

**DISEÑO CIENTÍFICO AMBIENTAL**

**SIMULACIÓN ENERGÉTICA DE LA ARQUITECTURA DEL ESPACIO URBANO**



**TESIS DOCTORAL**

**SEVILLA, MAYO DE 2013**

**DOCTORANDO: JESÚS ALBERTO PULIDO ARCAS**

**DIRECTOR: JOSÉ MARÍA CABEZA LAINEZ**

La presente tesis doctoral se ha desarrollado con financiación de una beca de investigación predoctoral de la Consejería de Innovación, ciencia y empresa de la Junta de Andalucía, bajo el siguiente programa:

*Incentivos para la formación de personal docente e investigador predoctoral en las universidades públicas de Andalucía, en áreas de conocimiento consideradas deficitarias por necesidades docentes. Convocatoria 2008.*

La beca de investigación ha tenido una duración de 4 años, desde el 1 de Abril de 2009 al 1 de Abril de 2013.

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

### 1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- Teoría de factores de forma y factores de configuración

1.2.- Ley de proyección del ángulo sólido

1.3.- El diseño científico en arquitectura y urbanismo

1.4.- Justificación de la unidad temática de la tesis

### 2.- OBJETIVOS

### 3.- FACTORES DE CONFIGURACIÓN PARA SUPERFICIES CURVAS

3.1.- Introducción

3.2.- Leyes para hallar los factores de configuración en superficies curvas

3.3.- Sectores esféricos

3.4.- Factores de configuración para diferentes superficies curvas

3.5.- Factores de configuración para volúmenes compuestos por tres superficies

3.6.- Interreflexiones entre superficies curvas que componen un volumen

3.7.- Círculo en una posición vertical

3.8.- Conclusiones

### 4.- NUEVOS FACTORES DE CONFIGURACIÓN BASADOS EN EL CÍRCULO Y EL SEMICÍRCULO

4.1.- Introducción

4.2.- Integración directa para un elemento diferencial respecto a un disco en un plano paralelo al del emisor

4.3.- Integración directa para un elemento diferencial respecto a un disco en un plano perpendicular al del emisor

4.4.- Comprobación de la relación para los factores paralelo y perpendicular

4.5.- Construcción del vector radiación para debido a un emisor circular

4.6.- Factores de configuración debidos al semicirculo

4.7.- Representación gráfica

4.8.- Conclusiones

## 5.- GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE PROYECCIÓN DEL ÁNGULO SÓLIDO PARA EL CAMPO RADIANTE

5.1.- Introducción

5.2.- Validación semianalítica para el rectángulo

5.3.- Método gráfico para emisores circulares

5.4.- Conclusiones

## 6.- RESULTADOS OBTENIDOS Y DISCUSIÓN

6.1.- Leyes de Cabeza-Lainez

6.2.- Aplicación de la segunda ley al cálculo de sectores de esfera

6.3.- Factores de configuración para diferentes superficies curvas

6.4.- Factores de configuración para volúmenes compuestos por tres superficies

6.5.- Discusión de los resultados de los puntos 4.3 y 4.4.

6.6.- Nuevos factores de configuración basados en el círculo

6.7.- Validación de la ley de proyección del ángulo sólido para emisores circulares

## 7.- CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

## 8.- BIBLIOGRAFÍA

## 9.- PRODUCCIÓN CIENTÍFICA DERIVADA DE LA PRESENTE TESIS

## **1.- INTRODUCCIÓN**

## 1.- INTRODUCCIÓN

### 1.1.- TEORÍA DE FACTORES DE FORMA Y FACTORES DE CONFIGURACIÓN

En el campo del diseño la transferencia de energía mediante radiación ha presentado durante largo tiempo un serio reto para diseñadores, proyectistas e investigadores. El adecuado conocimiento de los métodos y algoritmos que regulan el intercambio energético entre superficies y elementos diferenciales es fundamental para poder afrontar con éxito problemas concernientes al diseño de formas y volúmenes en cualquier campo de la industria, incluida la de la edificación.

La relación fundamental que regula el intercambio entre elementos diferenciales de dos superficies que se “ven” entre sí es la siguiente:

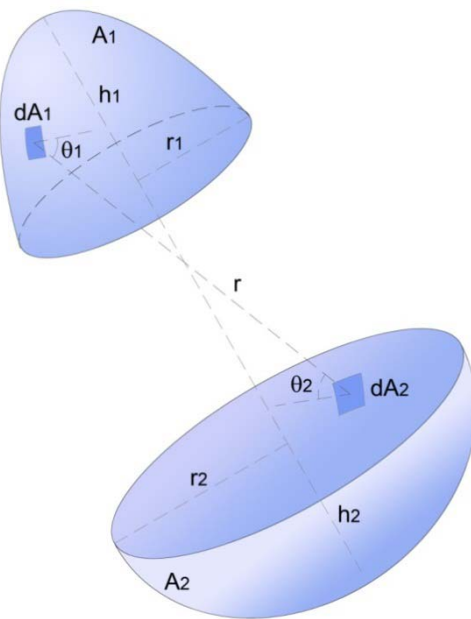


Ilustración 1: Teorema de reciprocidad entre dos superficies A1 y A2

$$d\phi_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \frac{dA_1 \cdot dA_2}{\pi \cdot r^2} \quad [1]$$

Pasando a expresar el flujo neto de energía entre ambas superficies, y considerando que no existen pérdidas de transmisión en el medio, tenemos la conocida expresión:

$$d\phi = E_{b1}A_1F_{12} - E_{b2}A_2F_{21} \rightarrow E_{b1}A_1F_{12} = E_{b2}A_2F_{21} \quad [2]$$

Conocida como principio de reciprocidad de Helmholtz o teorema de reciprocidad de Lambert. Esta relación fundamental que regula el intercambio de energía entre superficies fue establecida en 1760 por Lambert quien, en su obra " *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*" expone en su teorema XVI:

*"Si duae sint superficies ALKD, FEI aequae luminosae sibi que mutuo untcunque obuersae, quantitas radiorum ex unaquaque in alteram incidentum est aequalis"*

Que puede traducirse como:

*"Si dos superficies ALKD, FEI son igualmente luminosas y se miran mutuamente de algún modo, la cantidad de rayos (flujo) que inciden de una a otra es igual"*

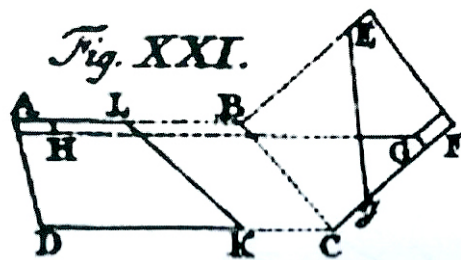


Ilustración 2: Gráfico original de Lambert para ilustrar el teorema de reciprocidad.

Expresado de modo matemático

$$A_i \cdot F_{ij} = A_j \cdot F_{ji} \quad [3]$$

Es decir, que la energía transferida entre dos superficies depende de sus áreas y de unos factores adimensionales, llamados factores de forma.

Si planteamos la integral de la ecuación 1 para ambas superficies tenemos

$$\Phi_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \cos\theta_1 * \cos\theta_2 * \frac{dA_1 * dA_2}{\pi * r^2} \quad [4]$$

Que constituye la expresión fundamental que regula la transferencia radiante entre dos superficies que intercambian energía. El poder emisor de los elementos diferenciales se considera constante y está fuera de la integral, mientras que todos los elementos de su interior de la integral son parámetros geométricos; esto es, se trata de un problema de diseño formal.

Estas expresiones están enunciadas para cuerpo negros teóricos, pero también son aplicables a todos los materiales que sean difusores lambertianos perfectos, esto es, que cumplen la ley de Lambert; la inmensa mayoría de materiales empleados en la edificación se comportan de este modo.

La resolución exacta de esta integral para diversos tipos de formas ha representado desde 1760 un problema complejo ya que, en muchos casos, se debe hacer a través de integrales cuádruples. En consecuencia, se ha tenido que recurrir a otras técnicas, basados en métodos semianalíticos o experimentales que han dado como resultado aproximaciones en forma de tablas de diseño o fórmulas simplificadas.

Numerosos autores han intentado resolver estas ecuaciones para diversidad de formas. Podemos citar a Moon y Spencer<sup>1</sup>, McAllister<sup>2</sup>, Higbie<sup>3</sup>, Jiro Yamauchi<sup>4</sup> o Howell<sup>5</sup>. En todos los casos, ha quedado patente la dificultad de la integración y resolución de los factores de forma, que regulan el intercambio radiante entre superficies completas, así como los factores de configuración, que regula aquél entre una superficie emisora y un punto situado en una superficie que “ve” a la emisora.

La resolución de todas estas ecuaciones tiene una aplicación directa al proceso de generación formal en el campo de la arquitectura y el urbanismo, con un especial interés en el diseño científico orientado a calcular el intercambio energético por radiación en los edificios.

---

<sup>1</sup>Moon, P. H; Spencer D. E. (1981) *The Photoc Field*. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts.

<sup>2</sup>MacAllister, A. S. (1910). Graphical Solutions of Problems Involving Plane-Surface Lighting Sources . *Lighting World* 56. No.1356.

<sup>3</sup>Higbie, H. H. (1934). *Lighting Calculations*. John Wiley and Sons. New York.

<sup>4</sup>Yamauchi, J. (1932). Theory of Field of Illumination. *Researches of the Electro-technical Laboratory*. Tokyo. No. 339.

<sup>5</sup>Howell, John R, Robert Siegel and M. Pinar Menguc, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5th ed., Taylor and Francis/CRC, New York, 2010.



Este proceso es fundamental en el diseño urbano y edificatorio; su forma es el arma más eficaz con la que cuentan a la hora de regular la transferencia radiante entre las superficies y volúmenes que los componen. Por lo tanto, cualquier diseño que busque como objetivo una gestión eficiente y controlada de la energía debe contar, obligatoriamente, con las herramientas de cálculo, diseño y comprobación adecuadas.

En el campo de la energética edificatoria y urbana, la fuente de energía más abundante y confiable con la que contamos es el Sol, cuya energía es completamente gratuita y está disponible, en mayor o menor medida, en todos los lugares del planeta durante todo el año. Esta energía llega a los edificios en forma de espectro electromagnético con diversas longitudes de onda, de las cuales las más relevantes para nuestro estudio son las comprendidas entre 400 y 750 nm (espectro visible) y entre 800 nm y 1000  $\mu\text{m}$  (radiación infrarroja). La primera es responsable de la iluminación y la segunda de la transferencia calorífica. Del mismo modo, las fuentes de energía artificiales, ya sean luminosas o caloríficas, obedecen a las mismas leyes físicas: podemos citar como ejemplos representativos, las luminarias artificiales, de todo tipo, forma o temperatura emisora, o cualquier dispositivo que irradie o absorba energía del ambiente y modifique su temperatura, como por ejemplo, un radiador o la fachada de un edificio que aumenta su temperatura por efecto de la radiación solar infrarroja.

Todos los edificios y las áreas urbanas que componen son, de este modo, complejos sistemas intercambiadores de energía, en todas sus formas y longitudes de onda.

En cualquier caso, todas las superficies emisoras de radiación intercambian energía entre sí mediante la expresión canónica expresada en las ecuaciones 1, 2 y 4. En algunos casos es útil conocer el intercambio entre elementos diferenciales, en otros entre superficies emisoras y un punto, o en otros entre superficies emisoras completas.

La resolución de estas ecuaciones canónicas mediante integrales para las formas arquitectónicas comunes en arquitectura y urbanismo ha representado un problema importante para la ciencia, pues si no se conoce el intercambio exacto de energía entre las superficies de un edificio, así como su distribución punto a punto, es una tarea difícil pretender conseguir un diseño eficiente en términos energéticos. Podemos encontrar multitud de superficies (rectángulos, círculos, elipses, triángulos...) que se combinan de muy

diferentes modos para dar como resultado todo tipo de volúmenes (paralelepípedos, cilindros, esferas, sectores de esfera, conos...).

Durante más de 20 años, Cabeza Lainez ha investigado la naturaleza y cálculo de los factores de forma y factores de configuración, obteniendo como resultado la resolución exacta de ecuaciones de intercambio que hasta el momento sólo contaban con soluciones aproximadas, en forma de tablas o procesos iterativos. Entre las más destacadas podemos citar, entre muchas otras:

$$f(x, y) = \frac{E}{2} \left[ \arctan \frac{b}{y} - \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \cdot \arctan \frac{b}{\sqrt{a^2+y^2}} \right] \quad [5]$$

Factor de configuración entre una superficie emisora, de dimensiones a x b (horizontal x vertical) y un punto P situado en un plano perpendicular y a una distancia y de la misma.

$$f(x, y) = \frac{E}{2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \cdot \arctan \frac{b}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}} \cdot \arctan \frac{a}{\sqrt{b^2+y^2}} \right] \quad [6]$$

Factor de configuración entre una superficie emisora, de dimensiones a x b (horizontal x vertical) y un punto P situado en un plano paralelo y a una distancia y de la misma.

$$F_{1 \rightarrow 2} = 2bc \cdot \operatorname{atan} \left( \frac{b}{c} \right) + 2ab \cdot \operatorname{atan} \left( \frac{b}{a} \right) - 2b\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \operatorname{atan} \left( \frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}} \right) + \frac{a^2+c^2-b^2}{2} \cdot \ln(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \ln(a^2 + b^2) + \frac{b^2-c^2}{2} \cdot \ln(b^2 + c^2) - \frac{a^2 + c^2}{2} \cdot \ln(a^2 + c^2) + a^2 \ln(a) - b^2 \ln(b) + c^2 \ln(c) \quad [7]$$

Factor de forma entre dos superficies rectangulares perpendiculares entre sí que comparten un eje común (b), y de dimensiones a y c.

$$F_{1 \rightarrow 2} = 4b\sqrt{a^2 + c^2} \cdot a \cdot \tan \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} + 4 \cdot a \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot a \cdot \tan \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - 4bca \cdot \tan \frac{b}{c}$$

$$4ac - 2c^2 \cdot \ln(a^2 + b^2 + c^2) + 2c^2 \cdot \ln(b^2 + c^2) + 2c^2 \cdot \ln(a^2 + c^2) - 2c^2 \cdot \ln c^2$$

[8]

Factor de forma entre dos superficies rectangulares paralelas de dimensiones a x b y situadas a una distancia c una de la otra.

Una referencia completa de todos los procedimientos de cálculo, resolución y aplicación de todas ellas puede encontrarse en la obra *Fundamentos de transferencia radiante luminosa*<sup>6</sup>.

## 1.2.- LEY DE PROYECCIÓN DEL ÁNGULO SÓLIDO

Si todos los factores de configuración son, al fin y al cabo, factores geométricos, parece muy razonable intentar hallar esos valores por un procedimiento alternativo, que implique procedimientos geométricos. Actualmente, gracias a los sistemas de diseño asistido por ordenador, esta tarea es bastante más asequible.

Este procedimiento es, en principio, bastante simple: El factor de configuración entre una superficie emisora y un punto P puede obtenerse simplemente trazando un cono cuya base sea la superficie emisora y su vértice el punto de cálculo considerado; la intersección de éste con una esfera de radio unidad, cuyo centro es el punto P produce una curva en el espacio; el área de la proyección de dicha curva sobre el plano de cálculo es, precisamente, el factor de configuración buscado.

Numerosos autores han usado este principio para el cálculo de factores de configuración, tanto por su inmediata aplicación como por su claridad expositiva.

---

<sup>6</sup> Cabeza Lainez, JM, Fundamentos de transferencia radiante luminosa. España, Netbiblo. 2010.

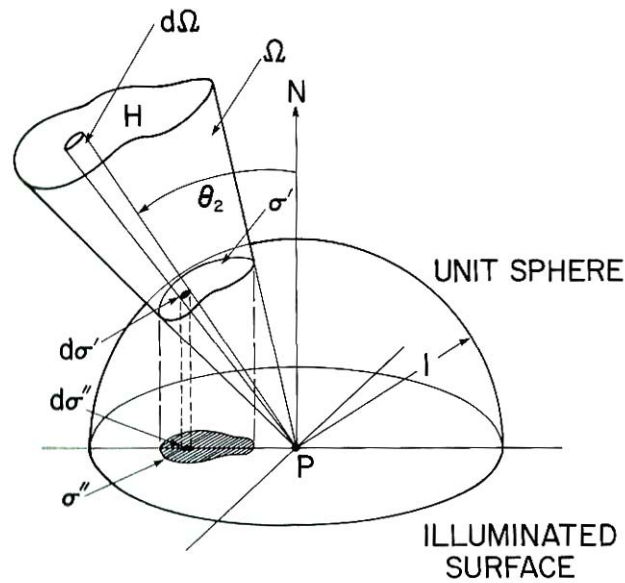


Ilustración 3: Ilustración de la ley de proyección del ángulo sólido.

