemáticos a lo largo de la historia (Cajori, 1999, p. 176). Destaca por la belleza de sus propiedades matemáticas y físicas, que han dado solución a problemas como los de la curva braquistócrona y la curva tautócrona. Etimológicamente, proviene de la composición griega *kuklos* para círculo y *-oide* para “con forma de” (literalmente, con forma de círculo).

La construcción de la curva es realmente sencilla. La circunferencia que rueda se denomina “circunferencia generatriz” y la recta “recta directriz”. Sin más, se presenta a continuación su definición:

**Definición 5.** *La cicloide es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una circunferencia, que rueda a lo largo de una recta fija sin deslizarse.*

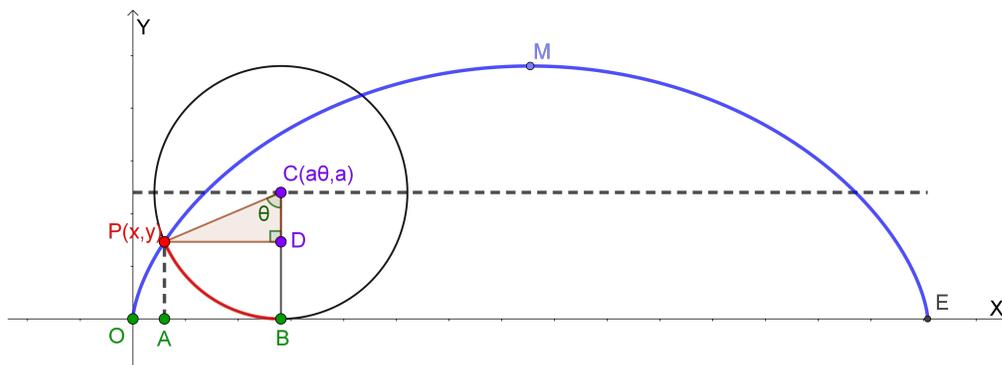


Figura 5-10

Se procede a hallar las ecuaciones paramétricas de la cicloide. Se tiene entonces, una circunferencia de radio  $a$  que gira a lo largo del eje  $X$ . Sea  $P(x, y)$  un punto cualquiera del lugar geométrico iniciando desde el origen y  $\theta$  el ángulo de giro de la circunferencia, la longitud de  $\overline{OB}$  debe ser la misma longitud de  $\widehat{PB}$ , y sabiendo que esta longitud es  $a\theta$ , se deduce también que el centro de la circunferencia es  $C(a\theta, a)$ . Ahora, a partir de la imagen se observa que:

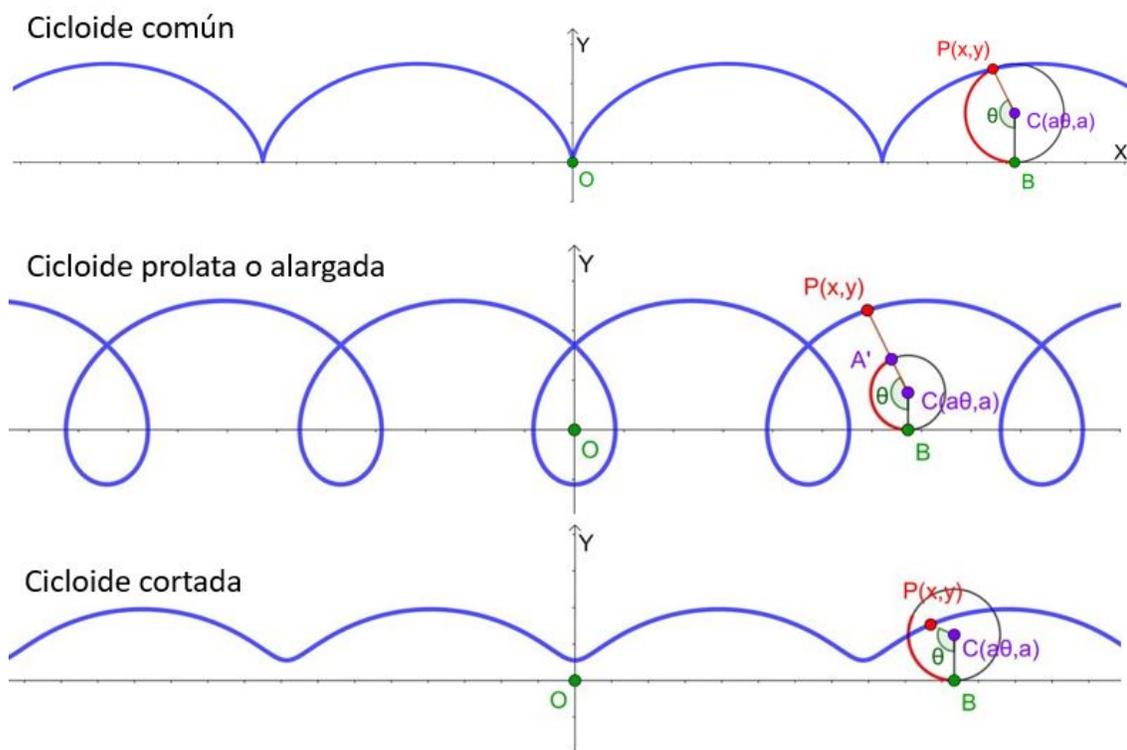
$$x = OB - AB = OB - PD = a\theta - a \operatorname{sen} \theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = AP = BD = BC - DC = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

Luego, se tiene que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$\boxed{x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad ; \quad y = a(1 - \cos \theta)} \quad (5-32)$$

Esta curva se puede generalizar un poco más tomando los otros dos casos restantes: cuando el punto fijo está al interior de la circunferencia (cicloide cortada o cortada) y cuando el punto fijo está por fuera de la circunferencia (cicloide prolata o prolongada). Estos dos casos se detallan mejor en la curva denominada “trocoide”.



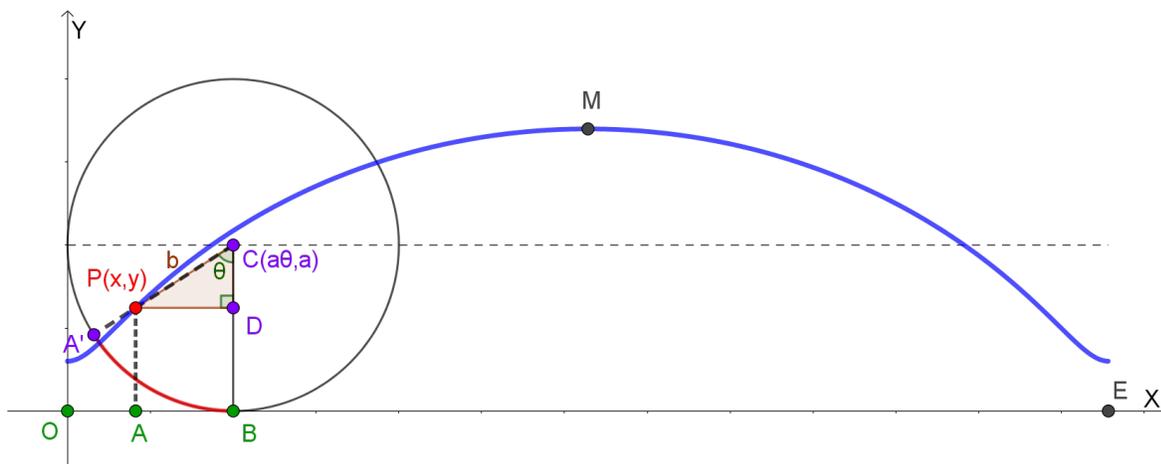
**Figura 5-11:** Tipos de cicloides al prolongar el número de revoluciones. Cuando es una cicloide alargada, se determinan bucles sobre ella; cuando es una cicloide cortada, esta no se cruza entre sí y es suave.

## 5.6. Trocoide

La curva trocoide es una generalización de la cicloide. Del griego *trokhos* que significa “rueda” y el sufijo *-oide* de “con forma de”. Esta curva agrupa los casos en los que se traza una cicloide acortata, prolata o la misma cicloide. Dicho esto, su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 6.** *La trocoide es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo del radio de un círculo (o una extensión de este), en donde dicho círculo rueda a lo largo de una recta fija sin deslizarse.*

La deducción de las ecuaciones paramétricas de esta curva es idéntica a la de la cicloide: lo que cambia es la introducción de un parámetro  $b$  que corresponde a la distancia del punto  $P(x, y)$  al centro de la circunferencia.



**Figura 5-12:** El trazo de una trocoide cuando  $b < a$  corresponde a una cicloide acortata.

Siguiendo el mismo procedimiento y manteniendo las mismas condiciones que se tienen de la curva anterior, se tiene que:

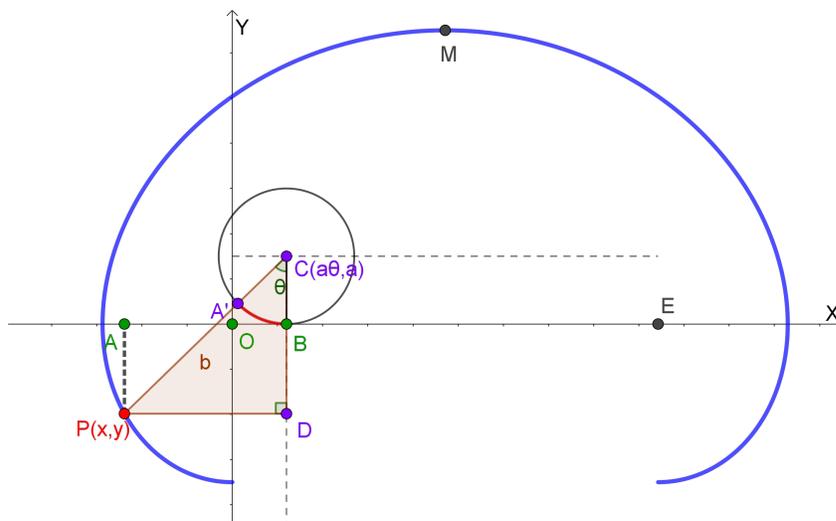
$$x = OB - AB = OB - PD = a\theta - b \operatorname{sen} \theta$$

$$y = AP = BD = BC - DC = a - b \operatorname{cos} \theta$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la trocoide son:

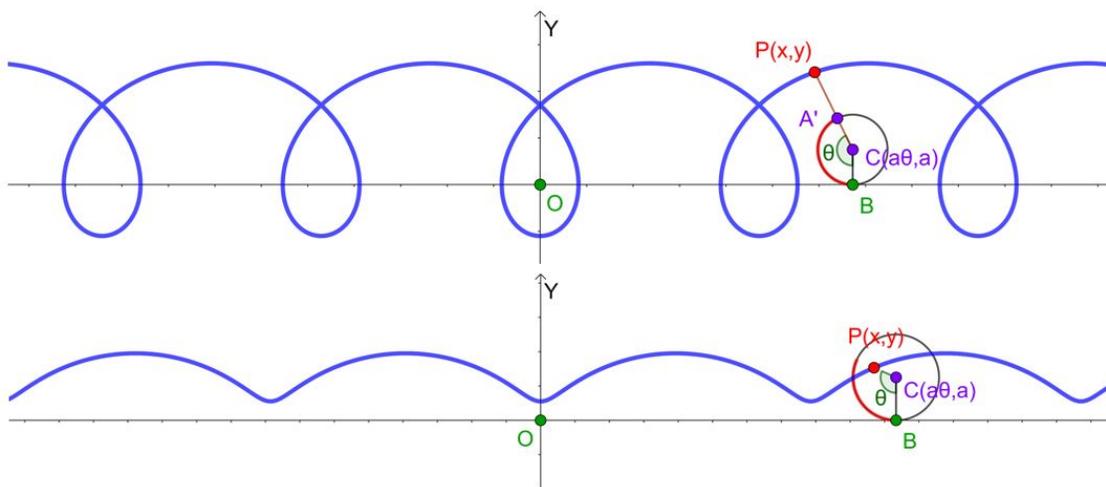
$$x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad y = a - b \operatorname{cos} \theta \quad (5-33)$$

Nótese que la ecuación de una cicloide acortada y prolata son la misma: si bien cambian las distancias, las relaciones trigonométricas de  $\triangle PDC$  no varían.



**Figura 5-13:** El trazo de una trocoide cuando  $a < b$  corresponde a una cicloide prolata.

Además, de la ecuación se verifica que cuando se cumple el caso  $b = a$  las ecuaciones se reducen a las de la cicloide.



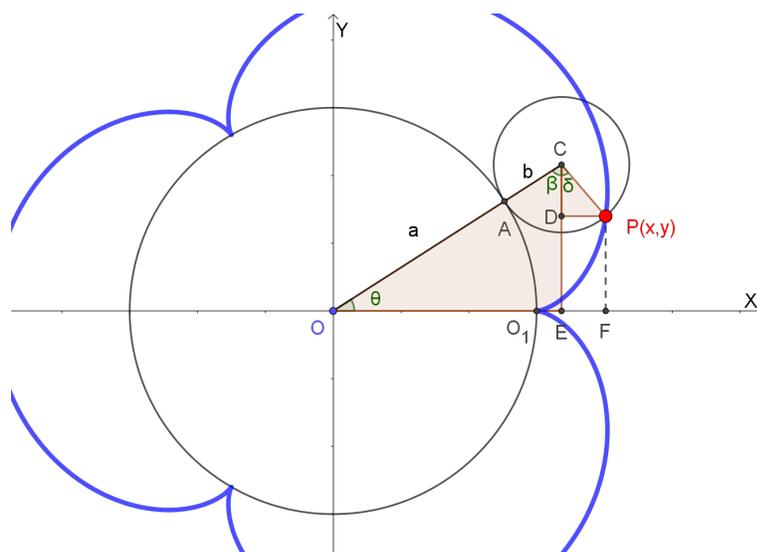
**Figura 5-14:** Trocoides al prolongar el número de revoluciones.

## 5.7. Epicicloide

Los epiciclos son conocidos desde la Antigua Grecia. El modelo astronómico geocéntrico desarrollado por Ptolomeo se sustentaba esencialmente en el movimiento de círculos alrededor de círculos (Russo, 2003, p. 91), siendo este una mejora al modelo astronómico aristotélico. Por casi un milenio fue el modelo aceptado para realizar observaciones celestes, ya que lograba predecir los movimientos prógrados y retrógrados de los planetas, y se ajustaba a las mediciones hechas por los astrónomos.

La epicicloide hace referencia a la curva generada por cicloides alrededor de un círculo: del griego *epi-* que significa “sobre, por fuera de”, *kuklos* para “círculo” y *-oide* para “con forma de” (en otras palabras, una cicloide por fuera). Su definición como lugar geométrico es casi idéntica a la cicloide, y lo que cambia es que no hay una recta directriz sino una circunferencia directriz. Se presenta a continuación su definición:

**Definición 7.** *La epicicloide es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una circunferencia que rueda en el exterior de una circunferencia estacionaria sin deslizarse.*



**Figura 5-15:** La circunferencia generatriz de radio  $b$  gira alrededor de la circunferencia directriz de radio  $a$ , donde el punto fijo  $P$  marca la epicicloide en azul.

Se procede entonces a hallar las ecuaciones paramétricas de la epicicloide. Sea la circunferencia fija con centro en el origen y radio  $a$ , y la circunferencia generatriz con centro  $C$  y radio  $b$  junto al punto  $P(x, y)$  que describe el lugar geométrico. Se establece como punto de partida el punto  $O_1$  y se toma como parámetro el ángulo  $\theta$  siendo  $A$  el punto de tangencia entre las dos circunferencias. Ahora, sean  $E$  y  $F$  los pies de las perpendiculares bajadas de  $C$  y  $P$  respectivamente, y trácese  $\overline{PD}$  de tal forma que  $\overline{PD} \perp \overline{CE}$ . Del punto  $P(x, y)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= OF = OE + EF = OE + DP = (a + b) \cos \theta + b \operatorname{sen} \delta \\ y &= PF = DE = CE - CD = (a + b) \operatorname{sen} \theta - b \cos \delta \end{aligned} \quad (5-34)$$

Luego, el problema se reduce a hallar las expresiones para  $\operatorname{sen} \delta$  y  $\cos \delta$ . Como la circunferencia generatriz gira sin resbalarse, se tiene:

$$\widehat{O_1A} = \widehat{AP} \iff a\theta = b(\beta + \delta)$$

Sin embargo  $\triangle EOC$  es rectángulo, y por tanto  $\beta = \pi/2 - \theta$ . Reemplazando este valor se obtiene:

$$\frac{a\theta}{b} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \delta \iff \delta = \frac{a\theta}{b} + \theta - \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \operatorname{sen} \left( \frac{a\theta}{b} + \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{a\theta}{b} + \theta \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos \left( \frac{a\theta}{b} + \theta \right) \\ &= 0 - 1 \cdot \cos \left( \frac{a\theta}{b} + \theta \right) \\ &= -\cos \left( \frac{a + b}{b} \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \delta &= \cos \left( \frac{a\theta}{b} + \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{a\theta}{b} + \theta \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{a\theta}{b} + \theta \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 0 + \operatorname{sen} \left( \frac{a\theta}{b} + \theta \right) \cdot 1 \\
 &= \operatorname{sen} \left( \frac{a+b}{b} \theta \right)
 \end{aligned}$$

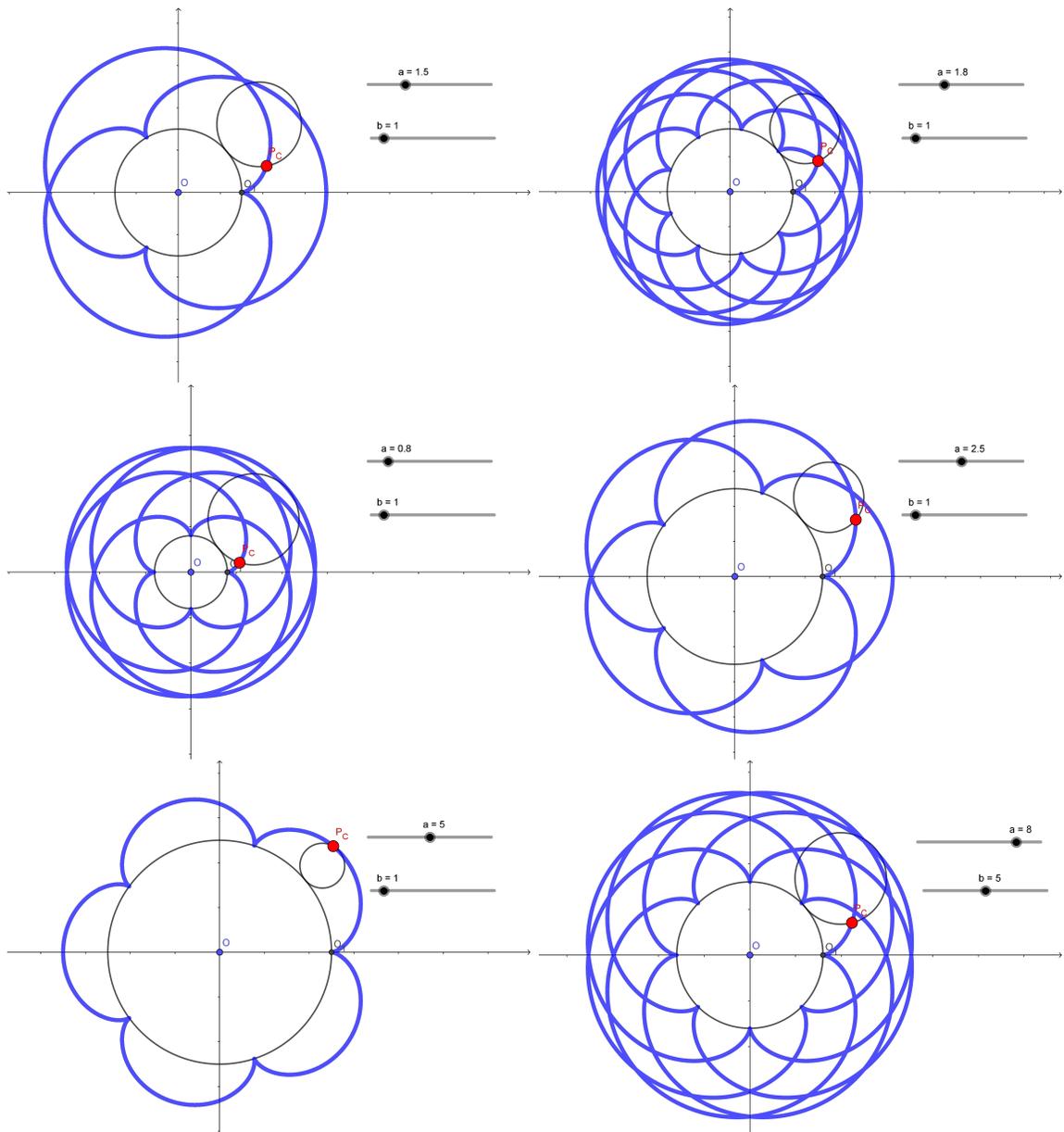
Reemplazando estos dos valores en las ecuaciones de  $x$  y  $y$  de (5-34) se obtienen las ecuaciones paramétricas de la epicicloide:

$$\begin{aligned}
 x &= (a+b) \cos \theta - b \cos \left( \frac{a+b}{b} \theta \right) \\
 y &= (a+b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen} \left( \frac{a+b}{b} \theta \right)
 \end{aligned} \tag{5-35}$$

Algunos detalles que se pueden ver de esta curva es que la figura es acotada superiormente por la circunferencia con radio  $a+2b$ , además de que la epicicloide siempre es simétrica con respecto al eje  $X$ . Otras características puede verse al tomar la razón  $a/b$ :

1. Si los valores de  $a$  y  $b$  son racionales positivos, la expresión  $p/q$  que equivale a la simplificación irreducible de este cociente muestra que el valor de  $p$  es el número de picos o “pétalos” y el valor de  $q$  es el número de revoluciones que realiza la circunferencia generatriz alrededor de la circunferencia directriz para generar el trazado de la curva sin repetir.
2. En esta expresión irreducible  $p/q$ , si el valor de  $p$  es par, la curva trazada se vuelve simétrica con respecto al eje  $Y$ .
3. Si alguno de los valores de  $a$  o  $b$  es irracional, y  $a \neq b$ , el trazado de la curva genera un subespacio en el plano (la curva seguirá trazándose infinitamente hasta rellenar toda la región por la que gira la circunferencia generatriz).

Algunos ejemplos de epicloides se muestran a continuación:



**Figura 5-16:** Ejemplos de epicicloides con distintos parámetros.

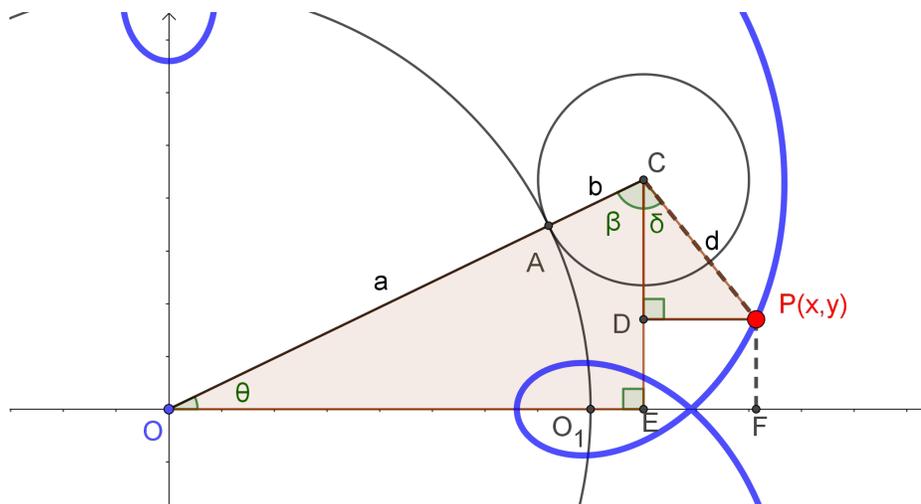
## 5.8. Epitrocoide

Al igual que con la cicloide, la epitrocoide es la generalización de la epicicloide. La epitrocoide contempla los otros casos del punto que traza el lugar geométrico: al interior de la circunferencia generatriz, o en la elongación del su radio. Una primera mención de esta curva apareció en la obra “Instrucción en las medidas con regla y compás” del artista renacentista Albrech Durer (Andrews, 2016, p. 417) aunque con el nombre de “líneas de araña” debido a que en su bosquejo aparecía el boceto de una araña.

Su definición como lugar geométrico es:

**Definición 8.** *la epitrocoide es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo del radio de un círculo (o una extensión de este), en donde dicho círculo rueda a lo largo del exterior de una circunferencia fija, sin deslizarse.*

La deducción de las expresiones analíticas de esta curva prosigue de forma análoga a la de la epicicloide: lo que cambia es la introducción de un parámetro  $d$  que corresponde a la distancia del punto  $P(x, y)$  al centro de la circunferencia generatriz.



**Figura 5-17:** El punto  $P(x, y)$  se encuentra a una distancia tal que  $d > b$ , trazando una epicicloide prolata.

Siguiendo el mismo procedimiento de la deducción de la curva anterior y manteniendo las mismas condiciones iniciales, se tiene:

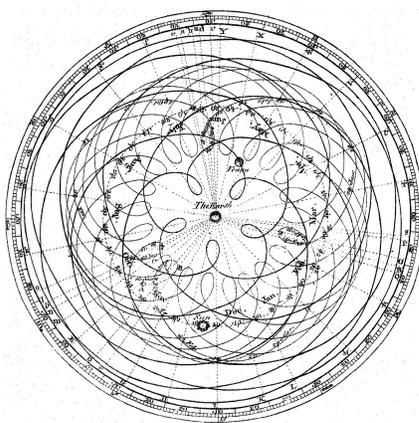
$$\begin{aligned}
 x &= OF = OE + EF = OE + DP = (a + b) \cos \theta + d \sin \delta \\
 y &= PF = DE = CE - CD = (a + b) \sin \theta - d \cos \delta
 \end{aligned}
 \tag{5-36}$$

Nótese que al igual que con la trocoide, los cambios ocurren en  $\triangle PDC$  y son meramente ajustes de distancia y por lo tanto, no suponen cambios en sus razones trigonométricas. Reemplazando los valores de  $\sin \delta$  y  $\cos \delta$  en las ecuaciones anteriores, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la epitrocoide:

$$\begin{aligned}
 x &= (a + b) \cos \theta - d \cos \left( \frac{a + b}{b} \theta \right) \\
 y &= (a + b) \sin \theta - d \sin \left( \frac{a + b}{b} \theta \right)
 \end{aligned}
 \tag{5-37}$$

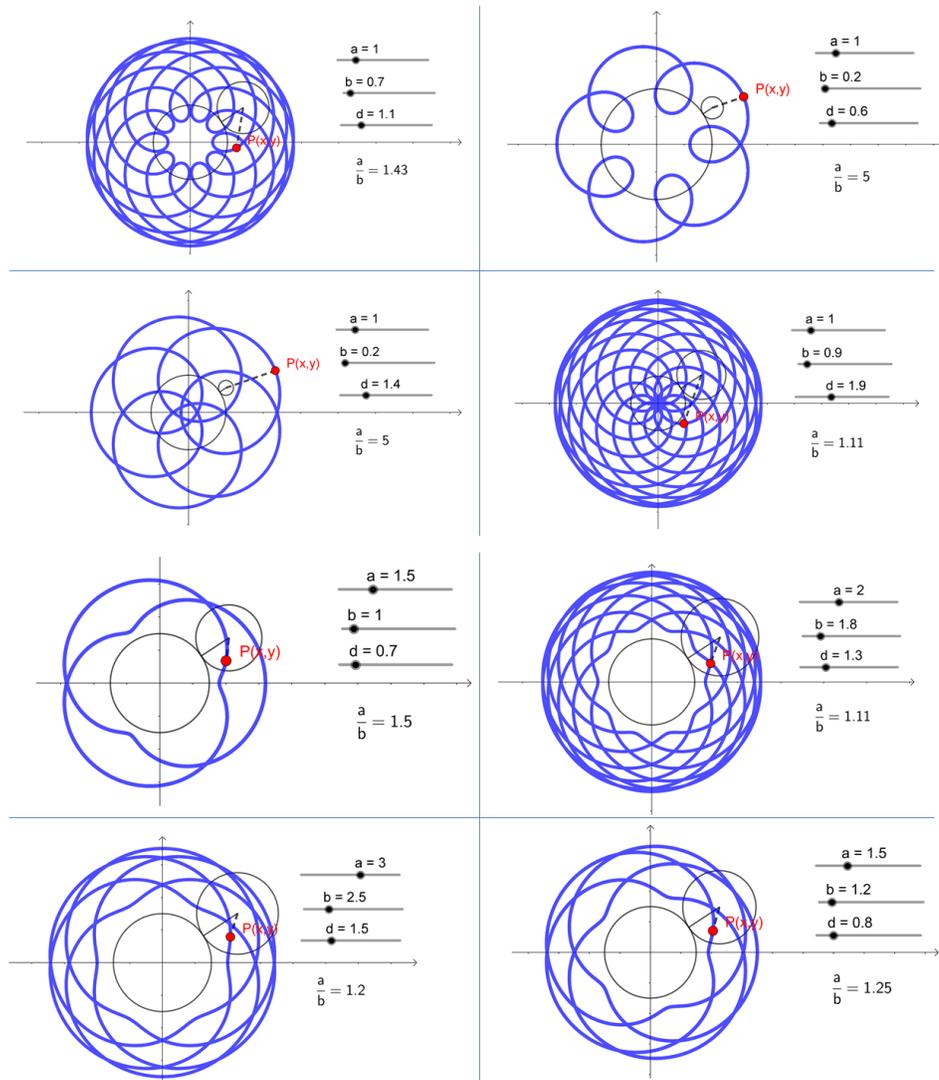
Cuando la distancia del punto  $P(x, y)$  es la misma que el radio de la circunferencia generatriz, la ecuación es la misma de la epicicloide.

Los griegos se basaron en esta curva para modelar el movimiento de los planetas en su teoría geocentrista: cada planeta tenía un epiciclo distinto que trazaba orbitas con forma de epitrocoides. Curiosamente, el Sol no se ajustaba al modelo y describía una trayectoria circular.



**Figura 5-18:** Modelo geocéntrico del Universo representado en la obra *Encyclopedia Britannica* de 1771, basado en los diagramas del matemático y astrónomo italiano Giovanni Cassini.

Se muestra a continuación algunos ejemplos de epitrocoides:

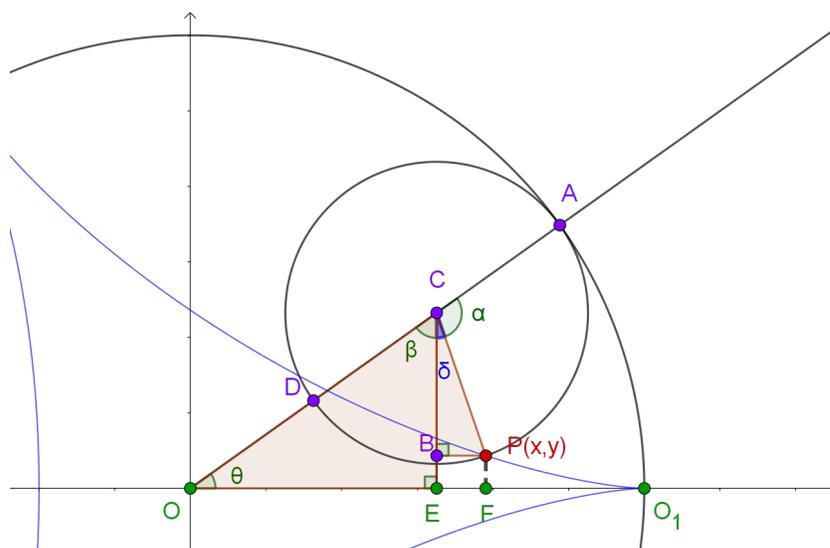


**Figura 5-19:** Ejemplos de epitrocoides con distintos parámetros. Los cuatro ejemplos de arriba corresponden a epicicloides prolatas ( $d > b$ ); los cuatro ejemplos de abajo, epicicloides cortatas ( $d < b$ ).

## 5.9. Hipocicloide

Siguiendo la idea de los epiciclos, surge lo que podría llamarse como “hipociclos”. El concepto es copiado directamente del epiciclo, y en este caso la circunferencia generatriz no gira alrededor de otra circunferencia, sino en su interior. Del griego *hypos* (bajo, por debajo de) y *kuklos* (círculo), literalmente, “por debajo del círculo”. Se presenta su definición:

**Definición 9.** *La hipocicloide es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una circunferencia que rueda al interior de una circunferencia estacionaria sin deslizarse.*



**Figura 5-20**

Se procede entonces a hallar las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide. Las condiciones son las mismas, y el método de deducción es muy similar: sea la circunferencia fija con centro en el origen y radio  $a$ , y la circunferencia generatriz con centro  $C$  y radio  $b$  junto al punto  $P(x, y)$  que describe el lugar geométrico. Se establece como punto de partida el punto  $O_1$  y se toma como parámetro el ángulo  $\theta$  siendo  $A$  el punto de tangencia entre las dos circunferencias. Ahora, sean  $E$  y  $F$  los pies de las perpendiculares bajadas de  $C$  y  $P$  respectivamente, y trácese  $\overline{PB}$  de tal forma que  $\overline{PB} \perp \overline{CE}$ . Del punto  $P(x, y)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= OF = OE + EF = OE + BP = (a - b) \cos \theta + b \operatorname{sen} \delta \\ y &= PF = BE = CE - CB = (a - b) \operatorname{sen} \theta - b \cos \delta \end{aligned} \quad (5-38)$$

Nuevamente, la dificultad se encuentra en hallar las expresiones para  $\sin \delta$  y  $\cos \delta$ . A partir de la imagen 5-20, se sabe que  $\overline{DA}$  corresponde al diámetro de la circunferencia generatriz, por lo que corta a esta en dos sectores con una amplitud de  $\pi$  cada uno. Por lo tanto:

$$\pi = \alpha + \delta + \beta$$

Como la circunferencia generatriz rueda al interior de la otra sin deslizarse,  $\widehat{O_1A} = \widehat{AP}$ , luego:

$$a\theta = b\alpha \iff \alpha = \frac{a\theta}{b}$$

Por otro lado, el ángulo  $\beta$  hace parte del triángulo rectángulo  $\triangle OEC$ . Por lo que  $\beta = \pi/2 - \theta$ . Reemplazando estos valores se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi = \frac{a\theta}{b} + \delta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &\iff \delta = \pi - \frac{a\theta}{b} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{a\theta}{b} + \theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{a\theta}{b} - \theta\right) \end{aligned}$$

Ya conociendo  $\delta$ , es posible hallar las expresiones buscadas. Sabiendo que  $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$  y que  $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{a\theta}{b} - \theta \right) \right] = \cos \left( \frac{a\theta}{b} - \theta \right) = \cos \left( \frac{a-b}{b} \theta \right) \\ \cos \delta &= \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{a\theta}{b} - \theta \right) \right] = \sin \left( \frac{a\theta}{b} - \theta \right) = \sin \left( \frac{a-b}{b} \theta \right) \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en (5-38) se obtienen finalmente las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide:

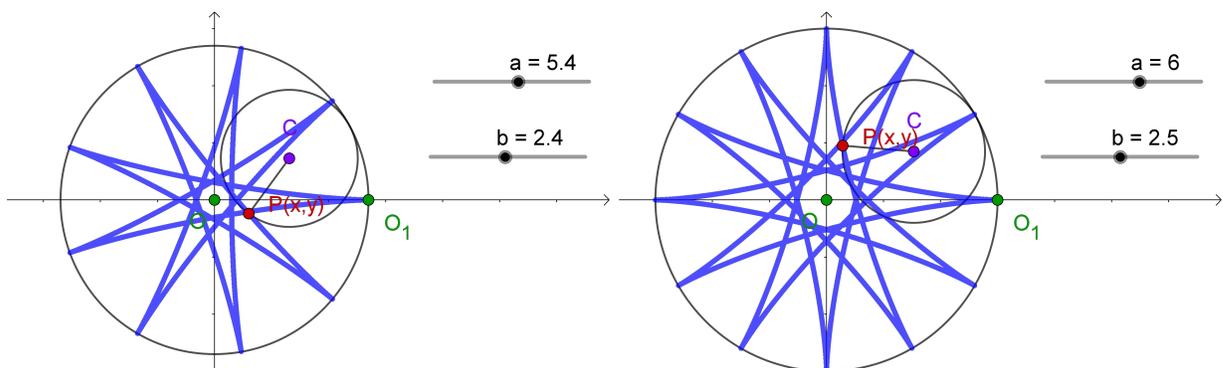
$$\boxed{\begin{aligned} x &= (a-b) \cos \theta + b \cos \left( \frac{a-b}{b} \theta \right) \\ y &= (a-b) \sin \theta - b \sin \left( \frac{a-b}{b} \theta \right) \end{aligned}} \quad (5-39)$$

Un detalle especial de las ecuaciones de la hipocicloide es su similitud con las ecuaciones (5-35) de la epicicloide: al reemplazar todos los valores de  $b$  por  $-b$  en las expresiones pa-

ramétricas de la epicloide se obtienen las de la hipocicloide y viceversa. Otras características incluyen:

1. La curva es simétrica respecto al eje  $X$
2. De la razón  $a/b$  donde  $p/q$  es su fracción irreducible, el valor de  $p$  corresponde al número de picos o “puntas”, y el valor de  $q$  el número de veces que la circunferencia generatriz pasa por el origen para generar todo el trazado del lugar geométrico.
3. De la expresión irreducible  $p/q$ , si el valor de  $p$  es par, la curva trazada es simétrica con respecto al eje  $Y$ .
4. Si alguno de los valores de  $a$  o  $b$  es irracional, y  $a \neq b$ , el trazado de la curva genera un subespacio en el plano: la curva seguirá trazándose infinitamente hasta rellenar la región por donde gira la circunferencia generatriz.
5. Toda curva posee dos circunferencias generatrices: la primera, la circunferencia de radio  $b$ ; la segunda, de radio  $a - b$ .