Fuente: Moon, Parry Hiram. *The Photic Field*. MIT press, 1981.

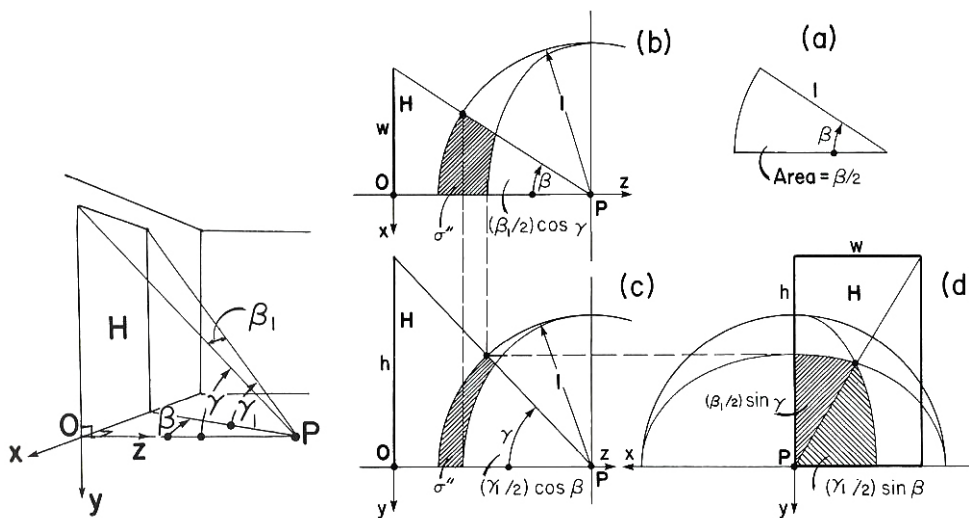


Ilustración 4: Aplicación de la ley de proyección del ángulo sólido. Moon, Parry Hiram.

*The Photic Field*. MIT press, 1981.

Exponemos aquí el usado por los científicos Parry Moon y Domina Eberle Spencer<sup>7</sup>. Las ilustraciones 3 y 4 muestran, respectivamente, la enunciación canónica de dicho principio y un ejemplo de aplicación práctica, para el cálculo del factor de configuración entre una ventana H y un punto P situado tal como muestra la ilustración, en un plano que intersecta la base de la ventana y es perpendicular a la misma.

<sup>7</sup> Moon, P. H; Spencer D. E. (1981) *The Photic Field*. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts.

Es interesante hacer notar que, Moon y Spencer, a pesar de ostentar títulos en Ingeniería eléctrica y Matemáticas respectivamente, usan constantemente ejemplos arquitectónicos para ilustrar los cálculos. En la obra citada, denominan a la superficie H *window* (ventana) y no superficie emisora o simplemente superficie H, como cabría esperar de un tratado teórico; igualmente, usan el término “disco radiante situado en el techo que irradia al suelo” para el factor de configuración entre un círculo y un punto P; para ilustrar el efecto de las obstrucciones en la distribución del campo radiante, ilustran el cálculo con el ejemplo de una ventana que da a un cañón urbano, del cual recibe radiación solar.

En consecuencia, la ley de proyección del ángulo sólido representa un método geométrico y gráfico que permite afrontar el cálculo de los factores de configuración de un modo más accesible; también puede servir como comprobación de aquéllos resultados obtenidos mediante otros métodos, ya sea integración numérica, tablas aproximativas y cálculo iterativo. La principal ventaja para arquitectos y diseñadores es su inmediata visualización espacial, asociada a una visión tridimensional de los problemas de diseño en general, y de intercambio radiante en particular.

### **1.3.- EL DISEÑO CIENTÍFICO EN LA ARQUITECTURA Y EL URBANISMO.**

Científicos y técnicos de las más diversas disciplinas han encontrado siempre en el diseño arquitectónico y urbano un ejemplo muy ilustrativo para ilustrar sus teorías, y en el caso del intercambio radiante entre volúmenes y superficies, su aplicación es directa. En efecto, en física muchos problemas encuentran una solución satisfactoria, aunque no completamente exacta, reduciendo las dimensiones del cálculo; por ejemplo, la caída de tensión en los cables eléctricos se calcula sin considerar la distribución de cargas en la sección del conductor; en el cálculo de estructuras las tensiones en las vigas y pilares de hormigón armado se calculan en una línea que representa las propiedades de toda la sección.

Sin embargo, el intercambio energético no admite esta simplificación, ya que un volumen compuesto de superficies es tridimensional por definición; la distribución espacial de la energía debe contemplar obligatoriamente una visión espacial, de la cual la ley de proyección del ángulo sólido es un claro ejemplo.

Muchos científicos han considerado el diseño arquitectónico y urbano como un campo de pruebas adecuado para ilustrar y aplicar teorías científicas, aunque los arquitectos y los diseñadores hayan desdeñado esta aproximación. El cálculo del intercambio radiante mediante los factores de forma, los factores de configuración y la ley de proyección del ángulo sólido nos muestra que ciencia y diseño arquitectónico están indisolublemente unidos. Los arquitectos han despreciado durante largo tiempo este extremo, mientras consideraban que el diseño en arquitectura y urbanismo debía atender a otros parámetros más subjetivos.

Consideramos que un diseño verdaderamente científico debe atender a principios más elevados y ser independiente de la aprobación de los creadores de opinión o de personas de probada (y dudosa) influencia; aquello que pueda ser demostrado objetivamente y resulte beneficioso para la ciencia y el progreso de la sociedad debe ser aceptado y puesto en práctica. Sólo de este modo nuestro trabajo será tenido en consideración por el conjunto de la sociedad, en la medida en que contribuya al avance de la ciencia y, por ende, del conocimiento humano.

Consideramos que este extremo es verdaderamente importante en el momento en que nos hallamos. Actualmente, la llamada eficiencia energética es un asunto de máxima actualidad en el campo del diseño arquitectónico y urbano; todos los proyectos se arrojan el atributo de “eficiente”, “ecológico”, “verde”, “sostenible”... y así un sinfín de términos cuyo significado es dudoso y, a menudo, vacío.

En esta encrucijada, la posición del arquitecto como diseñador, técnico y científico debe ser clara. El diseño arquitectónico y urbano debe responder a parámetros científicos, objetivos y demostrables. Sólo así se puede mostrar, ante la sociedad y ante la comunidad científica, la utilidad y profesionalidad de su trabajo.

#### **1.4.- JUSTIFICACIÓN DE LA UNIDAD TEMÁTICA DE LA TESIS**

La presente tesis busca avanzar en el campo de la eficiencia energética en el diseño arquitectónico y urbano. Los intercambios radiantes entre elementos que componen este diseño dependen de un modo inequívoco, como hemos visto, de parámetros puramente

geométricos y formales, relacionados con superficies y volúmenes, que son: Su forma y su posición relativa en el espacio.

La aproximación a estos parámetros geométricos de diseño puede hacerse mediante dos procedimientos fundamentales que son:

- La teoría de factores de forma y factores de configuración.
- La ley de proyección del ángulo sólido.

Ambos conducen al mismo punto final: el cálculo del intercambio radiante de formas asociadas al diseño arquitectónico y urbano; su objetivo principal es conseguir un diseño energéticamente eficiente basado en el control formal de todos sus elementos.

Nos enfrentamos a un problema formal que debe tener en cuenta las tres dimensiones en el espacio. Las dificultades surgidas en muchos procesos de integración para hallar los factores de forma y de configuración, así como en la aplicación de la ley de proyección del ángulo sólido han representado un obstáculo al avance de la ciencia en este campo.

La presente tesis, titulada *“Diseño científico ambiental: Simulación energética de la arquitectura del espacio urbano”* tiene como objetivo, precisamente, avanzar en aquellos puntos donde la simulación energética ha encontrado mayores escollos para su avance. El catálogo de formas disponibles en arquitectura y urbanismo es muy variado. Investigaciones anteriores han dilucidado las expresiones que regulan dicho intercambio entre formas conocidas. Podemos citar, por ejemplo, como ya hemos visto, las ecuaciones 5, 6, 7, y 8, que tratan superficies rectangulares o los catálogos disponibles en manuales clásicos de transferencia radiante.

Otras formas y volúmenes han representado una dificultad insalvable para muchos investigadores; nos referimos, en concreto, al cálculo de los factores de forma en volúmenes cerrados compuestos por una superficie curva reglada y otra superficie plana circular y al cálculo de los factores de configuración derivados de un emisor circular y semicircular y cualquier punto situado en un plano perpendicular al mismo. Las posibles combinaciones entre todos ellos componen un rico catálogo de formas con el que se puede calcular, de un modo accesible y sencillo, el intercambio radiante entre todas ellas.

De este modo, el diseño arquitectónico y urbano se beneficia y se enriquece gracias a que conocemos multitud formas que nos permiten afrontar un diseño, conociendo de antemano

las propiedades radiantes de cada una de ellas. La eficiencia energética en la arquitectura y el urbanismo es, de este modo, un problema de diseño formal al que el diseñador puede enfrentarse contando con las herramientas adecuadas.



## **2.- OBJETIVOS**

## **2.- OBJETIVOS**

La presente tesis tiene como objetivo aportar avances científicos en el campo de la transferencia radiante, mediante la teoría de factores de forma y factores de configuración, y aplicarlos al proceso del diseño y del cálculo energético en la arquitectura y el urbanismo. En concreto, se proponen como objetivos avances en los siguientes campos.

### **Elaborar un método de aproximación sencillo e intuitivo al cálculo radiante mediante los factores de forma.**

En primer lugar, se efectuará una nueva aproximación al fenómeno de la transferencia radiante intentando evitar, cuando sea posible, cálculos integrales. Para ello, se estudiarán las propiedades de algunas superficies y de los volúmenes que ellas encierran, con el objeto de llegar a calcular, del modo más sencillo posible, algunos factores de forma no conocidos hasta ahora. Esta aproximación geométrica acerca de un modo amable y sencillo el fenómeno de la transferencia radiante a arquitectos y diseñadores, visualizando de un modo claro y objetivo que las propiedades radiantes de las superficies son función de su forma y su posición relativa en el espacio.

### **Estudiar el comportamiento radiante de formas y superficies en función del cálculo de factores de forma y configuración.**

Se compararán y aclararán las propiedades radiantes de varios tipos de superficies, mediante el cálculo de sus factores de forma y sus factores de configuración. Se busca dilucidar el comportamiento radiante de algunas formas que, hasta el momento y debido a la imposibilidad de abordar su cálculo numérico y/o integral, han sido desdeñadas en el diseño arquitectónico y urbano. Se pretende que estos estudios constituyan un aporte sustancial al catálogo de factores de forma existentes, proveyendo a los diseñadores de nuevas herramientas que enriquezcan la aproximación a un diseño energéticamente consciente.

### **Aplicar al diseño de un modo general la ley de proyección del ángulo sólido.**

Se generalizará la ley de proyección del ángulo sólido como método de cálculo de los factores de configuración, demostrando la validez de una aproximación geométrica al intercambio radiante. Mediante la ayuda de los sistemas CAD de diseño asistido por ordenador se puede acometer esta tarea de un modo accesible, gracias a la precisión del dibujo por ordenador. La comprobación de los resultados con otros previamente conocidos gracias al cálculo integral reforzará la validez del planteamiento.

### **Programar en lenguajes de cálculo informático los resultados obtenidos.**

Se programarán los resultados obtenidos en lenguajes de simulación informática para visualizar de un modo rápido los resultados obtenidos y su validez; esta aproximación metodológica, ya usada en anteriores investigaciones, ha resultado muy fructífera ya que, al igual que los sistemas CAD, permite manejar gran cantidad de datos y gráficos, evitando posibles errores de cálculo y visualizando los mismos con gran celeridad. Se usará el lenguaje Matlab<sup>®</sup>, ampliamente difundido en el ámbito científico. Las rutinas de cálculo obtenidas pueden servir de herramienta de diseño y comprobación para todo tipo de formas presentes en el diseño arquitectónico y urbano.

### **Mostrar la aplicación de los programas de cálculo obtenidos al diseño energéticamente eficiente en arquitectura y urbanismo.**

Mediante la programación informática de los resultados obtenidos se elaborarán programas que puedan ser aplicados al diseño en arquitectura y urbanismo. Con ellos, los diseñadores podrán disponer de una herramienta fiable y útil con la que afrontar un proyecto que contemple la eficiencia energética como factor determinante desde sus primeros estadios. Las aportaciones realizadas serán susceptibles de aplicación a los programas y métodos de cálculo usados para validar la adaptación de un diseño a la normativa vigente en materia de ahorro de energía. Con ello se realizará una beneficiosa aportación a futuras revisiones de las normas edificatorias.

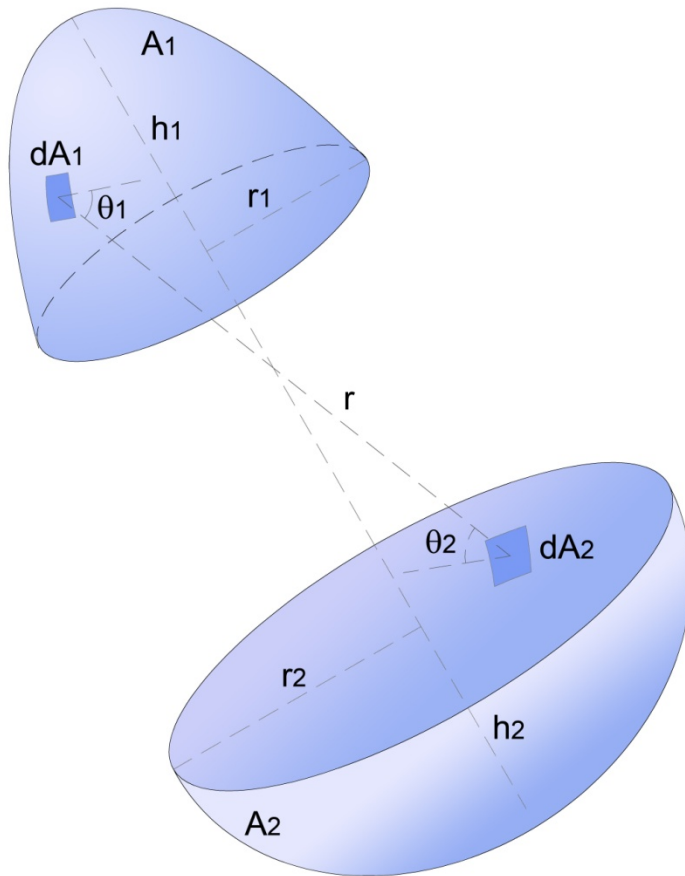
### **3.- FACTORES DE CONFIGURACIÓN PARA SUPERFICIES CURVAS**

### 3.1.- INTRODUCTION

Curved surfaces have not been thoroughly considered in radiative transfer analysis mainly due to the difficulties arisen in the integration process and perhaps to the lack of spatial vision of the researchers. It is a fact, especially for architectural lighting, that when concave geometries appear inside a curved space, they are mostly avoided. In this way, a vast repertoire of significant forms is neglected and energy waste is evident. Starting from the properties of the sphere, the authors formulate, with hardly any calculus, new simple laws, which enable them to discover a set of configuration factors for caps and various segments of the sphere. The procedure is subsequently extended to previously unimagined surfaces as the paraboloid, the ellipsoid or the cone. Appropriate combination of the said forms with truncated cones, produces several complex volumes, often used in architectural and engineering creations and whose radiative performance could not be accurately predicted for decades. To complete the research, a new method for determining interreflections in curved volumes is also presented. Radiative transfer simulation benefits from these findings, as the simplicity of the results, has led the authors to create innovative software more efficient for design and evaluation.

The reciprocity principle enunciated by Lambert in his paramount book *Photometria* (Lambert, 1760), yields the following well-known integral equation:

$$\Phi_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \cos\theta_1 * \cos\theta_2 * \frac{dA_1*dA_2}{\pi*r^2} \quad [9]$$



$$d\phi_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \frac{dA_1 \cdot dA_2}{\pi \cdot r^2}$$

Figure 5. The reciprocity principle and equation for surfaces  $A_1$  and  $A_2$

From the times of Lambert to our days, researchers and scientists in the fields of Geometric Optics and Radiative Transfer have striven to provide solutions for the canonical equation 1. This is no minor feat, since the said equation will lead in most cases to a quadruple integration and the fourth degree primitive of even simple mathematical expressions often implies lengthy calculations. The present author all but to spend two years of his research career to find the exact solutions for parallel and perpendicular rectangles, as no textbook had a complete development of the process and in many cases only inaccurate tables were and are still supplied.