Algunos ejemplos de hipocicloides se presentan a continuación:



**Figura 5-21:** Ejemplos de hipocicloides con distintos parámetros de  $a$  y  $b$

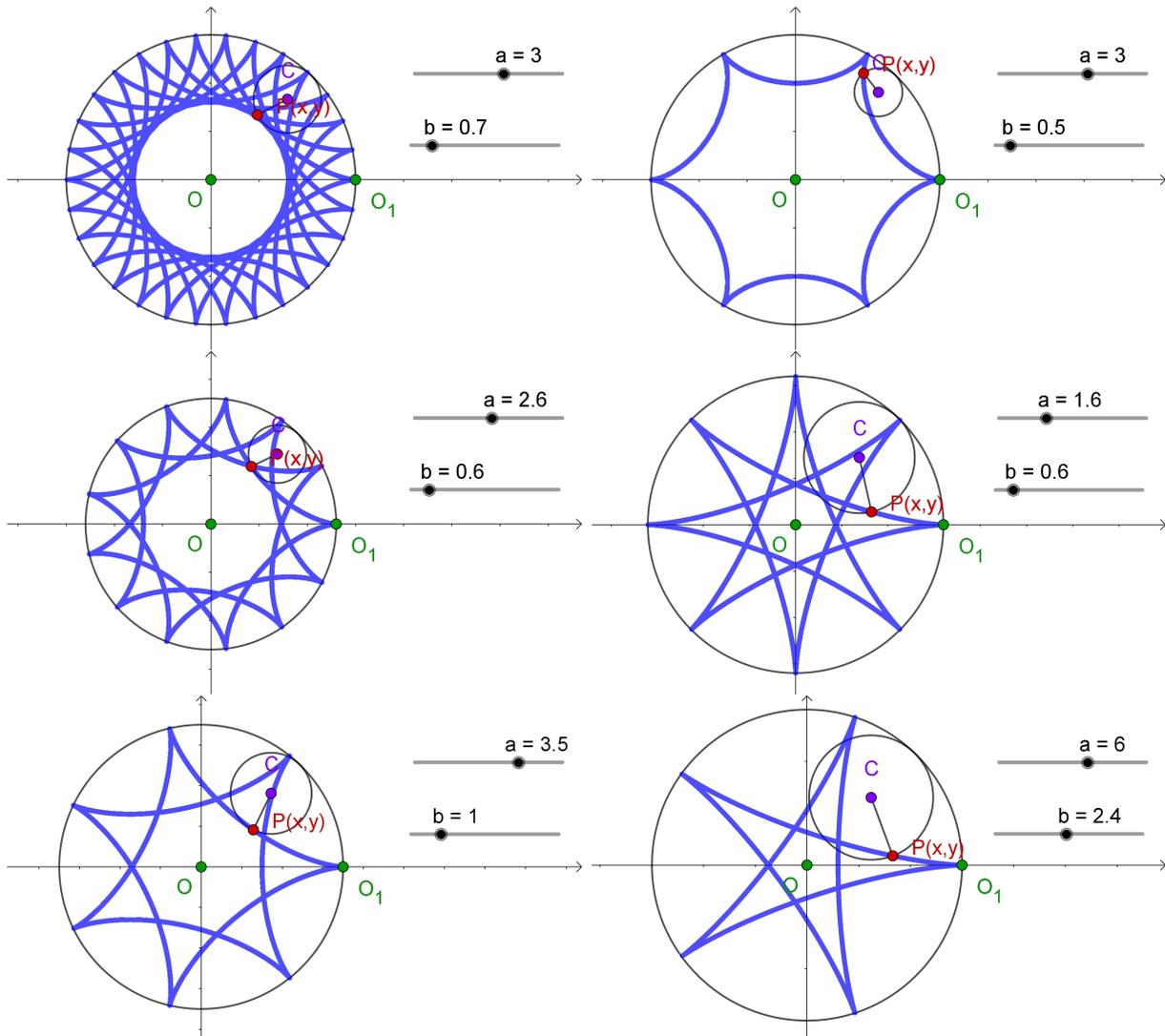
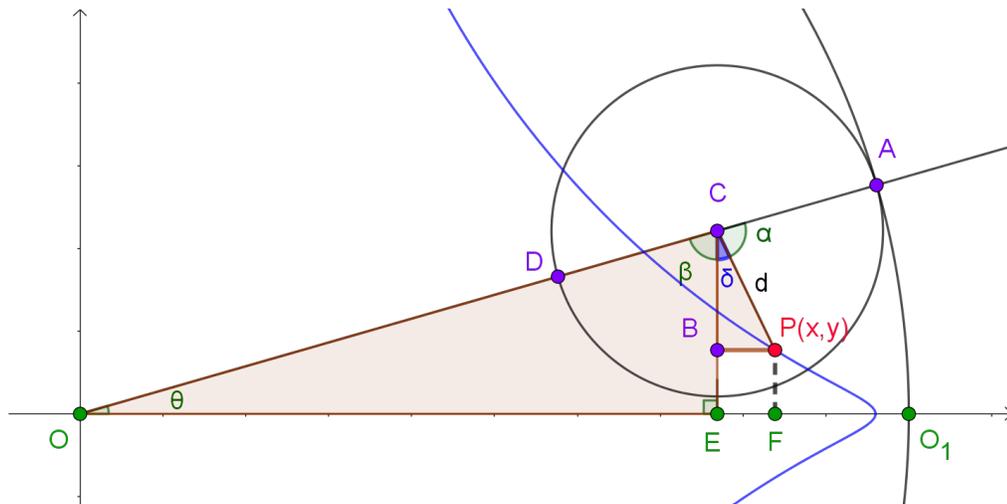


Figura 5-22: Ejemplos de hipocicloides con distintos parámetros de  $a$  y  $b$

## 5.10. Hipotrocoide

Como se ha visto anteriormente, la trocoide generaliza la cicloide contemplando los otros casos en los que el punto no se encuentre en la circunferencia: para el caso de la hipocicloide, existe la hipotrocoide. Bajo el mismo principio, se presenta su definición:

**Definición 10.** *La hipotrocoide es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo del radio de un círculo (o de una extensión de este), en donde dicho círculo rueda al interior de una circunferencia fija sin deslizarse.*



**Figura 5-23:** El punto  $P(x,y)$  se encuentra a una distancia tal que  $d < b$ , cuyo trazo corresponde a una hipocicloide cortada.

La deducción de las ecuaciones paramétricas de la hipotrocoide sigue el mismo procedimiento que con la hipocicloide, en donde se introduce un parámetro  $d$  que corresponde a la distancia del punto  $P(x,y)$  al centro  $C$  de la circunferencia generatriz. De esta forma, manteniendo las mismas condiciones iniciales que con la hipocicloide se tiene:

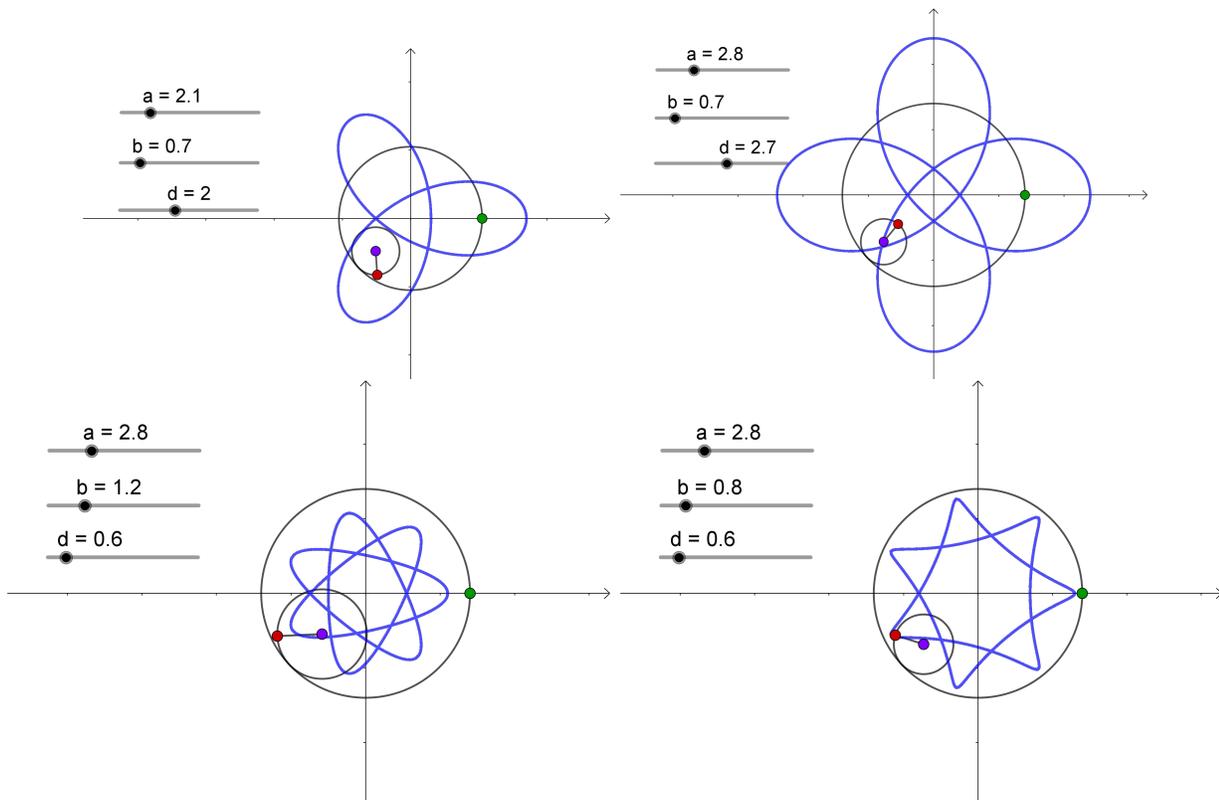
$$\begin{aligned} x &= OF = OE + EF = OE + BP = (a - b) \cos \theta + d \sin \delta \\ y &= PF = BE = CE - CB = (a - b) \sin \theta - d \cos \delta \end{aligned} \quad (5-40)$$

Como ya se ha visto, los cambios en  $\triangle PBC$  corresponden a ajustes de distancia más no en sus ángulos. Reemplazando los valores de  $\sin \delta$  y  $\cos \delta$  obtenidos de la hipocicloide, se

concluye que las ecuaciones paramétricas de la hipotrocoide son:

$$\begin{aligned} x &= (a - b) \cos \theta + d \cos \left( \frac{a - b}{b} \theta \right) \\ y &= (a - b) \sin \theta - d \sin \left( \frac{a - b}{b} \theta \right) \end{aligned} \quad (5-41)$$

Se muestran algunos ejemplos de hipotrocoides:



**Figura 5-24:** Trazado de hipotrocoides con distintos parámetros. Las dos superiores son hipotrocoides prolatas, y las dos inferiores son hipotrocoides cortatas.

## 5.11. Astroide

Recibe su nombre por el astrónomo austríaco Joseph Littrow (von Littrow, 1838, p. 299): del griego *aster* que significa “estrella” y *-oide* “con forma de” (literalmente, con forma de estrella). También ha recibido el nombre de “tetracúspide” a razón de sus cuatro picos. Su estudio aparece por primera vez en escritos de Johann Bernoulli y de Leibniz. Una de sus construcciones como lugar geométrico es a partir de la hipocicloide, como se detalla a continuación:

**Definición 11.** *La astroide es una hipocicloide de cuatro vértices. Dicho de otro modo, es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una hipocicloide cuando el radio de la circunferencia generatriz es un cuarto del radio de la circunferencia directriz.*

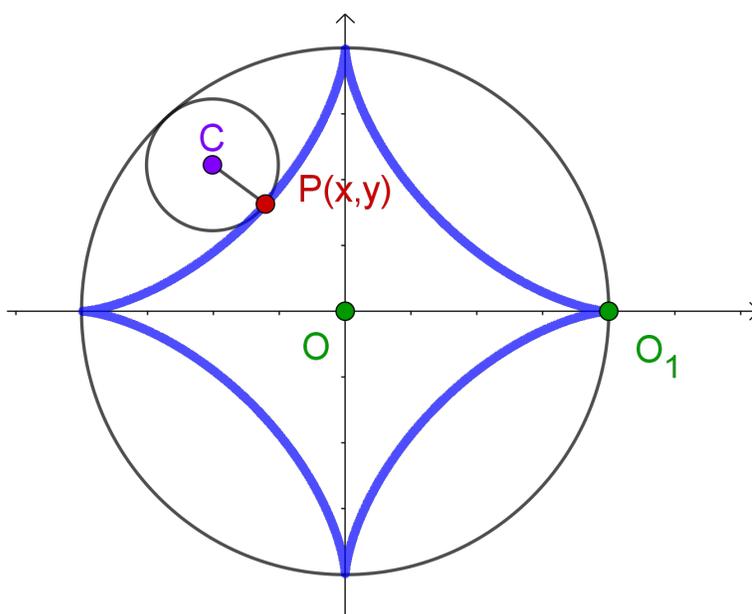


Figura 5-25

A partir de esta definición, se sabe que  $a = 4b$ . Una forma de obtener las ecuaciones paramétricas de esta curva es realizar el método empleado con la hipocicloide para el caso particular de la astroide. Sin embargo, ya teniendo las ecuaciones generales de esta familia de curvas basta con sustituir los valores de los radios:

$$x = 3b \cos \theta + b \cos(3\theta) \quad ; \quad y = 3b \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}(3\theta) \quad (5-42)$$

Una forma de resolver  $\cos(3\theta)$  es emplear el teorema del coseno para la suma de ángulos como  $\cos(2\theta + \theta)$ , y proceder de igual forma para  $\sin(3\theta)$ . Otro camino es empleando el teorema de De Moivre:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \Re\{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3\} \\ &= \Re\{\cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + 3i^2 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + i^3 \operatorname{sen}^3 \theta\} \\ &= \Re\{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta)\} \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{aligned}$$

Y de la misma forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(3\theta) &= \Im\{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + i(3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta)\} \\ &= 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= 3 \operatorname{sen} \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) - \operatorname{sen}^3 \theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 3 \operatorname{sen}^3 \theta - \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en (5-42):

$$\begin{aligned} x &= 3b \cos \theta + b \cos(3\theta) & y &= 3b \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}(3\theta) \\ &= 3b \cos \theta + 4b \cos^3 \theta - 3b \cos \theta & &= 3b \operatorname{sen} \theta - 3b \operatorname{sen} \theta + 4b \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= 4b \cos^3 \theta & &= 4b \operatorname{sen}^3 \theta \\ &= a \cos^3 \theta & &= a \operatorname{sen}^3 \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la astroide son:

$$\boxed{x = a \cos^3 \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta} \quad (5-43)$$

Por otro lado, la curva permite una parametrización racional al realizar la sustitución de Euler-Weierstrass tomando  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\boxed{x = \frac{a(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3} \quad ; \quad y = \frac{8at^3}{(1+t^2)^3}} \quad (5-44)$$

cuyos puntos en el infinito se ubican en la cúspide izquierda con coordenadas  $M(-a, 0)$

Una de las propiedades destacables de la astroide es su relación con la elipse. Puede darse una definición alternativa como lugar geométrico de la siguiente forma:

**Definición alternativa.** *La astroide es el lugar geométrico de los centros de curvatura<sup>9</sup> de la elipse*

---

<sup>9</sup> El lugar geométrico de los centros de curvatura se denomina “curva evoluta”. Luego, la astroide es la curva evoluta de la elipse.

## 5.12. Tricúspide

También recibe el nombre de “deltoide” (por su similitud con la letra griega mayúscula delta) o curva de Steiner, en honor al matemático suizo Jakob Steiner quién descubrió algunas propiedades de la curva. Otros matemáticos habrían abordado el estudio de la tricuspide en diferentes situaciones (Teixeira, 1905, p. 442): Leonhard Euler abordó la curva buscando una solución a un problema de óptica con las curvas caústicas; y Ole Romer, en la búsqueda de optimización del movimiento y encajamiento de engranajes.

Una de sus construcciones como lugar geométrico también es a partir de la hipocicloide:

**Definición 12.** *la tricúspide es una hipocicloide de tres vértices. En otros términos, es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una hipocicloide cuando el radio de la circunferencia generatriz es un tercio del radio de la circunferencia directriz.*

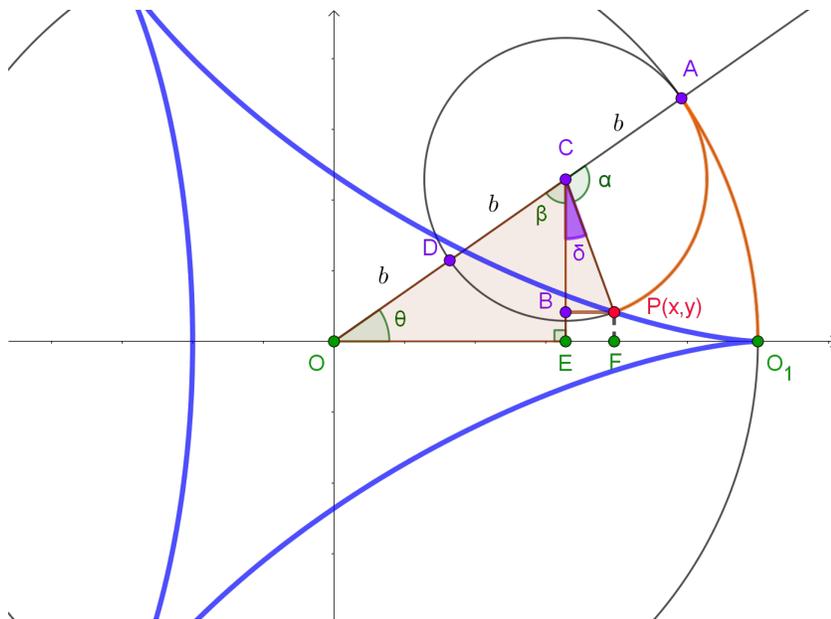


Figura 5-26

Para hallar las ecuaciones de la tricúspide, se procede de forma análoga que con la hipocicloide, siendo esta un caso particular teniendo en cuenta la relación  $a = 3b$ . Como se muestra en 5-26, se tiene que:

$$\begin{aligned}x &= OF = OE + EF = OE + BP = 2b \cos \theta + b \operatorname{sen} \delta \\y &= FP = EB = EC - BC = 2b \operatorname{sen} \theta - b \cos \delta\end{aligned}\tag{5-45}$$

Debe entonces hallarse una expresión para  $\delta$  en términos del parámetro  $\theta$ . Teniendo en cuenta que  $\widehat{O_1A} = \widehat{AP}$ , se sabe que:

$$\begin{aligned}a \cdot \theta &= b \cdot \alpha &\iff & 3b \cdot \theta = b \cdot \alpha \\&&\iff & \alpha = 3\theta\end{aligned}$$

A partir de  $\triangle OEC$  se deduce que  $\beta = \pi/2 - \theta$  por ser rectángulo. Luego, al cumplirse que  $O - C - A$  se puede afirmar que:

$$\begin{aligned}\pi &= \beta + \delta + \alpha &\iff & \pi = (\pi/2 - \theta) + \delta + 3\theta \\&&\iff & \delta = \pi/2 - 2\theta\end{aligned}\tag{5-46}$$

Al reemplazar el valor de  $\delta$  en (5-45), y aplicar las identidades  $\operatorname{sen}(\pi/2 - 2\theta) = \cos(2\theta)$  y  $\cos(\pi/2 - 2\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$ , se obtiene la parametrización de la tricúspide:

$$\boxed{x = 2b \cos \theta + b \cos(2\theta) \quad ; \quad y = 2b \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}(2\theta)}\tag{5-47}$$

Debe notarse que se obtienen las mismas parametrizaciones si se reemplaza  $a = 3b$  en las ecuaciones (5-39). Por otro lado, si se desea una parametrización racional se realiza la sustitución de Euler-Weierstrass en donde  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\begin{aligned}x &= 2b \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + b \left[ \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 - \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 \right] = \frac{b(3-6t^2-t^4)}{(1+t^2)^2} \\y &= 2b \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) - b \left( 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = \frac{8bt^3}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

Es decir, una parametrización racional de la tricúspide es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{b(3-6t^2-t^4)}{(1+t^2)^2} \quad ; \quad y = \frac{8bt^3}{(1+t^2)^2}}\tag{5-48}$$

### 5.13. Curva de Agnesi

Recibe su nombre en honor a la matemática Maria Agnesi, quien estudió y publicó algunas de sus propiedades en lo que sería uno de los primeros libros de texto para la enseñanza del cálculo. La curva también es conocida como “la bruja de Agnesi” debido a un error de traducción (Truesdell, 1992). Originalmente, la curva se llamaba *versiera* cuya etimología se dice proviene del latín *vertere* (girar), sin embargo las palabras del italiano *aversiero* y *versiero* eran comunes para referirse al demonio en expresiones como “adversario de Dios”. En alguna traducción de su obra al inglés, a alguien se le ocurrió el término de *bruja* por el de *avversiera* (mujer demonio, diablesa). Struik (1986, p. 178) menciona que el matemático Luigi Brando fue quien originalmente le acuñó el nombre de *versiera* en dos casos: o por la palabra del latín *versoria* que significa “cuerda que hace girar la vela”, o por una relación trigonométrica ya en desuso llamada *versin* que aparece en la construcción de la curva. Independientemente de su nombre original, lo que si es seguro es que el error ha perdurado hasta la actualidad.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 13.** Sea una circunferencia de diámetro  $\overline{OA}$  y  $l_1 \perp \overline{OA}$  por  $A$ . Siendo  $E$  un punto que se mueve sobre la circunferencia, llámese  $F$  al punto de corte entre  $\overleftrightarrow{OE}$  y  $l_1$ . Luego, el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que corresponden a la intersección de  $l_2 \perp \overline{OA}$  por  $E$ , y  $l_3 \parallel \overline{OA}$  por  $F$ , se denomina Curva de Agnesi.

Para deducir las ecuaciones paramétricas de esta curva, constrúyase la circunferencia con centro  $C(0, a)$  y radio  $a$  en el eje  $Y$ , de tal forma que  $\overline{OA}$  sea diámetro y  $\overleftrightarrow{OA}$  coincida con el eje  $Y$ . Sean  $\overline{EH}$  y  $\overline{PG}$  los pies de las perpendiculares de  $E$  y  $P$  sobre el eje  $X$ . Llámese  $\theta$  al parámetro que corresponde a la medida del ángulo  $\angle GOF$  que describe el cambio de posición del punto  $E$  sobre la circunferencia, en donde se evidencia que  $0 \leq \theta \leq \pi$ . A partir de 5-27, se sabe de  $P(x, y)$  que:

$$x = OG = AF \quad ; \quad y = PG = EH = OE \cdot \text{sen } \theta \quad (5-49)$$

Ahora, sea  $\triangle OEA$ . Por estar inscrito en una semicircunferencia se deduce que es triángulo

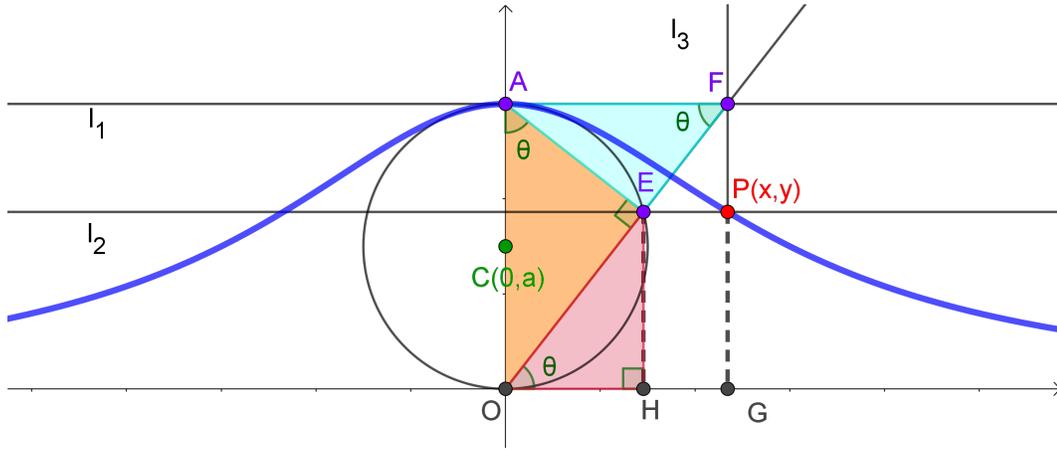


Figura 5-27

rectángulo<sup>10</sup>, y al verificarse que  $\triangle OEA \sim \triangle OHE$ , se deduce que  $\angle OAE \cong \angle EOH$ . De esta forma, por relaciones trigonométricas se obtiene que  $OE = 2a \operatorname{sen} \theta$ , y reemplazando este valor en la ecuación (5-49) de  $y$  se obtiene:

$$y = OE \operatorname{sen} \theta = (2a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \quad (5-50)$$

Por otro lado, sea  $\triangle EFA$ , se deduce que este es rectángulo y que  $\angle EOH \cong \angle AFE$  por ser ángulos alternos internos. Luego:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{AE}{AF} \iff AF = \frac{AE}{\operatorname{sen} \theta}$$

Sin embargo, de  $\triangle OEA$  se sabe que  $AE = 2a \cos \theta$ . Reemplazando este valor se obtienen la expresión paramétrica para  $x$ :

$$x = AF = \frac{2a \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = 2a \cot \theta \quad (5-51)$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la curva de Agnesi son:

$$\boxed{x = 2a \cot \theta \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (5-52)$$

Una forma alternativa de obtener las ecuaciones paramétricas es la siguiente. Nótesen los cambios en los triángulos designados y la forma como está definido el parámetro  $\theta$ , en este caso tomando valores entre  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ :

<sup>10</sup> Segundo Teorema de Tales: sea una circunferencia con centro  $O$  y diámetro  $\overline{AC}$ . Si  $B$  es un punto de la circunferencia distinto de  $A$  y  $C$ , entonces  $\angle ABC$  es recto,  $\triangle ABC$  es rectángulo

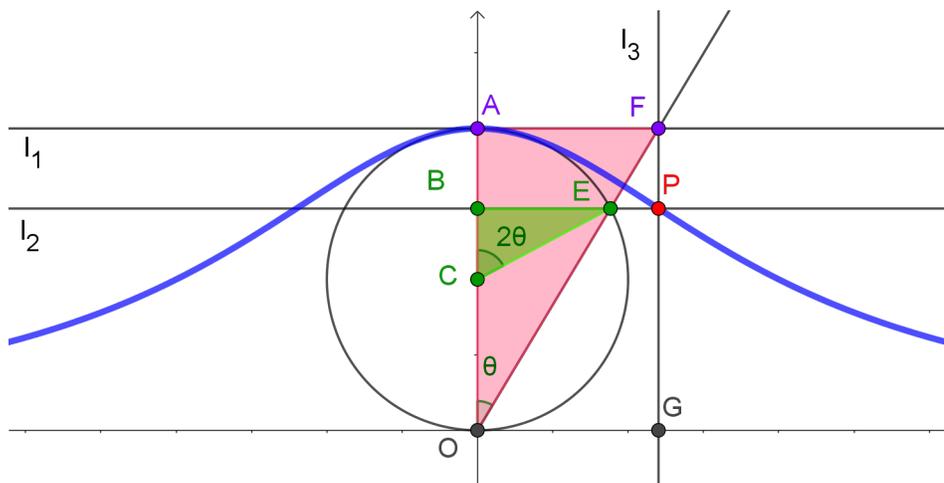


Figura 5-28

Se tiene entonces  $\triangle OAF$  y  $\triangle CBE$ . Por el teorema del ángulo central<sup>11</sup>, la medida de  $\angle BCE$  es el doble de  $\angle AOE$ . Luego, a partir del punto  $P(x, y)$  se tiene que:

$$x = OG = AF \qquad y = PG = BC + CO = a \cos(2\theta) + a \qquad (5-53)$$

De  $\triangle OAF$  se obtiene la ecuación para  $x$ :

$$\tan \theta = \frac{AF}{OA} = \frac{x}{2a} \iff x = 2a \tan \theta$$

Simplificando la expresión de  $y$  se tiene que:

$$\begin{aligned} y &= a \cos(2\theta) + a = a(\cos(2\theta) + 1) \\ &= a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 2a \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parametrización buscada es:

$$\boxed{x = 2a \tan \theta \quad ; \quad y = 2a \cos^2 \theta} \qquad (5-54)$$

Aparte de las numerosas propiedades matemáticas que posee la curva de Agnesi, aparece en otros campos como un modelo que permite describir el flujo de electrones en rayos X, y la forma de ciertas ondas en la hidrodinámica. También aparece en probabilidad como una alternativa a la función de densidad debido a su forma mesocúrtica.

<sup>11</sup>Teorema: sea una circunferencia con centro  $O$  y dos puntos  $A$  y  $B$  diferentes sobre la circunferencia, entonces la medida de  $\angle AOB$  es el doble que cualquier otro ángulo inscrito  $\angle APB$ .

Por otro lado, tanto (5-52) como (5-54) permiten parametrizaciones racionales si se reescriben en términos de  $\tan \theta$ . A razón de preferencia, se muestra de la segunda tomando  $t = \tan \theta$ :

$$x = 2a \tan \theta = 2at \qquad y = 2a \cos^2 \theta = 2a \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2a}{1 + t^2}$$

Es decir, una parametrización racional de la curva de Agnesi es:

$$\boxed{x = 2at \quad ; \quad y = \frac{2a}{1 + t^2}} \qquad (5-55)$$

## 5.14. Curva de ballesta

Esta curva comparte ciertas similitudes con la curva de Agnesi. Recibe su nombre debido a que toma forma de un arco de ballesta medieval. Un nombre menos común es “curva de gastrafetes”.

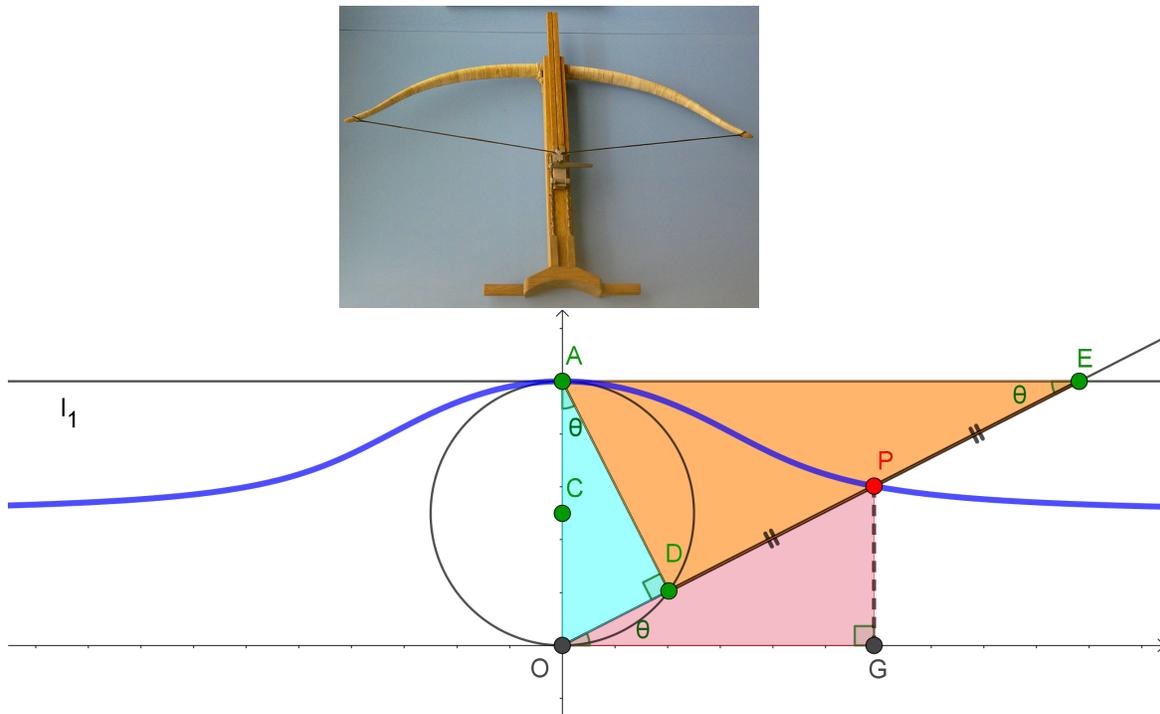


Figura 5-29

Se presenta su definición:

**Definición 14.** Sea una circunferencia de diámetro  $\overline{OA}$  y  $l_1 \perp \overline{OA}$  por  $A$ . Siendo  $D$  un punto que se mueve sobre la circunferencia, llámese  $E$  al punto de corte entre  $\overleftrightarrow{OD}$  y  $l_1$ . Luego, el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que satisfacen  $\overline{DP} \cong \overline{PE}$  sobre  $\overleftrightarrow{OD}$  se denomina Curva de ballesta.

Para la deducción de las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico, basta con hallar las expresiones de los catetos de  $\triangle OGP$  siendo  $G$  el pie de la perpendicular del punto  $P$  en el eje  $X$ . De esta forma, llámese  $\theta$  el parámetro con valores de  $0 \leq \theta \leq \pi$  que denota la posición del punto  $D$  sobre la circunferencia, es decir, la medida de  $\angle POG$ ; y sean  $\triangle ODA$  y  $\triangle EDA$ . Luego, se tiene partir del punto  $P(x, y)$  que:

$$\begin{aligned}x &= OG = OP \cos \theta = (OD + DP) \cos \theta \\y &= GP = OP \sin \theta = (OD + DP) \sin \theta\end{aligned}\tag{5-56}$$

De  $\triangle ODA$ , se deduce que es rectángulo por estar inscrito en una semicircunferencia y también que  $\angle OAD \cong \angle OPG$ . Luego  $OD = 2a \sin \theta$ .

De  $\triangle EDA$  se deduce que es rectángulo y que  $\angle GOP \cong \angle DEA$  por ser ángulos internos alternos. Por lo tanto:

$$\tan \theta = \frac{DA}{DE} = \frac{2a \cos \theta}{2DP} = \frac{a \cos \theta}{DP} \iff DP = \frac{a \cos \theta}{\tan \theta} = a \cos \theta \cot \theta$$

Reemplazando los valores de  $OD$  y  $DP$  en (5-56) se tiene que:

$$x = (2a \sin \theta + a \cos \theta \cot \theta) \cos \theta \qquad y = (2a \sin \theta + a \cos \theta \cot \theta) \sin \theta$$

Simplificando para  $x$  se obtiene:

$$\begin{aligned}x &= 2a \sin \theta \cos \theta + a \cos^2 \theta \cot \theta = 2a \sin \theta \cos \theta + a \cot \theta - a \sin \theta \cos \theta \\&= a(\sin \theta \cos \theta + \cot \theta)\end{aligned}$$

De la misma forma, simplificando para  $y$ :

$$\begin{aligned}y &= 2a \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta = a \sin^2 \theta + a(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\&= a(\sin^2 \theta + 1)\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la curva de ballesta son:

$$\boxed{x = a(\sin \theta \cos \theta + \cot \theta) \quad ; \quad y = a(\sin^2 \theta + 1)}\tag{5-57}$$

Si se desea una parametrización racional, se reescribe (5-57) en términos de  $\tan \theta$  y se hace  $t = \tan \theta$ :

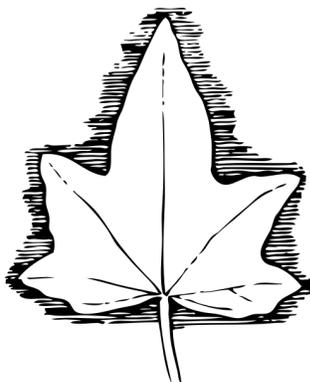
$$\begin{aligned}x &= a \left( \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} + \frac{1}{\tan \theta} \right) = a \left( \frac{t^2 + (t^2 + 1)}{t(t^2 + 1)} \right) = \frac{a(2t^2 + 1)}{t(t^2 + 1)} \\y &= a \left( \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} + 1 \right) = a \left( \frac{t^2 + (t^2 + 1)}{t^2} \right) = \frac{a(2t^2 + 1)}{t^2 + 1}\end{aligned}$$

Es decir, una parametrización racional de la curva de ballesta es:

$$\boxed{x = \frac{a(2t^2 + 1)}{t(t^2 + 1)} \quad ; \quad y = \frac{a(2t^2 + 1)}{t^2 + 1}}\tag{5-58}$$

## 5.15. Cisoide de Diocles

Dentro de la familia de curvas conocidas como cisoides, la más conocida es la cisoide de Diocles. Esta curva fue estudiada por el matemático griego Diocles alrededor de II a.C en su intento por resolver uno de los problemas clásicos de la Antigua Grecia: la duplicación del volumen de un cubo.<sup>12</sup> Su nombre proviene del griego *kissos* que traduce “hiedra” y *-oide* “con forma de” (literalmente, con forma de hoja de hiedra). Es mencionado por otros matemáticos de su época como Nicómedes y Arquímedes en algunos de sus trabajos. Casi veinte siglos después, matemáticos como Fermat, Huygens, Wallis y Newton retoman los fundamentos de esta curva y desarrollan varias de sus propiedades que involucran el área y cálculo de tangentes.



**Figura 5-30:** Hoja de hiedra. Diocles probablemente hacía referencia a sus terminaciones con forma de punta, o a las nervaduras.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 15.** Sean  $O$  y  $A$  los extremos fijos de una circunferencia de radio  $a$ . Sea  $l_1$  una tangente a la circunferencia por  $A$ , y  $l_2$  una secante de la circunferencia en  $D$  que pasa por  $O$  y que corta a  $l_1$  en  $E$ . La cisoide de Diocles es el conjunto de puntos  $P$  tales que  $OP = ED$ .

Para la deducción de las ecuaciones paramétricas de la cisoide, trácese la circunferencia de radio  $a$  sobre el eje  $X$  con centro en  $C(a, 0)$ , de tal forma que  $\overline{OA}$  sea diámetro. Trazando  $l_1$  tangente a la circunferencia, se tiene que  $l_1 \perp \overline{OA}$ . Sea también  $\theta$  el parámetro sobre

<sup>12</sup>También es llamado como el problema de Delos o problema daliano.

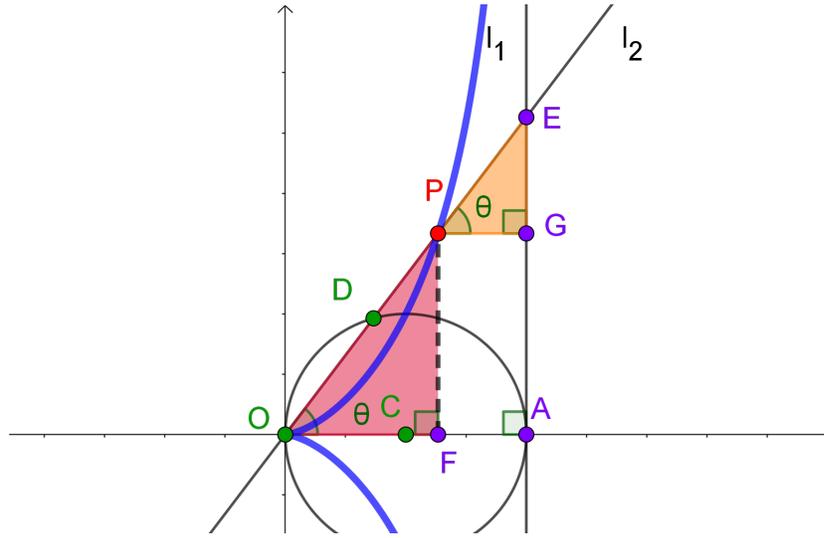


Figura 5-31

el ángulo  $\angle AOE$  en el intervalo  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Trácese  $\overline{PG} \perp l_1$  y sea  $F$  el pie de la perpendicular bajada de  $P$ . De este modo, se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= OF = OA - FA = OA - PG \\ y &= PF = OF \tan \theta \end{aligned} \quad (5-59)$$

Sea  $\triangle GPE$ , se sabe que este es rectángulo y que  $\angle GPE$  es igual a  $\theta$  por ser ángulo correspondiente. Además, se tiene que  $OE = OD + DE$  y análogamente  $OE = OP + PE$ . Siendo  $OP = DE$ , se deduce que  $OD = PE$ .

Por otro lado, sea  $\triangle AOD$ , se sabe que también es rectángulo por estar inscrito en una semicircunferencia. Por tanto,  $OD = 2a \cos \theta$ . De este modo, se obtiene el valor de  $PG$ :

$$PG = PE \cos \theta = OD \cos \theta = (2a \cos \theta) \cos \theta = 2a \cos^2 \theta$$

Reemplazando este valor en la ecuación de  $x$  en (5-59) se obtiene:

$$x = OF = 2a - 2a \cos^2 \theta = 2a(1 - \cos^2 \theta) = 2a \sin^2 \theta$$

Conociendo este valor, también se obtiene la ecuación para  $y$ :

$$y = OF \tan \theta = 2a \sin^2 \theta \tan \theta$$

Es decir, se concluye que las ecuaciones paramétricas de la cisoide de Diocles son:

$$\boxed{x = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \tan \theta} \quad (5-60)$$

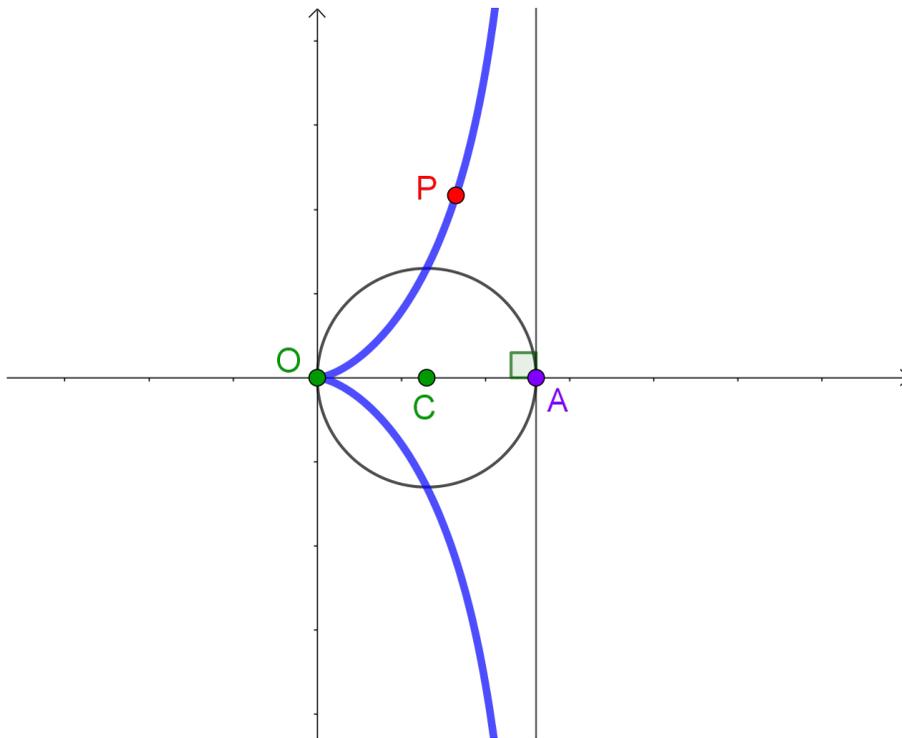
Además, la cisoide de Diocles permite una parametrización racional al reescribir ambas expresiones en términos de  $\tan \theta$  y hacer  $t = \tan \theta$ . De este modo:

$$x = 2a \operatorname{sen}^2 \theta = 2a \cdot \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2at^2}{t^2 + 1} \quad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \tan \theta = tx = \frac{2at^3}{t^2 + 1}$$

Es decir, una parametrización racional de la cisoide de Diocles es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{2at^2}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{2at^3}{1+t^2}} \quad (5-61)$$

siendo  $t$  cualquier valor real y cuyos puntos en el infinito corresponden a la asíntota  $x = 2a$



**Figura 5-32:** Cisoide de Diocles

## 5.16. Trisectriz de Hipias o Cuadratriz de Dinóstrato

Esta curva es una de las primeras que históricamente, hacen referencia a su construcción involucrando el movimiento. Desarrollada por el matemático griego Hipias de Elis en el siglo V a.C. en su intento para resolver el problema clásico de la trisección del ángulo (de ahí el nombre de trisectriz); y por el matemático griego Dinóstrato, posteriormente en el siglo III a.C., en el otro problema clásico de la cuadratura del círculo (de ahí su nombre de cuadratriz). Si bien ambos lograron dar solución a los problemas, la curva no es construible mediante regla y compás (condición necesaria para resolver los problemas clásicos).

La definición de la curva como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 16.** Sea  $\square AOO_1A_1$  un cuadrado y  $\widehat{AO_1}$  sobre una circunferencia con centro en  $O$  y radio  $\overline{OA}$ . Sea  $D$  un punto sobre  $\widehat{AO_1}$  que se desplaza con velocidad uniforme sobre este, partiendo desde  $A$  en dirección a  $O_1$ . También, sea  $Y_1$  un punto que se desplaza sobre  $\overline{OO_1}$  con velocidad uniforme partiendo desde  $O$  en dirección a  $O_1$  al mismo tiempo que  $D$ , de tal forma que  $Y_1$  llega a  $O_1$  a la vez que  $D$  a  $O_1$ . Luego, la cuadratriz de Dinóstrato es el lugar geométrico de los puntos  $P$  de la intersección entre  $l_1 \parallel \overrightarrow{O_1A}$  por  $Y_1$ , y  $\overrightarrow{OD}$ .

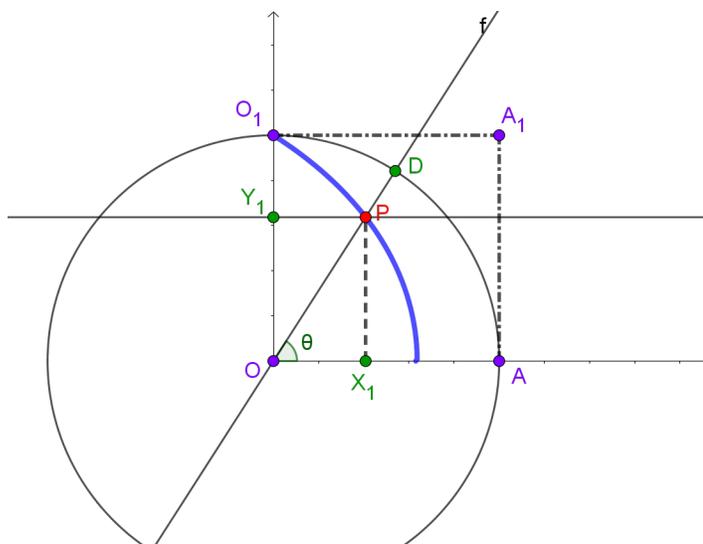


Figura 5-33

Se procede entonces a hallar las ecuaciones paramétricas de la curva. Sea la circunferencia con centro en el origen y radio  $a$ , y  $\theta$  el parámetro en el intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  sobre  $\angle AOD$ .

Además sea  $X_1$  el pie de la perpendicular de  $P$ . Inicialmente, se debe calcular un factor de velocidad adecuado para  $Y_1$  estableciendo las proporciones del arco recorrido con el arco total, y el segmento recorrido y el segmento total. Es decir:

$$\frac{a\theta}{a(\pi/2)} = \frac{OY_1}{a} \iff OY_1 = \frac{2a\theta}{\pi} \quad (5-62)$$

De esta forma, como  $OY_1 = PX_1 = y$ , se tiene que  $y = 2a\theta/\pi$ . Ahora, a partir de  $\triangle X_1OP$  por ser rectángulo, se obtiene:

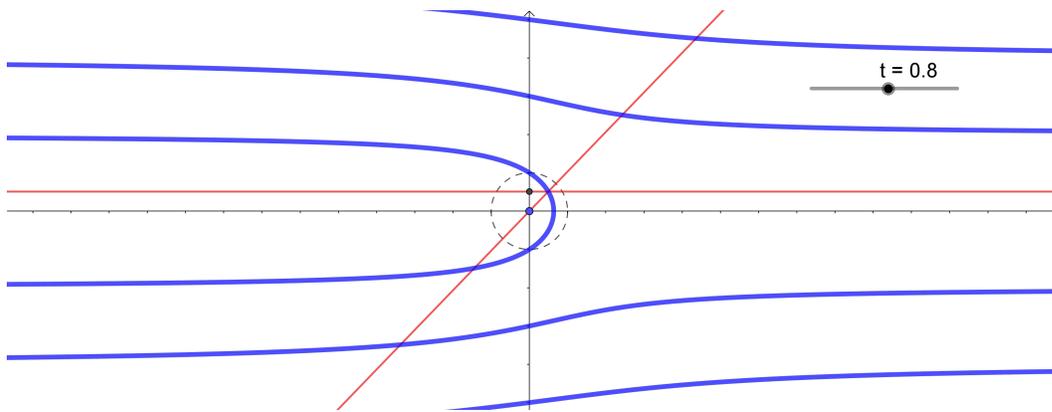
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \iff x = \frac{y}{\tan \theta} = \frac{2a\theta}{\pi} \cot \theta \quad (5-63)$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la cuadratriz de Dinóstrato son:

$$\boxed{x = \frac{2a\theta}{\pi} \cot \theta \quad ; \quad y = \frac{2a\theta}{\pi}} \quad (5-64)$$

Por supuesto, la cuadratriz puede extenderse para todo el plano tomando otros intervalos de  $\theta$ . Luego, una definición más global de la curva es:

**Definición alternativa.** *La cuadratriz de Dinóstrato es el lugar geométrico de los puntos de intersección entre una línea que se desplaza verticalmente de manera uniforme, y otra recta que gira uniformemente, coincidiendo mutuamente en su velocidad.*



**Figura 5-34:** Cuadratriz de Dinóstrato extendida al plano

## 5.17. Bicornio

También llamada como “curva sombrero” por su apariencia que asemeja a un sombrero de tres picos (sombrero militar de la Edad Moderna). Fue estudiada por los matemáticos ingleses James Sylvester en 1864 (quién le dio el nombre a la curva), y por Arthur Cayley tres años después.



**Figura 5-35:** Sombrero bicornio. Popular en recuadros de capitanes de la Edad Moderna y ceremonias formales de algunos ejércitos europeos.

Su definición como lugar geométrico es:

**Definición 17.** Sean  $C$  y  $C'$  circunferencias con centro en  $O$  y  $B$  respectivamente, ambas de radio  $a$  y tangentes, y  $P_1$  un punto en  $C'$ . El bicornio es el lugar geométrico de los puntos  $P$  que resultan de intersección entre la línea paralela a  $\overrightarrow{OB}$  que pasa por  $P_1$ , y la recta  $l_1$  que es inverso polar de  $P_1$  con respecto a  $C$ .

Se procede entonces, a hallar las ecuaciones paramétricas del bicornio. Ubíquense las dos circunferencias de tal forma que  $C$  este centrada en el origen, y  $C'$  sobre el eje  $Y$ , y sea  $\theta$  el parámetro sobre  $\angle O_1BP_1$  en el intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Trácese  $\overline{BO_1}$  tal que  $\overline{BO_1} \perp \overrightarrow{P_1G}$ . A medida que  $P_1$  recorre la circunferencia  $C'$ , el punto  $P(x, y)$  traza el lugar geométrico. Teniendo en cuenta la figura 5-36 se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= OG = BD = a \cos \theta \\ y &= PG = P_1G - P_1P \end{aligned} \tag{5-65}$$

Por otro lado, sean  $\triangle OP_1G$  y  $\triangle CP_1P$ , se tiene que  $\triangle OP_1G$  es rectángulo. Además,  $\triangle CP_1P$  también es rectángulo ya que  $l_1 \perp \overline{OP}$  por ser inverso polar. Luego, como  $\angle OP_1G \cong \angle PP_1C$



$$P_1C = OP_1 - OC = a\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta} - \frac{a}{\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta}} = \frac{4a(1 + \operatorname{sen} \theta)}{\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta}} \quad (5-70)$$

Ya con esto, reemplazando los valores de (5-67), (5-68) y (5-70) en (5-66):

$$\begin{aligned} \frac{4a(1 + \operatorname{sen} \theta)}{(2a + a \operatorname{sen} \theta)(\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta})} &= \frac{P_1P}{a\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta}} \\ \Leftrightarrow PP_1 &= \frac{4a^2(1 + \operatorname{sen} \theta)(\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta})}{a(2 + \operatorname{sen} \theta)(\sqrt{5 + 4 \operatorname{sen} \theta})} \\ &= \frac{4a(1 + \operatorname{sen} \theta)}{2 + \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (5-71)$$

Reemplazando este último valor junto con (5-67) en la ecuación paramétrica de  $y$  en (5-65):

$$\begin{aligned} y = PG = P_1G - P_1P &= a(2 + \operatorname{sen} \theta) - \frac{4a(1 + \operatorname{sen} \theta)}{2 + \operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{a(2 + \operatorname{sen} \theta)^2}{2 + \operatorname{sen} \theta} - \frac{4a(1 + \operatorname{sen} \theta)}{2 + \operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{(4a + 4a \operatorname{sen} \theta + a \operatorname{sen}^2 \theta) - (4a + 4a \operatorname{sen} \theta)}{2 + \operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{a \operatorname{sen}^2 \theta}{2 + \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (5-72)$$

En conclusión, las ecuaciones paramétricas del bicornio son:

$$\boxed{x = a \cos \theta \quad ; \quad y = \frac{a \operatorname{sen}^2 \theta}{2 + \operatorname{sen} \theta}} \quad (5-73)$$

Además, la curva permite una parametrización racional al realizar la sustitución de Euler-Weierstrass haciendo  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\begin{aligned} x = a \cos \theta &= \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} \\ y = \frac{a \operatorname{sen}^2 \theta}{2 + \operatorname{sen} \theta} &= \frac{a \cdot \frac{(2t)^2}{(1 + t^2)^2}}{2 + \frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{\frac{4at^2}{(1 + t^2)^2}}{\frac{2 + 2t^2 + 2t}{1 + t^2}} = \frac{4at^2(1 + t^2)}{2(1 + t + t^2)(1 + t^2)} = \frac{2at^2}{(1 + t + t^2)(1 + t^2)} \end{aligned}$$

Es decir, una parametrización racional del bicornio es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} \quad ; \quad y = \frac{2at^2}{(1 + t + t^2)(1 + t^2)}} \quad (5-74)$$

## 5.18. Trisectriz de Maclaurin

Tal como dice su nombre, es la curva que estudió el matemático Colin Maclaurin alrededor del siglo XVIII en su intento de dar solución al problema de la trisección del ángulo. Realizando algunas transformaciones sobre la trisectriz, puede convertirse en el folio de Descartes y viceversa. Además, hace parte de la familia de curvas denominadas “concoides de Sluze”<sup>13</sup>.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 18.** *La trisectriz de Maclaurin es el lugar geométrico de la intersección de dos rectas que rotan uniformemente en dos puntos distintos  $O$  y  $A$ , de tal forma que la proporción de las velocidades de rotación es de 3:1, y que el origen de ambas rectas es  $\overleftrightarrow{OA}$ .*

Para la deducción de una expresión analítica de la curva, es conveniente usar coordenadas polares. Sean  $l_1$  y  $l_2$  las rectas que rotan en los polos  $O$  y  $A$  separados por una distancia  $a$ . Sea  $\theta$  el parámetro sobre  $\angle AOP$ , la intersección de las rectas en  $l_1$  y  $l_2$  en  $P(r, \theta)$  trazan el lugar geométrico.

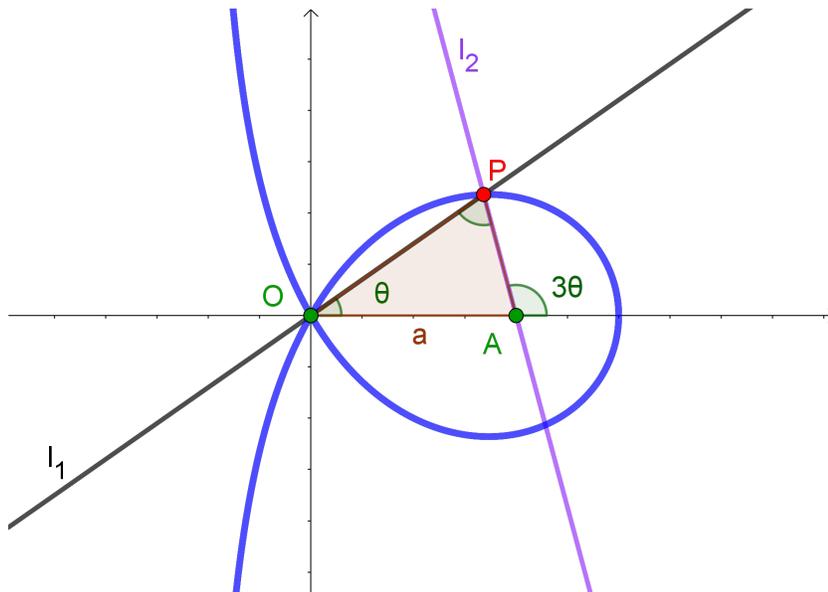


Figura 5-37

Sea  $\triangle OPA$ , se tiene que  $\angle PAO = \pi - 3\theta$  y también que  $\angle OPA = \pi - \theta - (\pi - 3\theta) = 2\theta$ .

Luego, por el teorema del seno se obtiene:

<sup>13</sup>Ecuaciones polares de la forma  $r = \sec \theta + a \cos \theta$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{OP}{\operatorname{sen}(\pi - 3\theta)} \quad (5-75)$$

Resolviendo el denominador aplicando el teorema del seno para la suma de ángulos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\pi - 3\theta) &= \operatorname{sen} \pi \cos(3\theta) - \operatorname{sen}(3\theta) \cos \pi \\ &= 0 - \operatorname{sen}(3\theta)(-1) \\ &= \operatorname{sen}(3\theta) \end{aligned}$$

Reemplazando este valor se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{OP}{\operatorname{sen}(3\theta)} &\iff OP = \frac{a \operatorname{sen}(3\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)} \\ &= \frac{a(3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta)}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \\ &= \frac{a}{2} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta (3 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta)}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \right) \\ &= \frac{a}{2} \left( \frac{3 - 4(1 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{a}{2} \left( \frac{4 \cos^2 \theta - 1}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{a}{2} (4 \cos \theta - \sec \theta) \end{aligned} \quad (5-76)$$

Como  $OP = r$ , se concluye así que la ecuación polar de la trisectriz de Maclaurin es:

$$r = \frac{a}{2} (4 \cos \theta - \sec \theta) \quad (5-77)$$

Ahora, para obtener las ecuaciones paramétricas basta con sustituir el valor de  $r$  en las expresiones que corresponden a las relaciones de  $x$  y  $y$ . Es decir:

$$x = r(\theta) \cos \theta = \frac{a}{2} (4 \cos^2 \theta - 1) \quad y = r(\theta) \operatorname{sen} \theta = \frac{a}{2} (4 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \tan \theta)$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la trisectriz de Maclaurin son:

$$\boxed{x = \frac{a}{2} (4 \cos^2 \theta - 1) \quad ; \quad y = \frac{a}{2} (4 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \tan \theta)} \quad (5-78)$$

Además, la curva permite una parametrización racional si se reescribe en términos de  $\tan \theta$  y se realiza la sustitución  $t = \tan \theta$ :

$$x = \frac{a}{2}(4 \cos^2 \theta - 1) = \frac{a}{2} \left( \frac{4}{\tan^2 \theta + 1} - 1 \right) = \frac{a}{2} \left( \frac{4 - t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) = \frac{a(3 - t^2)}{2(t^2 + 1)}$$

$$y = \frac{a}{2}(2 \operatorname{sen}(2\theta) - \tan \theta) = \frac{a}{2} \left( \frac{4 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} - \tan \theta \right) = \frac{a}{2} \left( \frac{4t - t^3 - t}{t^2 + 1} \right) = \frac{at(3 - t^2)}{2(t^2 + 1)} = tx$$

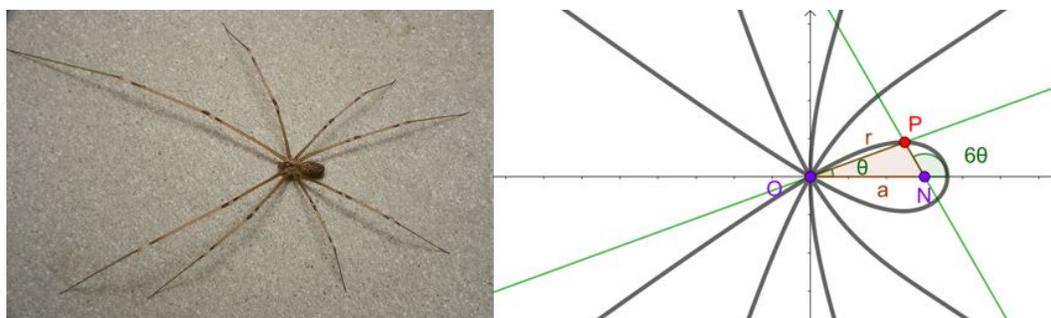
Por lo tanto, una parametrización racional de la trisectriz de Maclaurin es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{a(3 - t^2)}{2(t^2 + 1)} \quad ; \quad y = \frac{at(3 - t^2)}{2(t^2 + 1)}} \quad (5-79)$$

## 5.19. Curva arácnida

Recibe su nombre por su similitud con la forma de una araña. Su construcción es análoga con la trisectriz de Maclaurin. Se presenta su definición:

**Definición 19.** *la curva arácnida es el lugar geométrico de la intersección de dos rectas que rotan uniformemente en dos puntos distintos  $O$  y  $A$ , de tal forma que la proporción de las velocidades de rotación es de 6:1, y que el origen de ambas rectas sea  $\vec{OA}$ .*



**Figura 5-38:** Curva arácnida en comparación con la imagen de la araña *Holocnemus Plu-chei*, llamada coloquialmente como araña de techo.

Para la deducción de sus expresiones analíticas se procede de manera análoga que con la Trisectriz de Maclaurin. Manteniendo las mismas condiciones, sea  $P(r, \theta)$  el punto que traza el lugar geométrico, a partir de  $\triangle ONP$  usando el teorema del seno se deduce:

$$\frac{a}{\text{sen}(5\theta)} = \frac{OP}{\text{sen}(\pi - 6\theta)}$$

$$\frac{a}{\text{sen}(5\theta)} = \frac{r}{\text{sen}(\pi - 6\theta)} \iff r = \frac{a \text{sen}(6\theta)}{\text{sen}(5\theta)} \quad (5-80)$$

Teniendo la ecuación polar, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la forma:

$$\boxed{x = \frac{a \cos \theta \text{sen}(6\theta)}{\text{sen}(5\theta)} \quad ; \quad y = \frac{a \text{sen} \theta \text{sen}(6\theta)}{\text{sen}(5\theta)}} \quad (5-81)$$

## 5.20. Involuta del círculo

Hace parte de la familia de curvas denominadas **involutas** (también llamadas curvas envolventes). Del latín *involvere* que significa envolver o enrollar. Fueron estudiadas inicialmente por el matemático Christian Huygens en el siglo XVII, junto a otras curvas como la cicloide y la otra familia de curvas llamadas **evolutas** para el diseño y optimización de engranajes, que posteriormente abordó Leonhard Euler con el estudio de engranajes envolventes.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 20.** *La curva involuta de un círculo es el lugar geométrico que traza la punta de una cuerda cuando se desenrolla, manteniéndola tensa, alrededor de este.*

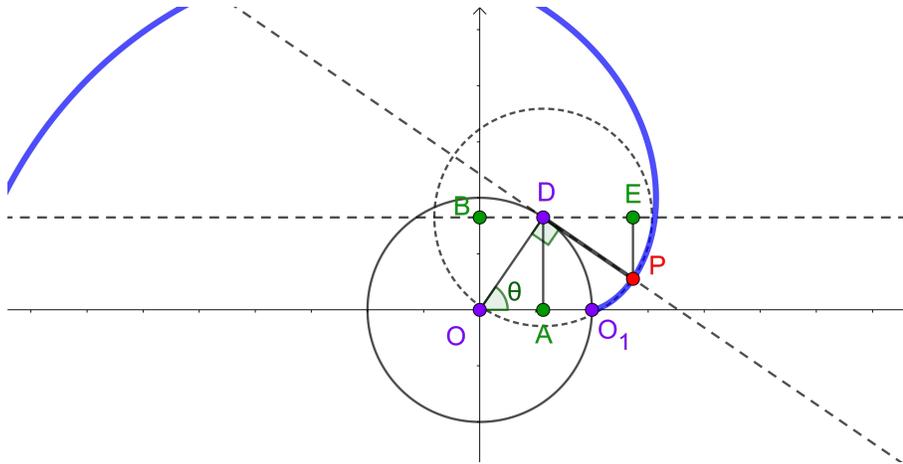


Figura 5-39

A partir de esta definición, la idea de “cuerda tensa” trae consigo la propiedad de tangencia de una recta respecto a la circunferencia. Además, siendo  $\theta$  el parámetro sobre  $\angle O_1OD$  se establece la expresión para la cuerda desenrollada como:

$$\widehat{O_1D} = \overline{DP} \quad (5-82)$$

Para determinar las ecuaciones paramétricas de la involuta del círculo, ubíquese la circunferencia con centro en el origen y radio  $a$ . Luego, el arco de circunferencia comprendido por el ángulo  $\theta$  es:

$$\widehat{O_1D} = a\theta \quad (5-83)$$

Ahora, trácense los pies de las perpendiculares  $A$  y  $B$  que pasan por  $D$  siendo  $A$  en el eje  $x$  y  $B$  en el eje  $Y$ , se tiene entonces que  $\angle BDA$  es recto, y por tanto  $\overleftrightarrow{BD}$  es paralela al eje  $X$ . Por lo tanto,  $\angle BDO = \angle AOD = \theta$  por ser ángulos alternos internos, luego  $\angle BDA = \theta + \angle ODA$ . Por otro lado, como  $\overleftrightarrow{DP} \perp \overleftrightarrow{DO}$  por ser recta tangente de la circunferencia por  $D$ , se tiene que  $\angle ODP$  es recto, es decir:

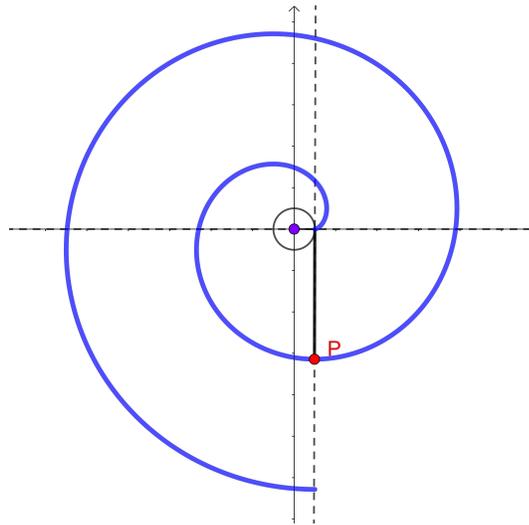
$$\begin{aligned}\angle BDA &= \angle ODP \\ \theta + \angle ODA &= \angle ODA + \angle ADP \\ \theta &= \angle ADP\end{aligned}\tag{5-84}$$

Trácese ahora  $\overleftrightarrow{EP}$  tal que  $\overleftrightarrow{EP} \perp \overleftrightarrow{BD}$ , se tiene entonces que  $\overleftrightarrow{EP} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ . Por tanto,  $\angle EPD = \angle ADP = \theta$  por ser ángulos alternos internos. Ya con esto, se deduce que las coordenadas del punto  $P(x, y)$  que traza el lugar geométrico son:

$$\begin{aligned}x &= OA + DE = a \cos \theta + a\theta \sin \theta \\ y &= AD - EP = a \sin \theta + a\theta \cos \theta\end{aligned}\tag{5-85}$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas de la involuta del círculo son:

$$x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad : \quad y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)\tag{5-86}$$



**Figura 5-40:** Involuta del círculo para  $0 \leq \theta \leq 4\pi$

## 5.21. Lemniscata de Gerono

También llamada “curva de ocho”, recibe su nombre en honor al matemático francés Camille Geronno que la estudió en el siglo XIX, sin embargo hay registros que la ubican alrededor de dos siglos antes. Fue estudiada también por Christian Huygens y Gabriel Cramer.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 21.** Sea una circunferencia con centro en el origen y radio  $\overline{OO_1}$  sobre el eje  $X$ , y  $D$  un punto arbitrario que se mueve sobre ella. Sea también  $l_1 \perp \overleftrightarrow{OO_1}$  por  $O_1$ , y  $A \in l_1$  de tal forma que  $A$  tiene la misma ordenada que  $D$ . Al trazarse  $l_2 \perp \overleftrightarrow{OD}$  que pase por  $D$ , la lemniscata de Geronno es el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que resultan de la intersección de  $l_2$  y  $\overleftrightarrow{OA}$ .

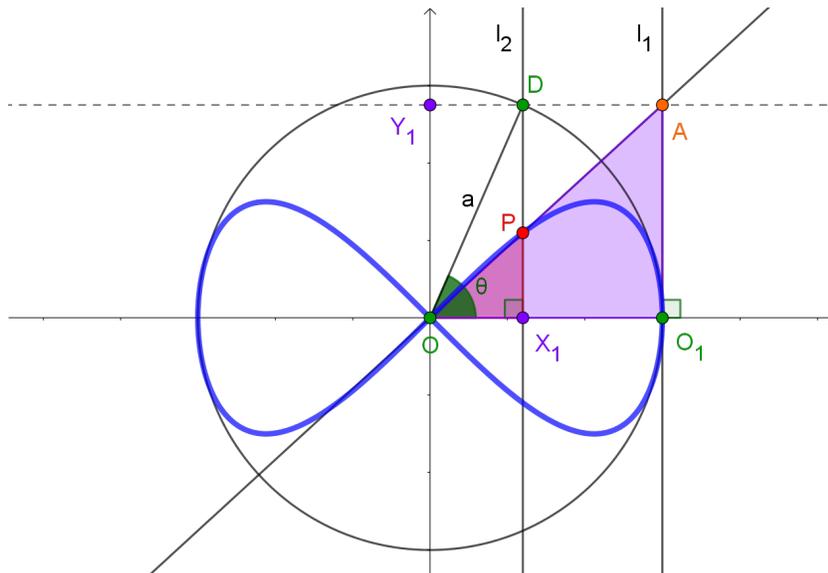


Figura 5-41

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva, sea  $\theta$  el parámetro sobre  $\angle O_1OD$ . Llámese  $X_1$  a la intersección de  $l_2$  con  $\overleftrightarrow{OA}$ , como  $\overleftrightarrow{OA}$  coincide con el eje  $X$ , se cumple que  $X_1$  es el pie de la perpendicular de  $D$  y  $P$  sobre el eje  $X$ , luego se tiene que  $x = OX_1$  y  $y = X_1P$ . Ahora, sean  $\triangle POX_1$  y  $\triangle AOO_1$ , siendo  $\angle POX_1 \cong \angle POO_1$  por ser ángulo común, y  $\angle PX_1O \cong \angle AO_1O$  por ser rectos, por el teorema de criterio de semejanza AA se deduce que  $\triangle POX_1 \sim \triangle AOO_1$ . Por lo tanto:

$$\frac{X_1P}{OX_1} = \frac{O_1A}{OO_1} \quad (5-87)$$

Por definición de la curva, se tiene que  $X_1D = O_1A$ . Luego:

$$\begin{aligned} \frac{X_1P}{OX_1} &= \frac{X_1D}{OO_1} \\ \frac{X_1P}{a \cos \theta} &= \frac{a \operatorname{sen} \theta}{a} \iff X_1P = a \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (5-88)$$

Por otro lado, sea  $\triangle OX_1D$ . Al ser rectángulo, se deduce por relaciones trigonométricas que  $OX_1 = a \cos \theta$ . De esta forma, las ecuaciones paramétricas de la Lemniscata de Geronno son:

$$\boxed{x = a \cos \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta \cos \theta} \quad (5-89)$$

Además, la curva permite una parametrización racional al realizar la sustitución de Euler-Weierstrass en donde  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta = \frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)} \\ y &= a \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2at(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una parametrización racional de la lemniscata de Geronno es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)} \quad ; \quad y = \frac{2at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} \quad (5-90)$$

## 5.22. Lemniscata de Bernoulli

Conocida también como “lemniscata hiperbólica”. Estudiada por Jacob Bernoulli en 1694, la describió como una curva “con forma de moño, como de cinta colgante”. Le acuñó el nombre del latín *lemniscus* que significa cinta, haciendo referencia a la decoración de las coronas de la Antigua Roma (Olalquiaga y Olalquiaga, 2005). Conjuntamente, se dice que la palabra *lemniscata* proviene del nombre de la ciudad griega *Lemnos* en donde se creaban cintas de lana.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 22.** sean dos focos  $F$  y  $F'$  situados a una distancia de  $2a$ , se denomina Lemniscata de Bernoulli a los puntos  $P$  del plano en donde el producto de las distancias a los focos es la constante  $a^2$ .

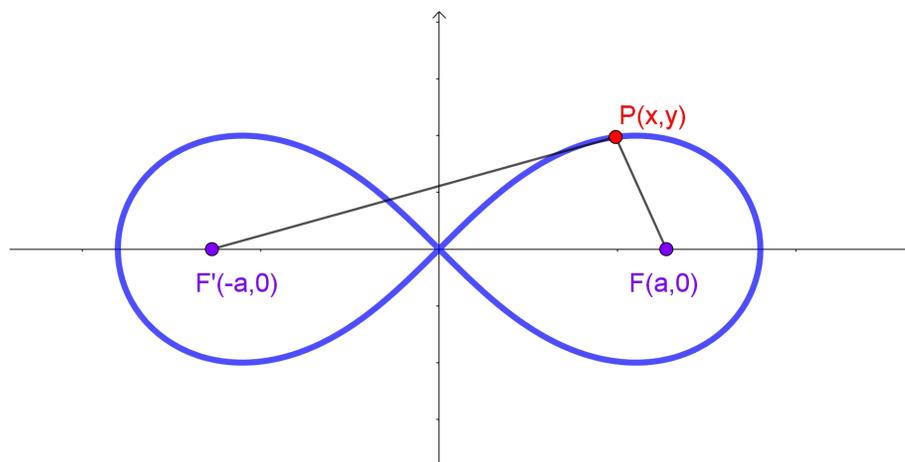


Figura 5-42

Dicha condición geométrica puede escribirse como:

$$|PF| \cdot |PF'| = a^2 \quad (5-91)$$

Para deducir las expresiones analíticas de la curva, sean  $F(a,0)$  y  $F'(-a,0)$  los focos y  $P(x,y)$  los puntos del lugar geométrico. Aplicando el teorema de la distancia:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} &= a^2 \\
[(x-a)^2 + y^2] \cdot [(x+a)^2 + y^2] &= a^4 \\
(x^2 - 2ax + a^2 + y^2)(x^2 + 2ax + a^2 + y^2) &= a^4 \\
x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + a^4 + 2a^2y^2 &= a^4 \\
(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) &= 0
\end{aligned} \tag{5-92}$$

Luego, esta es la expresión cartesiana de la lemniscata de Bernoulli. Ahora, con esta expresión se obtiene su ecuación polar:

$$\begin{aligned}
(r^2)^2 - 2a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) &= 0 \\
r^2(r^2 - 2a^2 \cos(2\theta)) &= 0 \\
r^2 &= 2a^2 \cos(2\theta)
\end{aligned} \tag{5-93}$$

De esta expresión, puede verificarse que la curva posee simetría respecto al eje polar, el eje vertical y el polo. Luego, despejando para  $r$  se obtiene:

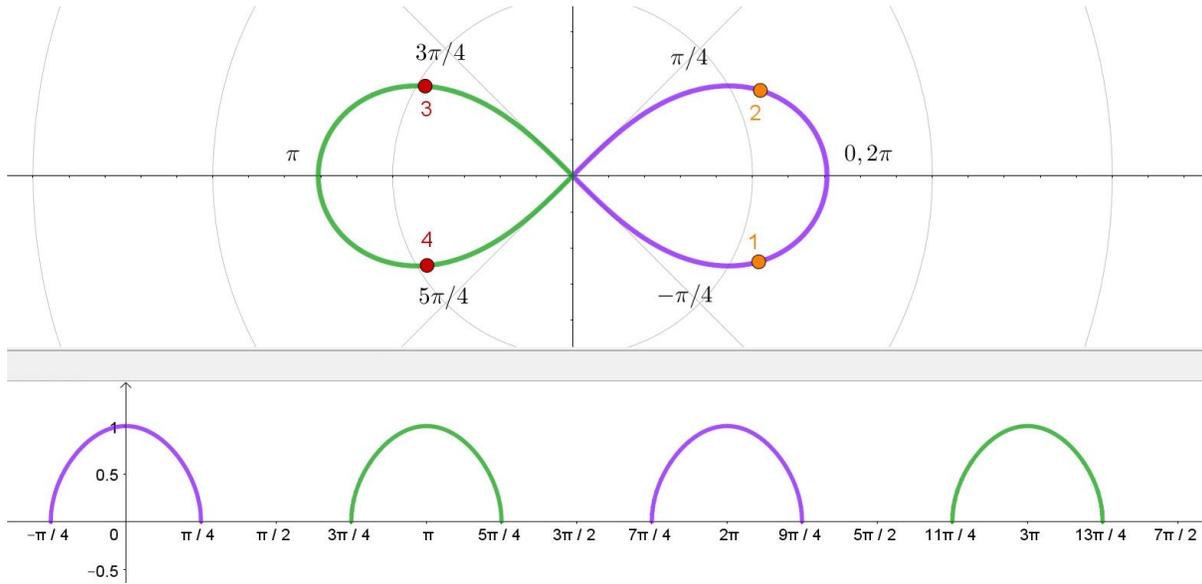
$$r = \pm a\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta)} \tag{5-94}$$

Como se sabe que la expresión es simétrica respecto al polo puede omitirse el valor negativo. Por tanto, una *primer* ecuación paramétrica de la lemniscata de Bernoulli es:

$$x = \sqrt{2}a \cos \theta \sqrt{\cos(2\theta)} \quad ; \quad y = \sqrt{2}a \sin \theta \sqrt{\cos(2\theta)} \tag{5-95}$$

Sin embargo, puede notarse que la expresión no está definida para cualquier  $\theta$ , ya que  $\cos(2\theta)$  toma valores negativos. Es decir, para que se cumpla que  $\cos(2\theta) \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}
-\pi/2 \leq 2\theta \leq \pi/2 &\iff -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 \\
3\pi/2 \leq 2\theta \leq 5\pi/2 &\iff 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4 \\
&\vdots \\
\theta \in \left[ k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4} \right] &\quad ; \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{5-96}$$



**Figura 5-43:** Representación de la primera expresión paramétrica de la lemniscata y el trazo de la expresión  $\sqrt{\cos(2\theta)}$ . Los puntos muestran el orden de trazo, iniciando desde  $-\pi/4$  hasta  $5\pi/4$  para dar un ciclo completo.

De lo anterior, puede evidenciarse que el intervalo de definición de  $\theta$  no es continuo (de hecho, posee infinitos intervalos de discontinuidad). Debido a esto, una mejor representación paramétrica se obtiene al reescribir (5-95) en términos de  $\tan \theta$ .

Así, tomando  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , por identidades trigonométricas se obtiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \quad \cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1}$$

Reemplazando estos valores en (5-95):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} = \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{\tan^2 \theta + 1} \\ y &= \sqrt{2}a \cdot \frac{\tan \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} = \sqrt{2}a \cdot \frac{\tan \theta \sqrt{1 - \tan^2 \theta}}{\tan^2 \theta + 1} \end{aligned} \quad (5-97)$$

Tomando a  $\tan \theta$  como el parámetro de las ecuaciones, puede realizarse un cambio de variable tal que  $\operatorname{sen} \alpha = \tan \theta$ , en donde  $\theta = \arctan(\operatorname{sen} \alpha)$ . Simplificando las expresiones:

$$x = \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1} = \frac{a\sqrt{2} \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1}$$
$$y = \sqrt{2}a \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1} = \frac{a\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1}$$

De esta manera, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la lemniscata de Bernoulli:

$$\boxed{x = \frac{a\sqrt{2} \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1} \quad ; \quad y = \frac{a\sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1}} \quad (5-98)$$

## 5.23. Óvalos de Cassini

Recibe su nombre en honor al matemático y reconocido astrónomo Giovanni Cassini, quién estudió junto a su padre las propiedades geométricas de esta, y publicó sus resultados en 1680. Cassini la propuso como curva modelo de las trayectorias planetarias creyendo que se ajustaban mejor que las órbitas elípticas propuestas por Johannes Kepler. Años más tarde, otros matemáticos descubrieron que los óvalos de Cassini representan la intersección de un plano con el toroide, haciendo parte de las secciones tóricas junto con la espira de Perseo.