This and other exhilarating experiences convinced the authors that there should be an easier way to approach the problem with their minds set on computer simulation, that is also not

very effective or user friendly when mathematical solutions of complex functions are involved.

### 3.2.- LAWS FOR FINDING CONFIGURATION FACTORS IN CURVED SURFACES

The authors looked on simple forms and the way in which radiative transfer is obtained in them. For instance, a volume enclosed by a single surface is often a spheroid and in it, we know for certain that the configuration factor over itself is

$$F_{11}=1 \quad [10]$$

Knowing this, could it be that in a similar surface, for instance the hemisphere, the eidetic factor is something like  $F_{11}=1/2$ ? At least we had a hint; the configuration factor of a differential area to a disk of radius  $r$  under the center of the disk at precisely the distance  $r$ , is also  $1/2$ . For a point of the hemisphere the factor is indeed  $1/2$ .

Stimulated by this result, the authors analyzed volumes composed of only two surfaces, being one of them planar. The first case was the spherical cap which is a generalization of the hemisphere (See figure 6).

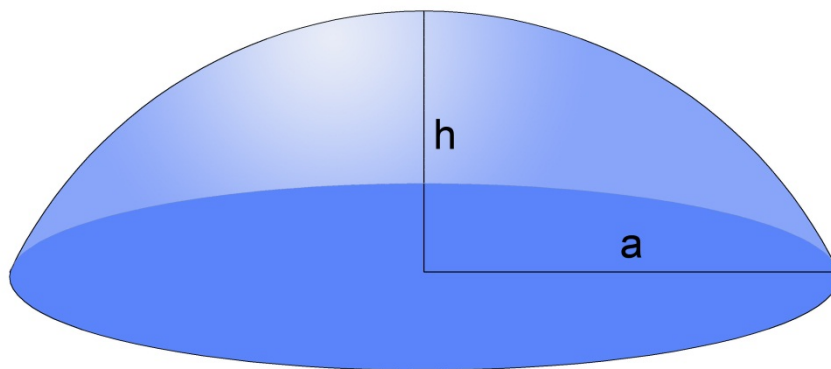


Figure 6. A spherical cap of height  $h$  and radius of the base  $a$

Extending the reciprocity principle to a spherical cap of radius R (surface 1), and its entire base (surface 2) we obtain  $A_1 * F_{12} = A_2 * F_{21}$ , but since  $F_{21}=1$ , as there is no  $F_{22}$  for planar surfaces.  $F_{12} = (A_2/A_1)$ , in this particular case:

$$F_{12} = \frac{a^2}{a^2+h^2} \quad (2); F_{11} = \frac{h^2}{a^2+h^2} = \frac{h}{2*R} \quad [11]$$

Two important laws are inferred from here.

Cabeza-Lainez first law says that if a volume is enclosed by two surfaces, one of them continuous with positive curvature, and the second planar, the configuration factor from the curved one to the other, equals the inverse ratio of areas of the said surfaces. The caveat of positive curvature of the surface is introduced to avoid obstructions of radiant flux.

The second law requires of more deduction.

It is known that any spherical cap represents an Yth fraction of the total area of the sphere of radius R. If we remember by trigonometry that,

$$(h^2 + a^2) = 2 * R * h \quad [12]$$

Thus,

$$Y * (h^2 + a^2) = 4 * R^2 \quad (5); Y = 2 * \frac{R}{h} \quad (6); h = 2 * \frac{R}{Y} \quad [13]$$

Consequently,

$$F_{11} = \frac{h}{2*R} = \frac{h^2*Y}{4*R^2} = \frac{1}{Y} \quad [14]$$

We could enunciate Cabeza-Lainez second law by saying that the configuration factor of an Yth part of the sphere over itself is precisely the inverse of Y. Thus, the intuition for the hemisphere is confirmed, in the quarter of sphere  $F_{11}$  has to be 1/4 and successively, as everybody is able to calculate.

This law will hold true even if we are not dealing with spherical caps for, if we look carefully at the canonical equation 1 adapted to the sphere, it is easy to find the relationship between  $r$ ,  $\cos\vartheta$  and the radius R (see figure 7).



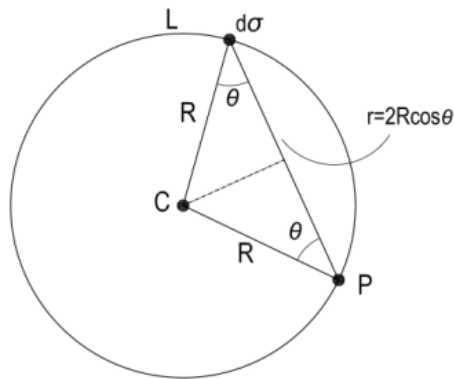


Figure 7. Differential surfaces in the sphere of centre C and luminance L used to find the radiative exchange

Substituting,

$$\phi_{1-2} = \frac{E_{b1}}{4\pi R^2} \int_{A_1} \int_{A_2} dA_1 * dA_2 \quad [15]$$

$4\pi R^2$  is the total area of the sphere. Thus, the radiative flux transfer is dependent on the size of the surfaces but not on their position in the sphere and for given areas it is also a constant. If we try to obtain  $F_{11} = \phi_{11} / (E_{b1} * A_1)$  from here,

$$F_{11} = \frac{A_1}{4\pi R^2} = \frac{1}{Y} \quad [16]$$

These properties are unique to the spherical surface and crucial for our discussion.

### 3.3.- SPHERICAL SECTORS

Let us apply this law to a sector of the sphere comprised between two semicircles forming an internal angle  $x$  from 0 to 180 degrees:

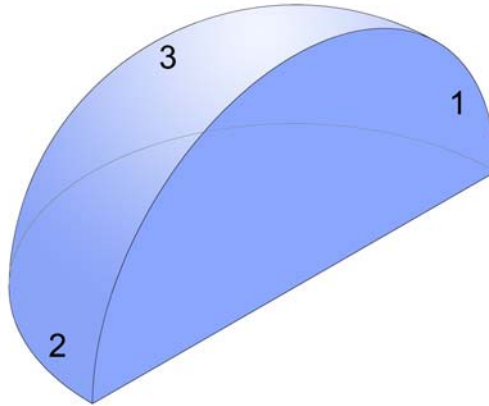


Figure 8. Denomination of surfaces in a sector of the sphere, 1 and 2 are planar, 3 is curved

As we have just discussed  $1/Y=x/360$  and thus,

$$F_{33} = \frac{x}{360} \quad [17]$$

Accordingly,

$$F_{31} = F_{32} = \frac{1}{2} * \left(1 - \frac{x}{360}\right) \quad [18]$$

And introducing the areas of the semicircles,  $\pi * R^2/2$ ,

$$F_{13} = F_{23} = \frac{x}{90} * \left(1 - \frac{x}{360}\right) \quad [19]$$

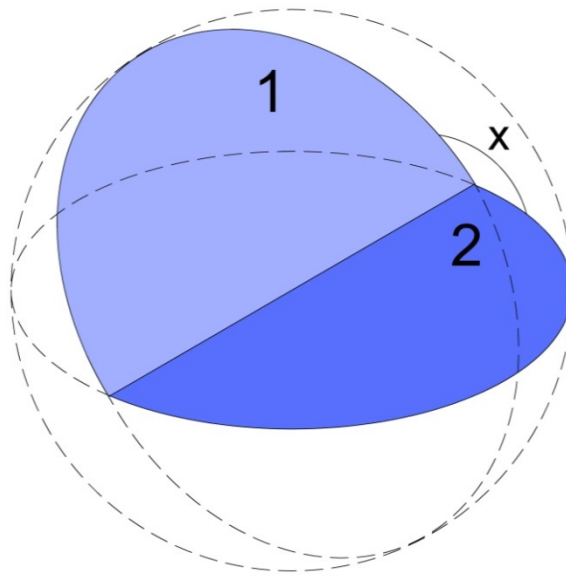


Figure 9. Two semicircles of the same radius R with a common edge forming an angle x

Finally, the author proposes the following equation, previously unheard of in the literature, to obtain the energy balance between the said half disks, where x represents the value of the internal angle (Fig. 9),

$$F_{12} = 1 - \frac{x}{90} + \frac{x^2}{32400} \quad [20]$$

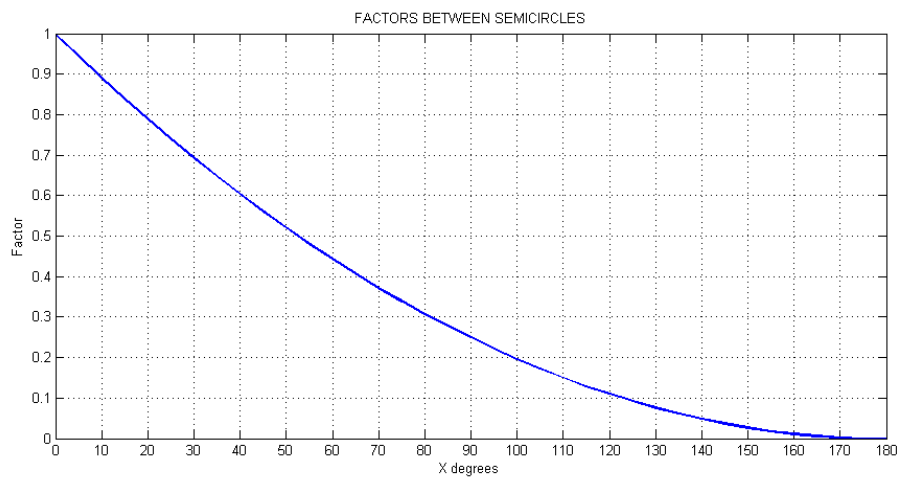


Figure 10. Radiative exchanges between two semicircles with a common edge and forming an internal angle x

The latter expression is a good indicator of the factor between two inclined equal surfaces with a common edge if they are not too dissimilar from the semicircle, a factor that is usually lengthy to calculate.

### 3.4.- CONFIGURATION FACTORS FOR DIFFERENT CURVED SURFACES

Let us now return to the first principle. By its virtue we had obtained in the case of a spherical cap, the graceful expression  $h/(2R)$  for  $F_{11}$ , this contribute to simplify many algorithms for simulation.

$$F_{11} = \frac{h}{2R} = \frac{h^2}{h^2+a^2} \quad [21]$$

$$F_{12} = \frac{a^2}{h^2+a^2} \quad [22]$$

$$F_{21} = 1 \quad [22]$$

If we introduce the dimensionless parameter  $\beta$ ,

$$\beta = \frac{h}{a} \quad [23]$$

$$F_{12} = \frac{1}{\beta^2+1} \quad [24]$$

Since this principle is more general than the second one, we can extend it to non-spherical surfaces.

#### PROLATE SEMISPHEROID

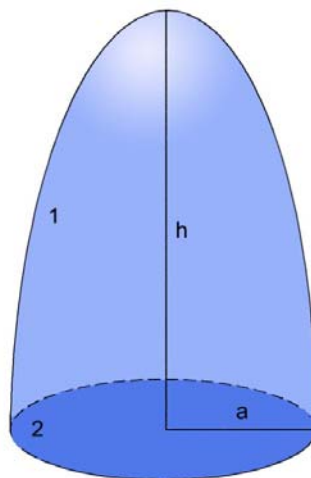


Figure 11. Prolate spheroid

Surface 1 is the spheroid and surface 2 is the circular disk that works as a base to the former,  $h > a$ .

First we have to define the dimensionless parameter  $m$

$$m = \sqrt{1 - \frac{a^2}{h^2}} \quad [25]$$

By virtue of the first principle,

$$F_{12} = \frac{a \cdot m}{a \cdot m + h \cdot \arcsin(m)} \quad [26]$$

$$F_{21} = 1 \quad [27]$$

$$F_{11} = \frac{h \cdot \arcsin(m)}{a \cdot m + h \cdot \arcsin(m)} \quad [28]$$

And making,

$$\beta = \frac{h}{a}; \quad m = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}} \quad [29]$$

$$F_{12} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2} + \beta \cdot \arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}\right)}} \quad [30]$$

#### OBLATE SEMIESPHEROID

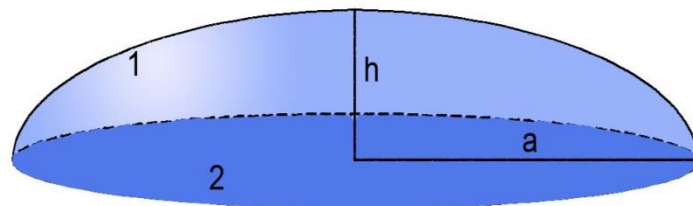


Figure 12. Oblate spheroid

Surface 1 is the spheroid and surface 2 is the circular disk that works as a base to the former,  $h < a$

Denote the parameter  $m_1$ ,

$$m_1 = \sqrt{\frac{a^2}{h^2} - 1} \quad [31]$$

$$F_{12} = \frac{a*m_1}{a*m_1+h*\operatorname{arcsinh}(m_1)} \quad F_{21} = 1 \quad [32]$$

By the first principle and,

$$F_{11} = \frac{h*\operatorname{arcsinh}(m_1)}{a*m_1+h*\operatorname{arcsinh}(m_1)} \quad [33]$$

With the same procedure as before to make the expression dimensionless

$$m_1 = \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1} \quad [34]$$

$$F_{12} = \frac{m_1}{m_1+\beta*\operatorname{arcsinh}(m_1)} \quad [35]$$

#### PARABOLOID OF REVOLUTION

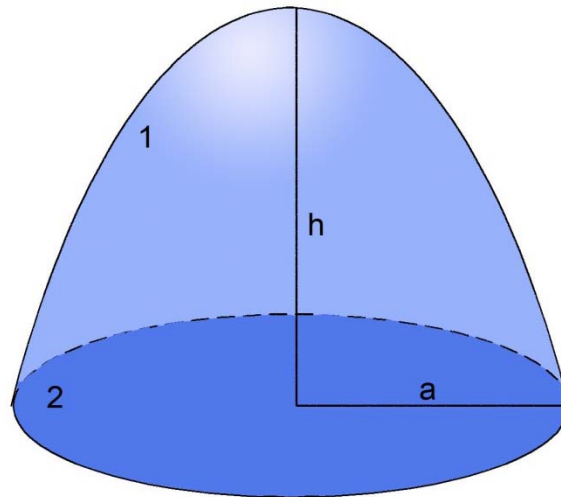


Figure 13. Paraboloid

Surface 1 is the paraboloid and surface 2 is the circular disk that works as a base to the former

$$F_{12} = \frac{6*a*h^2}{[(a^2+4*h^2)^{3/2}-a^3]} \quad F_{21} = 1 \quad [36]$$

$$F_{11} = 1 - \frac{6*a*h^2}{[(a^2+4*h^2)^{3/2}-a^3]} \quad [37]$$

$$\beta = \frac{h}{a} \quad F_{12} = \frac{6*\beta^2}{[(1+4*\beta^2)^{3/2}-1]} \quad [38]$$

## RIGHT CONE

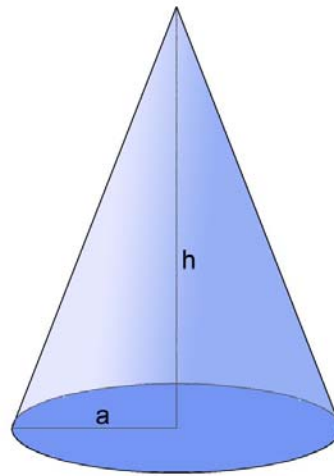


Figure 14. Cone

1 is the surface of the cone and 2 is the circular base

$$F_{12} = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \quad F_{21} = 1 \quad [39]$$

$$F_{11} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \quad [40]$$

Introducing the parameter  $\beta$ ,

$$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad [41]$$

It is possible to compare the performance in terms of  $F_{12}$ , of all the figures found up to now.