Su definición como lugar geométrico es muy similar a la elipse, ya que en vez de una suma constante es un producto constante (por esta razón también se les denomina elipses cassinianas). Se muestra entonces, su definición:

**Definición 23.** *los óvalos de Cassini son el conjunto de puntos del plano tal que el producto de las distancias a dos puntos del plano (llamados focos) es constante.*

Sean  $F$  y  $F'$  los focos de la curva, y llámese la constante como  $b^2$ , dicha definición puede escribirse como:

$$|FP| \cdot |F'P| = b^2 \quad (5-99)$$

Ubicando los focos sobre el eje  $X$  de tal forma que tengan las coordenadas  $F(a, 0)$  y  $F'(-a, 0)$  y sean  $P(x, y)$  el conjunto de puntos del lugar geométrico, por el teorema de la distancia se tiene:

$$\begin{aligned} |FP| &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ |F'P| &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición geométrica de (5-99) se expresa analíticamente de la forma:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = b^2 \quad (5-100)$$

Elevando al cuadrado y operando términos, se obtiene la ecuación cartesiana de los óvalos de Cassini:

$$\begin{aligned}
& [(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2] = b^4 \\
& [x^2 - 2ax + a^2 + y^2][x^2 + 2ax + a^2 + y^2] = b^4 \\
& (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + a^4 = b^4 \\
& (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = b^4
\end{aligned} \tag{5-101}$$

Ya con la expresión cartesiana, se puede obtener su ecuación polar:

$$\begin{aligned}
& (r^2)^2 - 2a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) + a^4 - b^4 = 0 \\
& r^4 - 2a^2r^2 \cos(2\theta) + a^4 - b^4 = 0
\end{aligned} \tag{5-102}$$

Resolviendo esta última expresión empleando la ecuación cuadrática para  $r^2$  se obtiene:

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta) \pm \sqrt{a^4 \cos^2(2\theta) - a^4 + b^4} \tag{5-103}$$

A partir de esta última ecuación, puede verificarse que la curva es simétrica respecto al eje polar, al eje vertical y al polo. Simplificando un poco más la expresión se obtiene:

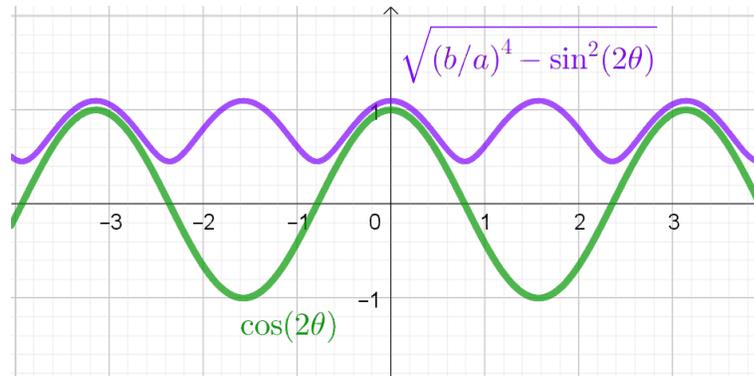
$$\begin{aligned}
r^2 &= a^2 \cos(2\theta) \pm \sqrt{b^4 - a^4 \sin^2(2\theta)} \\
r^2 &= a^2 \cos(2\theta) \pm a^2 \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2(2\theta)} \\
r^2 &= a^2 \left[ \cos(2\theta) \pm \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2(2\theta)} \right] \\
r &= \pm a \sqrt{\cos(2\theta) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \sin^2(2\theta)}}
\end{aligned} \tag{5-104}$$

Ahora bien, para obtener una expresión paramétrica adecuada deben evaluarse los diferentes casos que se presentan de esta ecuación. Un primer paso que se puede realizar es omitir los valores negativos de  $r$  debido a que la curva es simétrica respecto al polo y por tanto, este cambio sólo hace referencia a la dirección de trayectoria. Por otra parte, quedan los radicales que pueden tomar valores negativos y por tanto, es necesario restringir los valores de  $\theta$  según los valores de  $b$  y  $a$ .

#### I. Caso $b > a$

Teniendo en cuenta que  $\sin^2(2\theta)$  tiene por rango  $[0, 1]$ , y al ser  $b/a > 1$ , se deduce que

este primer radical está definido para cualquier valor de  $\theta$ . Además, numéricamente, el radical interno siempre es mayor que  $\cos(2\theta)$ , luego es necesario tomar el signo positivo para que la expresión esté definida en el plano real, de lo contrario la expresión siempre arroja una expresión compleja.



**Figura 5-44**

Esta expresión describe óvalos comprimidos y óvalos convexos para cualquier valor de  $\theta$ , dando un ciclo completo en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . La ecuación paramétrica de este caso corresponde a:

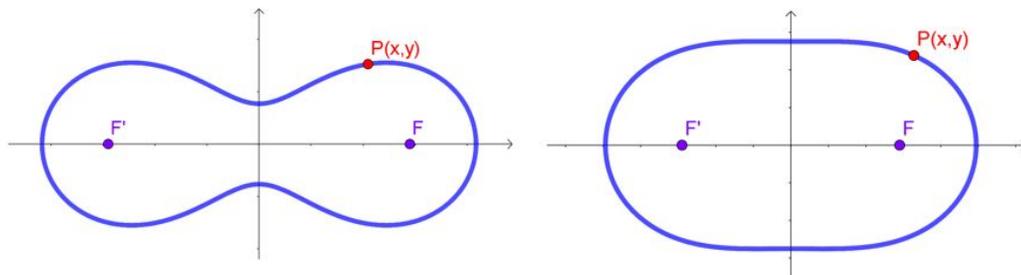
$$\begin{cases} x = a \cos \theta \sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \sin^2(2\theta)}} \\ y = a \sin \theta \sqrt{\cos(2\theta) + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \sin^2(2\theta)}} \end{cases} \quad (5-105)$$

## II. Caso $b = a$

En este caso, la expresión (5-104) se reduce a:

$$r = a\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta)}$$

Esta expresión corresponde a la lemniscata de Bernoulli. En otros términos, la curva de Bernoulli es un caso especial de los óvalos de Cassini.



**Figura 5-45:** Óvalos de Cassini para distintos parámetros de  $b$  en el caso I. A la izquierda, un óvalo de Cassini comprimido; a la derecha, un óvalo de Cassini convexo.

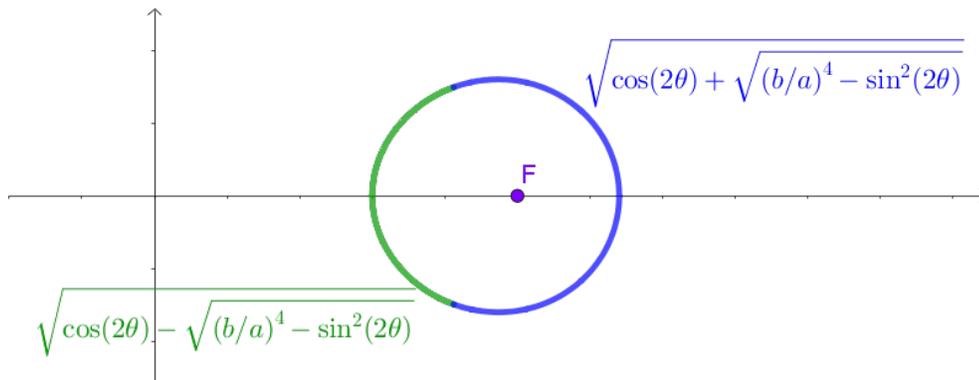
**III. Caso  $b < a$**

En este caso, el valor de  $b/a < 1$  hace que el radical interno tome valores negativos en algunos valores de  $\theta$ . Restringiendo estos valores de tal forma que  $(b/a)^4 - \sin^2(2\theta) \geq 0$  se debe cumplir que:

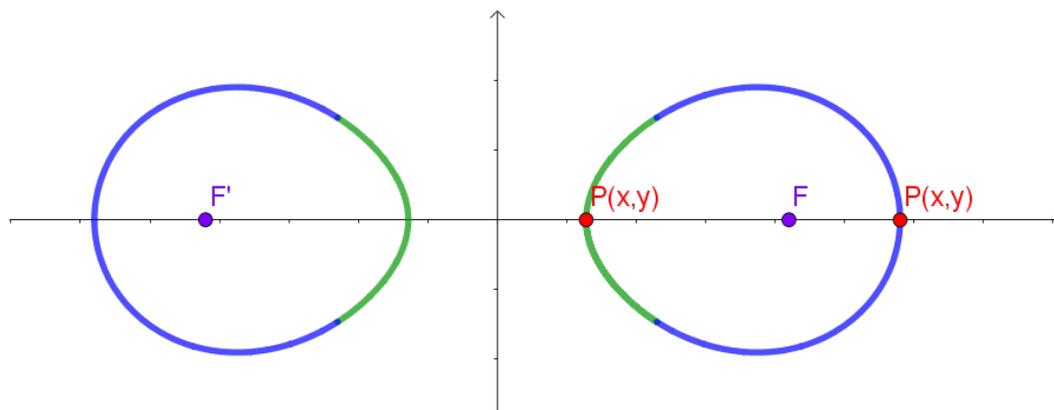
$$\frac{b^4}{a^4} = \sin^2(2\theta) \iff 2\theta = \arcsen\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \tag{5-106}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$$

Es decir,  $\theta \in [-\frac{1}{2} \arcsen(b^2/a^2), \frac{1}{2} \arcsen(b^2/a^2)]$ . Sin embargo,  $\cos(2\theta)$  también es positivo en este intervalo. Numéricamente,  $\cos(2\theta) > \sqrt{(b/a)^4 - \sin^2(2\theta)}$  para cualquier valor de  $\theta$  del intervalo. Dicho esto, se tiene entonces que ambos signos del radical son valores reales, y por tanto forman trazos distintos del óvalo.



**Figura 5-46**



**Figura 5-47:** Pares de óvalos de Cassini en donde se muestra  $P(x, y)$  con punto de inicio en  $\theta = 0$  según el signo del radical. El punto sobre la traza azul sigue una trayectoria en sentido contrario a las agujas del reloj; mientras que el otro punto sigue una trayectoria en sentido a las agujas del reloj.

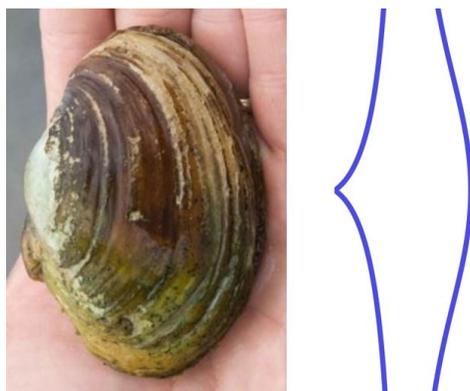
Por otro lado, puede verificarse que un conjunto más completo de los valores de  $\theta$  es de la forma  $[k\pi - \frac{1}{2} \arcsen(b^2/a^2), k\pi + \frac{1}{2} \arcsen(b^2/a^2)]$  para  $k \in \mathbb{Z}$ , permitiendo que se trace otro óvalo de Cassini. En conclusión, para el caso  $b < a$  se generan un par de óvalos de Cassini. Dicho esto, las ecuaciones paramétricas de este caso del óvalo de Cassini son:

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos \theta \sqrt{\cos(2\theta) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \sin^2(2\theta)}} \\
 y &= a \sen \theta \sqrt{\cos(2\theta) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \sin^2(2\theta)}}
 \end{aligned}
 \tag{5-107}$$

en donde la curva se construye en dos partes que corresponden al signo positivo y negativo del radical.

## 5.24. Concoide de Nicómedes

Recibe su nombre en honor al matemático de la Antigua Grecia, Nicómedes, que descubrió la curva alrededor del siglo II a.C intentando dar solución a los problemas de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Su nombre viene del griego *konkhe* que significa “concha”, y el sufijo *-oide* para “con forma de” (literalmente “con forma de concha”). La curva de Nicómedes es mencionada en otros trabajos geométricos hechos por Pappus y Eutocio, y siglos más adelante sería redescubierta con ayuda del desarrollo de la geometría analítica y el cálculo.



**Figura 5-48:** Concha de mar o mejillón. Nicómedes dio nombre a la curva inspirado en su forma.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 24.** *Sea una recta fija  $l$  y un punto  $O$  exterior a ella. Sea también,  $l'$  una recta arbitraria que pasa por  $O$  y corta a  $l$  en algún punto  $B$ . Luego, el conjunto de puntos  $P$  y  $P'$  que se encuentran a una distancia fija  $b$  sobre  $l'$  de tal forma que  $PB = P'B = b$  a medida que  $l'$  gira alrededor de  $O$ , se denomina Concoide de Nicómedes*

Al referirse a *las concoides* como una familia de curvas, la concoide de Nicómedes es la concoide de una recta. (Lockwood, 1967, p. 127).

Para deducir las ecuaciones paramétricas de la concoide de Nicómedes, es conveniente usar coordenadas polares. Sea  $O$  el punto exterior a la recta ubicado en el origen y sea la recta  $l$  perpendicular al eje  $X$  por el punto  $A(a, 0)$ . Luego, trácese la recta  $l'$  de tal forma que pasa

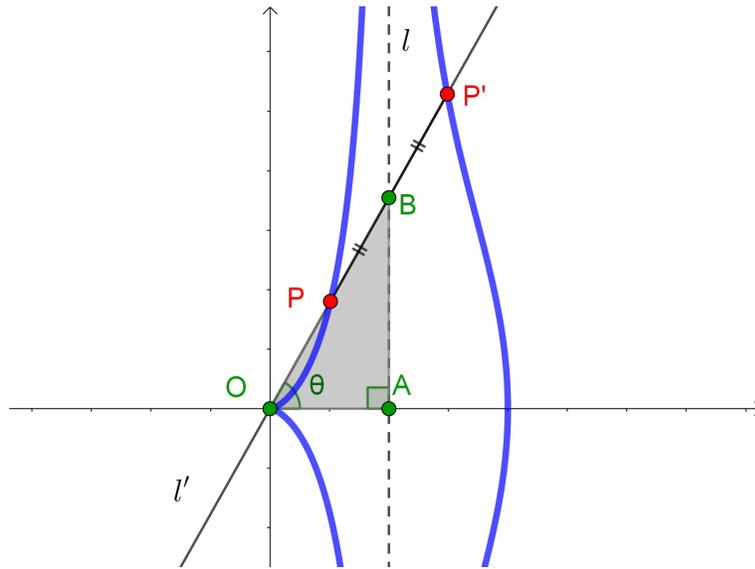


Figura 5-49

por  $O$  y corta a la recta  $l$  en  $B$ , ya que  $l'$  gira alrededor de  $O$ , llámese  $\theta$  al ángulo  $\angle BOA$  de tal forma que  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Ahora, sea  $b$  un valor arbitrario, llámense  $P$  y  $P'$  sobre  $l'$  los puntos del lugar geométrico, se tiene que:

$$\begin{aligned} r_1 &= OP = OB - PB \\ r_2 &= OP' = OB + P'B \end{aligned} \quad (5-108)$$

Sea  $\triangle OAB$ , se sabe que es rectángulo. Por lo tanto, se deduce que:

$$\tan \theta = \frac{AB}{a} \iff AB = a \tan \theta$$

Luego, por el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 \tan^2 \theta &= (OB)^2 \\ a^2(1 + \tan^2 \theta) &= (OB)^2 \\ a^2 \sec^2 \theta &= (OB)^2 \\ a \sec \theta &= OB \end{aligned}$$

Reemplazando este valor en (5-108) se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= OB - PB = a \sec \theta - b \\ r_2 &= OB + P'B = a \sec \theta + b \end{aligned} \quad (5-109)$$

Es decir, la ecuación polar de la conoide de Nicómedes es de la forma:

$$r = a \sec \theta \pm b \quad (5-110)$$

en donde cada signo representa una rama de la concoide: el signo negativo traza la rama que se encuentra más cerca del punto  $O$ , la rama interior; y el signo positivo la rama exterior. Sin embargo, al tomar la ecuación  $r_1 = a \sec \theta + b$ , en el intervalo  $[0, 2\pi]$  se realiza un trazo completo de la concoide; de la misma forma,  $r_2 = a \sec \theta - b$  hace un trazo completo pero en dirección opuesta. Puede mostrarse por propiedades de simetría de las coordenadas polares que las dos ecuaciones corresponden al mismo lugar geométrico, o también, hallando la expresión cartesiana y verificar que corresponden a la misma curva.

Por lo tanto, en (5-110) puede omitirse uno de los signos si se toma  $\theta$  sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Esto permite reducir la ecuación a la expresión más conocida de la concoide de Nicómedes:

$$r = a \sec \theta + b \quad (5-111)$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de la concoide de Nicómedes son:

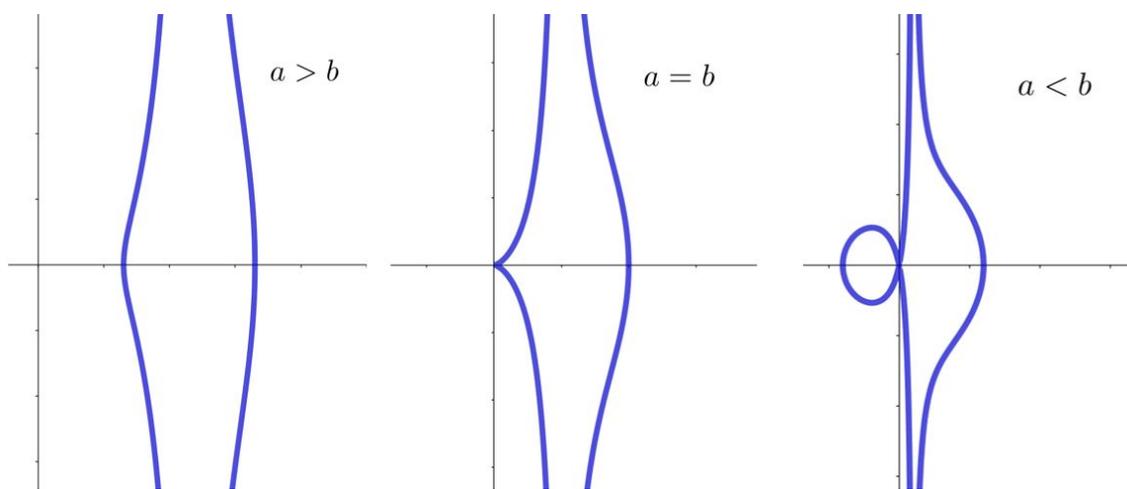
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta = a + b \cos \theta \\ y = r \cdot \sen \theta = a \tan \theta + b \sen \theta \end{cases} \quad (5-112)$$

Por otro lado, una parametrización racional de la concoide de Nicómedes se halla al realizar la sustitución de Euler - Weierstrass haciendo  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$x = a + b \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \quad ; \quad y = 2t \left( \frac{a}{1 - t^2} + \frac{b}{1 + t^2} \right) \quad (5-113)$$

Un detalle a resaltar de la curva es la relación entre los valores de  $a$  y  $b$ :

- Cuando  $a = b$ , la concoide genera una cúspide en el polo.
- Cuando  $a > b$ , la concoide es *suave* en ambas ramas.
- Cuando  $a < b$ , la concoide genera un bucle en la rama interior.



**Figura 5-50:** De izquierda a derecha: conchoide de Nicómedes suave, con cúspide y con bucle.

## 5.25. Estrofoide

Los primeros trabajos de la curva fueron hechos por Gilles de Roberval, Isaac Barrow (uno de los profesores de Newton), y Evangelista Torricelli alrededor de la mitad del siglo XVII. Inicialmente, recibió el nombre de pteroide: del griego *pteron* que significa ala; y *-oide*, con forma de (literalmente, con forma de ala). Dos siglos más tarde, fue rebautizada por Enrico Montucci tomando del griego la palabra *strophos*, que significa cinturón o cuerda. Dicho esto, la curva significa “con forma de cinturón o de cuerda”.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 25.** Sea  $l$ ,  $O$  un punto exterior a ella, y  $A$  el pie de la perpendicular sobre  $l$  de  $O$ . Constrúyase  $l'$  de tal forma que pase por  $O$  y que corte a  $l$  en  $C$ . La estrofoide es el conjunto de puntos  $P$  y  $P'$  sobre  $l'$  tales que  $\overline{AC} \cong \overline{CP} \cong \overline{CP'}$  al girar  $l'$  sobre  $O$ .

Debe aclararse que esta definición hace referencia a la estrofoide recta, teniendo en cuenta que existe una definición más general de la *curva estrofoide como familia de curvas*, de manera muy similar a las conoides.

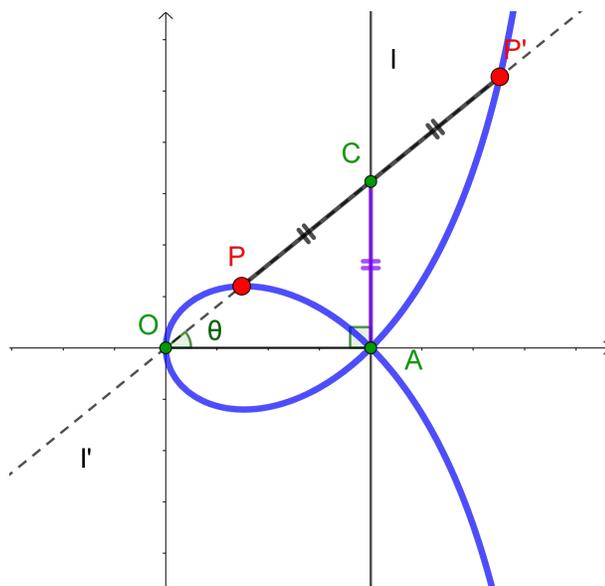


Figura 5-51

Para deducir una expresión analítica de la curva, ubíquese el punto  $O$  en el origen, y sea la recta  $l$  ubicada a una distancia  $a$  de  $O$  perpendicular al eje  $X$ , de tal forma que  $A$  tenga

coordenadas  $(a, 0)$ . Ahora, llámese  $\theta$  al ángulo de giro de  $l'$  donde  $P(r, \theta)$  y  $P'(x', \theta)$  trazan la estrofoide. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} r_1 &= OP = OC - CP \\ r_2 &= OP' = OC + CP' \end{aligned} \quad (5-114)$$

Sabiendo que  $\triangle OAP$  es rectángulo, por identidades trigonométricas se obtiene:

$$\tan \theta = \frac{AC}{a} \iff AC = a \tan \theta$$

Teniendo en cuenta la definición de la curva, se deduce que  $AC = CP = CP' = a \tan \theta$ .

Luego, por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 \tan^2 \theta &= (OC)^2 \\ a^2(1 + \tan^2 \theta) &= (OC)^2 \\ a^2 \sec^2 \theta &= (OC)^2 \iff OC = a \sec \theta \end{aligned}$$

Luego, reemplazando estos dos valores en (5-114) se tiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= a \sec \theta - a \tan \theta \\ r_2 &= a \sec \theta + a \tan \theta \end{aligned} \quad (5-115)$$

en donde  $r_1(\theta)$  corresponde a la traza del bucle y  $r_2(\theta)$  a las dos “ramas” de la estrofoide en el intervalo  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Luego, la ecuación polar de la estrofoide es de la forma:

$$r = a(\sec \theta \pm \tan \theta) \quad (5-116)$$

Sin embargo, al tomar  $r_1(\theta)$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  la estrofoide realiza un recorrido completo, y sucede lo mismo si se toma  $r_2(\theta)$  sobre el mismo intervalo: la diferencia entre las dos ecuaciones corresponde a la dirección del trazado. Dicha relación puede mostrarse mediante las propiedades de simetría de las coordenadas polares, o verificando que la misma expresión cartesiana de la estrofoide puede hallarse a partir de las dos ecuaciones. Por lo tanto, es posible remover el signo menos de (5-116) sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$ , obteniendo:

$$r = a(\sec \theta + \tan \theta) \quad (5-117)$$

De esta ecuación, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la estrofoide:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta = a(1 + \sec \theta) \\ y &= r \cdot \sin \theta = a \tan \theta(1 + \sec \theta) \end{aligned}} \quad (5-118)$$

De estas dos ecuaciones, es posible obtener una parametrización racional al realizar la sustitución de Euler-Weierstrass ( $t = \tan(\theta/2)$ ):

$$x = a \left( 1 + \frac{2t}{1+t^2} \right) = a \left( \frac{t^2 + 2t + 1}{1+t^2} \right) = \frac{a(1+t)^2}{1+t^2}$$

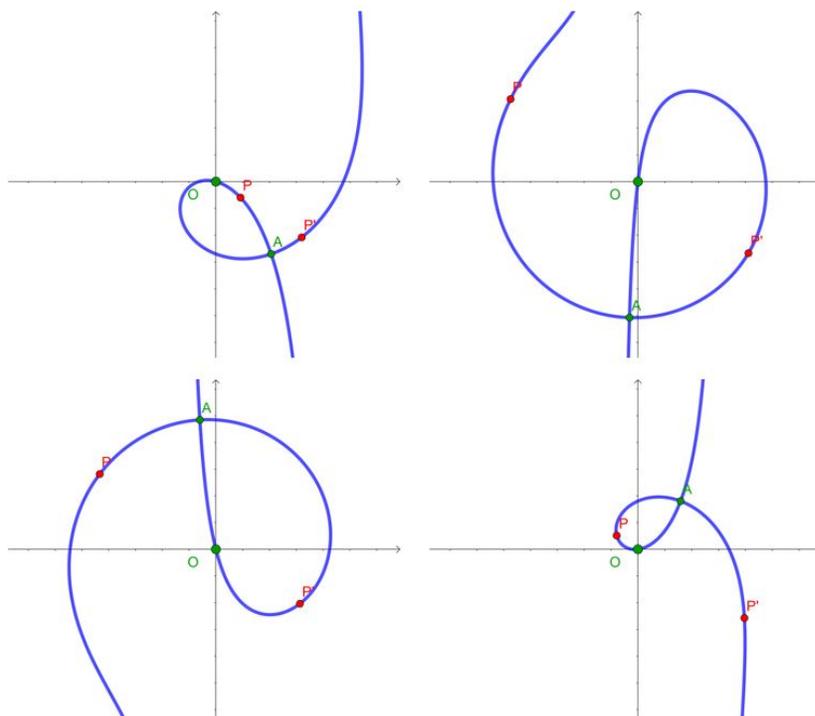
$$y = x \cdot \tan \theta = \frac{a(1+t)^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2at(1+t)}{(1-t)(1+t^2)}$$

Es decir, una parametrización racional de la estrofoide recta es:

$$\boxed{x = \frac{a(1+t)^2}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{2at(1+t)}{(1-t)(1+t^2)}} \quad (5-119)$$

Por otro lado, otra variante de estrofoide se obtiene cuando se toma un punto arbitrario  $A$  sobre  $l$  en vez de ser la proyección de  $O$  sobre  $l$ . Esta estrofoide se denomina estrofoide oblicua. Puede verificarse fácilmente que si  $A$  tiene coordenadas  $(a, b)$ , la ecuación de la estrofoide oblicua es de la forma:

$$r = a(\sec \theta + \tan \theta) + b \quad (5-120)$$



**Figura 5-52:** Estrofoides oblicuas

## 5.26. Curva kappa o curva de Gutschoven

Recibe su nombre por su “similitud” con la letra griega kappa. El primero en estudiar la curva fue el médico y matemático Gerard van Gutschoven, alrededor del año 1662. Otros matemáticos como Isaac Newton y Johann Bernoulli la estudiaron siglos más tarde.

Se presenta a continuación su definición como lugar geométrico:

**Definición 26.** Sea  $l$ ,  $O$  un punto exterior a ella, y  $A$  el pie de la perpendicular sobre  $l$  de  $O$ . Sea también,  $l'$  de tal forma que pase por  $O$  y que corte a  $l$  en  $B$ . La curva kappa es el lugar geométrico de los puntos  $P$  y  $P'$  sobre  $l'$  tales que  $\overline{AB} \cong \overline{OP} \cong \overline{OP'}$  al girar  $l'$  sobre  $O$ .

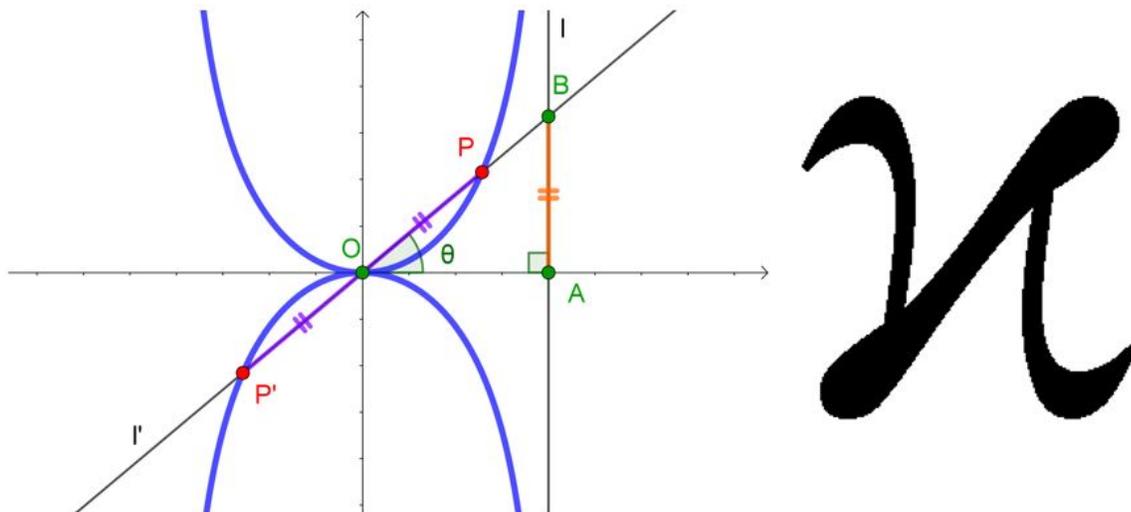


Figura 5-53: Curva kappa y letra griega kappa

Para hallar la expresión analítica de la curva, ubíquese el polo  $O$  en el origen y la recta  $l$  de tal forma que sea perpendicular con el eje  $X$ , siendo  $A(a, 0)$  la proyección de  $O$  en  $l$ . Llámese  $\theta$  el parámetro que corresponde al ángulo de rotación de  $l'$ , usando coordenadas polares se tiene que los puntos  $P(r_1, \theta_1)$  y  $P'(r_2, \theta_2)$  que trazan el lugar geométrico son de la forma:

$$\begin{aligned} r_1 &= OP = AB \\ r_2 &= OP' = AB \end{aligned} \tag{5-121}$$

Siendo que  $\triangle OAB$  es rectángulo, por relaciones trigonométricas se obtiene:

$$\tan \theta = \frac{AB}{a} \iff AB = a \tan \theta$$

Reemplazando este valor en  $r_1$  y  $r_2$ :

$$r_1 = AB = a \tan \theta$$

$$r_2 = AB = a \tan(\theta + \pi) = a \tan \theta$$

Es decir, la ecuación polar de la curva kappa es de la forma:

$$r = a \tan \theta \tag{5-122}$$

Y hallando su expresión polar, su expresión paramétrica es de la forma:

$$\boxed{x = a \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta \tan \theta} \tag{5-123}$$

Además, realizando la sustitución de Euler-Weierstrass se obtiene una parametrización racional de la curva:

$$x = a \operatorname{sen} \theta = \frac{2at}{1+t^2} \qquad y = a \operatorname{sen} \theta \tan \theta = \frac{2at}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4at^2}{1-t^4}$$

Es decir, una parametrización racional de la curva kappa es:

$$\boxed{x = \frac{2at}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{4at^2}{1-t^4}} \tag{5-124}$$

## 5.27. Campila de Eudoxo

Recibe su nombre en honor al matemático y astrónomo de la Grecia Antigua, Eudoxo de Cnido, y de la palabra *kampily* que significa “curva” o también “doblado o torcido”. Los trabajos de Eudoxo son de alrededor del siglo IV a.C y se consideran precursores del cálculo. Sirvieron de inspiración para otros matemáticos como Arquímedes, Newton, Leibniz y Dedekind, los cuales retoman sus ideas acerca del método de exhaustión y sus tratados de conmensurabilidad y proporcionalidad. Al igual que otros contemporáneos a su época, creó la curva en su intento de resolver el problema de Delios.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 27.** Sea  $C$  una circunferencia de radio  $a$  con centro en el origen y un punto  $A$  sobre ella. Trácese sobre  $A$  la recta tangente a la circunferencia, y sea  $B$  el punto de corte con el eje  $X$ . Siendo  $l$  la recta perpendicular al eje  $X$  que pasa por  $B$ , se denomina Campila de Eudoxo al lugar geométrico que consta de las intersecciones entre  $l$  y  $\overleftrightarrow{OA}$  a medida que  $A$  se mueve a lo largo de  $C$ .

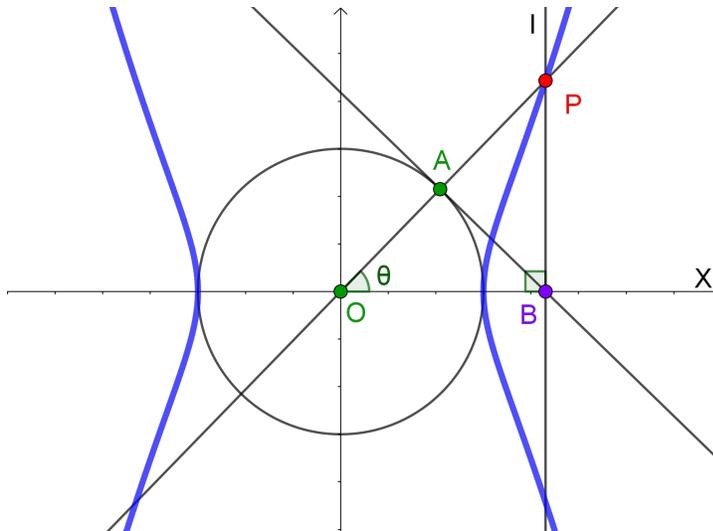


Figura 5-54

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva, sabiendo que  $O$  es el origen, llámese  $\theta$  al parámetro asociado al ángulo que se forma al moverse  $A$  sobre la circunferencia y el eje  $X$ .

Ahora,  $\angle OAB$  es recto ya que  $\overleftrightarrow{AB}$  es tangente de la circunferencia, luego  $\triangle OAB \sim \triangle OBP$  por criterio de semejanza AA. Ya con esto, por trigonometría se obtienen las expresiones para  $OB$  y  $BP$ :

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{OA}{OB} = \frac{a}{OB} & \iff & \quad OB = a \sec \theta \\ \tan \theta &= \frac{PB}{OB} & \iff & \quad BP = a \sec \theta \tan \theta\end{aligned}$$

Por lo tanto, las expresiones paramétricas de la Campila de Eudoxo son:

$$\boxed{x = a \sec \theta \quad ; \quad y = a \sec \theta \tan \theta} \quad (5-125)$$

Además, realizando la sustitución de Euler-Weierstrass se obtiene su parametrización racional:

$$\begin{aligned}x = a \sec \theta &= \frac{a}{\cos \theta} = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \\ y = a \sec \theta \tan \theta &= \left( \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \right) \left( \frac{2t}{1-t^2} \right) = \frac{2at(1+t^2)}{(1-t^2)^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la parametrización racional de la Campila de Eudoxo es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \quad ; \quad y = \frac{2at(1+t^2)}{(1-t^2)^2}} \quad (5-126)$$

## 5.28. Cruciforme

Recibe su nombre de las palabras en latín *crux* y *forme* que traducen “con forma de cruz”. También se le conoce como “la curva del policía de tránsito”. Fue estudiada por primera vez por el matemático francés Olry Terquem en 1847. Como lugar geométrico, se define de la siguiente forma:

**Definición 28.** Sea  $C$  una circunferencia de radio  $a$  con centro en el origen y un punto  $A$  sobre ella. Trácese sobre  $A$  la recta tangente a la circunferencia, y sean  $B$  y  $C$  los puntos de corte con los ejes  $X$  y  $Y$  respectivamente. Si  $l_1$  es la recta perpendicular al eje  $X$  que pasa por  $B$ , y  $l_2$  es la recta perpendicular al eje  $Y$  que pasa por  $C$ , la cruciforme es el lugar geométrico de las intersecciones entre  $l_1$  y  $l_2$  a medida que  $A$  se mueve a lo largo de  $C$ .

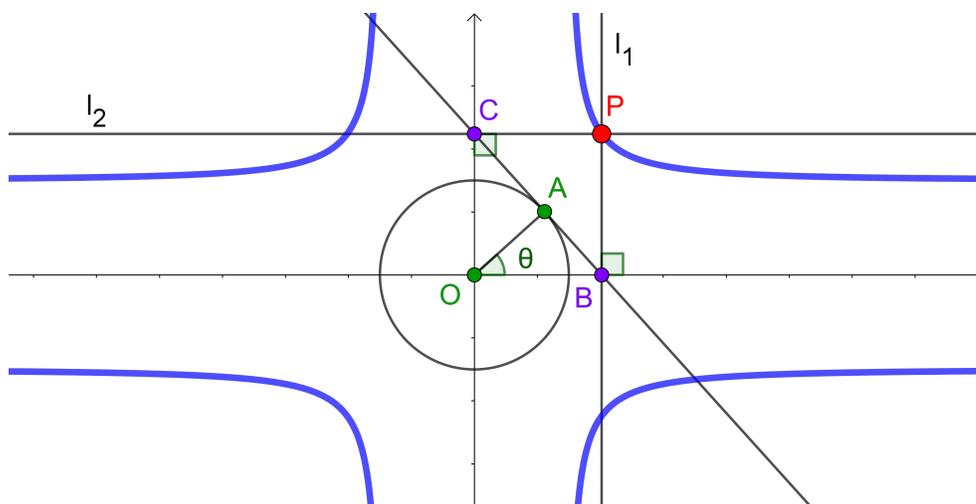


Figura 5-55

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la cruciforme, sea  $\theta$  el ángulo formado por  $A$  a medida que se desplaza sobre la circunferencia de radio  $a$  con centro en el origen, partiendo desde el eje  $X$ . Al trazar la recta tangente de la circunferencia por  $A$  se sabe que esta es perpendicular a su radio, luego  $\triangle OAB$  y  $\triangle OAC$  son rectángulos. Aún más, se deduce que  $\triangle OAB \sim \triangle CAO$  por teorema de semejanza AA, y por tanto  $\angle AOB = \angle ACO = \theta$ . Por

otro lado,  $\square OBPC$  es rectángulo y por lo tanto  $PB = CO$ . De esta forma, se tiene que:

$$x = OB = a \sec \theta$$

$$y = PB = CO = a \csc \theta$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas de la curva cruciforme son:

$$\boxed{x = a \sec \theta \quad ; \quad y = a \csc \theta} \quad (5-127)$$

Además, la curva permite una parametrización racional realizando la sustitución de Euler-Weierstrass:

$$x = a \sec \theta = \frac{a}{\cos \theta} = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \qquad y = a \csc \theta = \frac{a}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{a(1+t^2)}{2t}$$

Es decir, la parametrización racional de la cruciforme es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \quad ; \quad y = \frac{a(1+t^2)}{2t}} \quad (5-128)$$

## 5.29. Cardioide

En 1741, el matemático francés Giovanni Salvemini de Castiglione logra su primera publicación de un artículo en el que muestra propiedades geométricas de una curva “con forma de corazón”. Sin embargo, otros matemáticos como Philippe de la Hire y Etienne Pascal ya habrían abordado la curva un par de décadas antes. Esta curva aparece constantemente en distintos contextos matemáticos: es construible como ruleta, podaria y concoide; se manifiesta como fenómeno óptico en las llamadas curvas cáusticas; incluso aparece en análisis complejo como parte del conjunto de Mandelbrot, por mencionar algunas.

La definición de la cardioide como lugar geométrico suele ser a partir de una ruleta:

**Definición 29.** *La cardioide es una epicicloide de una cúspide. Dicho de otro modo, es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una epicicloide cuando el radio de la circunferencia generatriz es igual al radio de la circunferencia directriz.*

Es decir, la cardioide es un caso particular de la epicicloide cuando  $a = b$ . Conociendo las ecuaciones paramétricas de la epicicloide, basta con reemplazar estos valores para hallar las expresiones de la cardioide, siendo estas de la forma:

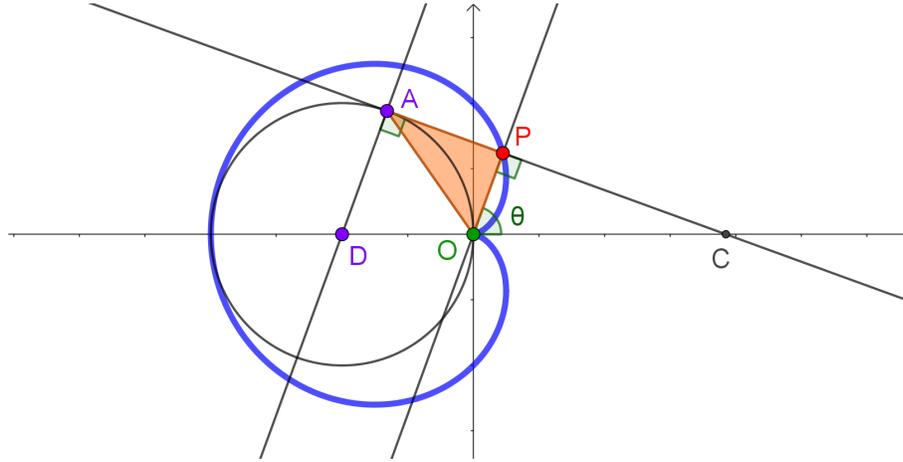
$$\boxed{x = 2a \cos \theta - a \cos(2\theta) \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen} \theta - a \operatorname{sen}(2\theta)} \quad (5-129)$$

Sin embargo, la cardioide también puede ser definida de la siguiente forma:

**Definición alternativa.** *Sea una circunferencia y puntos  $A$  y  $O$  sobre ella, de tal forma que  $A$  se encuentra en movimiento y  $O$  es fijo. Sea  $l_1$  tangente a la circunferencia por  $A$ , y  $l_2$  tal que  $l_2 \perp l_1$  y que pase por  $O$ . Luego la cardioide es el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que resultan de la intersección entre  $l_1$  y  $l_2$ .*

Para hallar las ecuaciones paramétricas según la definición, ubíquese el centro de circunferencia sobre el eje  $X$ , y el punto fijo en el origen. De esta forma, sea la circunferencia de radio  $a$  con centro en  $D(-a, 0)$ . Llámese  $\theta$  al ángulo formado por  $A$  respecto al radio  $\overline{DO}$ . Al ser  $\overleftrightarrow{AP}$  tangente a la circunferencia, se cumple que  $\overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AP}$ , y como  $\overleftrightarrow{OP} \perp \overleftrightarrow{AP}$  se deduce

que  $\overleftrightarrow{DA} \parallel \overleftrightarrow{OP}$ . Por lo tanto, siendo el eje  $X$  recta secante de rectas paralelas, se concluye por teorema de ángulos correspondientes que  $\angle ADO = \angle POC = \theta$ .