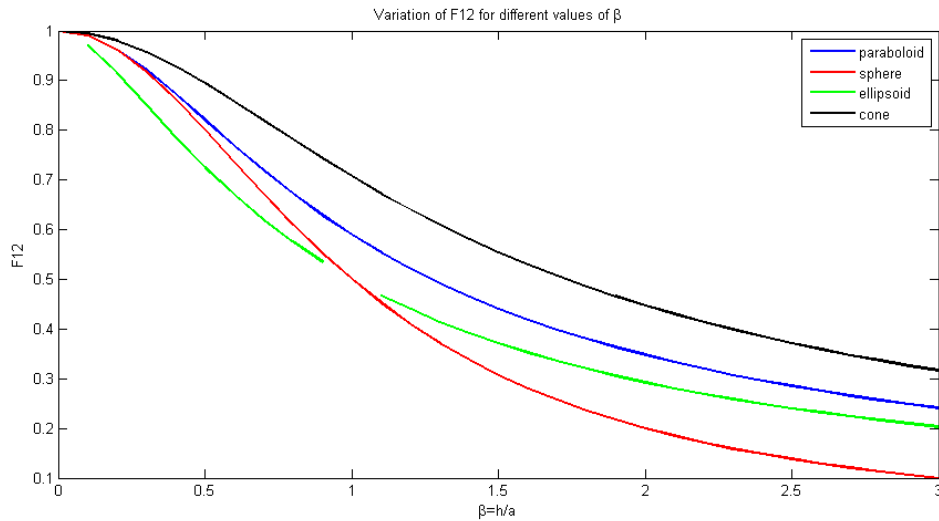


Figure 15. Comparison

### ELLIPSOID

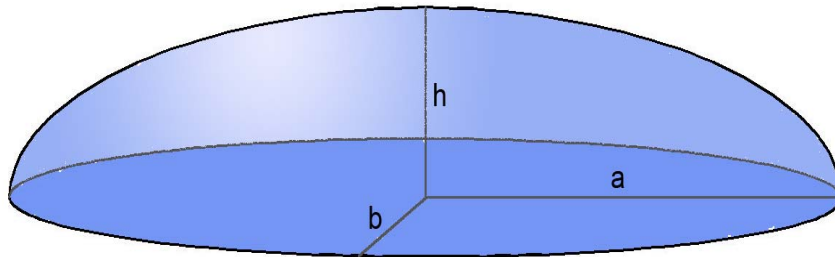


Figure 16. Ellipsoid

In this case, 1 is the surface of the ellipsoid and 2 is the elliptic base;  $\gamma$  is a parameter equal to 1.6. The example shows that the first principle is not limited to surfaces of revolution.

$$F_{12} = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt[3]{3}}{2 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot h^3 + b^3 \cdot h^3}} \quad F_{21} = 1 \quad [42]$$

$$F_{11} = 1 - \frac{a \cdot b \cdot \sqrt[3]{3}}{2 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 + a^3 \cdot h^3 + b^3 \cdot h^3}} \quad [43]$$

As the area of the ellipsoid is not exact, expect errors on the range of 1% depending on the values of  $a$ ,  $b$  and  $h$ .



We can continue using the principle in other surfaces. For example, for two complementary caps within the sphere of radius,

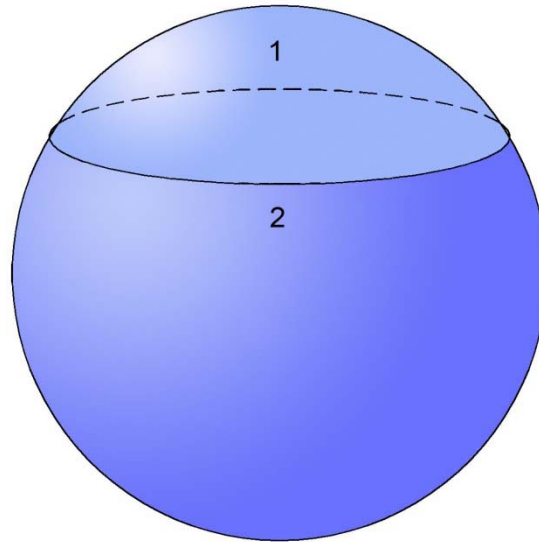


Figure 17. Sphere divided in two caps of diverse heights

As an immediate consequence of Cabeza-Lainez laws, being  $r$  the radius of the inner circle and  $h$  the respective heights of the caps,

$$F_{11} = F_{21} = \frac{h_1^2}{h_1^2+r^2} = \frac{r^2}{h_2^2+r^2} = \frac{h_1 \cdot h_2}{h_2^2+r^2} = \frac{h_1^2+r^2}{(h_1+h_2)^2} = \frac{h_1}{(h_1+h_2)} = \frac{h_1}{2 \cdot R} \quad [44]$$

$$F_{22} = F_{12} = \frac{h_2^2}{h_2^2+r^2} = \frac{r^2}{h_1^2+r^2} = \frac{h_1 \cdot h_2}{h_1^2+r^2} = \frac{h_2}{(h_1+h_2)} \quad [45]$$

If now the caps within the same sphere are of any size and arbitrary position,

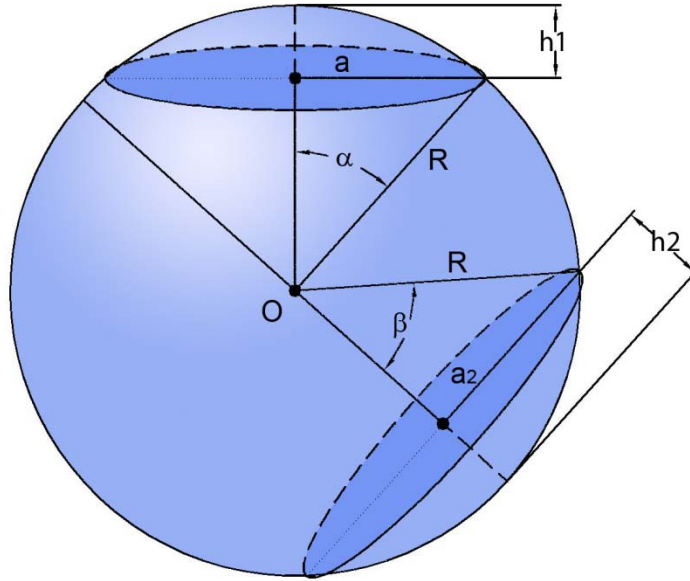


Figure 18. Two caps of arbitrary size

In this case by virtue of Cabeza-Lainez Law,

$$F_{11} = \frac{h_1^2}{h_1^2 + a^2}; F_{22} = \frac{h_2^2}{h_2^2 + a_2^2} \quad [46]$$

And now we need to apply the canonical equation 9 again, substituting the respective areas of the caps,  $A_1 = 2 * \pi * R * h_1$ ,  $A_2 = 2 * \pi * R * h_2$

$$\Phi_{1-2} = \frac{E_{b1}}{4 * \pi * R^2} \int_{A_1} \int_{A_2} dA_1 * dA_2 \quad [47]$$

$$F_{12} = \frac{h_1 * h_2}{h_1^2 + a^2}; F_{21} = \frac{h_1 * h_2}{h_2^2 + a_2^2} \quad [48]$$

In the special situation that the caps are parallel, truncated cones,  $h_1 = h_2 = h$ , which often coincides with parallel disks of equal radius  $a$ , the flux would be  $E_{b1} * \pi * h_1 * h_2$  and the fraction of energy from disk 1 to disk 2 (or their surrounding caps), equates  $h_1 * h_2 / a^2$  or  $h_1 * h_2 / a_2^2$ .

If only the perpendicular distance between the disks, called  $2b$ , is known (see figure 18), the height of the cap would be,

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} - b \quad [49]$$

Thus, the fraction is obtained as,

$$F_{12} = F_{21} = \frac{a^2 + 2*b^2 - 2*b*\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \quad [50]$$

### 3.5.- CONFIGURATION FACTORS FOR A VOLUME COMPOSED OF THREE CURVED SURFACES

With the former expression, solving the radiative transfer inside cylinders is easy as there are only three surfaces involved and we can form a non-trivial system of two equations with two unknowns. Changing the circular base of the cylinder by a spherical cap (fig.20) will alter some values but not the general problem because all the possibilities of transfer between caps and disks have already been explored. For instance, if the cap is a hemisphere, the values of the factors to the disk and the cylinder need to be affected by  $a^2/(a^2 + h^2)=0.5$  (Eq. 10 and 22), and progressively until reaching one which is again the planar disk.<sup>8</sup>

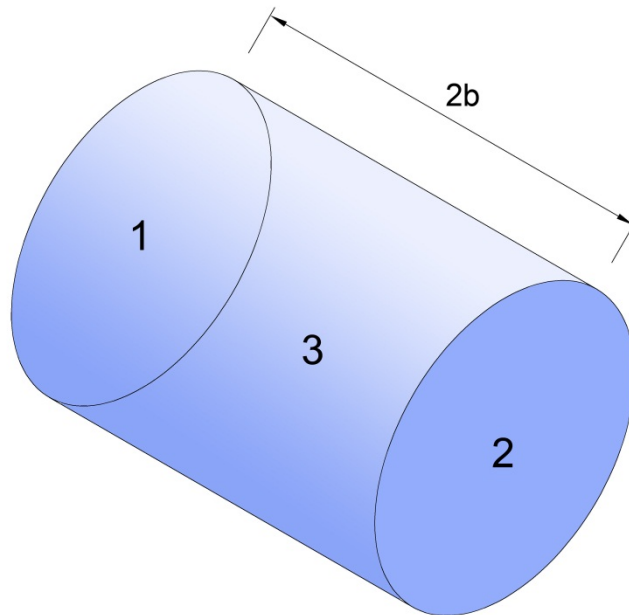


Figure 19. Surfaces defined by a cylindrical volume used to find the radiative transfer

---

<sup>8</sup> Note that values under 0.5 can also be found for this relationship in a sort of globular cap with an area bigger than the hemisphere.

The resulting volume in figure 20 has been used by humankind for centuries; mainly in churches but also in libraries, concert halls, banks, markets or pavilions of any sort. With another cap on the base, the form is more recently used for silos, fluid reservoirs and containment vessels at power stations.

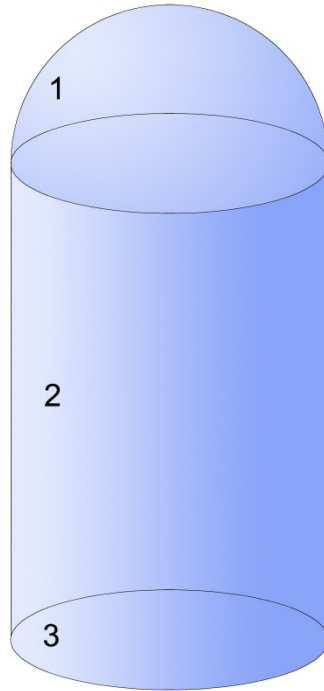


Figure 20. Volume composed of a cylinder and a spherical cap used to find the radiative transfer among those surfaces

TWO OPPOSED SPHERICAL CAPS WITH A COMMON AXIS

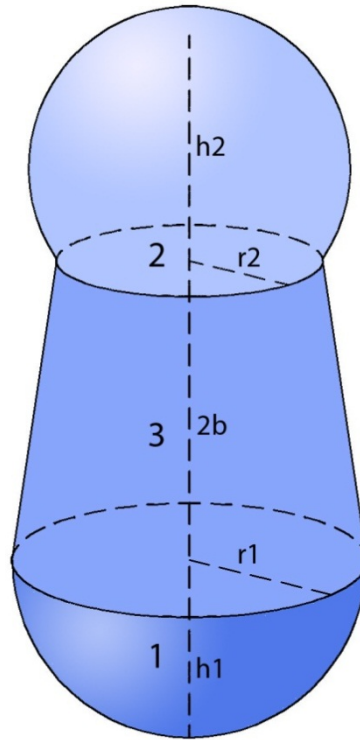


Ilustración 21. Volume composed by spherical cap, truncated cone and semiespheroid.

In order to calculate the radiative exchanges in this relatively complex figure, we need to determine beforehand the following nine geometric parameters,

$$z = \frac{r_1^2 - r_2^2}{4 * b} \quad R = \sqrt{(z + b)^2 + r_2^2} \quad [51]$$

$$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4 * b^2} \quad [52]$$

$$Q = R^2 - z^2 + b^2 - 2 * R * b \quad [53]$$

$$Q_1 = r_1^2 - Q \quad Q_2 = r_2^2 - Q \quad [54]$$

$$D_1 = h_1^2 + r_1^2 \quad [55]$$

$$D_2 = h_2^2 + r_2^2 \quad [56]$$

$$D_3 = l * (r_1 + r_2) \quad [57]$$

And then we would obtain the corresponding nine form factors involved,

$$F_{11} = \frac{h_1^2}{D_1} \quad F_{12} = \frac{Q}{D_1} \quad F_{13} = \frac{Q_1}{D_1} \quad [58]$$

$$F_{22} = \frac{h_2^2}{D_2} \quad F_{21} = \frac{Q}{D_2} \quad F_{23} = \frac{Q_2}{D_2} \quad [59]$$

$$F_{31} = \frac{Q_1}{D_3} \quad F_{32} = \frac{Q_2}{D_3} \quad F_{33} = 1 - \frac{Q_1 + Q_2}{D_3} \quad [60]$$

In this simple way the problem is completely solved

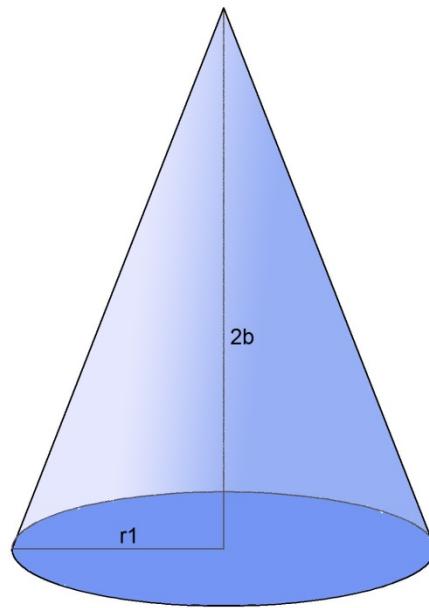


Figure 22. Right cone with a circular base

The former also includes the cone, by making  $r_2=0$  and  $h_1=h_2=0$

$$z=r_1^2/4b \quad R=z+b \quad Q=0 \quad Q_1=r_1^2 \quad Q_2=0 \quad l = \sqrt{r_1^2 + 4 * b^2} \quad [61]$$

$$D_1=r_1^2 \quad D_2=0 \quad D_3=r_1*\sqrt{r_1^2 + 4 * b^2} \quad [62]$$

Only three factors remain,

$$F_{11} = 1 \quad [63]$$

$$F_{31} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + 4*b^2}} \quad [64]$$

$$F_{33} = 1 - \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + 4*b^2}} \quad [65]$$

$F_{31}$  is obviously the ratio of areas of the cone to its base which proves that the equation is true, by virtue of Cabeza-Lainez Law.

If for instance, the upper extreme of the volume is a paraboloid and the lower surface is an oblate ellipsoid, see figure, we can still maintain the same factors with the following simple adaptations,

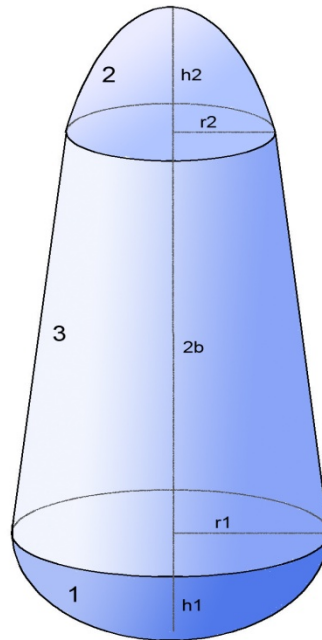


Figure 23. Volume composed by a paraboloid, a truncated cone and a spheroid.

$$F_{22} = 1 - \frac{6*r_2*h_2^2}{[(r_2^2 + 4*h_2^2)^{3/2} - r_2^3]} \quad [66]$$

as in the paraboloid alone

$$F_{21} = \frac{6*h_2^2*Q}{r_2*[(r_2^2 + 4*h_2^2)^{3/2} - r_2^3]} \quad [67]$$

$$F_{23} = \frac{6*h_2^2*(r_2^2 - Q)}{r_2*[(r_2^2 + 4*h_2^2)^{3/2} - a_2^3]} \quad [68]$$

$$F_{11} = \frac{h_1*\operatorname{arcsinh}(m_1)}{r*m_1 + h_1*\operatorname{arcsinh}(m_1)} \quad [69]$$

as it were in the oblate ellipsoid alone

$$m_1 \text{ is now } = \sqrt{\frac{r_1^2}{h_1^2} - 1} \quad [70]$$

$$F_{12} = \frac{m_1 * Q}{r_1 * (r_1 * m_1 + h_1 * \operatorname{arcsinh}(m_1))} \quad [71]$$

$$F_{13} = \frac{m_1 * (r_1^2 - Q)}{r_1 * (r_1 * m_1 + h_1 * \operatorname{arcsinh}(m_1))} \quad [72]$$

$F_{31}$ ,  $F_{32}$  and  $F_{33}$  have the same values as before as these correspond to the truncated cone and bear only nominal relation with the surfaces of the extremes,

$$F_{31} = \frac{Q_1}{D_3} \quad [73]$$

$$F_{32} = \frac{Q_2}{D_3} \quad [74]$$

$$F_{33} = 1 - \frac{Q_1 + Q_2}{D_3} \quad [75]$$

Having solved the primary transference problems, the following step is the important subject of interreflections.