**Figura 5-56**

Ahora, considérese  $\triangle ADO$ . Siendo  $\overline{DA} \cong \overline{DO}$  por ser radios de la misma circunferencia, se tiene así un triángulo isósceles. Luego, la suma de sus ángulos internos es satisfice que  $\pi = \theta + 2\beta$ . Por otro lado, también es cierto que  $\pi = \beta + \angle AOP + \theta$ , por lo cual se deduce de ambas expresiones que  $\beta = \angle AOP$ . De lo anterior, también se deduce que:

$$\beta = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Tomando  $\triangle OPA$ , por ser rectángulo se obtiene:

$$OP = OA \cdot \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \quad (5-130)$$

Para calcular  $OA$  se aplica el teorema del coseno sobre  $\triangle ADO$ :

$$\begin{aligned} OA^2 &= 2a^2 - 2a^2 \cos \theta = 2a^2(1 - \cos \theta) \\ OA &= \pm a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \end{aligned} \quad (5-131)$$

Por otro lado, al simplificar la expresión (5-130) se obtiene:

$$\cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (5-132)$$

De tal forma que al reemplazar estos dos últimos valores en (5-130) se obtiene la expresión polar de la cardioide:

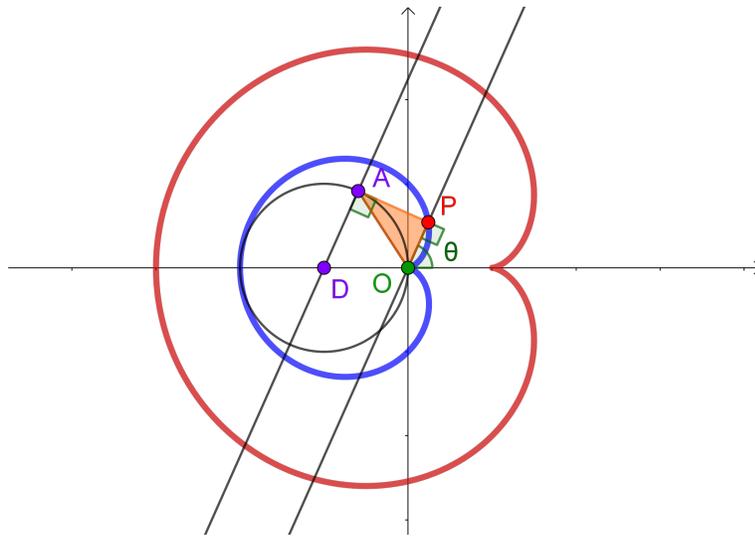
$$r = OP = \left( \pm a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \theta} \right) \left( \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \right)$$

$$r = a(1 - \cos \theta) \quad (5-133)$$

Ya con la ecuación polar, se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = a(\cos \theta - \cos^2 \theta) \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta - \frac{a}{2} \operatorname{sen}(2\theta)} \quad (5-134)$$

Al comparar esta expresión con (5-129), puede verse que difieren entre sí respecto a un factor de escala y una constante de desplazamiento horizontal. Sin embargo, ambas son expresiones paramétricas de la cardioide.



**Figura 5-57:** La cardioide en rojo corresponde a la expresión hallada a partir de la epicicloide.

Además, la curva posee parametrización racional al realizarse la sustitución de Euler - Weierstrass en (5-134) para  $t = \tan(\theta/2)$ , obteniendo:

$$x = a \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) - a \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2 = \frac{2at^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}$$

$$y = a \left( \frac{2t}{1 + t^2} \right) - a \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \left( \frac{2t}{1 + t^2} \right) = \frac{4at^3}{(1 + t^2)^2}$$

Es decir, una parametrización racional de la cardioide es de la forma:

$$x = \frac{2at^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad ; \quad y = \frac{4at^3}{(1+t^2)^2} \quad (5-135)$$

Por si fuera poco de las numerosas apariciones de la cardioide en campos matemáticos, también aparece en la naturaleza: la forma de las hojas de algunas plantas describen un cardioide.



**Figura 5-58:** Hojas de la planta *Galax urceolata*.

### 5.30. Nefroide

Los primeros registros de la curva datan de 1678 y se deben a los experimentos ópticos llevados a cabo por Huygens. Al publicar sus resultados de la exploración de curvas cáusticas en su *Tratado de la luz*, no presenta una explicación a estos fenómenos ópticos. Sin embargo, en 1838 el físico y matemático George Airy dio una demostración basado en la teoría de longitud de onda de la luz. Posteriormente, la curva recibiría su nombre característico gracias al matemático y astrónomo inglés Richard Proctor en 1878 de su publicación *Geometría de las cicloides*: del griego *nephros* que significa riñón, y el sufijo *-oide* (literalmente, “con forma de riñón”).

Su definición como lugar geométrico es a partir de una ruleta:

**Definición 30.** *La nefroide es una epicicloide de dos cúspides. Dicho de otro modo, es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo de una epicicloide cuando el radio de la circunferencia generatriz es la mitad del radio de la circunferencia directriz.*

En otros términos, la nefroide es una epicicloide cuando  $a = 2b$ , siendo  $a$  y  $b$  el radio de la circunferencia directriz y generatriz respectivamente. Reemplazando estos valores en la ecuación general de la epicicloide se obtienen las ecuaciones paramétricas de la forma:

$$\begin{aligned} x &= 3b \cos \theta - b \cos(3\theta) \\ y &= 3b \sin \theta - b \sin(3\theta) \end{aligned} \tag{5-136}$$

No obstante, una construcción alternativa de la nefroide es la siguiente (Sarmiento, 2011):

**Definición alternativa.** *Sean dos circunferencias concéntricas de radio  $a$  y  $3a$ . Sea  $P_1$  sobre la circunferencia interior, y  $P_2$  en la circunferencia exterior de tal forma que los arcos respecto al eje  $X$  sean iguales. Ahora, el lugar geométrico que describe el punto terminal de la suma de los vectores  $\vec{p}_1$  y  $\vec{p}_2$  a medida que se mueven a lo largo de sus circunferencias, se denomina nefroide.*

Se procede a mostrar que la curva generada corresponde a una nefroide:

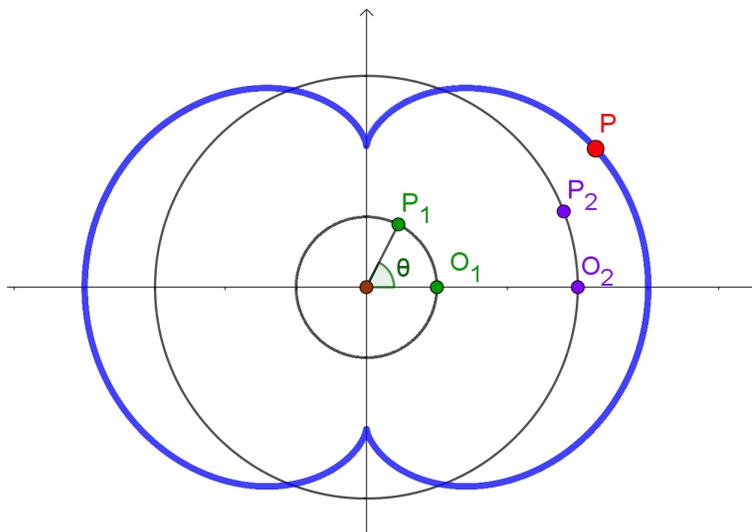


Figura 5-59

Ubíquense las circunferencias con centro en el origen de radio  $a$  y  $3a$ , y sean  $P_1$  y  $P_2$  de tal forma que  $\widehat{O_1P_1} = \widehat{O_2P_2}$ . Llámese  $\theta$  el parámetro asociado a la medida del ángulo que forma  $P_1$  sobre  $O_1$ , y  $\beta$  al de  $P_2$  sobre  $O_2$ . De esta forma, se tiene que:

$$a\theta = 3a\beta \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = \frac{\theta}{3}$$

Ahora, los vectores asociados a  $P_1$  y  $P_2$  son de la forma  $\vec{p}_1 = \langle a \cos \theta, a \operatorname{sen} \theta \rangle$  y  $\vec{p}_2 = \langle 3a \cos(\theta/3), 3a \operatorname{sen}(\theta/3) \rangle$ . Luego:

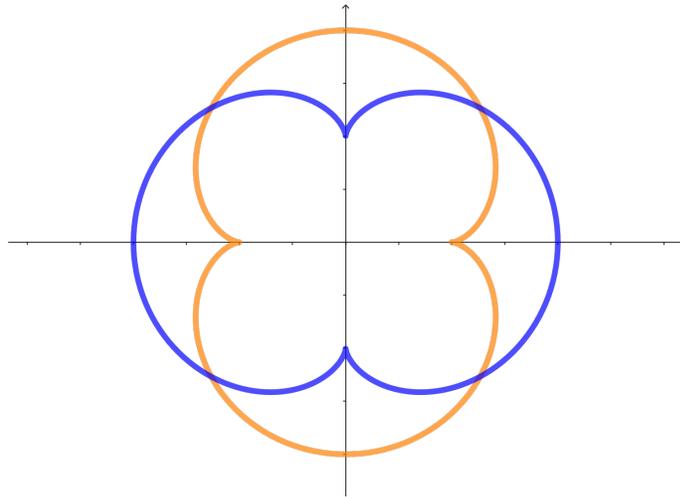
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \langle a \cos \theta + 3a \cos(\theta/3), a \operatorname{sen} \theta + 3a \operatorname{sen}(\theta/3) \rangle \quad (5-137)$$

Por lo tanto, al ser  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$  las coordenadas del punto terminal  $P(x, y)$  que traza el lugar geométrico, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\boxed{x = a \cos \theta + 3a \cos(\theta/3) \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta + 3a \operatorname{sen}(\theta/3)} \quad (5-138)$$

Al comparar esta expresión con (5-136), puede verse que la diferencia de signo en las expresiones representa una rotación de la nefroide. Además, esta primera expresión realiza un trazado “más rápido”, debido a los coeficientes enteros al interior de los senos y cosenos.

Por supuesto, esto también se refleja en el intervalo de definición de  $\theta$ , siendo necesario en (5-138) que  $0 \leq \theta \leq 6\pi$  para realizar un trazado completo de la nefroide. Estos dos últimos detalles pueden omitirse al realizar la sustitución  $\alpha = \theta/3$  sobre (5-138).



**Figura 5-60:** Trazado de nefroides en naranja y azul de acuerdo con su primera y segunda expresión paramétrica, respectivamente.

Desde un punto de vista anatómico, la nefroide no se parece tanto a un riñón (o al menos, al de la gran mayoría de mamíferos). No obstante, si se realiza una disección cuidadosa del riñón se obtiene la forma de la curva en cuestión.



**Figura 5-61:** Disección de un riñón de oveja.

## 5.31. Caracol de Pascal o limaçon

Recibe su nombre de la palabra francesa *limaçon*<sup>14</sup> viene del latín *lamacis* que significa “caracol”, y el sufijo de aumento *-on* (literalmente, “caracol grande”). Fue estudiada detalladamente por el matemático aficionado Etienne Pascal en el siglo XVII, aunque se tienen registros de que el artista renacentista Albrecht Durer también realizó estudios de cómo trazar la curva (Andrews, 2016)

Su definición usual suele ser a partir de una ruleta:

**Definición 31.** *El caracol de Pascal es el conjunto de puntos del plano generados por un punto fijo del radio de un círculo (o una extensión de este), en donde dicho círculo rueda a lo largo del exterior de una circunferencia fija del mismo radio, sin deslizarse.*

En otras palabras, el caracol de Pascal es una epitrocoide con ambas circunferencias del mismo radio. Al saber que  $a = b$  se reemplazan en las ecuaciones paramétricas generales de la epitrocoide, obteniendo:

$$\boxed{x = 2a \cos \theta - d \cos(2\theta) \quad ; \quad y = 2a \sen \theta - d \sen(2\theta)} \quad (5-139)$$

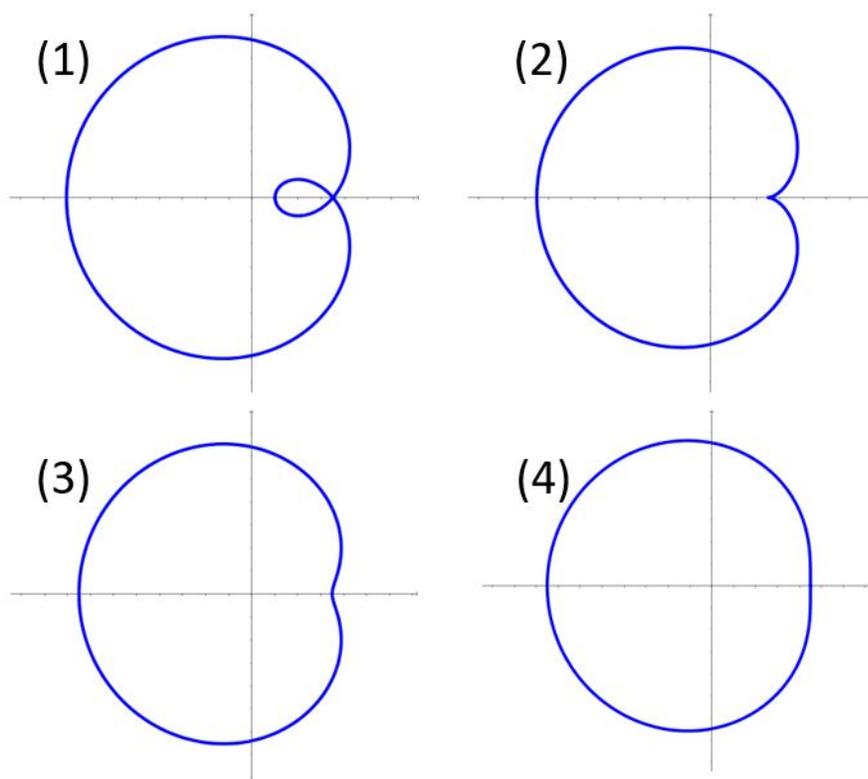
en donde  $d$  viene siendo la distancia comprendida entre el centro de la circunferencia generatriz y el punto que traza el lugar geométrico. Otra forma muy similar de definir la curva es a partir del movimiento de una circunferencia sobre otra tangencialmente:

**Definición alternativa.** *Sean dos circunferencias tangentes de radio  $a$  y  $b$ , en donde una es fija y la otra gira alrededor de esta. Si  $P$  es un punto sobre el radio (o una extensión de este) de la circunferencia rotatoria de tal forma que sea el mismo ángulo ángulo de rotación, el lugar geométrico de los puntos  $P$  describe un caracol de Pascal.*

Se procede a hallar las ecuaciones paramétricas del limaçon. Nótese que el proceso de deducción de la curva es análogo al de la epicicloide. Manteniendo las mismas condiciones iniciales se obtienen las ecuaciones:

<sup>14</sup> El carácter “ç” se denomina “c cedilla”, e indica que su pronunciación cambia a la de una s: en este caso, *limasón*.





**Figura 5-63:** Trazado de caracoles de Pascal. De acuerdo con su número, se pueden clasificar como: caracol con bucle, caracol con cúspide (cardioide), caracol suave y caracol convexo.

Una forma de clasificar los caracoles es a partir de la relación entre  $(a + b)$  y  $d$ , en donde:

- Si  $(a + b)/d < 2$ , el caracol tendrá un bucle en su interior.
- Si  $(a + b)/d = 2$ , el caracol tendrá una cúspide. Puede verificarse que corresponde a una cardioide.
- Si  $(a + b)/d > 2$ , el caracol será una *cardioide suave*.
- Si  $(a + b)/d \geq 4$ , el caracol será convexo.
- A medida que  $(a + b)/d \rightarrow 0$ , el caracol traza una circunferencia (el bucle se hace más grande).
- A medida que  $(a + b)/d \rightarrow \infty$ , el caracol traza una circunferencia.

## 5.32. Nefroide de Freeth

Recibe su nombre en honor al matemático inglés T.J. Freeth (poco se sabe de su vida, aparte de que estudió las curvas estrofoides y otras curvas planas). La curva tiene un interés particular entre los matemáticos debido a que es un punto de partida para dibujar polígonos regulares con múltiplos de 7 lados. Por otro lado, no debe confundirse con la curva nefroide convencional.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 32.** *Sea una circunferencia de centro  $O$  y puntos  $A$  y  $C$  sobre ella, de tal forma que  $A$  es fijo y  $C$  se mueve por la circunferencia. La nefroide de Freeth es el conjunto de puntos  $P$  y  $P'$  sobre  $\overleftrightarrow{OC}$  tales que  $\overline{CP} \cong \overline{CP'} \cong \overline{CA}$*

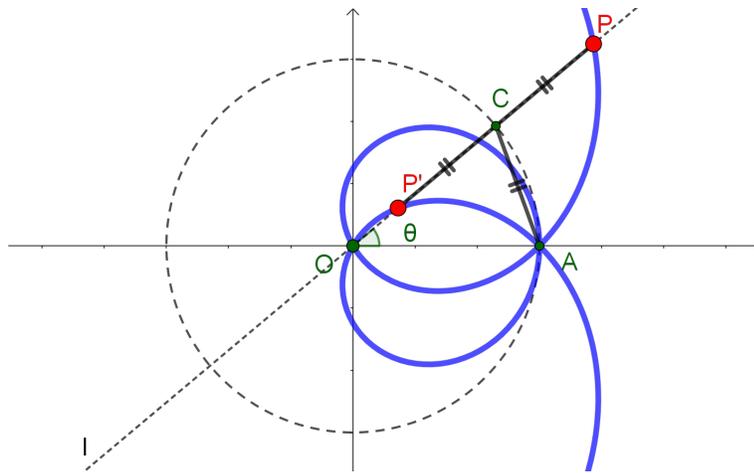


Figura 5-64

Se procede a hallar una expresión analítica de la curva. Ubíquese la circunferencia con centro en el origen y de radio  $a$ , de tal forma que  $A$  sea la intersección de la circunferencia con el eje  $X$ . Luego, sea  $C$  el punto que se mueve sobre la circunferencia, llámese  $\theta$  al parámetro que corresponde al ángulo de rotación de  $\overleftrightarrow{OC}$  respecto al eje  $X$  y ubíquense  $P$  y  $P'$  de tal forma que cumplan la definición como se muestra en la figura 5-64. Luego, al ser  $P(r_1, \theta)$  y  $P'(r_2, \theta)$  los puntos que trazan el lugar geométrico, se tiene que:

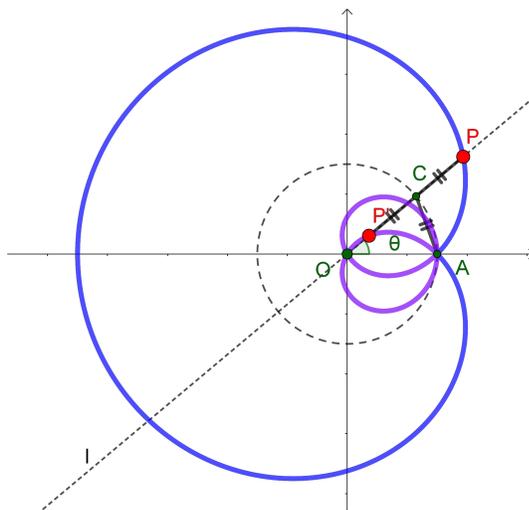
$$\begin{aligned} r_1 &= OC + CP = a + CP \\ r_2 &= OC - CP' = a - CP' \end{aligned} \quad (5-142)$$

Por otro lado, sea  $\triangle COA$ , se deduce que es isósceles. Aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \theta = a^2(2 - 2 \cos \theta) \\ AC &= a\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (5-143)$$

Como  $AC = CP' = CP$ , al reemplazar en (5-142) se obtiene:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + a\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \\ r_2 &= a - a\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (5-144)$$



**Figura 5-65:** Gráfico de la nefroide de Freeth. Se muestra el trazado en azul y morado de las expresiones  $P(r_1, \theta)$  y  $P'(r_2, \theta)$  respectivamente.

De lo anterior, la expresión polar para la nefroide de Freeth puede escribirse de la forma:

$$r = a \pm a\sqrt{2 - 2 \cos \theta} \quad (5-145)$$

Sin embargo, esta expresión necesita del trazado positivo y negativo que hacen referencia a los puntos  $P$  y  $P'$ : omitir alguna de ellas implica un trazado incompleto de la Nefroide de Freeth. Esta situación puede evitarse al reescribir la expresión polar como:

$$\begin{aligned}
 r &= a \pm a\sqrt{2 - 2 \cos \theta} = a(1 \pm \sqrt{2 - 2 \cos \theta}) \\
 r &= a \left( 1 \pm \sqrt{\frac{4(1 - \cos \theta)}{2}} \right) \\
 r &= a(1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)) \tag{5-146}
 \end{aligned}$$

De esta expresión puede verse que  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  para realizar un trazado completo de la nefroide de Freeth:  $[0, 2\pi]$  corresponde al trazado exterior azul, y  $[2\pi, 4\pi]$  al trazado de las espiras de color morado. De esta expresión polar se obtienen sus ecuaciones paramétricas, que son de la forma:

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos \theta + 2a \cos \theta \operatorname{sen}(\theta/2) \\
 y &= a \operatorname{sen} \theta + 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\theta/2)
 \end{aligned} \tag{5-147}$$

Por otro lado, si se desea una parametrización racional de la Nefroide de Freeth, se realiza la sustitución  $\alpha = \theta/2$  (de esta forma se obtienen coeficientes enteros sobre las expresiones trigonométricas) y posteriormente, la transformación de Euler - Weierstrass haciendo  $t = \tan(\alpha/2)$ . De esta forma se obtiene para  $x$ :

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos \theta + 2a \cos \theta \operatorname{sen}(\theta/2) = a \cos(2\alpha) + 2a \cos(2\alpha) \operatorname{sen} \alpha \\
 &= a(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^3 \alpha) \\
 &= a \left[ \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 - \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{a(t^6 + 4t^5 - 5t^4 - 24t^3 - 5t^2 + 4t + 1)}{(t^2 + 1)^3}
 \end{aligned}$$

Y realizando lo mismo para  $y$ :

$$\begin{aligned}
 y &= a \operatorname{sen} \theta + 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\theta/2) = a \operatorname{sen}(2\alpha) + 2a \operatorname{sen}(2\alpha) \operatorname{sen} \alpha \\
 &= 2a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + 4a \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \\
 &= 2a \left[ \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + 2 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \right] \\
 &= \frac{4at(1-t^2)(t^2 + 4t + 1)}{(t^2 + 1)^3}
 \end{aligned}$$

De esta forma, se concluye que una parametrización racional de la Nefroide de Freeth es:

$$\begin{array}{l} x = \frac{a(t^6 + 4t^5 - 5t^4 - 24t^3 - 5t^2 + 4t + 1)}{(t^2 + 1)^3} \\ y = \frac{4at(1 - t^2)(t^2 + 4t + 1)}{(t^2 + 1)^3} \end{array} \quad (5-148)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$  y cuyos puntos en el infinito se ubican en  $M(a, 0)$ . Cuando  $t \rightarrow \infty$  se traza el exterior del nefroide (trazo en azul de **5-65**), y cuando  $t \rightarrow -\infty$  se trazan las espiras en su interior (trazo en violeta).

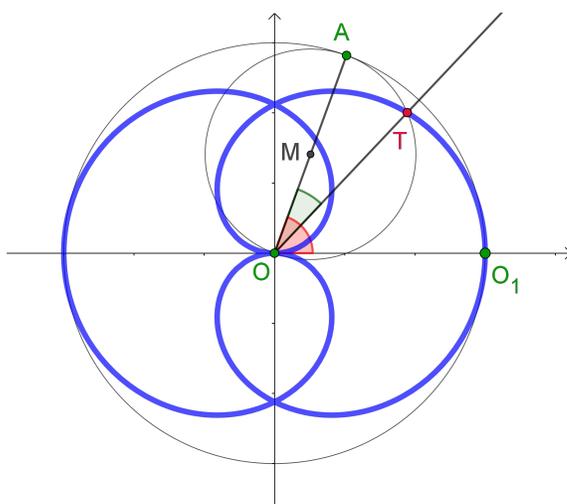
### 5.33. Folio de Durero

El artista renacentista Albrecht Durer realizó varios estudios en el dibujo de curvas que posteriormente aplicaba en sus pinturas. La influencia del estudio del hombre y del universo por parte de los científicos de la época, hizo que Durer considerara los fundamentos de la matemática y la física como un punto en común entre las distintas formas de arte. Este folio tiene relevancia debido a que sirve como curva auxiliar en la trisección de un ángulo (se desconoce si Durer sabía de la propiedad de trisección, o si la usó simplemente como una referencia geométrica para sus obras de arte).

La curva es simplemente un caso particular de la epitrocoide:

**Definición 33.** *El folio de Durero es el conjunto de puntos del plano generados sobre una extensión del triple del radio de un círculo, en donde dicho círculo rueda a lo largo una de una circunferencia fija del doble de su radio, sin deslizarse.*

Dicho en otros términos, es una epitrocoide cuya circunferencia fija de radio  $a$  y su circunferencia generatriz de radio  $b$  satisfacen  $a = 2b$ , y la distancia del punto  $P$  al centro de la circunferencia generatriz sea  $d = 3b$ .



**Figura 5-66:** Folio de Durero en azul en donde se muestra su propiedad de trisectriz: para cualquier ángulo dado (resaltado en rojo) es posible hallar su trisección (resaltado en verde).

Para hallar sus ecuaciones paramétricas basta con sustituir estos valores en la ecuación general de la epitrocoide, obteniendo:

$$x = 3b(\cos \theta - \cos(3\theta)) \quad ; \quad y = 3b(\sin \theta - \sin(3\theta)) \quad (5-149)$$

Nótese la similitud de las ecuaciones con las de la nefroide. El signo negativo en ambas ecuaciones traza el folio en posición vertical. Si se cambian a signo positivo trazan un folio horizontal como el que se muestra en la imagen.

### 5.34. Séxtica de Cayley

Fue propuesta por primera vez por Maclaurin como una curva auxiliar para trisecar un ángulo, y un siglo después Arthur Cayley realizó un análisis detallado de la misma.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 34.** *Sea una cardioide,  $O$  y  $A$  sobre ella en donde  $O$  corresponde a su cúspide y  $A$  un punto que se mueve libremente sobre su arco. Luego, trácese  $l_1$  tangente a la cardioide por  $A$  y  $l_2 \perp l_1$  que pase por  $O$ . Luego, la séxtica de Cayley es el lugar geométrico de los puntos  $P$  que resultan de la intersección de  $l_1$  y  $l_2$ .*

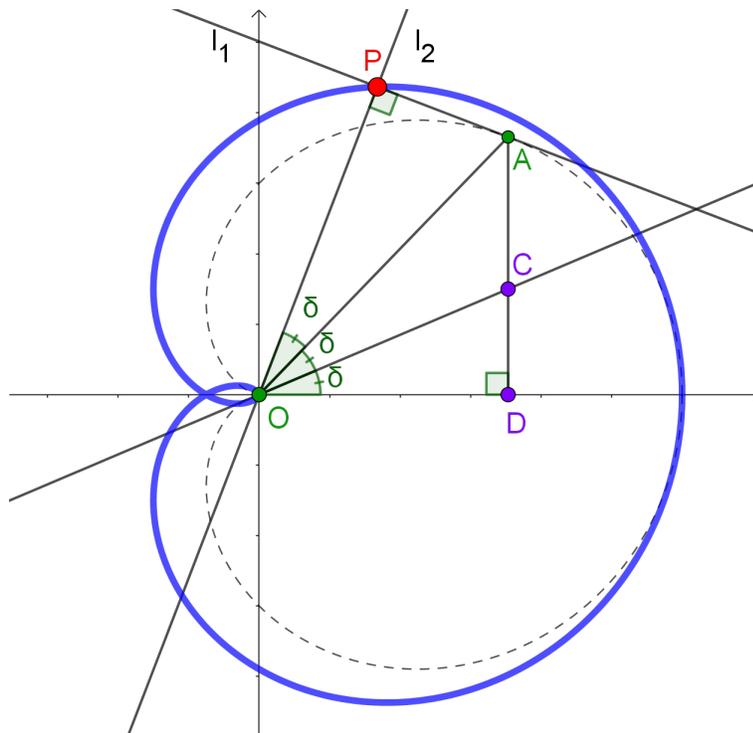


Figura 5-67

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva, se procede a hallar su ecuación polar. Sea entonces la cardioide con cúspide en el origen y  $\alpha$  el ángulo parámetro que corresponde al punto  $A(r, \alpha)$  que se mueve sobre la cardioide. Sea también, la recta tangente sobre  $A$  y la recta perpendicular a esta que pase por el origen, cuya intersección  $P$  traza el lugar geométrico conforme  $A$  se mueve sobre la cardioide.

La propiedad característica de la séxtica de Cayley es como trisectriz: la medida del ángulo  $\angle POA$  es la mitad de  $\angle AOD$ . Para verificar que esto es cierto es necesario usar las herramientas del cálculo: debe verificarse que la recta normal de un punto  $A$  sobre la cardioide que forme un ángulo  $\theta$ , tiene por pendiente  $3\theta/2$ . Así, hallando la pendiente de la recta tangente de la cardioide sobre  $A$  se obtiene:

$$m_T = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a \cos \theta + a(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{-a \operatorname{sen} \theta - 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{\cos \theta + \cos 2\theta}{-(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta)}$$

De este modo, la pendiente de la recta normal es de la forma:

$$m_N m_T = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_N = \frac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta}$$

Tómese  $\theta = 2\delta$ , se tiene que:

$$m_N = \frac{\operatorname{sen} 2\delta + \operatorname{sen} 4\delta}{\cos 2\delta + \cos 4\delta} = \tan 3\delta \quad (5-150)$$

De este modo, la pendiente de la recta normal sobre la cardioide es  $3\delta = 3\theta/2$ , verificando su propiedad como trisectriz.

Retomando la parametrización, sabiendo la ecuación polar de la cardioide se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} r &= a(1 + \cos \theta) = 2a \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) = 2a \left( \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \right)^2 \\ r &= 2a \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (5-151)$$

Siendo  $\delta$  la medida del ángulo formado por  $\angle POA$ , se tiene  $P(r, \theta)$  en donde se probó que  $\theta = 3\delta$ . Al ser  $\triangle OPA$  rectángulo, por relaciones trigonométricas se obtiene:

$$r = OP = OA \cdot \cos(\theta/3) \quad (5-152)$$

Conjuntamente, a partir de (5-151) se deduce que:

$$OA = 2a \cos^2 \left( \frac{2\theta/3}{2} \right) = 2a \cos^2(\theta/3) \quad (5-153)$$

Luego, reemplazando (5-153) en (5-152) se obtiene la ecuación polar de la Séxtica de Cayley:

$$r = 2a \cos^3 \left( \frac{\theta}{3} \right) \quad (5-154)$$

De esta forma, las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$\boxed{x = 2a \cos \theta \cos^3 \left( \frac{\theta}{3} \right) \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen} \theta \cos^3 \left( \frac{\theta}{3} \right)} \quad (5-155)$$

Por otro lado, si se desea una parametrización racional de la séxtica de Cayley, se realiza la sustitución  $\alpha = \theta/3$  y posteriormente, se reescribe la expresión en términos de  $t = \tan \alpha$ :

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos \theta \cos^3 \left( \frac{\theta}{3} \right) & y &= 2a \operatorname{sen} \theta \cos^3 \left( \frac{\theta}{3} \right) \\ &= 2a \cos(3\alpha) \cos^3 \alpha & &= 2a \operatorname{sen}(3\alpha) \cos^3 \alpha \\ &= 2a(4 \cos^6 \alpha - 3 \cos^4 \alpha) & &= 2a \cos^3 \alpha (3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha) \\ &= 2a \left( \frac{4}{(\tan^2 \alpha + 1)^3} - \frac{3}{(\tan^2 \alpha + 1)^2} \right) & &= 2a \left( \frac{3 \tan \alpha}{(\tan^2 \alpha + 1)^2} - \frac{4t^3}{(\tan^2 \alpha + 1)^3} \right) \\ x &= \frac{2a(1 - 3t^2)}{(t^2 + 1)^3} & y &= \frac{2at(3 - t^2)}{(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una parametrización racional de la curva de Cayley es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{2a(1 - 3t^2)}{(t^2 + 1)^3} \quad ; \quad y = \frac{2at(3 - t^2)}{(t^2 + 1)^3}} \quad (5-156)$$

## 5.35. Trisectriz de Deslanges

Descubierta por el matemático e ingeniero italiano Paolo Deslanges, publicando sus resultados en 1783. Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 35.** *Sea una circunferencia y dos rectas que pasen por su centro de tal forma que una sea variable y la otra fija. Si se traza la recta bisectriz del ángulo formado entre estas dos rectas cortando a la circunferencia en  $B$  y  $B'$ , y se trazan rectas paralelas a la recta fija por  $B$  y  $B'$ , la Trisectrix de Deslanges es el lugar geométrico formado por las intersecciones  $P$  y  $P'$  entre la recta variable y las rectas paralelas.*

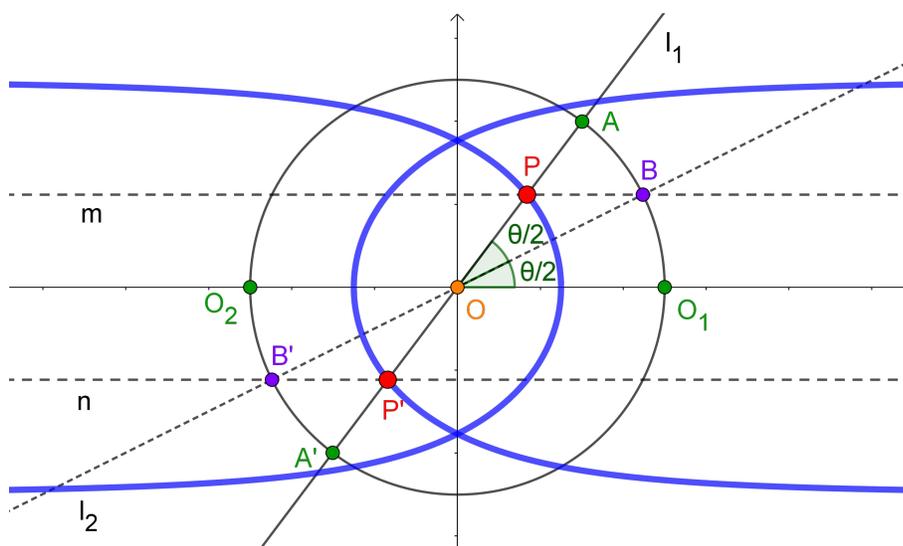


Figura 5-68

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la Trisectrix de Deslanges, se procede inicialmente hallando su ecuación polar. De esta forma, sea la circunferencia de radio  $a$  con centro en el origen y sea la recta fija el eje  $X$ . Llámese  $l_1$  la recta variable en donde  $\theta$  es el parámetro asociado al ángulo formado entre  $l_1$  y el eje  $X$ . Al trazar la bisectriz sobre  $\theta$ , ubíquense  $B$  y  $B'$  y las rectas paralelas  $m$  y  $n$  como se muestra en la imagen. De esta forma, para  $P(r, \theta)$  se tiene que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a \operatorname{sen}(\theta/2)}{r_1} \iff r_1 = \frac{a \operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen} \theta} \quad (5-157)$$

De forma análoga, la expresión para  $P'$  es:

$$r_2 = \frac{-a \operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen} \theta} \quad (5-158)$$

Así,  $r_1(\theta)$  y  $r_2(\theta)$  trazan las ramas izquierda y derecha de la Trisectriz de Deslanges sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$ , respectivamente. No obstante, tanto  $r_1$  como  $r_2$  realizan un recorrido completo de la curva sobre  $[0, 4\pi]$ , siendo ambas expresiones del mismo lugar geométrico. Esto puede evidenciarse a través de la simetría polar que comparten ambas expresiones ( $P'$  es el simétrico polar de  $P$  y viceversa), o también, verificando que ambas hacen referencia a una única expresión cartesiana. Por lo tanto, es posible omitir el signo menos en  $r_2(\theta)$  y afirmar que la ecuación polar es de la forma:

$$r = \frac{a \operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen} \theta} \quad (5-159)$$

Ya con esta expresión, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la Trisectriz de Deslanges:

$$\boxed{x = a \operatorname{sen}(\theta/2) \cot \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen}(\theta/2)} \quad (5-160)$$

Por otro lado, una parametrización racional es posible a través de la sustitución de Euler-Weierstrass. Sin embargo, es necesario realizar un cambio de variable  $\alpha = \theta/2$ :

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{sen}(\theta/2) \cot \theta = a \operatorname{sen} \alpha \cot(2\alpha) = \frac{a \operatorname{sen} \alpha \cos(2\alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{a}{2} \left( \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ &= \frac{a}{2} (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \tan \theta) = \frac{a}{2} \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{1-t^2} \right) = \frac{a(1-6t^2+t^4)}{2(1-t^4)} \end{aligned}$$

Del mismo modo se realiza para  $y$ :

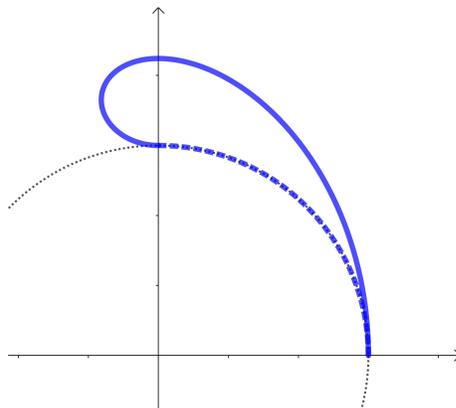
$$y = a \operatorname{sen}(\theta/2) = a \operatorname{sen} \alpha = \frac{2at}{1+t^2}$$

Por lo tanto, una parametrización racional de la trisectriz de Deslanges es:

$$\boxed{x = \frac{a(1-6t^2+t^4)}{2(1-t^4)} \quad ; \quad y = \frac{2at}{1+t^2}} \quad (5-161)$$

## 5.36. Cornoide

Descubierta por el matemático e ingeniero salvadoreño Juan Alberto Sánchez en 1895 al realizar investigaciones sobre curvas planas clásicas. Le dio su nombre característico debido a que al trazar la curva aparece la forma de un cuerno.



**Figura 5-69:** Trazado de la cornoide sobre  $[0, \pi/2]$ . La línea continua corresponde a la ecuación de la cornoide, y la línea punteada un arco de circunferencia. Ambas curvas dibujan la forma de un cuerno.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 36.** *Sea una circunferencia de centro  $O$  y una recta horizontal que se mueve uniformemente sobre ella con puntos de corte en  $A$  y  $B$ , la cornoide es el lugar geométrico de los puntos  $P$  de la proyección de  $A$  sobre la recta paralela a  $\overleftrightarrow{OA}$  por  $B$ .*

Se procede a hallar las ecuaciones paramétricas de la cornoide. Constrúyase la circunferencia con centro en el origen de radio  $a$ , y la recta horizontal que corta la circunferencia en  $A$  y  $B$ , siendo  $\theta$  el parámetro correspondiente al ángulo formado entre  $\overleftrightarrow{OA}$  y el eje  $X$ . Trácese también  $l_1 \parallel \overleftrightarrow{OA}$  y la proyección  $P$  de  $A$  en  $l_1$ , en donde  $D$  corresponde al pie de la perpendicular de  $P$  sobre el eje  $X$ , y  $C$  el punto de corte con  $\overleftrightarrow{AB}$ . Así mismo, sea  $E$  el pie de la perpendicular de  $A$  sobre el eje  $X$ . Siendo  $\overleftrightarrow{PD}$  una recta secante a las paralelas  $\overleftrightarrow{AB}$  y eje  $X$ , este forma ángulos congruentes, luego  $\angle PCA \cong \angle PDE$  por ser ángulo recto y ser par correspondiente. Luego, a partir de la imagen se tiene:

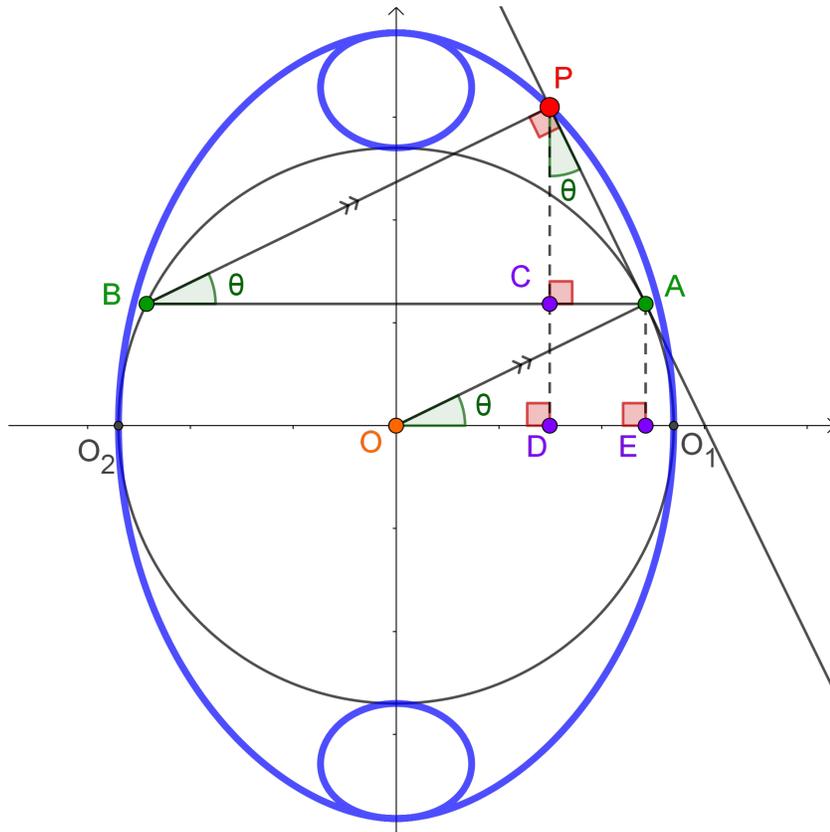


Figura 5-70

$$\begin{aligned}
 x &= OD = OE - DE = OE - CA \\
 y &= PD = PC + CD = PC + AE
 \end{aligned}
 \tag{5-162}$$

Sean los triángulos  $\triangle AOE$ ,  $\triangle ABP$  y  $\triangle APC$ . Siendo  $\angle PCA$  y  $\angle AEO$  rectos,  $\triangle AOE$  y  $\triangle APC$  son rectángulos. Además, como  $\angle APB$  es recto por definición de proyección,  $\triangle ABP$  también es rectángulo. Por otro lado, también se tiene que  $\angle ABP \cong \angle BAO \cong \angle AOE$  por ser alternos internos. Conjuntamente, por teorema de semejanza AA se deduce también que  $\triangle ABP \sim \triangle APC$  ya que  $\angle PAB$  es común, y de esta forma  $\angle PBA \cong \angle CPA$ . Luego, por relaciones trigonométricas se obtiene:

$$\begin{aligned}
x &= OE - CA = a \cos \theta - AP \cdot \text{sen } \theta = a \cos \theta - (AB \cdot \text{sen } \theta) \text{sen } \theta \\
&= a \cos \theta - 2a \cos \theta \text{sen}^2 \theta \\
&= a \cos \theta (1 - 2 \text{sen}^2 \theta)
\end{aligned} \tag{5-163}$$

$$\begin{aligned}
y &= PC + AE = AP \cdot \cos \theta + a \text{sen } \theta = (AB \cdot \text{sen } \theta) \cos \theta + a \text{sen } \theta \\
&= 2a \cos^2 \theta \text{sen } \theta + a \text{sen } \theta \\
&= a \text{sen } \theta (1 + 2 \cos^2 \theta)
\end{aligned} \tag{5-164}$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la cornoide son:

$$\boxed{x = a \cos \theta (1 - 2 \text{sen}^2 \theta) \quad ; \quad y = a \text{sen } \theta (1 + 2 \cos^2 \theta)} \tag{5-165}$$

Además, a partir de estas ecuaciones es posible obtener una parametrización racional usando la sustitución de Euler-Weierstrass en donde  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\begin{aligned}
x &= \left( \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \right) \left( 1 - \frac{2(2t)^2}{(1+t^2)^2} \right) = \frac{a(1-t^2)(1+t^2)^2 - 8at^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3} \\
&= \frac{a(1-t^2)(t^4 - 6t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^3} \\
y &= \left( \frac{2at}{1+t^2} \right) \left( 1 + \frac{2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} \right) = \frac{2at(1+t^2)^2 + 4at(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3} \\
&= \frac{2at(3t^4 - 2t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^3}
\end{aligned}$$

Es decir, una parametrización racional de la cornoide es:

$$\boxed{x = \frac{a(1-t^2)(t^4 - 6t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^3} \quad ; \quad y = \frac{2at(3t^4 - 2t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^3}} \tag{5-166}$$

siendo  $t$  cualquier valor real.

## 5.37. Cocleoide

La curva fue estudiada alrededor del año 1700, por los matemáticos ingleses John Wallis y John Perks, aunque recibió su nombre característico (Smith, 1923b) hasta 1884 por su forma: del griego *kokhlias* que significa “caracol”, y el sufijo *-oide* para “con forma de” (literalmente, “con forma de caracol”).

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 37.** *La cocleoide es el lugar geométrico formado por un extremo de los arcos de circunferencia que se mantienen de longitud constante sobre una circunferencia de radio variable, mientras su otro extremo es fijo y tangente a una recta fija.*

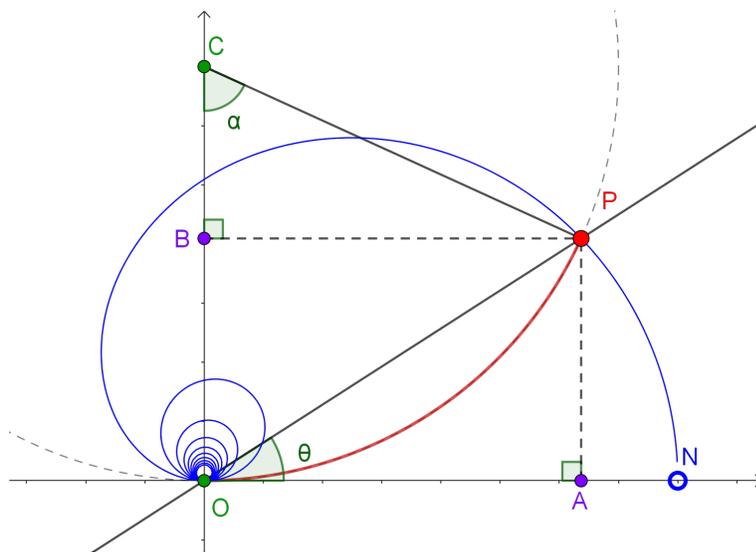


Figura 5-71

La recta tangente funciona como un eje de referencia para el trazado de la cocleoide. Así, para hallar las ecuaciones paramétricas de la cocleoide, se ubica la recta tangente sobre el eje  $X$  (o eje polar) y se toma al origen como el punto fijo del arco de circunferencia. Ahora, trácese la circunferencia de radio  $r_c$  y centro  $C$  sobre el eje  $Y$ , y tómesese un punto arbitrario  $P$  sobre la misma de tal forma la longitud de  $\widehat{OP}$  siempre es fija a medida que  $r_c$  toma valores distintos, es decir, que  $C$  se mueve a lo largo del eje  $Y$ . También, sean los pies de

las perpendiculares  $A$  y  $B$  que pasan por  $P$  en el eje  $X$  y  $Y$ , respectivamente; y llámese  $\theta$  al ángulo formado por el eje  $X$  y  $\overline{OP}$ . De esta forma, se sabe del arco de circunferencia que:

$$(r_c)\alpha = a \quad (5-167)$$

en donde se evidencia que las variables  $r_c$  y  $\alpha$  son inversamente proporcionales. Por otro lado, sea  $\triangle OCP$  se sabe que es isósceles ya que  $\overline{CO}$  y  $\overline{CP}$  son radios de la circunferencia y por tanto, congruentes. Consecuentemente, al cumplirse que  $\angle COP \cong \angle CPO$ , se deduce que:

$$\begin{aligned} \pi &= \alpha + 2(\pi/2 - \theta) = \alpha + \pi - 2\theta \\ \iff \alpha &= 2\theta \end{aligned} \quad (5-168)$$

Y reemplazando esta expresión en (5-167), se obtiene:

$$r_c(2\theta) = a \quad \iff \quad r_c = \frac{a}{2\theta} \quad (5-169)$$

Sean ahora  $\triangle CPB$  y  $\triangle POA$ , al ser rectángulos, se obtiene a partir de relaciones trigonométricas que:

$$\begin{aligned} x = OA = BP &= r_c \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{a \operatorname{sen}(2\theta)}{2\theta} \\ y = AP = OB = OC - BC &= r_c - r_c \cos(2\theta) = \frac{a}{2\theta}(1 - \cos(2\theta)) \end{aligned}$$

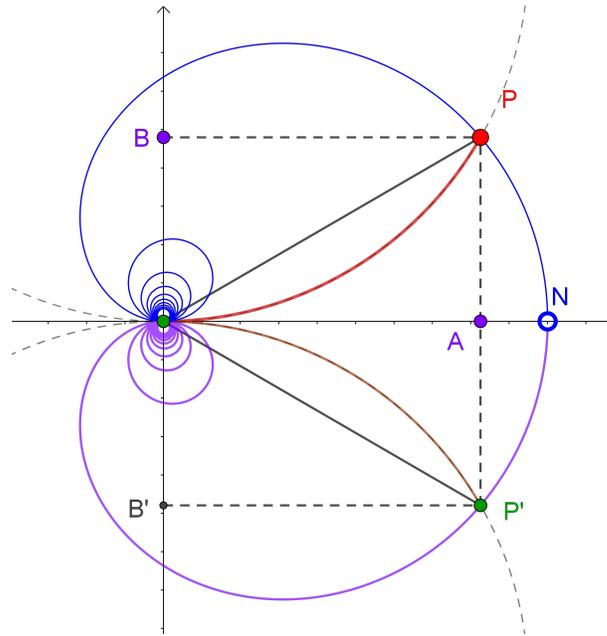
Es decir, las ecuaciones paramétricas de la cocleoide son:

$$\boxed{x = \frac{a \operatorname{sen}(2\theta)}{2\theta} \quad ; \quad y = \frac{a(1 - \cos 2\theta)}{2\theta}} \quad (5-170)$$

Asimismo, puede hallarse la ecuación polar de la cocleoide determinando una expresión para  $\overline{OP}$ . Con los resultados obtenidos del  $\triangle OCP$  basta con usar el teorema del seno o del coseno que conllevan a la misma expresión:

$$r = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{\theta} \quad (5-171)$$

Otro detalle importante a tener en cuenta es el intervalo de definición de  $\theta$ . Según la construcción geométrica, la cocleoide se sitúa en uno de los semiplanos definidos por la recta inicial fija (y el punto de origen), por lo que  $\theta \in (0, \infty)$ . Simultáneamente, se puede trazar una nueva cocleoide en el otro semiplano cuando  $\theta \in (-\infty, 0)$  de donde se puede verificar su simetría respecto a la recta fija (en este caso, el eje polar).



**Figura 5-72:** Cocleoide sobre el intervalo  $\theta \in (-\infty, \infty)$

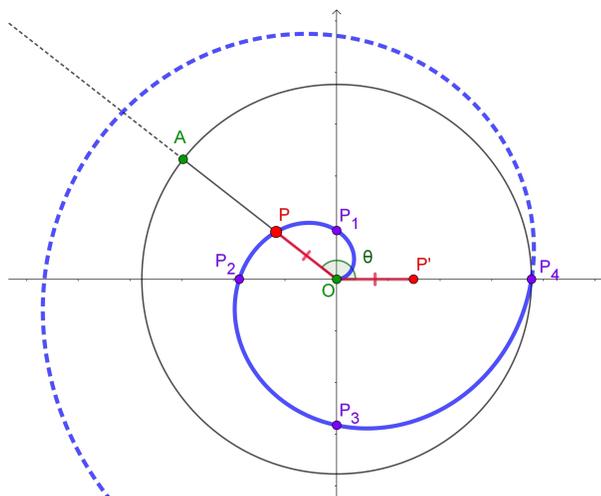
Llama la atención de (5-171) la expresión  $f(\theta) = \operatorname{sen} \theta / \theta$ . Esta curva permite otra forma de abordar de forma intuitiva lo que sucede cuando  $\theta \rightarrow 0$  y  $\theta \rightarrow \infty$ . En el primero, se visualiza que  $P$  tiende a acercarse a un punto  $N$  en donde  $ON = a$ , por lo que  $f(\theta)$  debería ser 1 para valores cercanos a cero de  $\theta$ . En el segundo, puede evidenciarse que  $P$  se mueve de forma espírica realizando revoluciones cada vez más cercanas al origen, es decir que para valores suficientemente grandes de  $\theta$ ,  $f(\theta)$  tiende a 0. Por supuesto, estas ideas tomarían fuerza con la formalización del concepto de límite.

## 5.38. Espiral de Arquímedes

También llamada “espiral uniforme”. Fue descubierta por Conon de Samos alrededor del siglo III a.C. inspirado en los métodos de fabricación de cestas en Egipto (Smith, 1923a, p. 107). No obstante, fue Arquímedes quién la estudió en detalle y la bautizó con el nombre “hélice”<sup>15</sup>, del griego *helix* que significa “con forma de espiral”. La curva puede ser utilizada como trisectriz, y es de interés particular en el estudio del movimiento circular en la física y la ingeniería.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 38.** *La espiral de Arquímedes es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve uniformemente sobre un segmento, y este último a su vez gira de manera uniforme alrededor de uno de sus extremos.*



**Figura 5-73**

De esta definición, puede apreciarse que la espiral es la combinación del movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento circular uniforme. En la imagen se muestra que  $\overline{OA}$  gira alrededor de  $O$  siendo  $\theta$  el ángulo de giro. Siendo la posición inicial sobre el eje  $X$ ,  $P_1$  está ubicado

<sup>15</sup> En la actualidad, el término hélice hace referencia a una espiral tridimensional: por ejemplo, hélice cilíndrica, hélice esférica o hélice cónica. Intuitivamente, puede pensarse como la forma que resulta de enrollar una cuerda sobre estos cuerpos geométricos.

de tal forma que  $\overline{OP_1}$  corresponde a un cuarto de la medida de  $\overline{OA}$  (llámese  $k$ ), y al mismo tiempo, marca un cuarto de vuelta respecto a la posición inicial. Análogamente,  $P_2$  marca la mitad del segmento y media vuelta, y así sucesivamente hasta  $P_4$  que corresponde al otro extremo del segmento y un giro completo. Ahora, a partir del movimiento rectilíneo uniforme se tiene que  $p(\theta) = OP' = k\theta/2\pi$ , y siendo  $r = OP = OP'$ , la ecuación polar es de la forma:

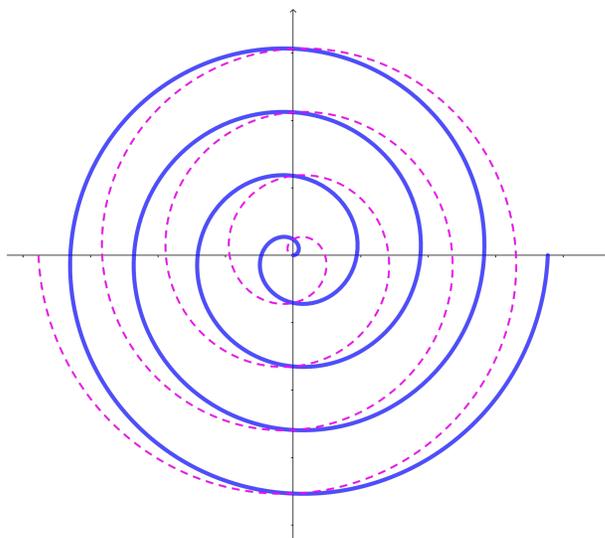
$$r = \frac{k\theta}{2\pi}$$

en donde  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Usualmente se toma  $a = k/2\pi$  para obtener la expresión polar más conocida:

$$r = a\theta \tag{5-172}$$

Y así, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la espiral de Arquímedes:

$$x = a\theta \cos \theta \quad ; \quad y = a\theta \sin \theta \tag{5-173}$$



**Figura 5-74:** Recibe el nombre de espiral uniforme debido a que la distancia entre arcos después de la primera revolución se mantiene constante. Las espirales en azul y rosa corresponden cuando  $\theta$  toma valores positivos y negativos, respectivamente.

## 5.39. Espiral hiperbólica

Descubierta por el matemático francés Pierre Varignon en 1704, y un par de años más tarde por Johann Bernoulli y Roger Cotes al abordar el estudio de las espirales. También es llamada “espiral recíproca”.

Su definición como lugar geométrico es:

**Definición 39.** *Sea una circunferencia centrada en el origen y de radio variable con punto de corte  $O_1$  sobre el eje  $X$ . La espiral hiperbólica es el conjunto de puntos  $P(r, \theta)$  tales que  $\widehat{O_1P}$  siempre es una constante  $a$ .*

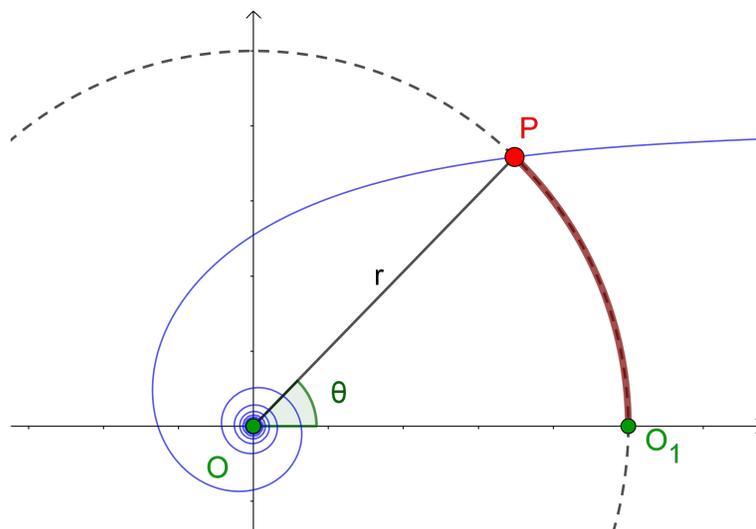


Figura 5-75

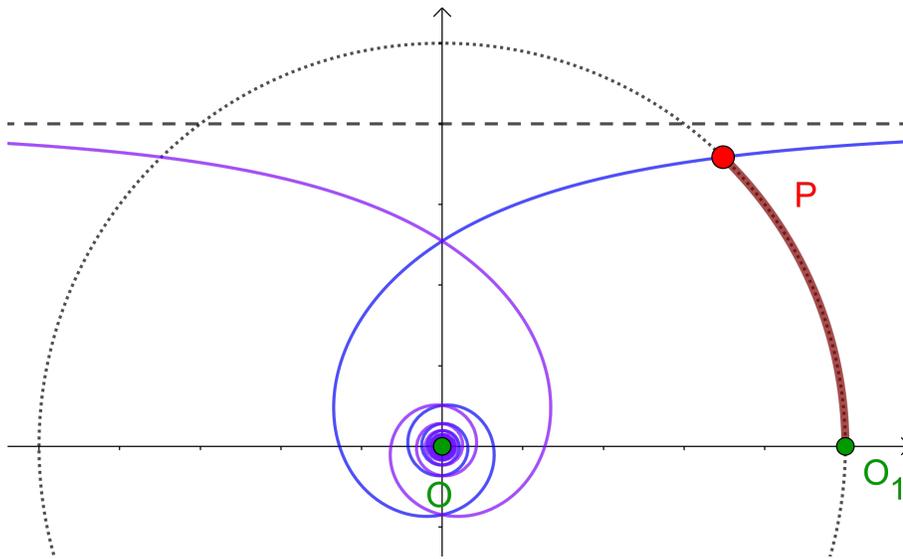
La expresión analítica de la espiral hiperbólica se deduce directamente a partir de ecuación del arco de circunferencia. Sea  $\theta$  el ángulo formado por  $\overline{OP}$  y el eje  $X$ , se tiene que  $\widehat{O_1P} = r\theta = a$ , y por lo tanto:

$$r = \frac{a}{\theta} \quad (5-174)$$

A partir de esta ecuación evidenciarse la razón por la cual recibe el nombre de espiral recíproca. Luego, las ecuaciones paramétricas de la espiral hiperbólica son:

$$\boxed{x = \frac{a \cos \theta}{\theta} \quad ; \quad y = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{\theta}} \quad (5-175)$$

A partir de la construcción geométrica se tiene que  $\theta \in (0, \infty)$ . Sin embargo, es posible extender este intervalo para valores negativos de  $\theta$ .



**Figura 5-76:** Espiral hiperbólica. El trazo en azul y violeta corresponden a valores positivos y negativos de  $\theta$ , respectivamente. Se evidencian dos valores especiales: el origen ( $\theta \rightarrow \pm\infty$ ); y la asíntota  $y = a$  ( $\theta \rightarrow 0$ ).

## 5.40. Lituus (o espiral de lituus)

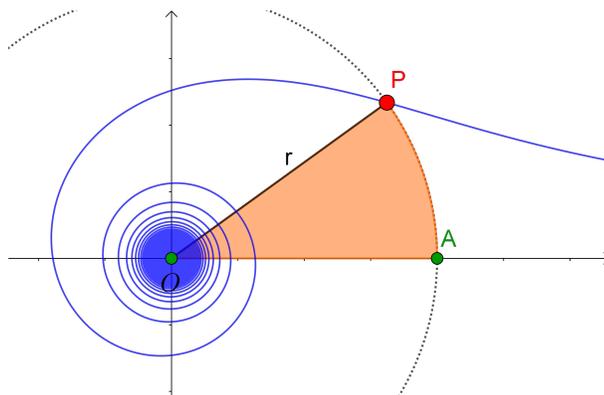
Fue descubierta por el matemático y físico inglés Roger Cotes en 1710. El origen de su nombre proviene de su homónimo en latín *lituus* que corresponde a un bastón curvo que usaban sacerdotes romanos al practicar rituales de adivinación. Su artículo *Harmonia Mensurarum* publicado en 1722, mostró el estudio de espirales y otras curvas planas a través del cálculo diferencial.



**Figura 5-77:** Lituus en el reverso de una moneda romana, y siendo sujeta por un sacerdote.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 40.** Sea una circunferencia centrada en el origen y de radio variable con punto de corte  $A$  sobre el eje  $X$ . La espiral de Lituus es el lugar geométrico de los puntos  $P(r, \theta)$  que se mueven de tal forma que el área del sector circular comprendido por  $\angle POA$  siempre es constante.



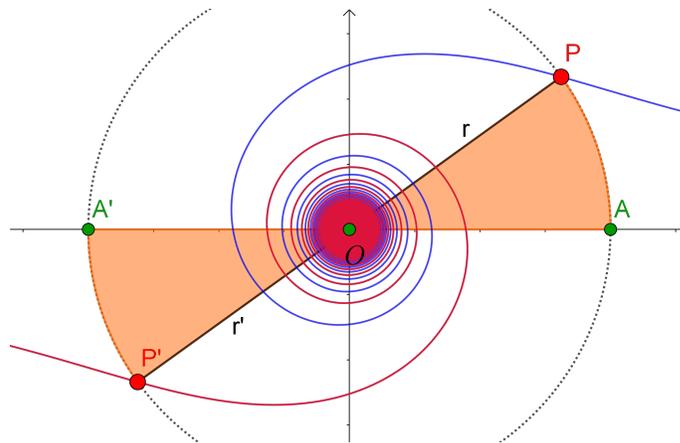
**Figura 5-78**

Para obtener una expresión analítica de la espiral de Lituus, llámese  $\theta = \angle POA$  al ángulo que corresponde al sector circular cuya área corresponde a un número  $k \geq 0$ . Luego, se tiene a partir de la ecuación de sector circular que:

$$\frac{r^2\theta}{2} = k \iff r^2 = \frac{2k}{\theta}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{2k}{\theta}} \quad (5-176)$$

La expresión anterior corresponde a la ecuación polar de la lituus. Se evidencia la restricción  $\theta \in (0, \infty)$  para obtener valores reales de la misma, y también que el trazado de la curva está compuesta de dos espirales según su signo: son simétricas respecto al polo.



**Figura 5-79:** La espiral de lituus en azul corresponde a  $r \geq 0$ , y en rojo a  $r \leq 0$ .

Por lo tanto, para obtener una parametrización de la espiral de lituus también se consideran los signos según sea la rama de la espiral. Simplificando  $2k = a^2$  se concluye que:

$$\boxed{x = \pm \frac{a \cos \theta}{\sqrt{\theta}} \quad ; \quad y = \pm \frac{a \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{\theta}}} \quad (5-177)$$

## 5.41. Rhodonea o rosetón

Descubierta por el matemático italiano Luigi Grandi sobre la década de 1710, la bautizó *rhodonea* por su forma de flor: del griego *rhodo* que significa “rosa”. Por tal razón, la curva también es conocida como “rosa de Grandi”.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 41.** Sea una circunferencia centrada en el origen de radio  $a$  y  $O_1$  su punto de corte con el eje  $X$ . Sean también,  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia tal que  $\angle O_1OA = \theta$ , y  $B$  que cumpla  $\angle O_1OB = m\theta$  con  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Si se traza el pie de la perpendicular  $P$  de  $B$  sobre  $\overrightarrow{OA}$ , entonces el lugar geométrico que trazan los puntos  $P(r, \theta)$  al moverse  $A$  y  $B$  se denomina *rosa de Grandi*.

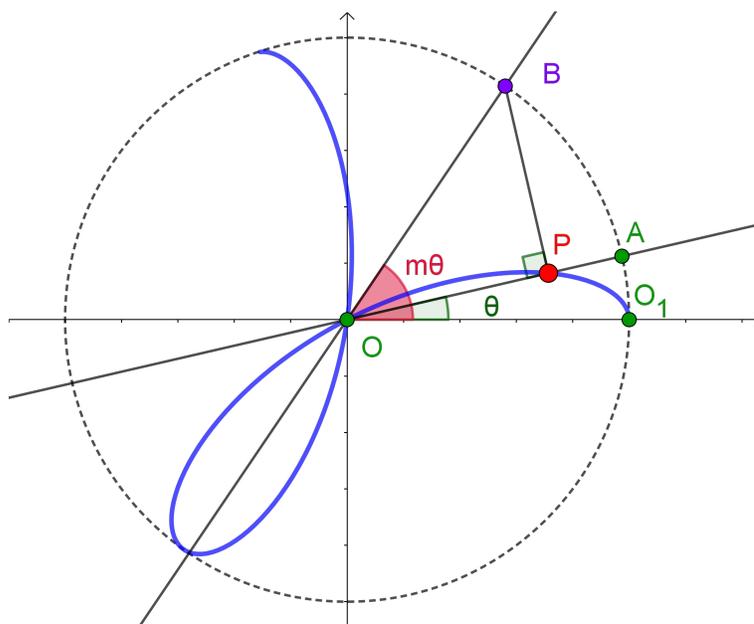


Figura 5-80: Caption

Para obtener una expresión analítica de las rosas de Grandi se procede a hallar una expresión para  $r = OP$ . Sea  $\triangle OPB$ , se sabe que es recto por condiciones iniciales. Por lo tanto, a partir de relaciones trigonométricas se tiene que:

$$r = OP = a \cos(m\theta - \theta) = a \cos(\theta(m - 1)) \quad (5-178)$$

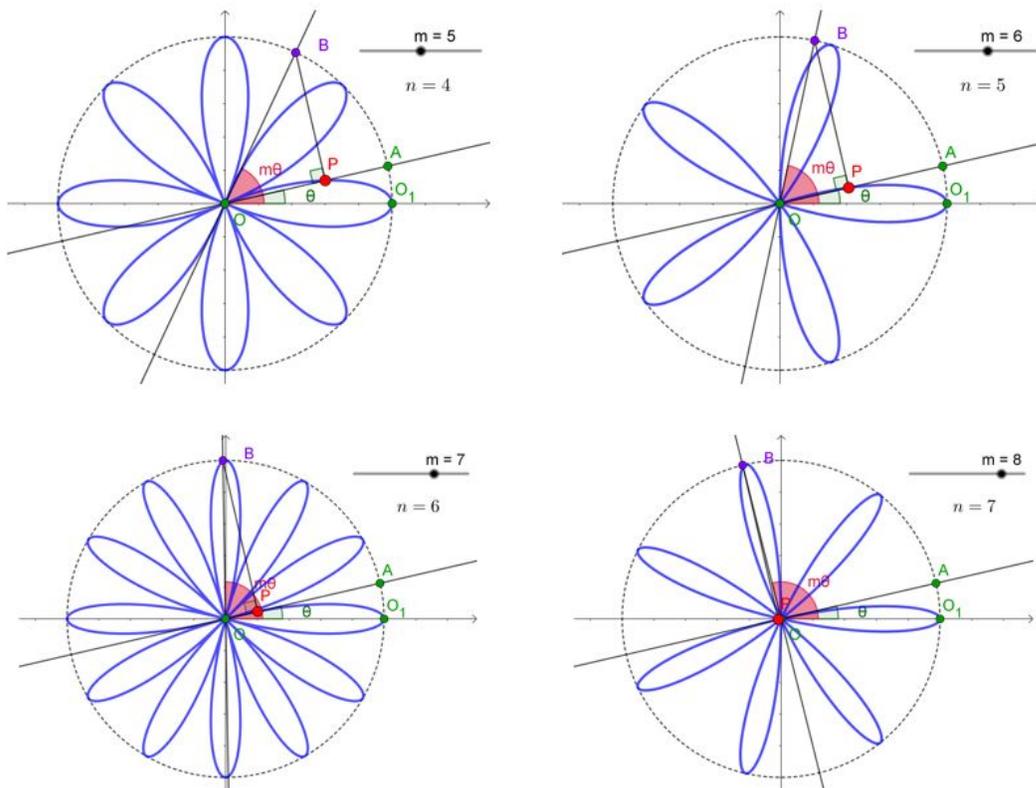
Realizando la sustitución  $n = m - 1$  se obtiene la ecuación polar más conocida de la curva rhodonea:

$$r = a \cos(n\theta) \quad (5-179)$$

en donde  $n \in \mathbb{Z}^+$ . En consecuencia, la parametrización de la curva rhodonea es:

$$\boxed{x = a \cos \theta \cos(n\theta) \quad ; \quad y = a \sin \theta \cos(n\theta)} \quad (5-180)$$

Se muestran a continuación algunos de los folios obtenidos:



**Figura 5-81:** Rosas de Grandi para  $n \in \mathbb{Z}$

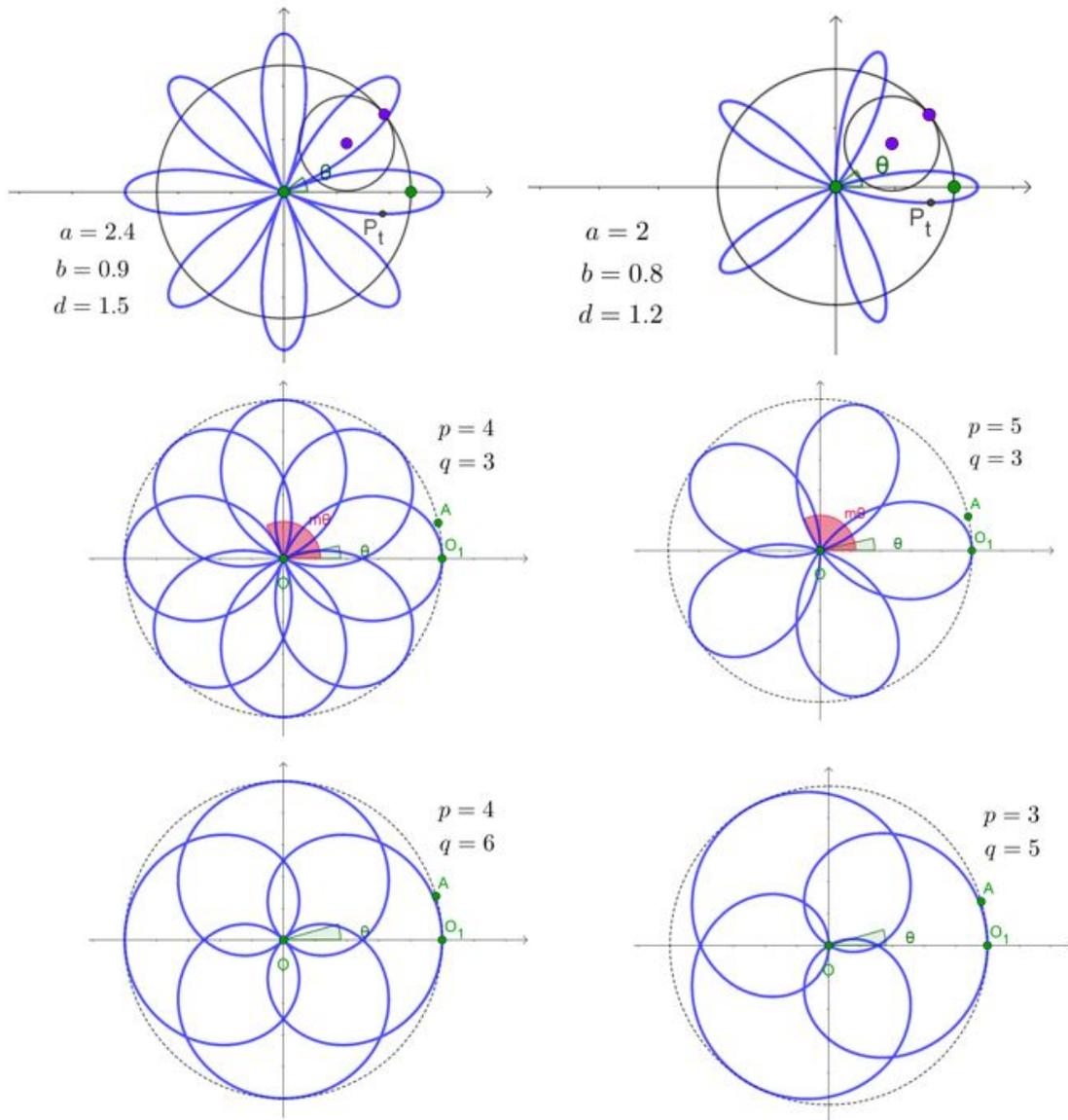
De lo anterior, se evidencia una relación entre el número de los pétalos de la flor y el valor de  $n$ :

$n$	Número de pétalos
2	4
3	3
4	8
5	5
6	12
7	7
...	...

Al examinar la tabla se observa que el número de pétalos omite valores de  $4k+2$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$ ; y que la relación distingue de valores pares e impares para  $n$ . Sin embargo, estrictamente hablando, el número de pétalos siempre es  $2n$ : lo que sucede es que cuando  $n$  es impar los pétalos se solapan y solamente se ve la traza de  $n$  pétalos<sup>16</sup>.

Es de recordarse que la construcción aquí mostrada corresponde a rosetones tales que  $n \in \mathbb{Z}^+$ . No obstante,  $n$  también puede tomar valores racionales y la construcción se podría adaptar para que se consideren los casos en que  $n \in \mathbb{Q}^+$  (aunque este acercamiento es menos intuitivo, y resulta más natural considerarse a partir de la expresión analítica obtenida). Por otro lado, debe mencionarse que las curvas rhodonea aparecen como un caso particular de la hipotrocoide: para valores específicos de  $a$  (radio de la circunferencia fija),  $b$  (radio de la circunferencia generatriz) y  $d$  (distancia al centro sobre el eje de la circunferencia generatriz) se obtienen distintas curvas de rhodonea para  $n \in \mathbb{Q}^+$ .

<sup>16</sup>La gráfica de  $\cos(n\theta)$  tiene  $n$  picos y  $n$  valles. Cuando  $n$  es par, la rosa ubica los picos y valles en distintos pétalos; cuando  $n$  es impar, se ubican sobre los mismos pétalos.



**Figura 5-82:** Ejemplos de distintas rosas de Grandi. La primera fila muestra la rhodonea como casos particulares de la hipotrocoide. La segunda fila muestra el caso de  $n = p/q$  (nótese que tienen el mismo número de pétalos que la fila anterior, aunque cubren un área mayor). La tercera fila, otros casos de  $n = p/q$ .

## 5.42. Folio simple u Ovoide de Kepler

Descubierta por Kepler alrededor del año 1609 al estudiar las curvas podarias. Inicialmente la denominó *folia* (Lawrence, 2013, p. 151) y posteriormente adquirió el término de “ovoide”: del latín *ovum* para huevo; y el sufijo griego *-oide* para “con forma de” (literalmente “con forma de huevo”).

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 42.** Sea una circunferencia de diámetro  $\overline{OB}$  y un punto  $C$  que se mueve sobre ella. El folio simple es el lugar geométrico de los puntos  $P(x, y)$  que resultan de la proyección de  $D$  sobre  $\overline{OC}$ , siendo  $D$  la proyección de  $C$  sobre el diámetro  $\overline{OB}$ .