### 3.6 INTERREFLECTIONS AMONGST SURFACES IN A VOLUME

Thus far, we have considered that energy is transferred from a primary source to several secondary ones. However this procedure does not deal with the fact that the receiving sources, being partially absorptive, may in turn become emitters. In this situation, the total balance of energy is obtained by equation 76,

$$E_{tot} = E_{dir} + E_{ref} \quad [76]$$

Where  $E_{dir}$  represents the energy directly received and  $E_{ref}$  is the reflected energy. These two terms added give the total balance of radiative energy  $E_{tot}$ . When more than one surface is involved, expression 76 generates a system of equations. In order to solve it, it is useful to define *a priori* two similar matrices  $F_d$  and  $F_r$ , without physical entity, whose elements would be as follows, (for a volume contained by three surfaces like the one depicted in figures 20,21 and 23).



$$F_d = \begin{pmatrix} F_{11} * \rho_1 & F_{12} * \rho_2 & F_{13} * \rho_3 \\ F_{21} * \rho_1 & F_{22} * \rho_2 & F_{23} * \rho_3 \\ F_{31} * \rho_1 & F_{32} * \rho_2 & F_{33} * \rho_3 \end{pmatrix} \quad [77]$$

$$F_r = \begin{pmatrix} 1 & -F_{12} * \rho_2 & -F_{13} * \rho_3 \\ -F_{21} * \rho_1 & 1 & -F_{23} * \rho_3 \\ -F_{31} * \rho_1 & -F_{32} * \rho_2 & 1 \end{pmatrix} \quad [78]$$

Where  $F_{ij}$  are the radiative exchange fractions or factors from surface  $i$  to surface  $j$  found previously, and  $\rho_i$  is a new term, defined as the coefficient of diffuse or direct reflection which can be attributed to surface  $i$ . It can be obtained as the quotient between the energy received and the energy effectively emitted. This is the reason why in matrix  $F_d$  described at 78, the element in column 3, row 3, is not zero as it does send radiation to itself.

However, if we should have a curved surface it would be necessary to substitute the former element by  $F_{33} * \rho_3$ . On the contrary, in a volume defined by planes, all the elements in the diagonal of matrix  $F_d$  are equal to zero. Once the value of these matrices is obtained, it is easy to establish a relationship between direct and reflected radiation:

$$F_r * E_{ref} = F_d * E_{dir} \quad [79]$$

$$F_{rd} = F_r^{-1} * F_d \quad [80]$$

$$E_{ref} = F_{rd} * E_{dir} \quad [81]$$

As the value of reflected radiation is known, the problem is solved. However, we have to bear in mind that the minimum of surfaces in an actual room would be six. Recently, the author has developed software for up to twelve surfaces inside a room. This will augment precision at the cost of a lengthier input of data. The process of interreflection can be repeated many times until no significant changes in reflected radiation are observed.

### 3.7.- CIRCULAR DISK IN VERTICAL POSITION

Although not strictly a curved surface

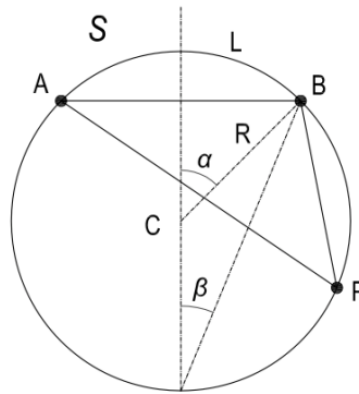


Figure 24. Cap and sphere where the radiative exchange takes place

In figure 24, the cap  $S$  goes from  $A$  to  $B$  and its area is  $\pi r^2 \sin^2 \alpha$ , as mentioned above (Eq. 12). Dividing the former by the total area of the sphere according to equation 17, the result is as shown several times before. That is, the energy received at any point of the interior sphere wall outside the spherical cap  $S$  is constant,  $h/2\pi R$ . This is often expressed as  $1/2\pi(1-\cos\alpha)$  or  $1/2\pi(1-\cos 2\beta)$ .

With the former property we can replace the cap source by its enclosed circle  $AB$ .

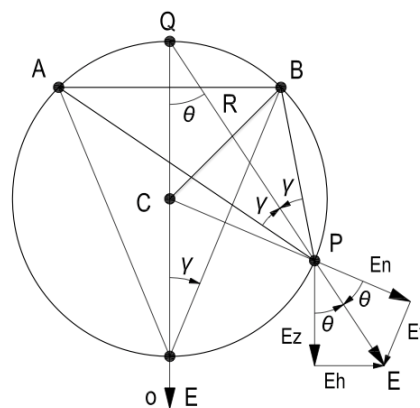


Figure 25. The radiation vector in a sphere

Radiant energy due to the spherical cap or the said circle, in a direction normal to the interior of the sphere, is constant but it is mandatory not to forget that radiation is in truth a vector, meaning that its projection on different planes may present diverse values.

Finding the radiation vector that originates in the cap source poses no particular problem (See Figure 25). For reasons of symmetry, its centre has to be at point Q, following the well-known principle of the circumference by virtue of which, equal arcs subtend equal angles<sup>9</sup>.

The extreme of the vector lies at the point under study. If the direction of the vector is known, it only remains to calculate its modulus. Using trigonometric properties, as the normal  $E_N$  is constant, this implies that the vertical component  $E_z$  equates the normal for the value of direction angle  $\theta$  is a half of the angle subtended by the arc OP from the centre of the sphere, being P the point under study and O the horizontal projection of the centre.

The last step to determine the modulus of the vector is to project its vertical component  $h/(2 \cdot R)$  onto the horizontal plan, multiplying by the tangent of  $\theta$ .

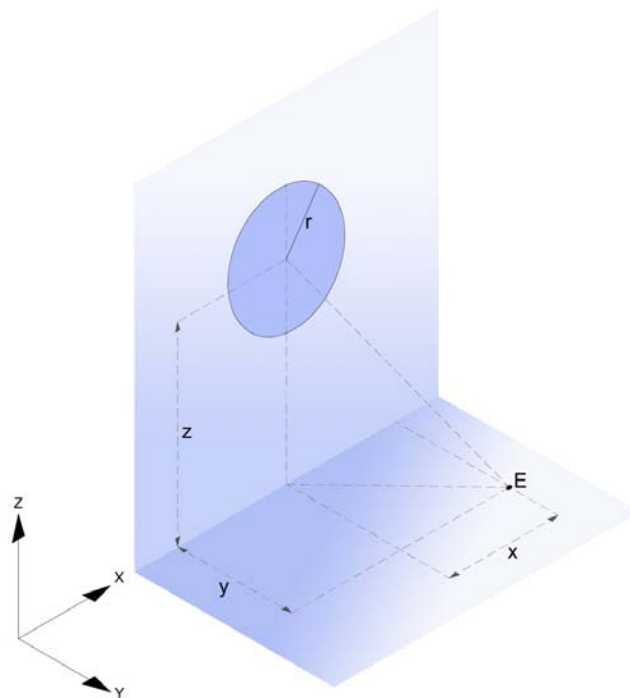


Figure 26. Radiant interchange between a vertical circle and a point placed in a surface perpendicular to the first one.

<sup>9</sup>

Both MacAllister and Sumpner failed to see this point and located the origin of the vector at the centre of the enclosed circle, though this error may be relevant for sizeable sources.

$$R_3 = \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2-r^2}{2*y}\right)^2 + r^2} \quad [82]$$

$$Q_3 = \frac{x^2+y^2+z^2-r^2}{2*y} \quad [83]$$

$$F_{CE} = \frac{z*(R_3-Q_3)}{2*R_3*(R_3-Q_3+y)} \quad [84]$$

$$F_{CE(hor)} = \frac{(R_3-Q_3)}{2*R_3} \quad [85]$$

### 3.8.- CONCLUSIONS

The authors have deduced a significant and increasing number of configuration factors for curved geometries that were previously unattainable. They have obtained this form general laws on their own invention that present no approximation or random operations and are coherent in every aspect with the laws of Geometric Optics and by extension with Physics.

New appropriate knowledge of energy and space in the field of radiative transfer is being provided. In this paper the particulars of simulation that the authors are performing have not been addressed; nevertheless is evident how these findings can be turned into simple algorithms featuring no more than three or four geometric magnitudes at once.

Thus, the authors have programmed such algorithms creating a powerful tool that is able to enrich the repertoire of forma and spaces suitable for simulation. This procedure will benefit energy-conscious engineering and architecture. Moreover, it will allow the industry to improve its products and to advance towards new and more sophisticated devices. In this sense, it will suffice to refer here to LED lighting, more appropriate to surface and volumetric elements, or sunlight conducting devices as useful for energy saving in retrofit.

It is the authors' belief in an era of uncertainties that sometimes the impossible turns out to be inevitable.

#### **4.- NUEVOS FACTORES DE CONFIGURACIÓN BASADOS EN EL CÍRCULO Y EL SEMICÍRCULO**

#### 4.1.- INTRODUCTION

Circular emitters represent an important issue in the field of configuration factors calculation. In the past, several factors have been found for specific positions of the unit area in relation to the surface source, such as centered with respect to the circle, but not for a generic position whether parallel or perpendicular.

In this paper the authors wish to step further in a global understanding of the nature of circular emitters, applying the potential of the theory of the illumination vector to this type of sources. Exact analytical solutions, derived directly from double integration are presented here for the three coordinate planes with respect to the emitting source; having exact analytical expression for the three planes, the illumination vector can be constructed in an easy and accurate way. These expressions are valid for a point that lies in a plane perpendicular or parallel to the former in every position, not only in an axis perpendicular to its center. Likewise, this solution can be turned into an algorithm programmed in any lighting simulation software and the lighting field can be visualized in an easy and accurate way. Computer simulation techniques and especially engineering lighting applications will be greatly enhanced and benefitted.

Evaluation of configuration factors is fundamental when dealing with the task of calculating lighting fields due to a source of any form or kind. This issue can be approached using several methods, according to classic literature in the lighting engineering. The canonical equation of the configuration factor is, as we already know:

$$\phi_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) \int_{A_1} \int_{A_2} \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \frac{dA_1 \cdot dA_2}{\pi r^2} \quad (86)$$

The mathematical meaning of equation (86) is, precisely, to extend integration over the entire surfaces that exchange radiant energy. In spite of the fact that mathematical procedures are, when possible, highly advisable, it is not always possible to use them, as direct integration sometimes entails unsolvable problems. In the particular case of the configuration factors between circular sources and a differential element, located in a plane parallel or perpendicular with respect to the former, direct double integration was avoided due to its excessive difficulty. Instead of this, other mathematical tools were employed to

solve the problem, such as nondimensionalization and contour integration using Stoke's theorem for reduction of the multiple integration process over a surface area to a single integration around the boundary of the said area.

Though these procedures are somewhat valid and widely used, they do not face direct and truly nature of configuration factors, which is, according to canonical equation (86), double integration over the whole surface. Configuration factors between a plane element  $dA_1$  and a circular disk, both in parallel and perpendicular positions, have been obtained without proper deduction, and are presented in form of tables and given formulas. In the first case we receive:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1+H^2-R^2}{\sqrt{Z^2-4R^2}} \right) \text{ for } Z = 1 + H^2 + R^2 \quad H = \frac{h}{a} \quad R = \frac{r}{a} \quad (87)$$

In the second case:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{H}{2} \left( \frac{Z}{\sqrt{Z^2-4R^2}} - 1 \right) \text{ for } Z = 1 + H^2 + R^2 \quad H = \frac{h}{a} \quad R = \frac{r}{a} \quad (88)$$

It has to be remarked that these expression are only valid for certain positions of the receiving point, such as aligned with an axis passing through the centre of the emitting circle.

The main objective of the present work is to develop advances in the calculation and overall understanding of configuration factors involving surface sources of circular shape, in order to obtain a general expression for the illumination vector at any point. It is important to remark that many authors have struggled to deal with these emitters, though difficulties arisen in the integration process have led them to abandon this task; in the particular case of the semicircle, as a portion of the circle, authors such as Moon or Yamauchi disregarded it in their calculations.

In former researches direct calculation for configuration factors of several types of emitters were proposed by the authors, as they offer immediate and productive application to the design and engineering field. This work presents direct exact integration over the whole surface of the emitters, prepared for these configurations:

- Plane differential element to a circular disk on a plane parallel to that of element.
- Plane differential element to a circular disk on a plane perpendicular to that of element.

Also, geometric relationships amongst factors are presented in order to check the obtained results; at last, using vector theory and given the former expressions, a general expression to construct the illumination vector at any point is given. An overall understanding of the nature of these emitters is highly desirable, as circles are widely present in numerous applications of the lighting engineering field.

#### 4.2.- DIRECT INTEGRATION FOR A PLANE DIFFERENTIAL ELEMENT TO A CIRCULAR DISK ON A PLANE PARALLEL TO THAT OF ELEMENT

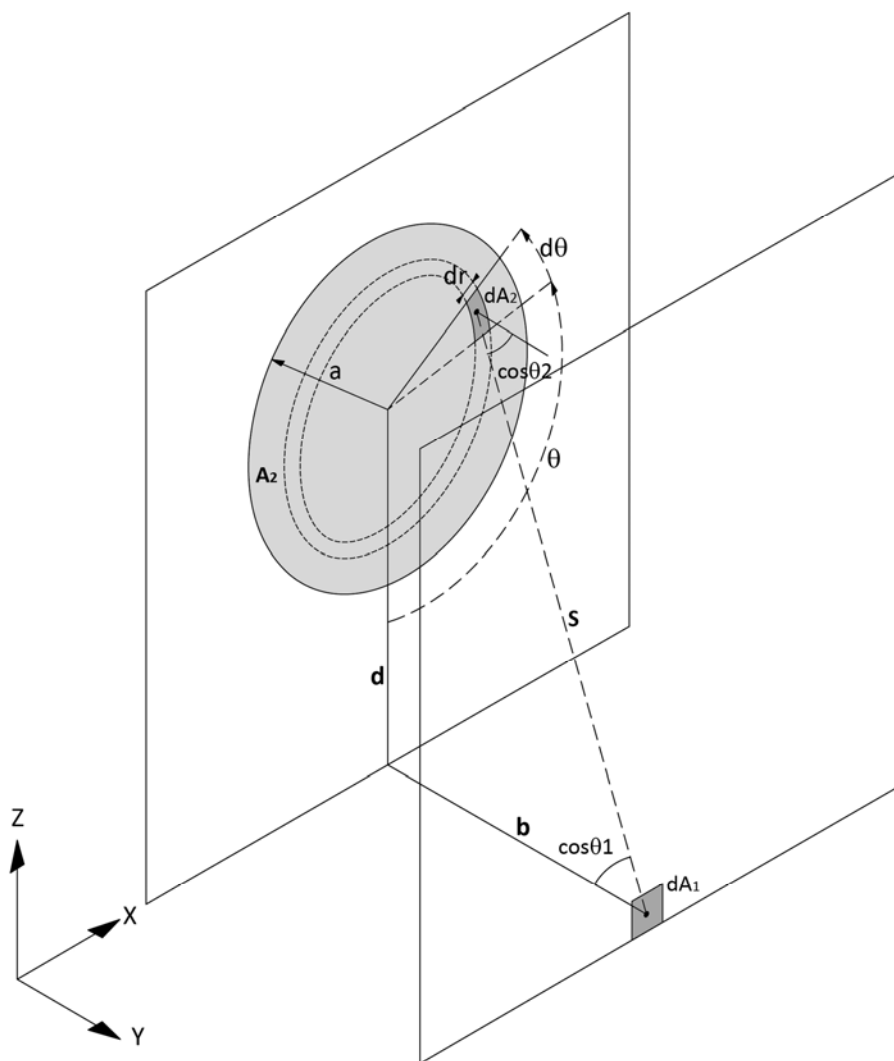


Figure 27: Calculation parameters for the parallel plane



Let's consider the proposed figure, in order to calculate radiant interchange between the emitting circle, which lays in the plane ZX, and a point P laying in another parallel plane XY, following the coordinate system proposed. Parameters depicted in figure 1 are:

- d: vertical distance between the center of the emitting circle and the plane XY.
- b: horizontal distance between differential element  $dA_1$  and the plane ZX that contains the said circle.
- Emitting surface of radius r.
- Distance between differential elements is S (in the canonical equation of configuration factor, it is denoted as r, but in order to differentiate it from radius of the disk r, we keep this denomination).

According to the figure, differential element  $dA_2$  is expressed in terms of r and  $\theta$ , thus, to receive a proper integral, the rest of elements inside the integration sign should be expressed using these variables (r and  $\theta$ ). Detailed construction for these elements can be found in numerous manuals of radiative transfer. Furthermore, mathematical support for the integration process can be found in many mathematics handbooks.

$$dA_1 \quad dA_2 = r dr d\theta \quad \cos\theta_1 = \frac{(d+r\cos\theta)}{S} \quad \cos\theta_2 = \frac{b}{S} \quad S = r^2 + d^2 + b^2 - 2dr \cdot \cos\theta \quad (89)$$

Substituting terms from (89) in accordance to our figure, in the canonical equation (1), the main integral that we need to solve is,

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{br \cdot (b-r \cdot \cos\theta)}{(r^2+d^2+b^2-2dr \cdot \cos\theta)^2} d\theta dr \quad (90)$$

Operating in the numerator we can decompose this integral in two parts:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{b^2 r}{(r^2+d^2+b^2-2dr \cdot \cos\theta)^2} d\theta dr + \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{br^2 \cdot \cos\theta}{(r^2+d^2+b^2-2dr \cdot \cos\theta)^2} d\theta dr \quad (91)$$

The limits for inner and outer integral are, respectively: From 0 to  $2\pi$ , that is, the angle subtended by the whole circle by  $\theta$ , and from 0 to  $a$ , that is, the whole extension of the radius of the emitting circle.

We must first integrate with respect to  $\theta$ . Let's deal with the first integral; we take out of it all the constants that are independent from  $\theta$ , and this yields:

$$b^2 r \cdot dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(r^2 + d^2 + b^2 - 2dr \cdot \cos\theta)^2} \quad (92)$$

This expression responds to the model that follows, which has the solution:

$$\int \frac{dx}{(B+C \cdot \cos(Ax))^2} = \frac{C \cdot \sin(Ax)}{A(B^2-C^2) \cdot (B+C \cos(Ax))} - \frac{B}{(C^2-B^2)} \int \frac{dx}{B+C \cdot \cos(Ax)} \quad (93)$$

The change of variables is as follows:

$$d\theta = dx \quad B = r^2 + d^2 + b^2 \quad c = -2dr \quad a = 1 \quad (94)$$

Before operating, and in order to simplify as much as we can the tedious calculations, this expression can be put in simpler terms only by applying logical deductions. Focusing our attention in the first term of (93):

$$\frac{C \cdot \sin(Ax)}{A(B^2-C^2) \cdot (B+C \cos(Ax))} \quad (95)$$

We observe that it has a  $\sin(Ax)$  in the numerator; as  $A=1$  this means that we have  $\sin(X)$ ; but we have to bear in mind that the limits for our defined integral are  $2\pi$  and 0, so that  $\sin(2\pi)=\sin(0)=0$ , and that yields:

$$\left. \frac{C \cdot \sin(Ax)}{A(B^2-C^2) \cdot (B+C \cos(Ax))} \right|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0 \quad (96)$$

Now we focus our attention in the second term of (93);

$$-\frac{B}{(C^2-B^2)} = -\frac{r^2+d^2+b^2}{4d^2r^2-(r^2+d^2+b^2)^2} = +\frac{r^2+d^2+b^2}{(r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2} \quad (97)$$

So far, we have solved all terms outside the integration sign of (93). What remains inside the integral admits this change:

$$\int \frac{dx}{B+C \cdot \cos(Ax)} = \frac{2}{A\sqrt{B^2+C^2}} \cdot \arctan \frac{(B-C) \cdot \tan(Ax/2)}{\sqrt{B^2-C^2}} \quad (98)$$

So that, substituting all terms we have:

$$\frac{r^2+d^2+b^2}{(r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{(r^2+d^2+b^2)^2-4d^2b^2}} \cdot \arctan \frac{((r^2+d^2+b^2)+2dr) \cdot \tan(\theta/2)}{\sqrt{(r^2+d^2+b^2)^2-4d^2b^2}} \right] \quad (99)$$

Once more, we apply some logic in order to boost our calculations; concentrating on the third term of (99), we find an *arctangent* and a *tangent* expression. If we remember again our limits of integration  $(2\pi,0)$ , we may assume the result of arctan as  $\pi$ , and that produces:

$$\frac{r^2+d^2+b^2}{(r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(r^2+d^2+b^2)^2-4d^2b^2}} \quad (100)$$

The value of  $\pi$  is a constant and can be taken out of the integration sign and eliminated by means of the canonical equation of the configuration factor. That yields:

$$2b^2 \int_0^a \frac{r \cdot (r^2+d^2+b^2)}{((r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr \quad (101)$$

Again we have to make some arrangements to these elements to produce an expression that enables easy integration. We multiply the numerator and denominator by 4 and add and subtract a new term,  $-2rd^2$ , always bearing in mind to reproduce the original expression in (101); that gives the following.

$$2b^2 \int_0^a \frac{4(r \cdot (r^2+d^2+b^2)-2rd^2+2rd^2)}{4((r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr \quad (102)$$

Decomposing and operating:

$$\begin{aligned} 2b^2 \int_0^a \frac{4(r^2+d^2+b^2)-8rd^2+8rd^2}{4((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr = \\ 2b^2 \int_0^a \frac{4(r^2+d^2+b^2)-8rd^2}{4((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} + \frac{8rd^2}{4((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr = \\ 2b^2 \int_0^a \frac{4r \cdot (r^2+d^2+b^2)-8rd^2}{4((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr + \int_0^a \frac{2rd^2}{((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr \end{aligned} \quad (103)$$

We have, once more, the integral of a sum, which can be treated as the sum of integrals. Dealing with the first term of (103) we receive:

$$2b^2 \int_0^a \frac{4r \cdot (r^2+d^2+b^2)-8rd^2}{4((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr = 2b^2 \int_0^a \frac{4r \cdot (r^2+b^2-d^2)}{4((r^2+d^2+b^2)-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr \quad (104)$$

That offers the solution:

$$-b^2 \left[ \frac{1}{((r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2)^{1/2}} \right]_0^a = \frac{b^2}{d^2+b^2} - \frac{b^2}{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)^{1/2}} \quad (105)$$

Now we have the remaining term of (19)

$$\int_0^a \frac{2rd^2}{((r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr \quad (106)$$

Expanding the denominator and rearranging its terms with reference to the variable r:

$$2b^2d^2 \int_0^a \frac{2rdr}{((r^4+2r^2(b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2)^{3/2}} \quad (107)$$

We can introduce the change of variable  $r^2=t$ , and that yields:

$$2b^2d^2 \int_0^{a^2} \frac{dt}{((t^2+2t \cdot (b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2)^{3/2}} \quad (108)$$

This integral responds to the following model with the solution:

$$\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}} \quad \text{for } X = ax^2 + bx + c \quad \text{and } \Delta = 4ac - b^2 \quad (109)$$

Making the substitution:

$$a = 1 \quad b = 2(b^2 - d^2) \quad c = (b^2 + d^2)^2 \quad \Delta = 4(b^2 + d^2)^2 - (b^2 - d^2)^2 = 16b^2d^2 \quad (110)$$

We find:

$$2b^2d^2 \left[ \frac{2(2t+2b^2-2d^2)}{16b^2d^2\sqrt{(t^2+2t \cdot (b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2)}} \right]_0^{a^2} = \frac{a^2+b^2-d^2}{2\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} - \frac{b^2-d^2}{2(d^2+b^2)} \quad (111)$$

Finally, we add both terms, from (105) and (111), to obtain the final result:

$$\frac{b^2}{d^2+b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{a^2+b^2-d^2}{2\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} - \frac{b^2-d^2}{2(d^2+b^2)} =$$

$$\frac{-2b^2+a^2+b^2-d^2}{2\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{2b^2-b^2+d^2}{2(d^2+b^2)} =$$

$$\frac{a^2 - b^2 - d^2}{2\sqrt{((a^2 + d^2 + b^2)^2 - 4d^2a^2)}} + \frac{b^2 + d^2}{2(d^2 + b^2)} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2\sqrt{((a^2 + d^2 + b^2)^2 - 4d^2a^2)}} \quad (112)$$

This result is, precisely, the same configuration factor from equation (87). If we name its terms, according to our nomenclature:

$$H = \frac{b}{d} \quad R = \frac{a}{d} \quad Z = 1 + H^2 + R^2 = \frac{b^2 + d^2 + a^2}{d^2} \quad (113)$$

Substituting in equation (87):

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1 + H^2 - R^2}{\sqrt{Z^2 - 4R^2}} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\frac{b^2 + d^2 - a^2}{d^2}}{\sqrt{\left( \frac{b^2 + d^2 + a^2}{d^2} \right)^2 - 4 \frac{a^2}{d^2}}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2\sqrt{((a^2 + d^2 + b^2)^2 - 4d^2a^2)}} \quad (114)$$

**4.3.- DIRECT INTEGRATION FOR A PLANE DIFFERENTIAL ELEMENT TO A CIRCULAR DISK ON A PLANE PERPENDICULAR TO THAT OF ELEMENT.**

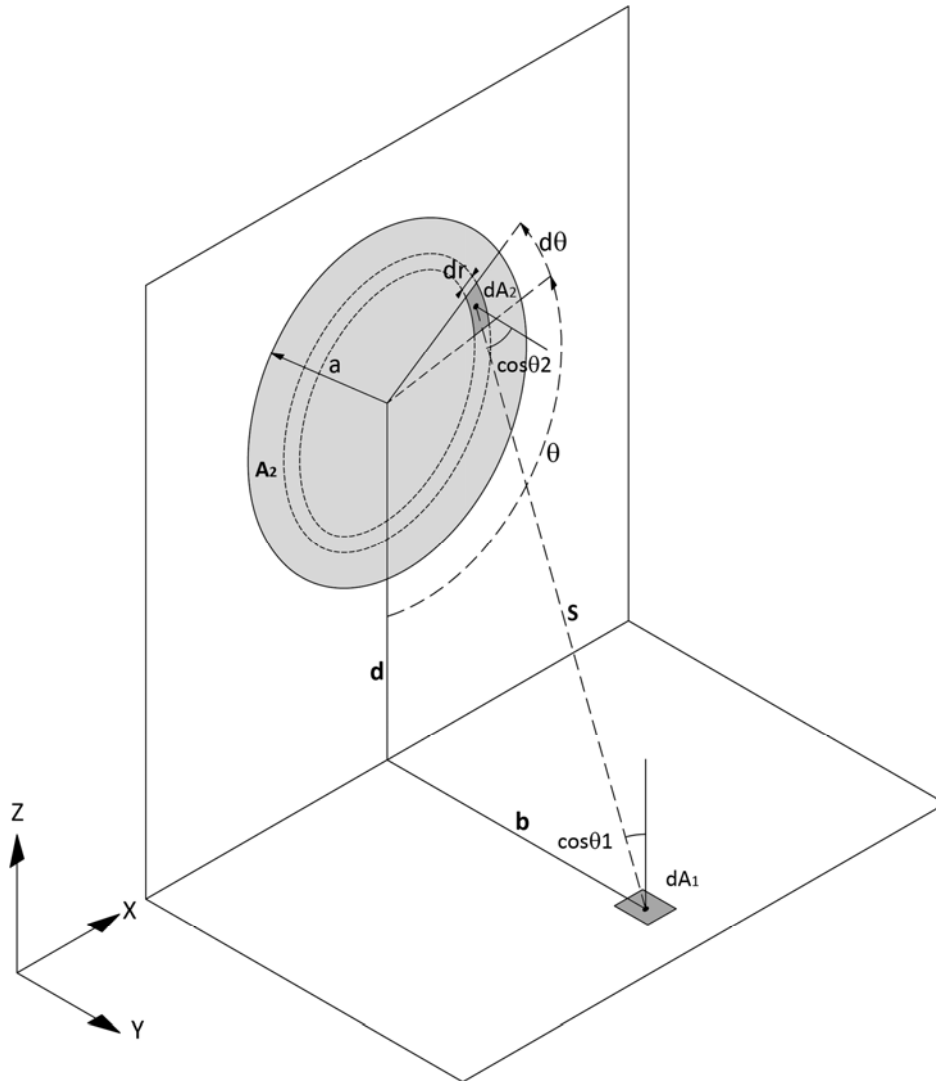


Figure 28: Calculation parameters for the perpendicular plane

In the perpendicular plane, that is, the ZX plane, according to our coordinate reference system, the main equation that we have to solve is:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{br(d-r\cos\theta)}{(r^2+d^2+b^2-2dr\cos\theta)^2} \cdot d\theta dr \quad (115)$$

This can be decomposed in two terms

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{brd}{(r^2+d^2+b^2-2dr\cos\theta)^2} \cdot d\theta dr + \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{br^2\cos\theta}{(r^2+d^2+b^2-2dr\cos\theta)^2} \cdot d\theta dr \quad (116)$$

The first part of this expression has already been solved, but with  $b^2$  instead of  $b \cdot d$  as a constant. The first term was solved in two parts, which were expressed in equations (105) and (111). First we rearrange equation (105) and obtain the result:

$$-b \cdot d \left[ \frac{1}{((r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2)^{1/2}} \right]_0^a = \frac{bd}{d^2+b^2} - \frac{bd}{\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} \quad (117)$$

Now, equation (111) is rearranged as follows:

$$2bd^3 \left[ \frac{2(2t+2b^2-2d^2)}{16b^2d^2\sqrt{(t^2+2t \cdot (b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2)}} \right]_0^{a^2} = 2bd^3 \left[ \frac{(a^2+b^2-d^2)}{4b^2d^2\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} - \frac{(b^2-d^2)}{4b^2d^2(d^2+b^2)} \right]$$

$$\frac{d \cdot (a^2+b^2-d^2)}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} - \frac{d(b^2-d^2)}{2b(d^2+b^2)} \quad (118)$$

Now we assemble equations (117) and (118), group terms by common denominator and operate:

$$\frac{bd}{d^2+b^2} - \frac{bd}{\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{d \cdot (a^2+b^2-d^2)}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} - \frac{d(b^2-d^2)}{2b(d^2+b^2)}$$

$$\frac{d \cdot (a^2+b^2-d^2)-2b^2d}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{2b^2d-d \cdot (b^2-d^2)}{2b(d^2+b^2)} = \frac{a^2d-b^2d-d^3}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{b^2d+d^3}{2b(d^2+b^2)} =$$

$$\frac{-d(-a^2+b^2+d^2)}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{d(b^2+d^2)}{2b(d^2+b^2)} = \frac{-d(b^2+d^2-a^2)}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{d}{2b} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{b} \left[ 1 - \frac{(b^2+d^2-a^2)}{\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} \right] \quad (119)$$

We still have the second term from (116):

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{br^2 \cos \theta}{(r^2+d^2+b^2-2dr \cos \theta)^2} \cdot d\theta dr \quad (120)$$

Again, integrating with respect to  $\theta$  we have:

$$\int_0^a \frac{4bdr^2}{((r^2+d^2+b^2)^2-4d^2r^2)^{3/2}} \cdot dr \quad (121)$$

Again, if we employ the change  $r^2=t$  we would obtain,

$$2bd \int_0^{a^2} \frac{t}{(t^2+2t(b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2)^{3/2}} \cdot dt \quad (122)$$

An integral that admits the immediate solution:

$$\int \frac{xdx}{x\sqrt{X}} = -\frac{2(2bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}} \quad \text{for } X = ax^2 + bx + c \quad \text{and } \Delta = 4ac - b^2 \quad (123)$$

Making the substitution:

$$a = 1 \quad b = 2(b^2 - d^2) \quad c = (b^2 + d^2)^2 \quad \Delta = 4(b^2 + d^2)^2 - (b^2 - d^2)^2 = 16b^2d^2 \quad (124)$$

We obtain:

$$2bd \left[ \frac{(b^2-d^2)t+(b^2+d^2)^2}{4b^2d^2\sqrt{t^2+2t(b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2}} \right]_0^{a^2} = \frac{a^2(b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2}{2bd\sqrt{(a^2+b^2+d^2)^2-4d^2a^2}} - \frac{b^2+d^2}{2bd} \quad (125)$$

Finally, in order to produce the final solution for the perpendicular plane, we need to assemble equations (119) and (125). Grouping and rearranging by common denominators we have:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2b} - \frac{d(b^2+d^2-a^2)}{2b\sqrt{((a^2+d^2+b^2)^2-4d^2a^2)}} + \frac{a^2(b^2-d^2)+(b^2+d^2)^2}{2bd\sqrt{(a^2+b^2+d^2)^2-4d^2a^2}} - \frac{b^2+d^2}{2bd} \\ & \frac{a^2b^2-a^2d^2+b^4+d^4-2b^2d^2-b^2d^2-d^4+a^2d^2}{2bd\sqrt{(a^2+b^2+d^2)^2-4d^2a^2}} + \frac{d^2-b^2-d^2}{2bd} \\ & \frac{b^2(a^2+b^2+d^2)}{2bd\sqrt{(a^2+b^2+d^2)^2-4d^2a^2}} - \frac{b^2}{2bd} \\ & \frac{b}{2d} \left[ \frac{a^2+b^2+d^2}{\sqrt{(a^2+b^2+d^2)^2-4d^2a^2}} - 1 \right] \quad (126) \end{aligned}$$

Again, this result can be checked against usual formulas that appear in numerous configuration factor catalogues; in this case, taking expression (87) and making:

$$H = \frac{b}{d} \quad R = \frac{a}{d} \quad Z = 1 + H^2 + R^2 = \frac{a^2+b^2+d^2}{d^2} \quad (127)$$



We have the following:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{H}{2} \left( \frac{Z}{\sqrt{Z^2 - 4R^2}} - 1 \right) = \frac{b}{2d} \left( \frac{\frac{a^2 + b^2 + d^2}{d^2}}{\sqrt{\left( \frac{a^2 + b^2 + d^2}{d^2} \right)^2 - \frac{4a^2}{d^2}}} - 1 \right) = \frac{b}{2d} \left( \frac{a^2 + b^2 + d^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 + d^2)^2 - 4a^2d^2}} - 1 \right) \quad (128)$$

That is, precisely, the expression obtained by direct double integration. However, most authors seem to ignore that this second expression, unlike the first one, does not solve the problem completely only when the element is in a plane that passes through the center of the circle. A more general solution can be found in another text by the authors. In this text a relationship between the two fundamentals expressions has been found.