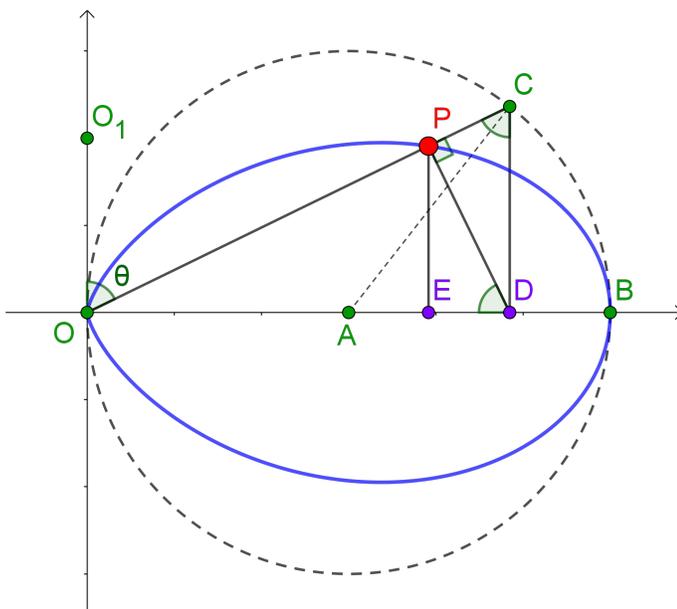


Figura 5-83

Para hallar las ecuaciones paramétricas del folio simple, sea la circunferencia de radio  $a$  con centro en  $A(a, 0)$  de tal forma que sea tangente al eje de coordenadas  $Y$ . Siendo  $C$  un punto arbitrario sobre la circunferencia, sea  $O_1$  sobre el eje  $Y$  de tal forma que  $\angle O_1OC = \theta$  corresponde al ángulo que forma  $C$  a medida que se mueve sobre la circunferencia. Además, trácese el pie de la perpendicular  $E$  de  $P$  sobre el eje  $X$ , de tal forma que se obtiene:

$$\begin{aligned}x &= OE = OD - ED \\y &= EP\end{aligned}\tag{5-181}$$

Sea  $\triangle OAC$ , se deduce que es isósceles ya que  $\overline{OA}$  y  $\overline{CA}$  son radios de la misma circunferencia. Además, se tiene que  $\angle COA = \pi/2 - \theta$ . De este modo, se verifica que:

$$\begin{aligned}2(\pi/2 - \theta) + \angle CAO &= \pi \\ \pi - 2\theta + \angle CAO &= \pi \iff \angle CAO = 2\theta\end{aligned}$$

Luego, aplicando el teorema del coseno sobre  $\triangle OAC$  se obtiene que:

$$\begin{aligned}OC^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(2\theta) \\ OC^2 &= 2a^2(1 - \cos 2\theta) = 2a^2(2 \operatorname{sen}^2 \theta) \\ OC^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ OC &= 2a \operatorname{sen} \theta\end{aligned}\tag{5-182}$$

Ahora, sea  $\triangle OCD$ , se sabe que es rectángulo por ser  $D$  la proyección de  $C$ . Aún más, se deduce que  $\overleftrightarrow{OO_1} \parallel \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{PE}$  ya que la secante  $\overleftrightarrow{OB}$  determina ángulos rectos. Por lo tanto, se deduce que  $\angle OCD = \angle O_1OC = \theta$  por ser ángulos alternos internos. Así, se tiene por relaciones trigonométricas que:

$$OD = 2a \operatorname{sen}^2 \theta\tag{5-183}$$

Por otro lado, sean  $\triangle PED$  y  $\triangle DPC$ , se sabe que son rectángulos. Siendo  $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{PE}$  se deduce que  $\angle CDP = \angle DPE$  por ser alternos internos, luego por el teorema de semejanza AA se tiene que  $\triangle PED \sim \triangle DPC$ , y por consiguiente,  $\angle PDE = \angle DCP = \theta$ . Ya con esto, por relaciones trigonométricas se obtiene que:

$$\begin{aligned}ED &= PD \cdot \cos \theta = (CD \cdot \operatorname{sen} \theta) \cos \theta = (OC \cdot \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= 2a \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta\end{aligned}\tag{5-184}$$

De manera análoga, se tiene también que:

$$\begin{aligned} EP &= PD \cdot \operatorname{sen} \theta = (CD \cdot \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta = (OC \cdot \cos \theta) \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= 2a \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (5-185)$$

Reemplazando las expresiones (5-183), (5-184) y (5-185) en (5-181) se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= OD - ED = 2a \operatorname{sen}^2 \theta - 2a \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta = 2a \operatorname{sen}^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2a \operatorname{sen}^4 \theta \\ y &= EP = 2a \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta = a \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

Es decir, las ecuaciones paramétricas del folio simple de Kepler son:

$$\boxed{x = 2a \operatorname{sen}^4 \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (5-186)$$

Por otra parte, también se puede obtener una parametrización racional al reescribir la expresión en términos de  $\tan \theta$  y haciendo  $t = \tan \theta$ . Es decir:

$$\begin{aligned} x &= 2a \operatorname{sen}^4 \theta = \frac{2a \tan^4 \theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} = \frac{2at^4}{(t^2 + 1)^2} \\ y &= a \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{2a \tan \theta}{\tan^2 + 1} \cdot \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 + 1} = \frac{2a \tan^3 \theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} = \frac{2at^3}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (5-187)$$

Por lo tanto, una parametrización racional del ovoide de Kepler es:

$$\boxed{x = \frac{2at^4}{(t^2 + 1)^2} \quad ; \quad y = \frac{2at^3}{(t^2 + 1)^2}} \quad (5-188)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$ , y cuyos puntos en el infinito se ubican en  $B(2a, 0)$ .

### 5.43. Bifolio

Fue descubierta por el matemático francés Gaston de Longchamps en 1886 al estudiar un problema de proyecciones de triángulos. La denominó como *folium dúplex* (Teixeira, p. 223), y posteriormente adquirió el término de bifolio: ambas del latín, *bi-* que significa “dos”; y *folium* para “hoja” (literalmente, dos hojas).

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 43.** *Sea una circunferencia y  $l$  una tangente a esta que pasa por  $O$ . Siendo  $C$  un punto arbitrario que se mueve sobre la circunferencia, el bifolio es el lugar geométrico de los puntos  $P$  y  $P'$  tales que  $\overleftrightarrow{CP} \parallel l$  y  $\overline{CP} \cong \overline{CP'} \cong \overline{OC}$*

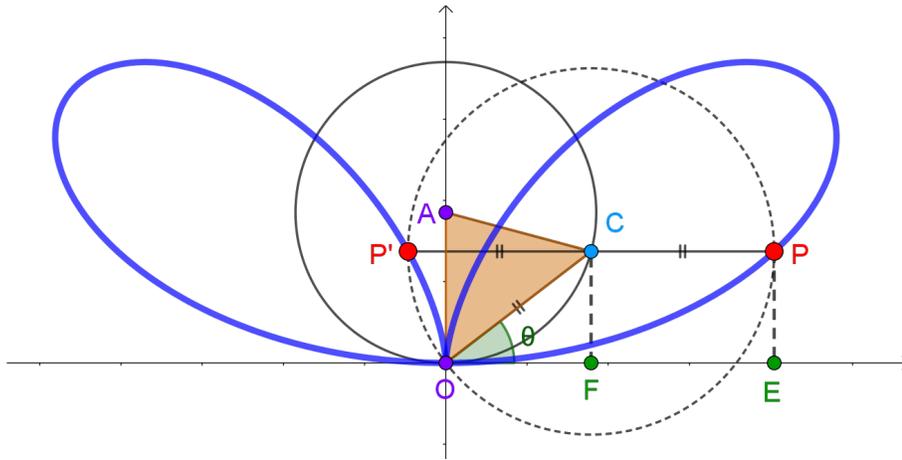


Figura 5-84

Para hallar las ecuaciones paramétricas del bifolio, sea la circunferencia de radio  $a$  con centro en  $A(0, a)$  de tal forma que la recta tangente  $l$  coincida con el eje  $X$ . Siendo  $C$  un punto que se mueve sobre la circunferencia, sea  $F$  el pie de su perpendicular sobre el eje  $X$ , y llámese  $\theta$  a la medida del ángulo  $\angle FOC$ . Al trazar  $\overleftrightarrow{CP} \parallel l$  y ubicar  $P$  y  $P'$ , trácense los pies de sus perpendiculares  $E$  y  $E'$  respectivamente. De esta forma, se deduce para  $P(x, y)$  que:

$$\begin{aligned} x_1 &= OE = OF + FE = OC \cdot \cos \theta + CP \\ y_1 &= PE = CF = OC \cdot \sin \theta \end{aligned} \tag{5-189}$$

De forma análoga, se obtienen expresiones para  $P'(x, y)$

$$\begin{aligned}x_2 &= OE' = OF - CP' = OC \cdot \cos \theta - CP' \\y_2 &= PE' = CF = OC \cdot \sen \theta = y_1\end{aligned}\tag{5-190}$$

Teniendo esto en cuenta, se procede a hallar la longitud de  $OC$ . Sea  $\triangle OAC$ , se deduce que es isósceles ya que  $\overline{OA}$  y  $\overline{AC}$  son radios de la misma circunferencia. Además, se tiene que  $\angle COA = \pi/2 - \theta$ . Luego, se obtiene que:

$$\begin{aligned}2(\pi/2 - \theta) + \angle CAO &= \pi \\ \pi - 2\theta + \angle CAO &= \pi \iff \angle CAO = 2\theta\end{aligned}$$

Por consiguiente, al aplicar el teorema del coseno sobre  $\triangle OAC$  se obtiene que:

$$\begin{aligned}OC^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(2\theta) \\ OC^2 &= 2a^2(1 - \cos 2\theta) = 2a^2(2 \sen^2 \theta) \\ OC^2 &= 4a^2 \sen^2 \theta \\ OC &= 2a \sen \theta\end{aligned}\tag{5-191}$$

Por definición de la curva, se deduce que  $CP = CP' = OC$ . Luego, reemplazando estos valores en (5-189) se obtiene:

$$\begin{aligned}x_1 &= OC \cdot \cos \theta + CP = 2a \sen \theta \cos \theta + 2a \sen \theta = 2a \sen \theta(1 + \cos \theta) \\ y_1 &= OC \cdot \sen \theta = 2a \sen^2 \theta\end{aligned}\tag{5-192}$$

De la misma forma, al reemplazar en (5-190) se obtiene que  $x_2 = 2a \sen \theta(1 - \cos \theta)$ . Se tiene entonces que  $x_1$  y  $y_1$  trazan el folio de la derecha,  $x_2$  y  $y_2$  el folio de la izquierda, y a partir de la construcción que  $\theta$  toma valores en el intervalo  $[0, \pi]$ . Sin embargo, al extender el intervalo a  $[0, 2\pi]$  ambas expresiones trazan los dos folios (la diferencia corresponde a que folio se traza primero). Puede verificarse que tanto las ecuaciones paramétricas de  $P$  como de  $P'$  corresponden al mismo lugar geométrico al hallar su ecuación cartesiana.

Por tal razón pueden considerarse cualquiera de las dos expresiones para obtener el bifolio. Tomando el caso en donde el trazado empieza por el folio derecho se tiene:

$$\boxed{x = 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (5-193)$$

Además, a partir de estas ecuaciones es posible obtener una parametrización racional realizando la sustitución de Euler-Weierstrass haciendo  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$x = 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{4at}{1+t^2} \left( 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = \frac{8at}{(1+t^2)^2}$$

$$y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{2a(2t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{8at^2}{(1+t^2)^2} = tx$$

Es decir, una parametrización racional del bifolio es:

$$\boxed{x = \frac{8at}{(1+t^2)^2} \quad ; \quad y = \frac{8at^2}{(1+t^2)^2}} \quad (5-194)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$ .

## 5.44. Trifolio

Su nombre está compuesto de dos estructuras, ambas del latín: *tri-* que significa “tres” y *folium* para “hoja” (literalmente, tres hojas). Fue estudiada por el matemático italiano Guido Grandi, y casi un siglo después por el francés Gaston de Longchamps en 1885. Suele usarse como plantilla para crear símbolos de aviso o de información: símbolo universal del reciclaje, peligro radioactivo, material biológico, entre otros.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 44.** *El trifolio es una curva rhodonea de tres pétalos. Es decir, sea una circunferencia centrada en el origen de radio  $a$  y  $O_1$  su punto de corte con el eje  $X$ . Sean también,  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia tal que  $\angle O_1OA = \theta$ , y  $B$  que cumpla  $\angle O_1OB = 4\theta$ . Si se traza el pie de la perpendicular  $P$  de  $B$  sobre  $\overleftrightarrow{OA}$ , entonces el lugar geométrico que trazan los puntos  $P(r, \theta)$  al moverse  $A$  y  $B$  se denomina trifolio.*

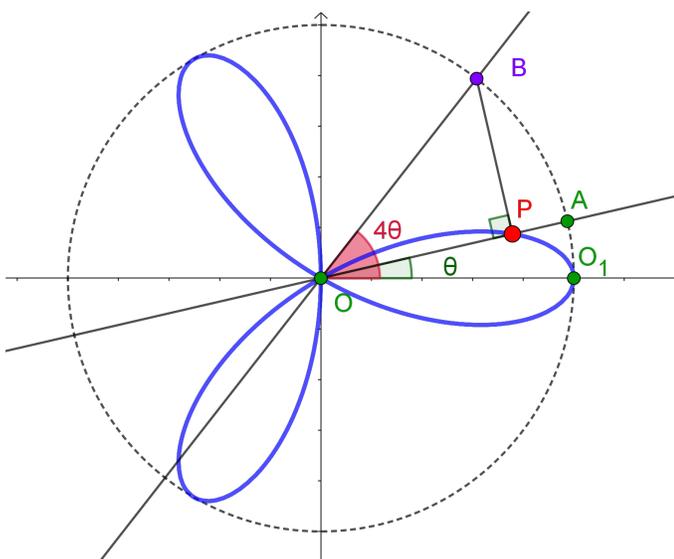


Figura 5-85

De acuerdo con los resultados obtenidos de (5-178), la ecuación polar del trifolio es:

$$r = a \cos(3\theta) \quad (5-195)$$

Y por lo tanto, las ecuaciones paramétricas del trifolio son:

$$\boxed{x = a \cos \theta \cos(3\theta) \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta \cos(3\theta)} \quad (5-196)$$

No obstante, también se puede obtener una parametrización del trifolio a partir de las ecuaciones obtenidas de la hipotrocoide en (5-41): siendo  $a$  el radio de la circunferencia fija, sea  $b = a/3$  el radio de la circunferencia generatriz y  $d = a - b$  la distancia del punto al centro sobre el eje de la circunferencia generatriz. De esta forma se deduce otra parametrización del trifolio, siendo:

$$\boxed{x = 2b(\cos \theta + \cos 2\theta) \quad ; \quad y = 2b(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta)} \quad (5-197)$$

Debe tenerse en cuenta que ambas parametrizaciones son distintas: poseen constantes de escala diferentes y el trazado del trifolio es distinto sobre los valores de  $\theta$ . Además, en (5-196) basta con definir  $\theta \in [0, \pi]$  para realizar un recorrido completo, mientras que (5-197) toma valores en  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Aún así, al hallar una constante de escala en común entre ambas ecuaciones, puede mostrarse que ambas ecuaciones corresponden al mismo trifolio sobre su ecuación cartesiana.

Por otro lado, las ecuaciones en (5-196) permiten una parametrización racional reescribiendo la expresión en términos de  $t = \tan \theta$ :

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \cos(3\theta) = 4a \cos^4 \theta - 3a \cos^2 \theta = \frac{4a}{(\tan^2 \theta + 1)^2} - \frac{3a}{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \frac{4a}{(t^2 + 1)^2} - \frac{3a}{t^2 + 1} = \frac{4a - 3a(t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{a(1 - 3t^2)}{(t^2 + 1)^2} \\ y &= a \operatorname{sen} \theta \cos(3\theta) = a \operatorname{sen} \theta \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) = \frac{a \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} \left( \frac{4}{\tan^2 \theta + 1} - 3 \right) \\ &= \frac{at}{t^2 + 1} \left( \frac{4 - 3t^2 - 3}{t^2 + 1} \right) = \frac{at}{t^2 + 1} \left( \frac{1 - 3t^2}{t^2 + 1} \right) = \frac{at(1 - 3t^2)}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Es decir, una parametrización racional del trifolio es de la forma:



**Figura 5-86:** Trifolio en la naturaleza. Dentro del extenso género de las plantas *Trillium*, se destaca la flor *Trillium grandiflorum* que posee tres pétalos de color blanco o rosa.

$$\boxed{x = \frac{a(1 - 3t^2)}{(t^2 + 1)^2} \quad ; \quad y = \frac{at(1 - 3t^2)}{(t^2 + 1)^2}} \quad (5-198)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$  y cuyos puntos en el infinito se ubican en el origen o crunodo del trifolio.

## 5.45. Cuatrifolio

Recibe su nombre por la composición de dos palabras del latín: *quadri-* que significa “cuatro”, y *folium* para “hoja” (literalmente, cuatro hojas). Estudiada por Guido Grandi en 1713 a la que llamó “rosetón de cuatro folios”<sup>17</sup>. Esta curva ha sido popular en varios estilos de arte a lo largo de la historia: desde la arquitectura romana y el Renacimiento sobre diseños góticos, hasta pinturas de la época precolombina del imperio maya e inca.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 45.** *El cuatrifolio es una curva rhodonea de cuatro pétalos. Es decir, sea una circunferencia centrada en el origen de radio  $a$  y  $O_1$  su punto de corte con el eje  $X$ . Sean también,  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia tal que  $\angle O_1OA = \theta$ , y  $B$  que cumpla  $\angle O_1OB = 3\theta$ . Si se traza el pie de la perpendicular  $P$  de  $B$  sobre  $\overleftrightarrow{OA}$ , entonces el lugar geométrico que trazan los puntos  $P(r, \theta)$  al moverse  $A$  y  $B$  se denomina cuatrifolio.*

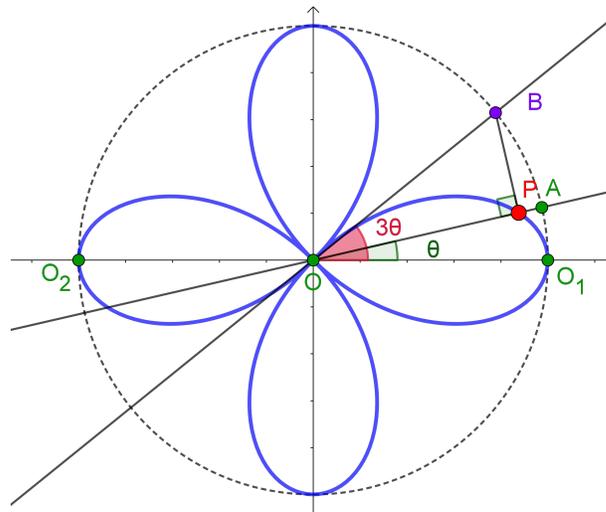


Figura 5-87

Siendo esta curva un caso particular de la curva rhodonea, se obtiene de (5-178) su ecuación polar:

$$r = a \cos(2\theta) \quad (5-199)$$

<sup>17</sup>Rosace à quatre feuilles

Y así, también se obtienen sus ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{x = a \cos \theta \cos(2\theta) \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta \cos(2\theta)} \quad (5-200)$$

Además, a partir de estas expresiones se puede obtener una parametrización racional realizando la sustitución de Euler-Weierstrass en donde  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$x = a \cos \theta \cos(2\theta) = a \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = 2a \cos^3 \theta - a \cos \theta$$

$$= \frac{2a(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3} - \frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)} = \frac{a(1-t^2)(t^4-6t^2+1)}{(1+t^2)^3}$$

$$y = a \operatorname{sen} \theta \cos(2\theta) = a \operatorname{sen} \theta (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta) = a \operatorname{sen} \theta - 2a \operatorname{sen}^3 \theta$$

$$= \frac{2at}{1+t^2} - \frac{2a(2t)^3}{(1+t^2)^3} = \frac{2at(t^4-6t^2+1)}{(1+t^2)^3}$$

Es decir, una parametrización racional del cuatrifolio es:

$$\boxed{x = \frac{a(1-t^2)(t^4-6t^2+1)}{(1+t^2)^3} \quad ; \quad y = \frac{2at(t^4-6t^2+1)}{(1+t^2)^3}} \quad (5-201)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$ . Puede verificarse también que los puntos en el infinito se ubican en  $O_2(-a, 0)$

Por otro lado, al igual que con el trifolio, se puede obtener una parametrización a partir de las ecuaciones de la hipotrocoide en (5-41): siendo  $a$  el radio de la circunferencia fija, sea  $4b = a$  y  $d = a - b$ , de tal manera que sustituyendo estos valores se obtiene:

$$\boxed{x = 3b(\cos \theta + \cos 3\theta) \quad ; \quad y = 3b(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 3\theta)} \quad (5-202)$$

en donde debe considerarse la diferencia entre (5-200): si bien ambas describen un cuatrifolio, poseen distintos factores de escala y dirección de trazo opuesto. Sin embargo, si se encuentra un factor de escala en común ( $3b = a/2$ ) puede mostrarse que corresponden al mismo cuatrifolio al hallar su ecuación cartesiana.



**Figura 5-88:** Cuadrifolio en la naturaleza. La familia de las brasicáceas (también llamadas crucíferas) son un tipo de flor que puede encontrarse casi por todo el planeta. En este caso, se muestra la especie *Raphanus sativus*, la flor de un rábano.

## 5.46. Piriforme

Fue descubierta por el matemático inglés John Wallis en 1685 (Teixeira, p. 215) a la que denominó “conoide”. Posteriormente, a finales del siglo XIX, Gaston de Longchamps le acuñó el término de “cuártica piriforme” (G. A. G. de Longchamps, p. 129) tomando del latín *pirus* que significa “pera” (literalmente, “con forma de pera”). Debido a su imagen, también ha recibido los nombres de curva de gota de agua y curva con forma de trompo.

Su definición como lugar geométrico es:

**Definición 46.** Sea una circunferencia de diámetro  $\overline{OB}$  y  $A$  un punto que se mueve sobre la misma. Sea  $l_1 \perp \overrightarrow{OB}$  y  $D \in l_1$  de tal forma que  $D$  tiene la misma ordenada que  $A$ . Luego, la cuártica piriforme es el lugar geométrico de los puntos  $P$  en  $\overrightarrow{OD}$  que tienen la misma abcisa que  $A$ .

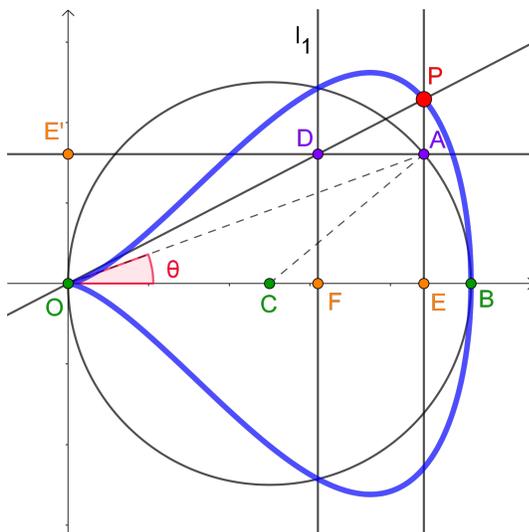


Figura 5-89

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la piriforme, sea la circunferencia de radio  $a$  con centro en  $C(a, 0)$  y  $\overline{OB}$  diámetro de la misma. Al trazar  $l_1 \perp \overrightarrow{OB}$ , llámese  $F(b, 0)$  al punto de corte las dos rectas, y trácense las rectas perpendiculares a cada eje que pasan por  $A$  de tal forma que  $E$  corresponde a su abcisa y  $E'$  a su ordenada. Por otro lado, llámese  $\theta$  a la medida del ángulo  $\angle BOA$ , a partir de la construcción se evidencia que  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . De esta forma, de acuerdo con 5-89 se tiene que:

$$\begin{aligned}x &= OE = OA \cdot \cos \theta \\y &= EA + AP = OA \cdot \operatorname{sen} \theta + AP\end{aligned}\tag{5-203}$$

Sea  $\triangle OCA$ , se sabe que es isósceles teniendo en cuenta que  $\overline{OC}$  y  $\overline{AC}$  son radios de la misma circunferencia. Por lo tanto:

$$\pi = 2\theta + \angle OCA \iff \angle OCA = \pi - 2\theta$$

Luego, aplicando el teorema del coseno se obtiene:

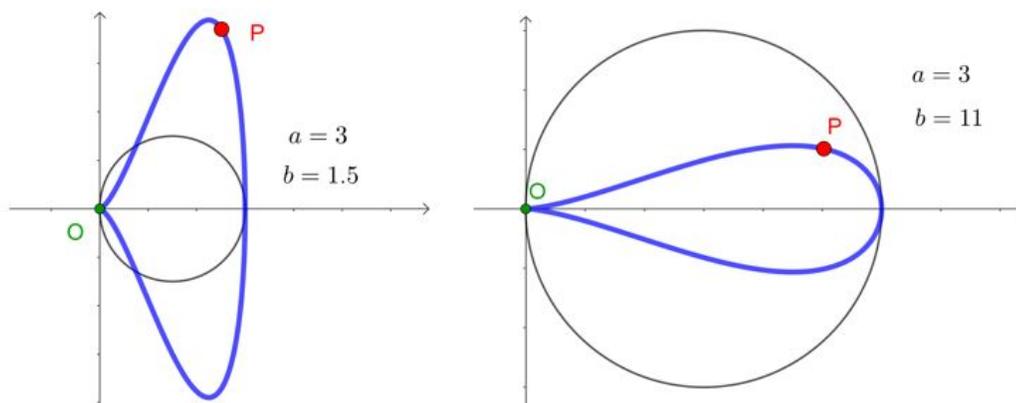
$$\begin{aligned}OA^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\pi - 2\theta) = 2a^2 + 2a^2 \cos 2\theta \\&= 2a^2(1 + \cos 2\theta) = 2a^2(2 \cos^2 \theta) \\&= 4a^2 \cos^2 \theta \\OA &= 2a \cos \theta\end{aligned}\tag{5-204}$$

Por otro lado, para hallar una expresión para  $AP$ , sean  $\triangle FDO$  y  $\triangle APD$ . Nótese que  $\overleftrightarrow{EA} \parallel \overleftrightarrow{OB}$ , luego al ser  $\overleftrightarrow{OD}$  secante a dos paralelas, esta determina ángulos correspondientes congruentes:  $\angle FOD \cong \angle ADP$ . Luego, teniendo en cuenta que  $\angle OFD$  y  $\angle DAP$  son rectos, se concluye por teorema de semejanza AA que  $\triangle FDO \sim \triangle APD$ . De esta forma, por proporcionalidad se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{FD}{OF} &= \frac{AP}{DA} \\ \frac{EA}{OF} &= \frac{AP}{OE - OF} \\ \frac{2a \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{b} &= \frac{AP}{2a \cos^2 \theta - b} \\ 4a^2 \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta - 2ab \cos \theta \operatorname{sen} \theta &= b \cdot AP \\ \frac{2a^2}{b} \operatorname{sen}(2\theta) \cos^2 \theta - a \operatorname{sen}(2\theta) &= AP\end{aligned}\tag{5-205}$$

Reemplazando (5-204) y (5-205) en (5-203) se obtienen las ecuaciones paramétricas de la piriforme:

$$x = 2a \cos^2 \theta \quad ; \quad y = \frac{2a^2}{b} \operatorname{sen}(2\theta) \cos^2 \theta \quad (5-206)$$



**Figura 5-90:** Curvas piriformes para distintos valores de  $b$ .

Conjuntamente, la piriforme permite una parametrización racional a partir de las ecuaciones halladas en (5-206) al reescribirse en términos de tangente, y haciendo  $t = \tan \theta$ :

$$x = \frac{2a}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2a}{t^2 + 1}$$

$$y = \frac{2a^2}{b} \cdot \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{4a^2 t}{b(t^2 + 1)^2}$$

Es decir, una parametrización racional de la piriforme es:

$$x = \frac{2a}{t^2 + 1} \quad ; \quad y = \frac{4a^2 t}{b(t^2 + 1)^2} \quad (5-207)$$

en donde  $t \in \mathbb{R}$  y cuyos puntos en el infinito se ubican en el origen.

## 5.47. Torpedo

Inicialmente recibió el nombre de “trifolium oblicuo” y “trifolium irregular”. Fue estudiada por el matemático inglés Gaston de Longchamps en 1884 (G. de Longchamps, p. 512) al abordar la representación de algunas ecuaciones cartesianas, y descubierta por el matemático francés Henri Brocard en el año 1874 (Teixeira, p. 232).

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 47.** Sea una circunferencia de diámetro  $\overline{OB}$  y  $A$  un punto arbitrario que se mueve sobre la misma. La curva torpedo es el lugar geométrico de los puntos  $P$  y  $P'$  tales que  $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{AP}$  en donde  $P' - A - P$  y  $\overline{AP} \cong \overline{AP'} \cong \overline{OA}$ .

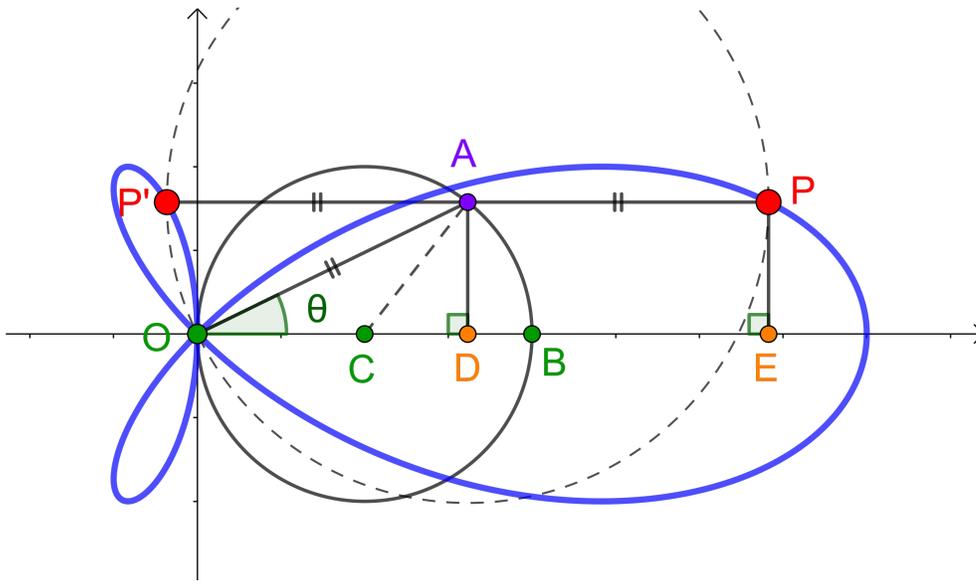


Figura 5-91

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva torpedo, sea la circunferencia de radio  $a$  y centro en  $C(a, 0)$  y diámetro  $\overline{OB}$ . Siendo  $A$  un punto sobre la circunferencia, trácese el pie de la perpendicular  $D$  sobre el eje  $X$ , y llámese  $\theta$  a la medida de  $\angle BOA$  de donde se evidencia por su construcción que  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Al trazar  $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{OB}$  y ubicar  $P$  y  $P'$  de acuerdo con su definición como se muestra en 5-91, trácese los pies de sus perpendiculares  $E$  y  $E'$  sobre el eje  $X$ , respectivamente. De esta forma, se tiene para  $P(x, y)$  que:

$$\begin{aligned}x_1 &= OE = OD + DE = OD + AP = OA \cdot \cos \theta + OA \\y_1 &= EP = DA = OA \cdot \operatorname{sen} \theta\end{aligned}\tag{5-208}$$

De la misma forma, para  $P'(x, y)$  se obtiene:

$$\begin{aligned}x_2 &= OA \cdot \cos \theta - OA \\y_2 &= OA \cdot \operatorname{sen} \theta\end{aligned}\tag{5-209}$$

Luego, el problema se reduce a calcular una expresión para  $OA$ . Sea  $\triangle OCA$ , se sabe que es isósceles ya que  $\overline{CO}$  y  $\overline{CA}$  son radios del mismo círculo, luego  $\angle OCA = \pi - 2\theta$ . Aplicando el teorema del coseno se deduce que:

$$\begin{aligned}OA^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\pi - 2\theta) = 4a^2 \cos^2 \theta \\OA &= 2a \cos \theta\end{aligned}\tag{5-210}$$

Al reemplazar la expresión de (5-210) en (5-208) se obtiene:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2a \cos^2 \theta + 2a \cos \theta = 2a \cos \theta (\cos \theta + 1) \\y_1 &= 2a \cos \theta \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen}(2\theta)\end{aligned}\tag{5-211}$$

Del mismo modo se obtiene en (5-209) que  $x_2 = 2a \cos \theta (\cos \theta - 1)$ . Sin embargo, al extender el intervalo de definición de  $\theta$  ambas parametrizaciones trazan el torpedo. De hecho, sobre el intervalo  $[\pi/2, 3\pi/2]$  la expresión de  $x_1$  realiza el mismo trazado que  $x_2$  sobre el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$  (y además, puede verificarse que ambas hacen referencia a una misma ecuación cartesiana). Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas del torpedo son:

$$\boxed{x = 2a \cos \theta (\cos \theta + 1) \quad ; \quad y = a \operatorname{sen}(2\theta)}\tag{5-212}$$

en donde  $\theta \in [0, 2\pi]$  realiza un trazado completo de la curva. Por otro lado, la curva permite una parametrización racional al realizar la sustitución de Euler-Weierstrass sobre (5-212) en donde  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$x = 2a \cdot \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right) = \frac{2a(1-t^2)}{1+t^2} \left( \frac{2}{1+t^2} \right) = \frac{4a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$
$$y = 2a \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{4at(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = xt$$

Es decir, una parametrización racional de la curva torpedo es:

$$\boxed{x = \frac{4a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad ; \quad y = \frac{4at(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} \quad (5-213)$$



Teniendo las coordenadas de los puntos, se procede a hallar las pendientes  $m_1$  y  $m_2$  de las rectas  $\overleftrightarrow{O_1A}$  y  $\overleftrightarrow{O_2A'}$ , respectivamente:

$$m_1 = \frac{a \operatorname{sen} \theta - a}{a \operatorname{cos} \theta + a} = \frac{\operatorname{sen} \theta - 1}{1 + \operatorname{cos} \theta} \quad m_2 = \frac{-a \operatorname{cos} \theta + a}{a \operatorname{sen} \theta + a} = \frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \quad (5-215)$$

Posteriormente, se hallan las ecuaciones de las rectas:

$$\begin{aligned} y_1 - a &= \left( \frac{\operatorname{sen} \theta - 1}{1 + \operatorname{cos} \theta} \right) (x + a) \iff y_1 = \left( \frac{\operatorname{sen} \theta - 1}{1 + \operatorname{cos} \theta} \right) x + \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{cos} \theta} \\ y_2 + a &= \left( \frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \right) (x + a) \iff y_2 = \left( \frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \right) x - \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{sen} \theta} \end{aligned} \quad (5-216)$$

Teniendo en cuenta que lo que se busca es la intersección de estas dos rectas, es decir  $y_1 = y_2$ , al despejar  $x$  se obtiene una expresión  $x(\theta)$  que corresponde a la parametrización de la curva.

Luego:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \right) x - \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{sen} \theta} &= \left( \frac{\operatorname{sen} \theta - 1}{1 + \operatorname{cos} \theta} \right) x + \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{cos} \theta} \\ \left( \frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta + 1} \right) x - \left( \frac{\operatorname{sen} \theta - 1}{1 + \operatorname{cos} \theta} \right) x &= \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{cos} \theta} + \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{sen} \theta} \\ x \left( \frac{1 - \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + 1}{(1 + \operatorname{sen} \theta)(1 + \operatorname{cos} \theta)} \right) &= \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)(2 + \operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{(1 + \operatorname{sen} \theta)(1 + \operatorname{cos} \theta)} \\ x &= a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)(2 + \operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta) \end{aligned} \quad (5-217)$$

Luego, al reemplazar (5-217) en  $y_1$  o  $y_2$  se obtiene una expresión  $y(\theta)$  de la curva. Reemplazando en  $y_1$ :

$$\begin{aligned} y &= a \left( \frac{\operatorname{sen} \theta - 1}{1 + \operatorname{cos} \theta} \right) (\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)(2 + \operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta) + \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{cos} \theta} \\ &= \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{cos} \theta} [(\operatorname{sen} \theta - 1)(2 + \operatorname{sen} \theta + \operatorname{cos} \theta) + 1] \\ &= \frac{a(\operatorname{cos} \theta + \operatorname{sen} \theta)}{1 + \operatorname{cos} \theta} (\operatorname{cos} \theta + 1)(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{cos} \theta) \\ &= a(\operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{cos}^2 \theta) \end{aligned} \quad (5-218)$$

Se concluye así que las ecuaciones paramétricas de la curva de pez son:

$$\begin{cases} x = a(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)(2 + \cos \theta + \operatorname{sen} \theta) \\ y = a(\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \end{cases} \quad (5-219)$$

Además, la curva permite una parametrización racional haciendo  $t = \tan(\theta/2)$ :

$$\begin{aligned} x &= a \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right) \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 2 \right) = \frac{a(1+2t-t^2)(3+2t+t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y &= a \left( \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} - \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} \right) = \frac{a(6t^2-t^4-1)}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Es decir, una parametrización racional de la curva de pez es:

$$\boxed{x = \frac{a(1+2t-t^2)(3+2t+t^2)}{(1+t^2)^2} \quad ; \quad y = \frac{a(6t^2-t^4-1)}{(1+t^2)^2}} \quad (5-220)$$

## 5.49. Serpentina o anguinea

Esta curva aparece en escritos de Isaac Newton que datan de finales del XVII (Struik, p. 168) al intentar clasificar una vasta familia de curvas cúbicas. En su *Enumeración de líneas de tercer orden*, define una subfamilia como *anguinea* (Stirling, 1717) tomando del latín *anguis* que significa “serpiente”.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 49.** Sea una circunferencia de diámetro  $\overline{OA'}$  y  $l_1 \perp \overleftrightarrow{OA'}$  en  $O$ . Sea también  $l_2 \parallel \overleftrightarrow{OA'}$  y llámese  $B$  a la intersección entre  $l_1$  y  $l_2$ . Siendo  $A$  un punto que se mueve sobre la circunferencia, sea  $D$  la intersección entre  $\overleftrightarrow{OA}$  y  $l_2$ , luego trácese  $l_3 \perp \overleftrightarrow{OA}$  que pase por  $D$ . Entonces, la serpentina es el lugar geométrico de los puntos  $P$  en  $l_3$  que tienen la misma ordenada que  $A$ .

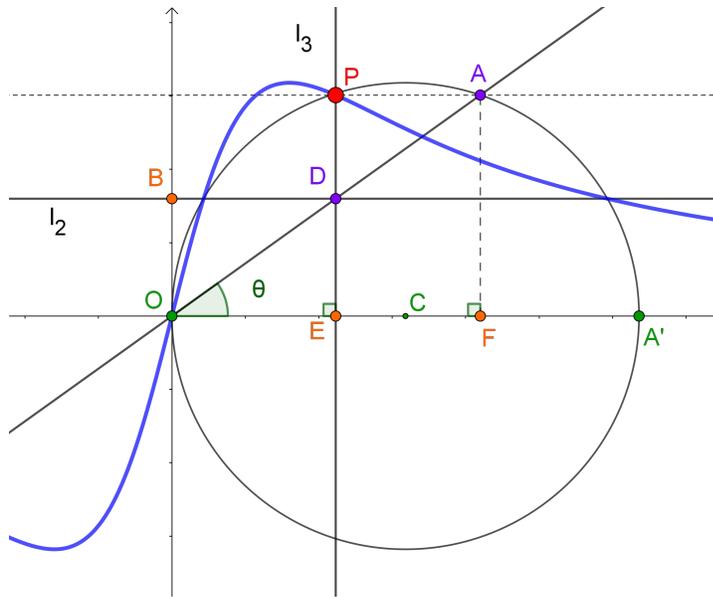


Figura 5-93

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la serpentina, sea la circunferencia de radio  $a$  y centro  $C(a, 0)$ , de tal forma que  $\overleftrightarrow{OA'}$  coincida con el eje  $X$  y  $l_1$  coincida con el eje  $Y$ . Siendo  $A$  un punto que se mueve sobre la circunferencia, trácese el pie de su perpendicular  $F$  sobre el eje  $X$  y llámese  $\theta$  al parámetro que corresponde a la medida de  $\angle COA$ . Seguidamente,

al trazarse  $l_2$  esta corta al eje  $Y$  en  $B(0, b)$ , luego  $\overleftrightarrow{OA}$  y  $l_2$  se cortan en  $D$  por donde pasa  $l_3 \perp \overleftrightarrow{OA}$  y corta al eje  $X$  en  $E$ . Como  $\square OEDB$  es un paralelogramo, se deduce que  $\overline{ED} \cong \overline{OB}$ . Por lo tanto, siendo  $\triangle OED$  y  $\triangle OFA$  rectángulos, se obtiene por relaciones trigonométricas que:

$$\begin{aligned} x &= OE = ED \cdot \cot \theta = OB \cdot \cot \theta = b \cot \theta \\ y &= EP = FA = OA \cdot \sen \theta \end{aligned} \quad (5-221)$$

Sabiendo que  $OA = 2a \cos \theta$  al aplicar el teorema del coseno sobre  $\triangle OCA$ , se obtienen las ecuaciones paramétricas de la anguinea de Newton:

$$\boxed{x = b \cot \theta \quad ; \quad y = 2a \sen \theta \cos \theta} \quad (5-222)$$

Además, la curva permite una parametrización racional haciendo la sustitución  $t = \tan \theta$  de la forma:

$$\begin{aligned} x &= b \cot \theta = \frac{b}{\tan \theta} = \frac{b}{t} \\ y &= 2a \sen \theta \cos \theta \cdot \left( \frac{\cos \theta}{\cos \theta} \right) = 2a \tan \theta \cos^2 \theta = \frac{2a \tan \theta}{\tan^2 + 1} = \frac{2at}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

De esta manera, se concluye que una parametrización racional de la serpentina es de la forma:

$$\boxed{x = \frac{b}{t} \quad ; \quad y = \frac{2at}{t^2 + 1}} \quad (5-223)$$

## 5.50. Besace

Recibe su nombre por Gabriel Cramer en 1750 (Teixeira, p. 195): del francés *besace*, es un tipo de maletín de mensajero.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 50.** Sean  $A$  y  $B$  sobre los ejes  $X$  y  $Y$  respectivamente, y una circunferencia de diámetro  $\overline{AB}$ . Sea  $D$  un punto que se mueve sobre la circunferencia y  $l_1$  paralela al eje  $X$  por  $D$ , y llámese  $E$  al punto de corte de  $l_1$  con el eje  $Y$ . Luego, la curva besace es el lugar geométrico de los puntos  $P$  y  $P'$  tales que  $\overline{OD} \cong \overline{EP} \cong \overline{EP'}$ , siendo  $O$  el origen.

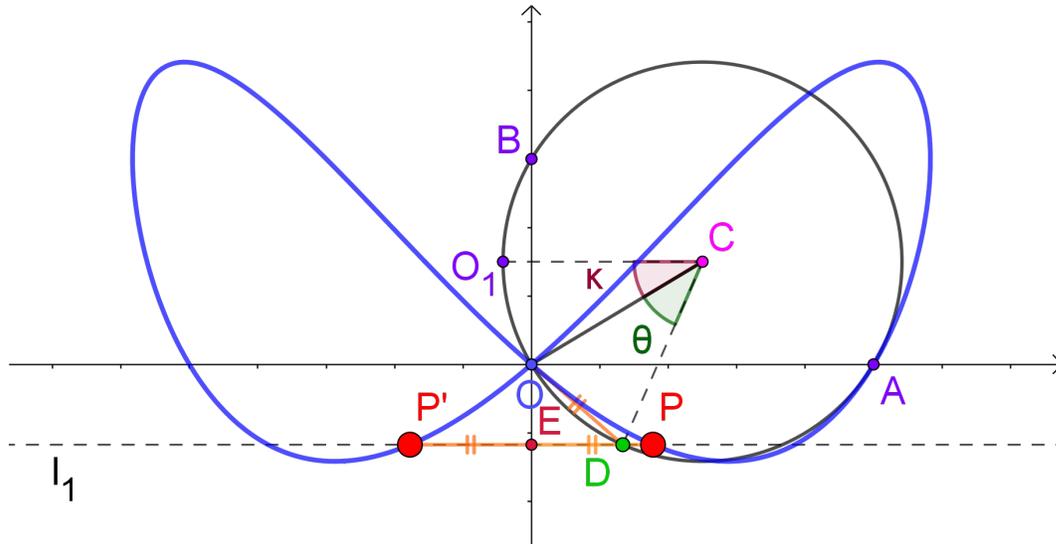


Figura 5-94

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la curva, sean  $A(a, 0)$  Y  $B(0, b)$ , que determinan el diámetro de una circunferencia. Se sabe que su centro se encuentra en el punto medio de  $\overline{AB}$ , es decir,  $C = (a/2, b/2)$ . Luego, siendo  $D$  que se mueve sobre la circunferencia, llámese  $\theta$  al parámetro que corresponde a la medida del ángulo  $\angle DPO$ . Al trazarse  $l_1$  por  $D$ , trácese también por  $C$  determinando a  $O_1$  sobre la circunferencia. Llámese  $\kappa$  a la medida del ángulo formado por  $\angle O_1CO$  como se muestra en **5-94**. De esta forma, se tiene que:

$$x_1 = EP = OD \qquad x_2 = EP' = -OD$$

$$y = \frac{b}{2} - r \operatorname{sen}(\kappa + \theta) \quad \text{donde} \quad r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

El valor de  $OD$  se determina por el teorema del coseno. Siendo  $r$  el radio de la circunferencia, se obtiene:

$$OD^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \theta = 2r^2(1 - \cos \theta)$$

$$OD = \sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos \theta} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Siendo  $x_1 = OD$  y  $x_2 = -OD$ , se tiene que:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(\theta/2) \quad (5-224)$$

Por otro lado, el ángulo  $\kappa$  está determinado por los valores de  $a$  y  $b$ :

$$\tan \kappa = \frac{b}{a} \iff \kappa = \arctan \left( \frac{b}{a} \right) \quad (5-225)$$

Por lo tanto, se concluye que las ecuaciones paramétricas de la curva besace son de la forma:

$$\boxed{x = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{sen}(\theta/2) \quad ; \quad y = \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \operatorname{sen}(\kappa + \theta)} \quad (5-226)$$

Es de resaltar que un caso especial de la curva besace en  $b = 0$  corresponde a la lemniscata de Gerono.

## 5.51. Trisectriz de Ceva

También llamada cicloide de Ceva. Fue descubierta por el matemático e ingeniero italiano Tomasso Ceva alrededor del siglo XVII.

Su definición como lugar geométrico es la siguiente:

**Definición 51.** Sea una circunferencia con centro en el origen y  $A$  un punto que se mueve sobre ella. Trácese  $\overleftrightarrow{OA}$  y sea  $B$  en el eje  $X$  tal que  $\overline{OA} \cong \overline{AB}$ . Luego, la cicloide de Ceva es el conjunto de puntos  $P$  en  $\overleftrightarrow{OA}$  que satisfacen  $\overline{BP} \cong \overline{AB}$

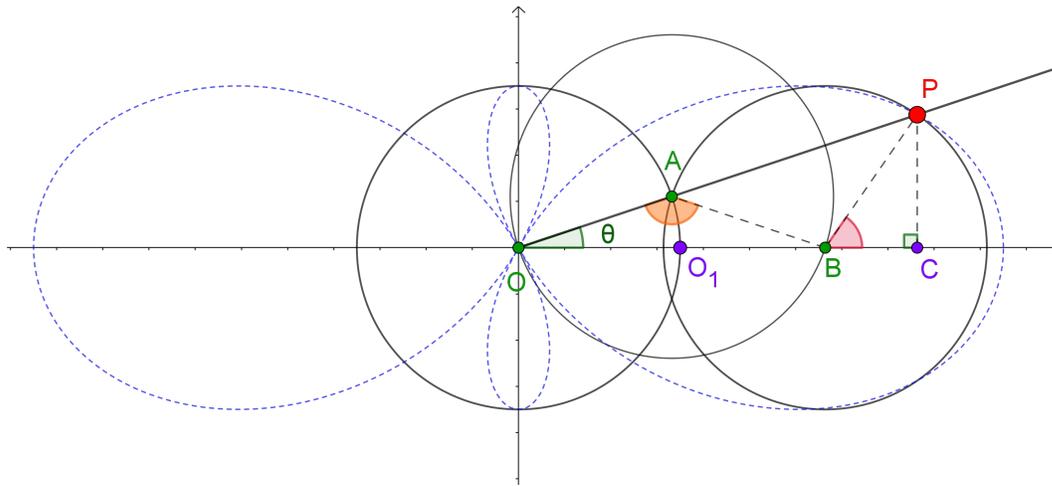


Figura 5-95

Para deducir las ecuaciones paramétricas de la curva, sea la circunferencia de centro  $O$  y radio  $a$ . Llámese  $\theta$  al parámetro asociado a la medida del ángulo determinado por  $AOO_1$ , y sea  $C$  el pie de la perpendicular de  $P$  sobre el eje  $X$ . De acuerdo con la figura se evidencia que:

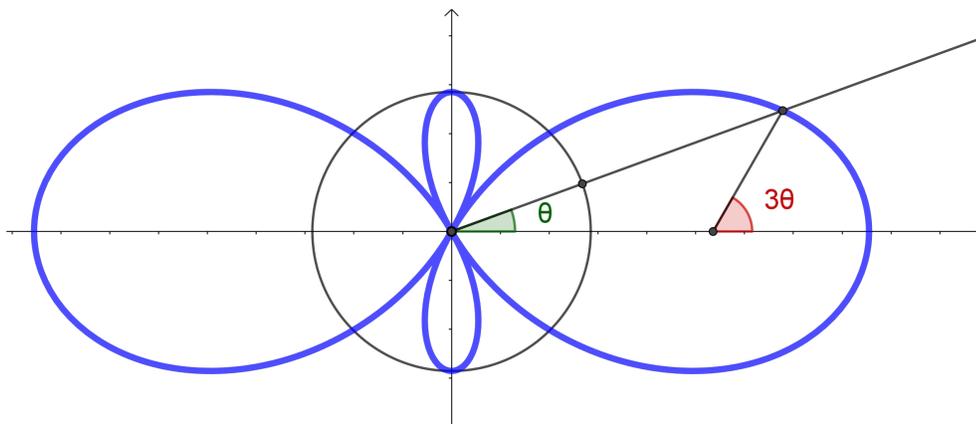
$$x = OB + BC \qquad y = CB \qquad (5-227)$$

Sea  $\triangle OBA$ , se deduce es isósceles y por lo tanto:

$$\pi = 2\theta + \angle BAO \iff \angle BAO = \pi - 2\theta \qquad (5-228)$$

Del mismo modo, sea  $\triangle BPA$ , se deduce es isósceles por la definición de la curva. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \pi = 2\angle BAP + \angle PBA &\iff \angle PBA = \pi - 2(2\theta) \\ &\angle PBA = \pi - 4\theta \end{aligned}$$



**Figura 5-96:** Cicloide de Ceva como trisectriz

Nótese también que:

$$\begin{aligned}\angle OBA + \angle ABP + \angle PBC &= \pi \\ \theta + (\pi - 4\theta) + \angle PBC &= \pi \\ \angle PBC &= 3\theta\end{aligned}\tag{5-229}$$

Ya teniendo el valor de estos ángulos es posible deducir las expresiones de la curva. De  $\triangle OBA$ , por el teorema del coseno:

$$\begin{aligned}OB^2 &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\pi - 2\theta) = 2a^2 + 2a^2 \cos 2\theta \\ &= 2a^2(1 + \cos 2\theta) = 4a^2 \cos^2 \theta \\ OB &= 2a \cos \theta\end{aligned}\tag{5-230}$$

A partir de  $\triangle BCP$ , se obtienen las expresiones:

$$BC = a \cos 3\theta \qquad CP = a \operatorname{sen} 3\theta\tag{5-231}$$

Reemplazando (5-230) y (5-231) en (5-227) se obtiene la parametrización de la cicloide de Ceva como:

$$\boxed{x = a(\cos 3\theta + 2 \cos \theta) \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} 3\theta}\tag{5-232}$$

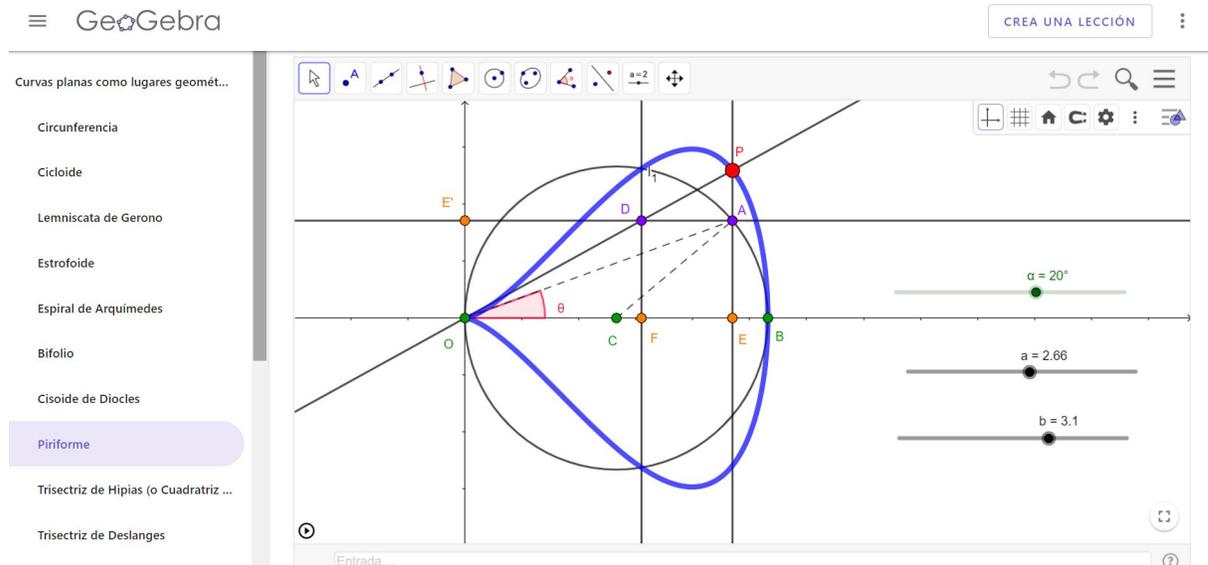
## 6. Repositorio de curvas

Para visualizar mejor cada una de las curvas mostradas en este documento, se creó un repositorio digital en la página web del software de geometría dinámica, Geogebra. Teniendo en cuenta que cada una de ellas fueron construidas usando este software, los archivos fueron cargados de tal forma que la interfaz mostrara el listado de curvas y una previsualización general de cada una de ellas; al hacer clic sobre una curva en específico, esta carga junto con deslizadores de control asociados al parámetro que determina la curva, el tamaño y la forma.



**Figura 6-1:** A la izquierda, listado de curvas. En la ventana principal, previsualización miniatura de cada una de ellas.

Cada archivo se puede editar y/o descargar a conveniencia del usuario. Puede accederse a través del link <https://www.geogebra.org/m/adwtc4wn>



**Figura 6-2:** Piriforme con sus deslizadores de control asociados

Se espera así que cada curva adquiera una visualización menos estática y que sea más sencillo intuir algunas de sus propiedades, haciendo énfasis especialmente en su definición como lugar geométrico. Explorando los applets, también se muestran las ecuaciones paramétricas deducidas.

## 7. Conclusiones

La investigación entorno a las curvas es un campo muy fructífero y ha hecho valiosos aportes en el desarrollo de otras ramas de las matemáticas como la topología, la geometría diferencial y la geometría algebraica. Es notorio también, que el cuerpo de saberes de las matemáticas no es estático y siempre está en constante cambio: nuevas teorías ofrecen nuevas herramientas para repensar y ampliar los objetos de estudio, desde la introducción de un sistema coordenado para visualizar las curvas, hasta la creación de la geometría analítica y del cálculo como herramientas fundamentales para el estudio de las mismas.

Varios matemáticos de distintas épocas dedicaron décadas en el estudio de trayectorias y movimiento de cuerpos que condujeron al descubrimiento de nuevas curvas o de propiedades afines a ellas. El catálogo de curvas es amplio y parte de esto se debe a la búsqueda de una demostración de los tres problemas clásicos de la Antigua Grecia (curvas como la séxtica de Cayley, la espiral de Arquímedes, campila de Eudoxo y demás trisectrices). Aún así después de que se demostrara su imposibilidad con regla y compás, el interés por descubrir nuevas curvas o propiedades de estas ha prevalecido, gracias a la libertad que ofrece la exploración matemática mediante la observación de figuras el plano o en el espacio (curvas como la cardioide, lituus, cocleoide, serpentina, entre otras).

Por otro lado, la dificultad entorno a la visualización y exploración de curvas mecánicas ha sido común a lo largo del tiempo, por lo que debe destacarse la ayuda que brinda un software de geometría yendo más allá de los dibujos estáticos, en donde se permite cambiar la forma de cómo estudiar las propiedades de una curva en tiempo real, variando parámetros asociados a escalas, puntos, direcciones o rotaciones. Casi siempre hay varios caminos para

iniciar el proceso de parametrización, pero no todos conllevan a resultados. Por tal razón, se suele alternar entre distintos sistemas coordenados o se busca ese punto inicial específico que simplifique las expresiones. A fin de cuentas, las posibilidades de exploración que permiten estos programas potencializan la actividad matemática.

Dentro de las formas en cómo se aborda el tema de las ecuaciones paramétricas en libros de texto, resulta un poco paradójico que teniendo un catálogo tan extenso de curvas planas (algunas con importancia histórica) se tienda a recurrir a un número reducido de estas. Es importante recordar que un manejo fluido y un buen razonamiento con las ecuaciones paramétricas ofrece ventajas sobre las matemáticas, la física y la ingeniería: modelación, simplificación de expresiones algebraicas en sistemas coordenados parabólicos o polares, y otras utilidades en torno a las integrales de línea y de superficies.

Ya por último, dentro del estudio de propiedades geométricas de una curva, permitir describirlas en términos matemáticos como lo permiten las ecuaciones paramétricas, son una ventana hacia el estudio de otras propiedades generales en el campo de las matemáticas. Como ya se mencionó, el cuerpo de las matemáticas no es completo, luego existen curvas y muchas más propiedades por ser descubiertas.

# Referencias

- Andrews, N. (2016). Albrecht dürer's personal underweysung der messung. *Word & Image*, 32(4), 409-429. Descargado de <https://doi.org/10.1080/02666286.2016.1216821>  
doi: 10.1080/02666286.2016.1216821
- Cajori, F. (1999). *A history of mathematics* (Vol. 303). American Mathematical Soc.
- de Longchamps, G. (1884). *Cours de mathématiques spéciales: Géométrie analytique à deux dimensions. 1884*. C. Delagrave. Descargado de <https://books.google.com.co/books?id=S8gEAAAAYAAJ>
- de Longchamps, G. A. G. (1890). *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre*. C. Delagrave.
- Folkerts, M. (2005). Remarks on mathematical terminology in medieval latin: Greek and arabic influences. *Archivum Latinitatis Medii Aevi-Bulletin du Cange (ALMA)*.
- Lawrence, J. D. (2013). *A catalog of special plane curves*. Courier Corporation.
- Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica*. Editorial Limusa.
- Lockwood, E. H. (1967). *A book of curves*. Cambridge University Press.
- Olalquiaga, P., y Olalquiaga, A. (2005). *El libro de las curvas*. Fundación Esteyco.
- Rosenfeld, B. (s.f.) *Conics book i to vii*. Universidad del Estado de Pensilvania. Descargado de <https://www.math.uh.edu/~shanyuji/History/Appendix/Appendix-11.pdf>
- Russo, L. (2003). *The forgotten revolution: how science was born in 300 bc and why it had to be reborn*. Springer Science & Business Media.
- Sanz, A. P., y Dalí, I. S. (s.f.). *Curvas con historia: de las cónicas a las ecuaciones de las flores*.
- Sarmiento, B. (2011). Diseño de mecanismo con cabri plus para obtener ecuaciones pa-

- ramétricas de algunas curvas. *Memorias 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*.
- Schwartzman, S. (1994). *The words of mathematics: An etymological dictionary of mathematical terms used in english*. MAA.
- Smith, D. E. (1923a). *History of mathematics: General survey of the history of elementary mathematics* (Vol. 1). Ginn.
- Smith, D. E. (1923b). *History of mathematics: General survey of the history of elementary mathematics* (Vol. 2). Ginn.
- Spivak, M. (1988). *Cálculo infinitesimal*. Reverté.
- Stewart, J., Clegg, D. K., y Watson, S. (2020). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning.
- Stirling, J. (1717). *Lineae tertii ordinis newtonianae, sive, illustratio tractatus d. newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis: cui subjungitur, solutio trium problematum*. Ripol Klassik.
- Struik, D. (1986). *A sourcebook in mathematics, 1200—1800* (princeton. NJ: Princeton.
- Teixeira, F. G. (1905). *Tratado de las curvas especiales notables* (Vol. 22). Imprenta de la Gaceta de Madrid.
- Truesdell, C. (1992). Corrections and additions for “maria gaetana agnesi”. *Archive for History of Exact Sciences*, 43. Descargado de <https://doi.org/10.1007/BF00374764>  
doi: 10.1007/BF00374764
- von Littrow, J. J. (1838). *Kurze anleitung zur gesammten mathematik*. Gerold.

# Anexos

## A. Ecuaciones cartesianas de algunas curvas

A lo largo del documento se omitieron las deducciones de ecuaciones cartesianas de algunas curvas, debido a que el objetivo inicial fue la deducción de parametrizaciones. Sin embargo, se muestran aquí algunos resultados que resultan de la manipulación algebraica de las ecuaciones paramétricas o de sus ecuaciones polares:

- **Cicloide:** se obtuvo que las ecuaciones paramétricas son de la forma:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad ; \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

Para obtener su expresión cartesiana debe despejarse para  $\theta$ . De la ecuación en  $y$  se tiene que:

$$\cos \theta = 1 - \frac{y}{a} \quad \iff \quad \theta = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

Por identidades trigonométricas, se sabe que  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ . Despejando para  $\operatorname{sen} \theta$ , y reemplazando el valor de  $\cos \theta$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{y}{a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{2y}{a} - \frac{y^2}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{a^2}(2ay - y^2)} \\ &= \pm \frac{1}{a} \sqrt{2ay - y^2} \end{aligned}$$

Ya con esto, se reemplazan ambas expresiones en la ecuación de  $x$ , obteniendo:

$$x = a \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) \mp \sqrt{2ay - y^2} \quad (-1)$$

en donde debe tomarse el signo negativo o positivo de acuerdo con los valores de  $\theta$  menores y mayores a  $\pi$  respectivamente. Nótese la complejidad de la expresión cartesiana, razón por la que se suele preferir la expresión paramétrica.

- **Astroide:** las ecuaciones paramétricas de la astroide son:

$$x = a \cos^3 \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta$$

Se obtiene la ecuación cartesiana elevando a la potencia de dos tercios ambas ecuaciones, de la forma:

$$x^{2/3} = a^{2/3} \cos^2 \theta \quad ; \quad y^{2/3} = a^{2/3} \operatorname{sen}^2 \theta$$

Sumando ambas ecuaciones se concluye que la ecuación cartesiana de la astroide es:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (-2)$$

Para algunos casos podría ser útil la versión polinómica de la ecuación cartesiana.

Elevando al cubo esta última ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} (x^{2/3} + y^{2/3})^3 &= (a^{2/3})^3 \\ x^{6/3} + 3x^{4/3}y^{2/3} + 3x^{2/3}y^{4/3} + y^{6/3} &= a^{6/3} \\ x^2 + 3x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) + y^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 - a^2 &= -3x^{2/3}y^{2/3}(a^{2/3}) \\ (x^2 + y^2 - a^2)^3 &= -27a^2x^2y^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación polinómica de la astroide es:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0 \quad (-3)$$

- **Curva de Agnesi:** se obtuvo la parametrización de la forma:

$$x = 2a \cot \theta \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Operando sobre ambas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left( \frac{2a \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right)^2 & (2a)y &= (2a)2a \operatorname{sen}^2 \theta \\ x^2 \operatorname{sen}^2 \theta &= 4a^2 \cos^2 \theta & 2ay &= 4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, es posible eliminar el parámetro  $\theta$ :

$$\begin{aligned}x^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 2ay &= 4a^2 \cos^2 \theta + 4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\x^2 \operatorname{sen}^2 \theta + 4a^2 \operatorname{sen}^2 \theta &= 4a^2 (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ \operatorname{sen}^2 \theta (x^2 + 4a^2) &= 4a^2 \\ 2a \operatorname{sen}^2 \theta (x^2 + 4a^2) &= 8a^3 \\ y(x^2 + 4a^2) &= 8a^3\end{aligned}$$

Luego, la ecuación cartesiana explícita de la curva de Agnesi es:

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \quad (-4)$$

■ **Cisoide de Diocles:** a partir de las expresiones paramétricas

$$x = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \quad ; \quad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta \tan \theta \quad (-5)$$

es posible obtener su expresión polar:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^4 \theta + 4a^2 \operatorname{sen}^4 \theta \tan^2 \theta \\ r^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^4 \theta (1 + \tan^2 \theta) \\ r^2 &= 4a^2 \operatorname{sen}^4 \theta \sec^2 \theta \\ r &= 2a \operatorname{sen}^2 \theta \sec \theta \\ r &= 2a \operatorname{sen} \theta \tan \theta\end{aligned} \quad (-6)$$

Y a partir de esta, se obtiene su expresión cartesiana:

$$\begin{aligned}r &= 2a \operatorname{sen} \theta \tan \theta \\ r^2 &= 2a \tan \theta (r \operatorname{sen} \theta) \\ x^2 + y^2 &= 2ay \tan \theta \\ x^2 + y^2 &= 2ay \left( \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} \right) \\ x^2 + y^2 &= 2ay \left( \frac{y}{x} \right) \\ x(x^2 + y^2) &= 2ay^2\end{aligned} \quad (-7)$$

Resolviendo esta última expresión, es posible obtener una expresión explícita de la cisoide de Diocles:

$$\begin{aligned}2ay^2 - x^3 - xy^2 &= 0 \\y^2(2a - x) &= x^3 \\y^2 &= \frac{x^3}{2a - x}\end{aligned}\tag{-8}$$

- **Trisectriz de Hipias o Cuadratriz de Dinóstrato:** la parametrización hallada es de la forma:

$$x = \frac{2a\theta}{\pi} \cot \theta \quad ; \quad y = \frac{2a\theta}{\pi}\tag{-9}$$

La ecuación cartesiana se obtiene de sustituir  $y$  y  $\theta$  en la expresión de  $x$ :

$$x = y \cot \left( \frac{\pi y}{2a} \right)\tag{-10}$$

- **Bicornio:** las ecuaciones paramétricas del bicornio son:

$$x = a \cos \theta \quad ; \quad y = \frac{a \operatorname{sen}^2 \theta}{2 + \operatorname{sen} \theta}$$

Manipulando algebraicamente estas expresiones:

$$\begin{aligned}
(2 + \operatorname{sen} \theta)y &= a \operatorname{sen}^2 \theta \\
ay(2 + \operatorname{sen} \theta) &= a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\
ay(2 + \operatorname{sen} \theta) &= a^2(1 - \cos^2 \theta) \\
(4 + 4 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) &= \frac{(a^2 - x^2)^2}{a^2 y^2} \\
\frac{4a \operatorname{sen}^2 \theta}{y} + \operatorname{sen}^2 \theta &= \frac{(a^2 - x^2)^2}{a^2 y^2} + 4 \\
\frac{\operatorname{sen}^2 \theta(4a + y)}{y} &= \frac{(a^2 - x^2)^2 + 4a^2 y^2}{a^2 y^2} \\
\frac{(a^2 - x^2)(4a + y)}{y} &= \frac{(a^2 - x^2)^2 + 4a^2 y^2}{y^2} \\
y(a^2 - x^2)(4a + y) - (a^2 - x^2)^2 &= 4a^2 y^2 \\
(a^2 - x^2)[y(4a + y) - (a^2 - x^2)] &= 4a^2 y^2 \\
(a^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2 + 4ay) &= 4a^2 y^2 \\
a^2 y^2 - x^2 y^2 &= a^4 + 4a^2 y^2 + x^4 - 4a^3 y - 2a^2 x^2 + 4ax^2 y \\
y^2(a^2 - x^2) &= (x^2 + 2ay - a^2)^2 \tag{-11}
\end{aligned}$$

De esta expresión cartesiana, puede hallarse una expresión para  $y$  si se resuelve la ecuación cuadrática en términos de  $y$ :

$$y^2(3a^2 + x^2) + y(4ax^2 - 4a^3) + a^4 + x^4 - 2a^2 x^2 = 0 \tag{-12}$$

De modo que, usando la ecuación cuadrática se obtiene:

$$y = \frac{(a^2 - x^2)(2a \pm (a^2 - x^2)^{1/2})}{3a^2 + x^2} \tag{-13}$$

- **Trisectriz de Maclaurin:** se obtuvo la ecuación polar

$$r = \frac{a}{2}(4 \cos \theta - \sec \theta)$$

Sabiendo la relación entre ecuaciones polares y rectangulares, se obtiene su expresión cartesiana como se sigue:

$$r = \frac{a}{2} \left( \frac{4 \cos^2 \theta - 1}{\cos \theta} \right)$$

$$r = \frac{a}{2} \left( \frac{4r^2 \cos^2 \theta - r^2}{r^2 \cos \theta} \right)$$

$$r = \frac{a}{2} \left( \frac{4x^2 - r^2}{rx} \right)$$

$$2xr^2 = a(4x^2 - (x^2 + y^2))$$

$$2x(x^2 + y^2) = a(3x^2 + y^2) \quad (-14)$$

- **Lemniscata de Geronio:** de sus ecuaciones paramétricas

$$x = a \cos \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (-15)$$

se obtiene su ecuación cartesiana de la forma:

$$y = a \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$y^2 = x^2(1 - \cos^2 \theta)$$

$$y^2 = x^2 - x^2 \cos^2 \theta$$

$$a^2 y^2 = a^2 x^2 - x^4$$

$$x^4 = a^2 x^2 - a^2 y^2$$

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2) \quad (-16)$$

- **Concoide de Nicómedes:** la ecuación polar de la concoide de Nicómedes es de la forma:

$$r = a \sec \theta \pm b$$

en donde cada signo representa una rama de la concoide sobre  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Al hallar la expresión cartesiana se verifica que ambas representan el mismo subconjunto:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{a}{\cos \theta} \pm b \\
 r &= \frac{ra}{r \cos \theta} \pm b \\
 rx &= ra \pm bx \\
 r(x - a) &= \pm bx \\
 r^2(x - a)^2 &= b^2x^2 \\
 (x^2 + y^2)(x - a)^2 &= b^2x^2 \tag{-17}
 \end{aligned}$$

- **Estrofoide recta:** se halló su ecuación polar de la forma:

$$r = a(\sec \theta \pm \tan \theta)$$

Al hallar su expresión cartesiana se verifica que independientemente de su signo, se traza la misma curva:

$$\begin{aligned}
 r &= a(\sec \theta \pm \tan \theta) \\
 r &= \frac{a}{\cos \theta} \pm \frac{a \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \\
 r &= \frac{ar}{r \cos \theta} \pm \frac{ar \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} \\
 r - \frac{ar}{x} &= \pm \frac{ay}{x} \\
 r \left(1 - \frac{a}{x}\right) &= \pm \frac{ay}{x} \\
 r^2 \left(\frac{x - a}{x}\right)^2 &= \frac{a^2y^2}{x^2} \\
 (x^2 + y^2)(x - a)^2 &= a^2y^2 \\
 x^2(x - a)^2 + x^2y^2 - 2axy^2 + a^2y^2 &= a^2y^2 \\
 x(x - a)^2 + xy^2 - 2ay^2 &= 0 \\
 x^3 - 2ax^2 + a^2x + xy^2 - 2ay^2 &= 0 \\
 x(x^2 + y^2) - 2a(x^2 + y^2) + a^2x &= 0 \\
 (x - 2a)(x^2 + y^2) + a^2x &= 0 \tag{-18}
 \end{aligned}$$

- **Curva kappa o de Gutschoven:** se obtuvo la ecuación polar de la forma:

$$r = a \tan \theta$$

Se obtiene su expresión cartesiana de la forma:

$$r = a \tan \theta$$

$$r = \frac{ay}{x}$$

$$(x^2 + y^2) = \frac{a^2 y^2}{x^2}$$

$$x^2(x^2 + y^2) = a^2 y^2 \quad (-19)$$

- **Campila de Eudoxo:** de las expresiones paramétricas

$$x = a \sec \theta \quad ; \quad y = a \sec \theta \tan \theta$$

es posible hallar la ecuación polar para los puntos  $P(r, \theta)$  de la curva. Por el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = a^2 \sec^2 \theta + a^2 \sec^2 \theta \tan^2 \theta$$

$$= a^2 \sec^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

$$= a^2 \sec^4 \theta$$

$$r = a \sec^2 \theta \quad (-20)$$

Ya con la ecuación polar, se halla su expresión cartesiana:

$$r = a \sec^2 \theta = \frac{ar^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

$$r = \frac{ar^2}{x^2}$$

$$(x^2 + y^2) = \frac{a^2(x^2 + y^2)^2}{x^4}$$

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2) \quad (-21)$$

- **Cruciforme:** de las ecuaciones paramétricas

$$x = a \sec \theta \quad ; \quad y = a \csc \theta$$

se aplica el teorema de Pitágoras se obtiene la ecuación polar para los puntos  $P(r, \theta)$  de la curva:

$$\begin{aligned}
 r^2 &= a^2 \sec^2 \theta + a^2 \csc^2 \theta \\
 &= a^2 (\sec^2 \theta + \csc^2 \theta) \\
 &= a^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \right) \\
 r &= \frac{a}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{2a}{\sin(2\theta)} \tag{-22}
 \end{aligned}$$

Y ahora, teniendo la ecuación polar se halla su expresión cartesiana:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{a}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{ar^2}{r \cos \theta \cdot r \sin \theta} \\
 r &= \frac{a(x^2 + y^2)}{xy} \\
 x^2 + y^2 &= \frac{a^2(x^2 + y^2)^2}{x^2 y^2} \\
 x^2 y^2 &= a^2(x^2 + y^2) \tag{-23}
 \end{aligned}$$

- **Cardioide:** a partir de la expresión polar

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

es posible determinar su expresión cartesiana:

$$\begin{aligned}
 r &= a(1 - \cos \theta) = a - a \cos \theta \\
 r^2 &= ar - ar \cos \theta \\
 x^2 + y^2 + ax &= ar \\
 (x^2 + y^2 + ax)^2 &= a^2(x^2 + y^2) \tag{-24}
 \end{aligned}$$

- **Trisectriz de Deslanges:** se obtuvo la ecuación polar

$$r = \frac{\pm a \operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen} \theta}$$

cuyo signo positivo o negativo corresponden a dirección de la traza. Verificando que ambas hacen referencia a una única expresión cartesiana:

$$r = \frac{\pm a \operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$r^2 = \frac{a^2(1 - \cos \theta)}{2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{a^2 r^2 (1 - \cos \theta)}{2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2(x^2 + y^2) - a^2 x r}{2y^2}$$

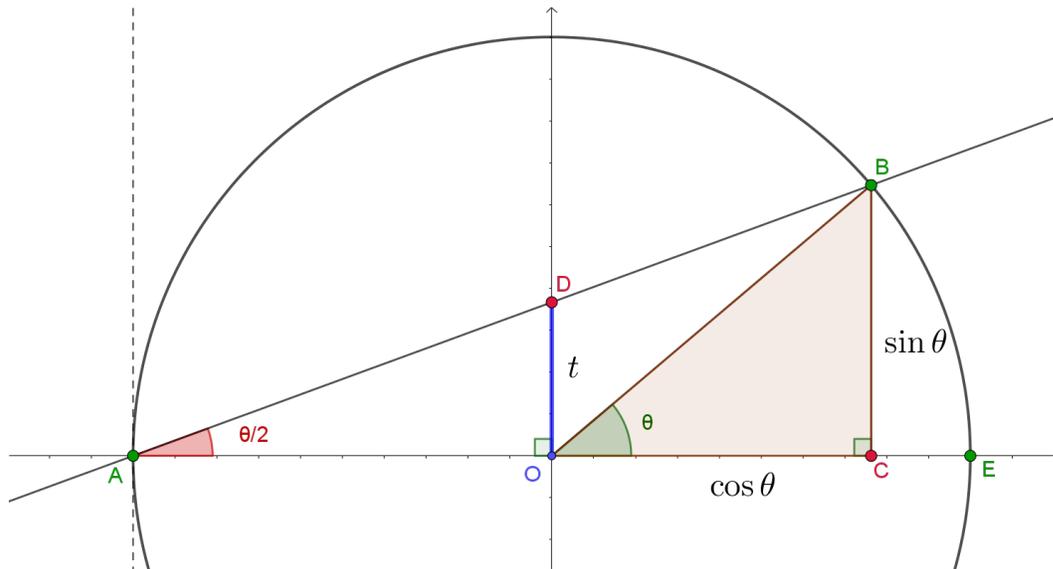
$$2y^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 + y^2) = -a^2 x r$$

$$(x^2 + y^2)^2(2y^2 - a^2)^2 = a^4 x^2(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)(2y^2 - a^2)^2 = a^4 x^2 \tag{-25}$$

## B. Sustitución de Euler-Weierstrass

La sustitución o transformación de Euler-Weierstrass permite expresar las funciones trigonométricas como funciones racionales de una variable. Siendo una circunferencia unitaria centrada en el origen, escójase un punto  $A(-1,0)$  por el que pasa una recta variable de pendiente  $t$  de la siguiente forma:



**Figura -1:** Transformación de Euler - Weierstrass

La recta es secante a la circunferencia en  $B$ . Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta es:

$$y = t(x + 1)$$

Y que la ecuación de la circunferencia unitaria es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Se sustituyen estos valores obteniendo:

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$$

$$x^2 + t^2x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$x^2(1 + t^2) + x(2t^2) + (t^2 - 1) = 0$$

Al resolver para  $x$  usando ecuación cuadrática, se obtiene:

$$x = \frac{-t^2 \pm 1}{1 + t^2}$$

Al tomar el signo menos de la expresión, se obtiene la solución  $x = -1$  que ya se sabía de antemano, teniendo en cuenta que la recta pasa por  $A(-1, 0)$ . Al tomar el signo positivo, se obtiene:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (-26)$$

Con este valor, se sustituye en la ecuación de la circunferencia obteniendo un valor para  $y$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 \\ y^2 &= \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} \\ y &= \pm \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

Sin embargo, la expresión con signo negativo corresponde a una solución extraña. Por lo tanto, se toma la expresión con signo positivo obteniendo:

$$y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (-27)$$

Ahora, obsérvese que  $B$  forma un ángulo  $\theta$  respecto al origen. Por lo tanto, por relaciones trigonométricas se sabe que  $y = \text{sen } \theta$  y  $x = \text{cos } \theta$ . De esta forma, se concluye que:

$$\boxed{x = \text{cos } \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad ; \quad y = \text{sen } \theta = \frac{2t}{1 + t^2}} \quad (-28)$$

Por otro lado, nótese que el arco  $\widehat{EB}$  es común respecto a  $O$  y  $A$ . Siendo en  $O$  un ángulo central, se deduce por el teorema del ángulo central que  $\angle BAE = \theta/2$ . Así, de  $\triangle ODA$  es cierto que  $\tan(\theta/2) = t$ , es decir: haciendo que  $t = \tan(\theta/2)$  con  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , las funciones  $\text{cos } \theta$  y  $\text{sen } \theta$  son equivalentes a las mostradas.

## C. Créditos de imágenes

A lo largo de la elaboración del documento se usaron imágenes tomadas de la web. Créditos y agradecimientos a cada uno de sus autores.

- Terminal Grand Central. Créditos a Anne (2006). Licencia Creative Commons  
<https://www.flickr.com/photos/ilike/31135657>
- Software Universe Sandbox<sup>2</sup>. Captura de autoría propia.
- Epiciclos de Cassini. *Encyclopaedia Britannica* (1ra Edición, 1771; reimpresión facsímil de 1971), Volumen 1, Fig. 2 del grabado XL, page 449. Licencia de Dominio Público
- Gastrafetes. Reconstrucción de una ballesta griega antigua en Saalburgmuseum de Bad Homburg v. d. Höhe, Hesse, Alemania. Licencia de Dominio Público
- Hoja de hiedra. *Nature Drawing and Design* (1904) por Frank Steeley. Licencia de Dominio Público.
- Bicornio. Colección de trajes del Museo de Brooklyn en el Museo Metropolitano de Arte (2017). Créditos a Eleanor Fayerweather, 1949. Licencia de Dominio Público.
- Araña de techo, araña *Holocnemus Plucheii*. Créditos a Pudding4brains (2019). Licencia de Dominio Público.
- Mejillón de agua dulce *Lampsilis*. Créditos a Westcott Phillip. Licencia de Dominio Público.
- *Galax Urceolata*. Créditos a BlueRidgeKitties (2011). Licencia Creative Commons.  
<https://www.flickr.com/photos/blueridgekitties/5809968981>
- Disección de un riñón de oveja. Clase de Biología de la Universidad del Norte de Arizona. Canal de Youtube: NAUBI0202
- Lituus en una moneda de plata. Créditos a CNP Classical Numismatic Group INC. Licencia Creative Commons.  
<http://www.cngcoins.com/>

- Sacerdote sujetando un lituus. Nordisk familjebok (1904). Licencia de Dominio Público
- Trillium. Créditos a Sean Dreilinger (2007). Licencia Creative Commons.  
<https://www.flickr.com/photos/seandreilinger/426366874/>
- Flor de cuatro pétalos. Anónimo. Licencia de Dominio Público.  
<https://www.pxfuel.com/en/free-photo-eudme>