#### 4.4.- CHECK OF RELATIONSHIP BETWEEN CONFIGURATION FACTOR FOR PERPENDICULAR AND PARALLEL PLANES:

So far, direct integration has led to obtain exact analytical solutions for the configuration factors in a differential element, with respect to an emitting circle in planes both parallel and perpendicular.

If we express the former equations in terms of parameters R and Q:

$$R = \sqrt{\left( \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2b} \right)^2 + a^2} \quad (129)$$

$$Q = \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2b}$$

Equation (112) for the parallel factor is expressed as:

$$\frac{R-Q}{2R} \quad (130)$$

Equation (126) for the perpendicular plane can also be expressed as:

$$\frac{b}{2d} \left[ \frac{a^2 + b^2 + d^2 - \sqrt{(a^2 + b^2 + d^2)^2 - 4d^2a^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + d^2)^2 - 4d^2a^2}} \right] \quad (131)$$

The addition of both expressions would mean:

$$\frac{Q-R+\frac{R^2-Q^2}{2b}}{R} = \frac{2b(Q-R)+R^2-Q^2}{2bR} \quad (132)$$

As:

$$\frac{R^2-Q^2}{2b} = \frac{a^2}{2b} \quad (133)$$

Now both terms are assembled and multiplied by b/d:

$$\frac{2b(Q-R)+R^2-Q^2}{2dR} - \frac{b(Q-R)}{2dR} = \frac{(Q-R)(-R-Q+b)}{2dR} = \frac{(R-Q)(R+Q-b)}{2dR} \quad (134)$$

We need to remember that:

$$\frac{(R+Q-b)}{d} = \frac{d}{(R-Q+b)} = tg\theta \quad (135)$$

Thus, the first factor (112) multiplied by  $\tan\theta$  equates the second factor (126); this was shown graphically by Yamauchi, but the sole analytical demonstration has been given by the authors.

#### 4.5.- CONSTRUCTION OF THE ILLUMINATION VECTOR FOR ANY GIVEN POINT DUE TO A CIRCULAR EMITTER.

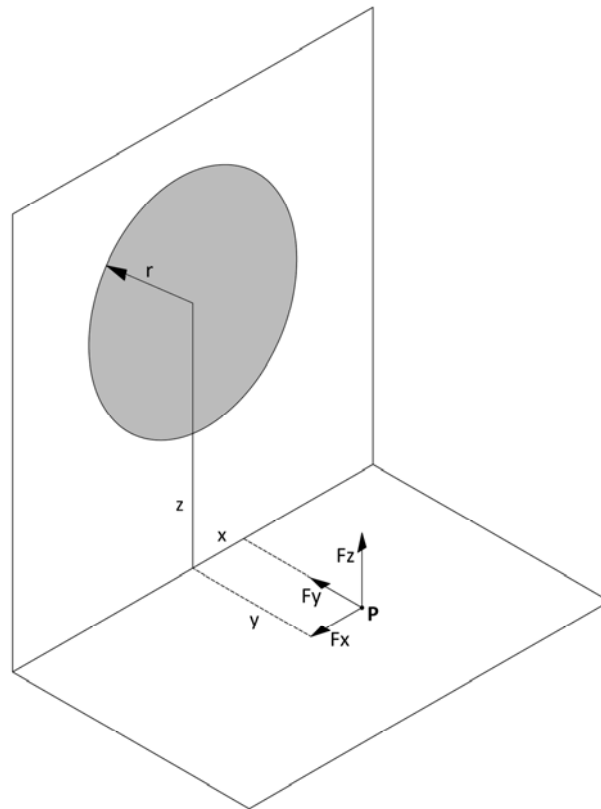


Figure 29: Calculation parameters for construction of the

Let's consider figure 29, according to which we can define the three components depicted. In order to express with more clarity the three components, according to three coordinate axis X, Y and Z, we can make the change:

$$a = r$$

$$b = y$$

$$d = (x^2 + z^2)^{1/2} \tag{136}$$

We receive the following expression; firstly from equation (112) in the y direction:

$$F_y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}{\sqrt{(r^2 + y^2 + z^2)^2 - 4r^2(x^2 + z^2)}} \right) \quad (137)$$

And also, for the x and z direction, and substituting in expression (126):

$$F_z = \frac{yz}{2(x^2 + z^2)} \left[ \frac{r^2 + x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{(r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4r^2(x^2 + z^2)}} - 1 \right] \quad (138)$$

$$F_x = \frac{yx}{2(x^2 + z^2)} \left[ \frac{r^2 + x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{(r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4r^2(x^2 + z^2)}} - 1 \right] \quad (139)$$

These two last factors unavailable in the literature have been derived via the previous analytical exact expressions by the authors and are presented in this simple Cartesian form for the first time.

The radiation vector theory states that once the components of the vector are known for three coordinate planes, the said vector can be found for any other direction whose angles are defined in the problem.

Figure 26 gives the three directions of the radiative field. Given the expression (137), (138) and (139) we are capable of constructing the radiation vector at any point using vector addition.

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad (140)$$

Before constructing the vector, some simplifications could be made. Firstly, we rename its components:

By making

$$P = r^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (141)$$

And

$$Q = \sqrt{(r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4r^2 \cdot (x^2 + z^2)} \quad (142)$$

The three factors are simplified to,

$$F_x = \frac{yx}{2(x^2+z^2)} \left[ \frac{P}{Q} - 1 \right]$$

$$F_y = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P-2r^2}{Q} \right)$$

$$F_z = \frac{yz}{2(x^2+z^2)} \left[ \frac{P}{Q} - 1 \right] \quad (143)$$

Thus, the configuration factor that we are seeking is,

$$F = \frac{yx}{2(x^2+z^2)} \left[ \frac{P}{Q} - 1 \right] + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P-2r^2}{Q} \right) + \frac{yz}{2(x^2+z^2)} \left[ \frac{P}{Q} - 1 \right] \quad (144)$$

Let's develop each one of the former components to find the modulus. For the first one  $F_x$  we have:

$$[F_x]^2 = \frac{y^2 x^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ)}{2Q^2 (x^2 + z^2)^2} \quad (145)$$

For the second one, that is,  $F_y$ :

$$\begin{aligned} [F_y]^2 &= \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P-2r^2}{Q} \right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{2} - \frac{P-2r^2}{2Q} \right]^2 = \frac{1}{4} + \frac{P^2 + 4r^2 - 4Pr^2}{4Q^2} - \frac{2P-4r^2}{4Q} = \\ &= \frac{Q^2 + P^2 + 4r^2 - 4Pr^2 - 2PQ - 4Qr^2}{4Q^2} = \frac{(Q-P-2r^2)^2}{4Q^2} \end{aligned} \quad (146)$$

For  $F_z$ , the operation is similar to  $F_x$ , only changing  $z$  for  $x$ , and that yields:

$$[F_z]^2 = \frac{y^2 z^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ)}{2Q^2 (x^2 + z^2)^2} \quad (147)$$

And now we only need to assemble these three components into one single expression:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2} = \sqrt{\frac{y^2 x^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ)}{2Q^2 (x^2 + z^2)^2} + \frac{(Q-P-2r^2)^2}{4Q^2} + \frac{y^2 z^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ)}{2Q^2 (x^2 + z^2)^2}} \quad (148)$$

Rearranging and operating this we can reach a more simplified expression:

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \\ &= \sqrt{\frac{y^2 x^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ) + y^2 z^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ) + (x^2 + z^2)^2 (Q-P-2r^2)^2}{4Q^2 (x^2 + z^2)^2}} \sqrt{\frac{y^2 (P^2 + Q^2 - 2PQ)(x^2 + z^2) + (x^2 + z^2)^2 (Q-P-2r^2)^2}{4Q^2 (x^2 + z^2)^2}} \end{aligned} \quad (149)$$

And finally, substituting the original equivalence for P and Q.

$$\frac{y^2(x^2+z^2)\left((r^2+x^2+y^2+z^2)^2+(r^2+x^2+y^2+z^2)^2-4r^2\cdot(x^2+z^2)-2(r^2+x^2+y^2+z^2)\sqrt{(r^2+x^2+y^2+z^2)^2-4r^2\cdot(x^2+z^2)}\right)+ (x^2+z^2)^2\left(\sqrt{(r^2+x^2+y^2+z^2)^2-4r^2\cdot(x^2+z^2)}-3r^2-x^2-y^2-z^2\right)^2}{2(x^2+z^2)\left(\sqrt{(r^2+x^2+y^2+z^2)^2-4r^2\cdot(x^2+z^2)}\right)} \quad (150)$$

We receive the final expression for the modulus of the said vector, which only depends on the geometric parameters  $y$ ,  $y$ ,  $z$  and  $r$ .

Alternately, such modulus can be projected multiplying by the cosine (dot product) onto the normal to the unit surface considered to obtain the desired factor at any plane.

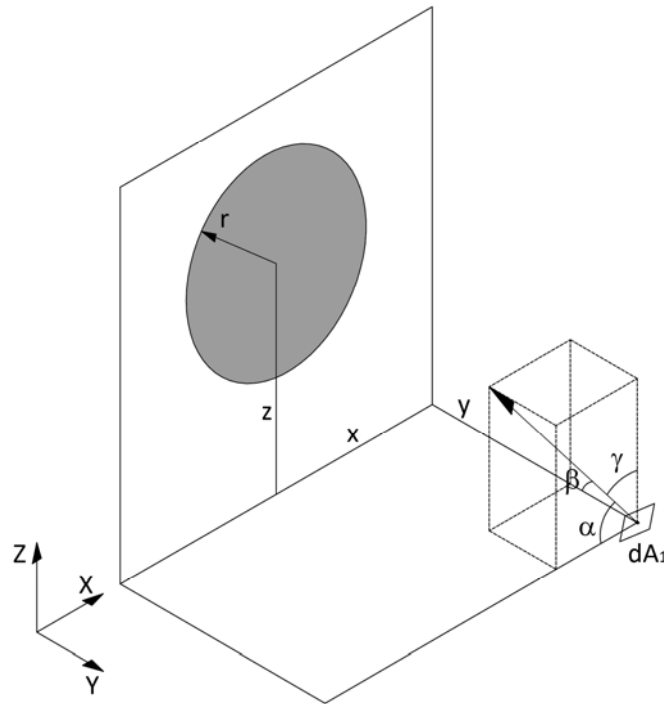


Figure 30. Configuration factor in a point P at a random position

The modulus of the vector for an arbitrary position of the point-plane can be obtained in a similar fashion. According to figure 1,

$$\vec{F} = \cos\alpha \cdot \vec{F}_x + \cos\beta \cdot \vec{F}_y + \cos\gamma \cdot \vec{F}_z \quad (151)$$

And, again, substituting the expression for each vector we receive this expression:

$$\vec{F} = \frac{yx}{2(x^2+z^2)} \left[ \frac{P}{Q} - 1 \right] \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{P-2r^2}{Q} \right) \cdot \cos\beta + \frac{yz}{2(x^2+z^2)} \left[ \frac{P}{Q} - 1 \right] \cdot \cos\gamma \quad (152)$$

Which expresses the said vector for a point in a random position with respect to the emitting circle. If we want to find the modulus we have a similar expression to [152], but adding the correspondent cosines:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot \frac{y^2x^2(P^2+Q^2-2PQ)}{2Q^2(x^2+z^2)^2} + \cos^2\beta \cdot \frac{(Q-P-2r^2)^2}{4Q^2} + \cos^2\gamma \cdot \frac{y^2z^2(P^2+Q^2-2PQ)}{2Q^2(x^2+z^2)^2}} \quad (153)$$

Logically, if the angles  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  equal zero, expression [153] will equal expression [148].

#### 4.6.- NEW CONFIGURATION FACTORS FOR THE SEMICIRCLE

A logical question arises about the case when the calculation plane cuts the circle in any section; if that is the case, it is difficult to find an exact expression for the factor. However if we have a semicircle, the authors have proved that the configuration factor derives from the integral,

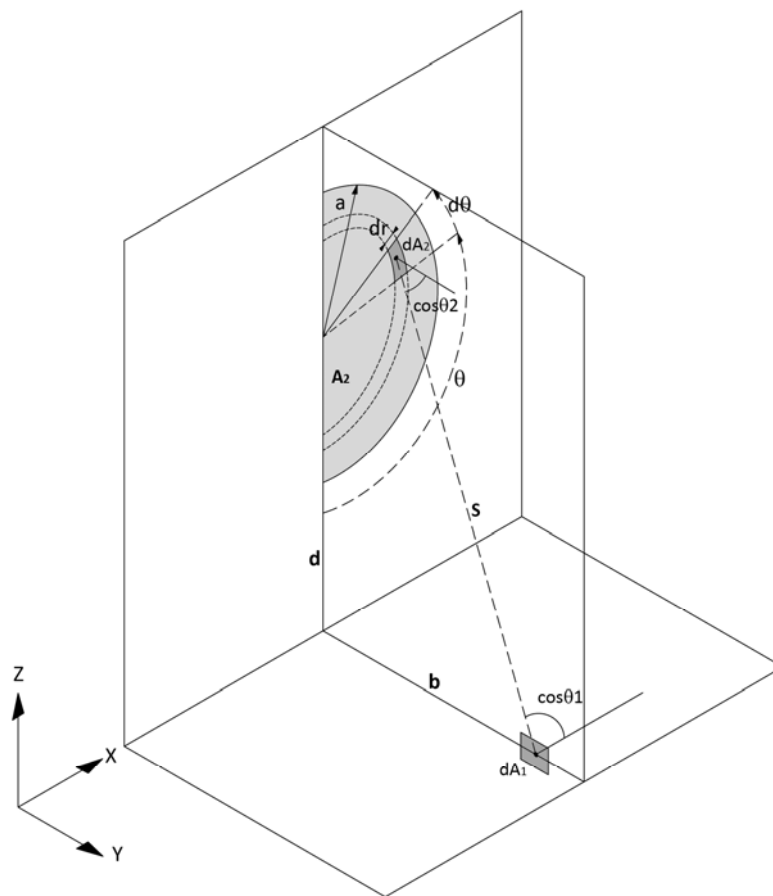


Figure 31. Calculation parameters for the semicircle

Again, the posed equation would be:

$$\int_0^a \int_0^\pi \frac{br^2 \sin \theta}{(r^2 + d^2 + b^2 - 2dr \cos \theta)^2} \cdot d\theta \cdot dr \quad (154)$$



In this particular case, we cannot extend the limits of the integral to  $2\pi$ , as the value would be nil. If we integrate with respect to  $\theta$ , in the numerator we would find the derivative of  $\cos\theta$ ,  $-\sin\theta$ . Therefore by making this change:

$$t = \cos\theta \quad dt = -\sin\theta d\theta \quad (155)$$

Integral (52) can be expressed as:

$$\int_0^a \int_{-1}^1 \frac{-br^2}{(r^2+d^2+b^2-2drt)^2} \cdot dt \cdot dr \quad (156)$$

Taking out all the constants, and integrating with respect to  $r$ , the primitive is just the quotient of the numerator:

$$\frac{-br^2}{2dr} \left[ \frac{1}{r^2+d^2+b^2-2drt} \right]_1^{-1} = \frac{br}{2d} \left( \frac{1}{r^2+d^2+b^2-2dr} - \frac{1}{r^2+d^2+b^2+2dr} \right) \quad (157)$$

Now we have to integrate with respect to  $a$ ; the last integral to solve is:

$$\int_0^a \frac{r}{r^2+d^2+b^2-2dr} \cdot dr + \int_0^a \frac{r}{r^2+d^2+b^2+2dr} \cdot dr \quad (158)$$

That responds to the form:

$$\int \frac{x \cdot dx}{X} = \frac{1}{2a} \cdot \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X} \quad X = ax^2 + bx + c \quad \Delta = 4ac - b^2$$

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \cdot \arctg \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \quad (159)$$

Substituting in (159) we have for both terms:

$$a = 1 \quad b = \pm 2d \quad c = (d^2 + b^2)$$

$$X = r^2 \pm 2dr + (d^2 + b^2) \quad \Delta = 4b^2 \quad (160)$$

Now, substituting in the first term of (158) we have:

$$\frac{1}{2} [\ln(r^2 + d^2 + b^2 - 2dr)]_0^a + \frac{d}{b} \left[ \arctan\left(\frac{r-d}{b}\right) \right]_0^a \quad (161)$$

And substituting again:

$$\frac{1}{2} (\ln(a^2 + d^2 + b^2 - 2da) - \ln(d^2 + b^2)) + \frac{d}{b} (\arctan \frac{a-d}{b} + \arctan \frac{d}{b}) \quad (162)$$

In a similar way, for the second term of (158) we have:

$$-\frac{1}{2} (\ln(a^2 + d^2 + b^2 + 2da) + \ln(d^2 + b^2)) + \frac{d}{b} (\arctan \frac{a+d}{b} - \arctan \frac{d}{b}) \quad (163)$$

Finally, multiplying by  $b/2\pi d$  and grouping, the final result can be expressed as:

$$\frac{1}{2\pi} \left( \arctan \frac{a+d}{b} + \arctan \frac{a-d}{b} \right) + \frac{b}{4\pi d} \ln \frac{a^2+b^2+d^2-2ad}{a^2+b^2+d^2+2ad} \quad (164)$$

We can check that this equates the area subtended by a circular sector that encompasses the diameter of the emitting disk and the corresponding sector of an hyperbola defined by the intersection of the unit sphere and the cone.

If  $a=d$ , the factor is,

$$\frac{1}{2\pi} \arctan \frac{2a}{b} - \frac{b}{4\pi d} \ln \frac{4a^2+b^2}{b^2} \quad (165)$$

Where the former assert is more easily visualized.

If  $d=0$  the expression is undetermined and we have to pass the limit with l'Hôpital's rule, obtaining the familiar result.

$$\frac{1}{\pi} \left( \arctan \frac{a}{b} - \frac{ab}{a^2+b^2} \right) \quad (166)$$

Equation (164) is entirely new and has never been mentioned in the literature; equation (165) constitutes a particular case of the former, that is, when  $a$  equals to  $d$ , meaning that the receiving plane lies on the edge of the emitting semicircle; equation (166) is the particular case in which the receiving point is aligned with the center of the half-disk.

#### 4.7.- GRAPHICAL VISUALIZATION

To help visualizing the results of this research; this formulas have been programmed by the authors in Matlab® computational language, which greatly enhances understanding of radiative exchange between emitting surfaces and receiving planes. 3D graphs have been produced for a generic semicircular emitter.

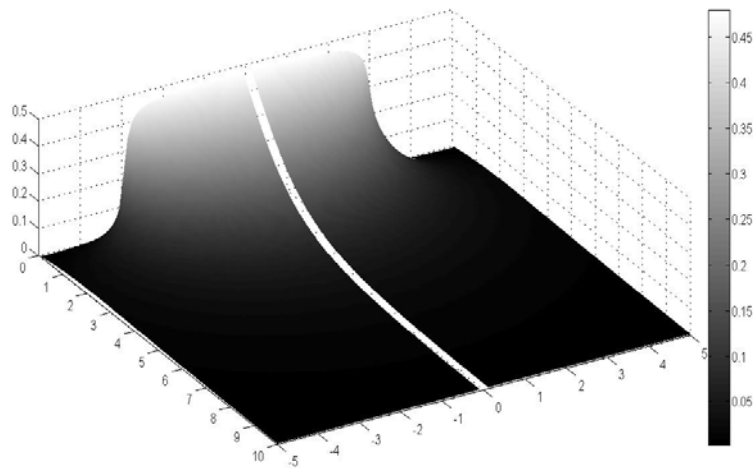


Figure 32: The radiative field generated by a half disk of radius 3m. Over the perpendicular plane that contains the straight edge of the disk in a grid of 10 by 10 m

#### 4.8.- CONCLUSIONS

New integral equations related to the circle are solved and checked against former inaccurate or unavailable results in an entirely orthodox procedure. The exact expression for the three coordinate axis, dependent only on geometric parameters have been deduced, and using them a general expression for the construction of the illumination vector at any given point has been presented.

These equations can be programmed directly in computer simulation engineering software, avoiding iterative methods that, even with proven accuracy, waste more time and resources; also, construction of the illumination vector at any point can help to visualize the nature of the radiative field due to circular emitters.

These will lead to a global understanding of the radiative properties of the circular emitters, which are widely used in the lighting engineering field. All the former will show immediate application in lighting simulations not only for typical emitters but also for more complex non-uniform or occluded sources often found in engineering and that can be assimilated to clusters of circles.

Based on the new circle algorithms that we have deduced a simulation method for all kinds of geometries is been launched. With this method LED and surface sources of artificial lighting can be studied with higher accuracy thus guaranteeing a better performance.

The authors believe that the achievements hereby exposed are relevant for all-purpose lighting field calculations.

**5.- GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE PROYECCIÓN DEL ÁNGULO  
SÓLIDO PARA EL CAMPO RADIANTE**

## 5.1.- INTRODUCCIÓN

The projected solid-angle principle is a question mentioned in most treatises on radiative field and geometric optics (Fock, Gershun, Yamauchi, Moon, Spencer, Kittler, Cabeza-Lainez). The kernel introduced to solve the configuration factor between surfaces and points allows for geometric representation and it is often termed view factor. However, the procedures that lead to an exact expression for the drafts of the projected solid-angle were somehow veiled and uncertain. Occasionally, the area of the projection could not be found due to the special difficulties encountered in the integration process. For the fundamental case of radiant disks, the cone subtended from the emitting source and the subsequent intersection with a unit sphere could not be expressed analytically and the corresponding integrals were deemed to be irresoluble. After more than twenty years of indefatigable research the authors have found an exact solution for the said problems.

Having solved these complicated matters, the projected solid-angle principle can be totally generalized. Such a paramount finding settles a problem open in science for more than two hundred years since graphic modeled calculations are the most effective way to treat non-uniform emitters. Moreover, simulation procedures and especially those which involve CAD analysis will be greatly enhanced and benefitted. The energy transfer represented by radiative fields is now more accessible than ever before. This newly found technique is applicable to emitters of any form and several kinds of artificial lighting and LED. The ancient dream of obtaining the complex radiant exchange due to a given enclosure without calculus and by virtue solely of drawings is altogether possible.

As it has been discussed widely, with the majority of calculations for radiative transfer we are only intending to find geometric factors as proportions of radiation. Thus, it seems reasonable that the sought-for values can also be determined through graphic procedures like those employed in Geometry. In science something that sounds reasonable is not always easy to prove but after some years of research we could arrive at the proper demonstrations.

The advantages for the designers are obvious because if due to the difficulty of the radiative problem, doubts appear during the calculations this method provides easy and fast visualization.

In summary, configuration factors are dimensionless quantities, ratios that may be expressed as a relation of areas; the first one of those areas is a projection and the second of them is the total surface expressed in stereographic terms, usually  $\pi$ .

In order to obtain the flux transfer between a surface and a point, we could simply draw a cone whose vertex is the study-point and the base is the emitting surface. The intersection of the said cone with a sphere of unit radius ( $r=1$ ) is then projected onto the reference plane (horizontal, vertical, etc.). The area inside this projection divided by the projected area of the whole sphere on the same plane (i.e.  $\pi$ ) gives the value of the configuration factors much in the same way as with the analytical methods already used (See figure 33).

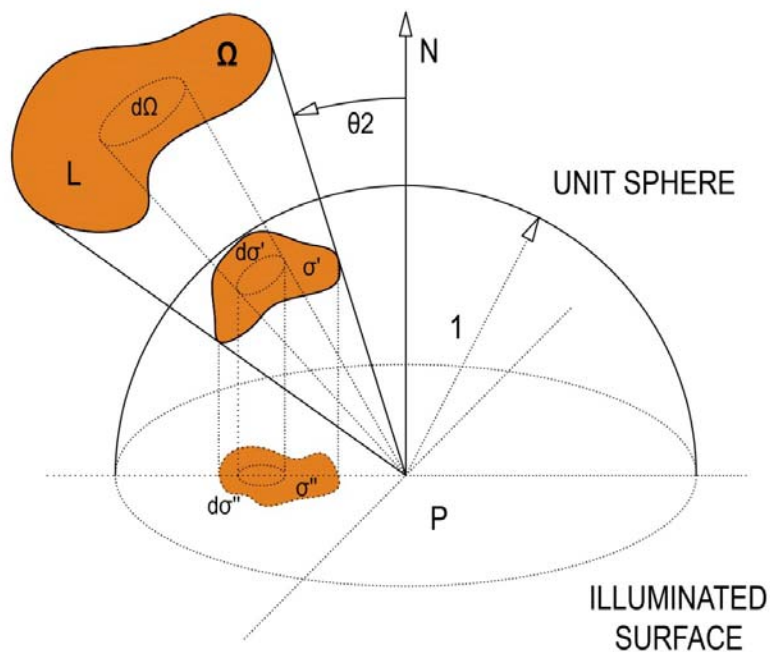


Figure 33: The radiant-cone in this figure cuts the area  $\sigma'$  from the unit sphere. Orthogonal projection of  $\sigma'$  onto the illuminated or irradiated plane gives the area  $\sigma''$ , this surface divided by  $\pi r^2 = \pi$  equates the value of the configuration factor.

The main consequence that we can draw from this fact is that the problem of finding the configuration factor will have a unique solution regardless of its complexity because the area of a projection always produces a univocal value.

Moreover, the factors can be understood as projections and thus they possess the additive property. This is useful when dealing with several emitting sources or non-lambertian bodies as long as their effects can be fragmented and then added. Thus, the average of this

geometric proportion extended over the corresponding surface will be the configuration factor which in some cases is very difficult to find with analytical expressions.

This said, we can alternately use graphic or analytical methods or a combination of both via Computer Aided Design.

Somehow it is reassuring to know that we are able to solve one of the fundamental problems in radiative transfer by means of geometric procedures. This means that shape that is, "form" is very important in such type of problem and not all shapes may have the same performance from the point of view of radiation. Some forms enhance radiative exchanges more than others and the task of scientists is to try and experiment with them being well aware of their effects. Also, those effects can be checked by the industry with the help of simple simulation models.

## 5.2.- SEMI-ANALYTICAL VALIDATION FOR THE RECTANGLE

Assume a rectangular surface 1 meter high by 3 metres wide and we look for the configuration factor at a point distant two metres from the rectangle in a plane 1 meter under the lower edge of the said rectangle (Fig.34).

Using the formulas already obtained with integration, we have a value of 0.0584.

As we said, the projected area of the sphere gives  $\pi$ . The value of the minor radiuses of the resulting ellipses are respectively  $b_1= 0.8944$ ,  $b_0= 0.7071$ , and the major radius is obviously 1m.

We have devised that only way to solve the problem is by virtue of generalized polar coordinates

$$x = a\rho\cos\theta \quad y = b\rho\sin\theta \quad [167]$$

the differential surface element is

$$ab\rho d\rho d\theta \quad [168]$$

The equation of an ellipse is



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rho = 1 \quad [169]$$

This equation in generalized polar coordinates means that  $\rho=1$

The area is then,

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1} \int_0^1 ab\rho d\rho d\theta = ab \int_{\theta_2}^{\theta_1} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\theta = ab \int_{\theta_2}^{\theta_1} \left[ \frac{1^2}{2} \right]_0^1 d\theta = ab \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2} \quad [170]$$

We only need to find the values of  $\theta_1$  and  $\theta_2$  as functions of the chosen coordinates. As the angles are the same with respect to the axis of symmetry of the window the former expression can be transformed into  $ab\theta$ .

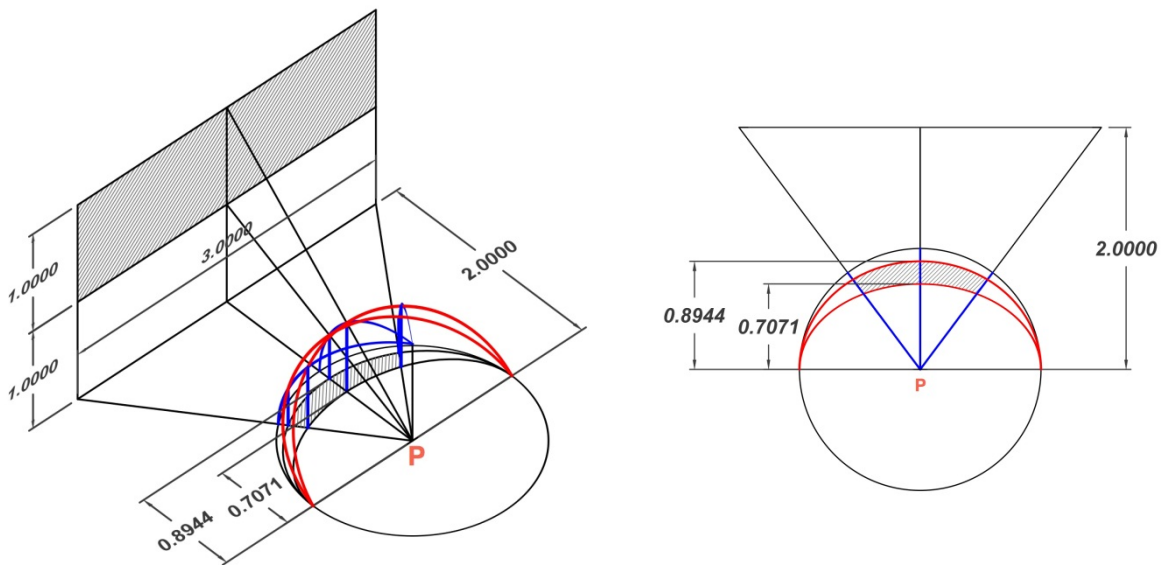


Ilustración 34. Configuration factor of a rectangle of 3x1 m. (width x height) over a point situated at 2m. of distance and one meter under the edge of the emitting surface. Notice the use of the unit sphere to determine the projections with CAD systems.

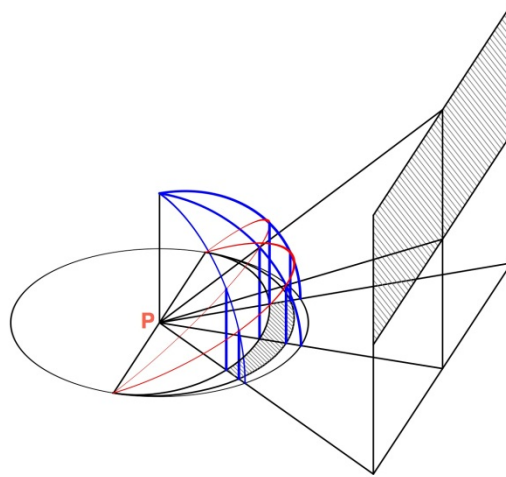


Figure 35. The same problem as in Figure 2 but taking a different view

For the larger ellipse  $y = 2\text{m}$ ,  $x = 1.5\text{ m}$ .  $a = 1\text{ m}$ .  $b = 0.8944$ . Then the value of  $\theta$  is  $\theta = \arctan\left(\frac{2}{\frac{1.5x1}{0.8944}}\right) = 0,9799$  and the complementary with respect to  $\pi/2$  (1.5707) is 0.5908 pseudo-radians.

The area equates  $0.5908 * 0.8944$  and in the smaller ellipse this would equate 0.3447; thus by subtraction the final area is  $0.5284 - 0.3447 = 0.1837$ . And this amount divided by  $\pi$  gives 0.0584 exactly the same that we had obtained with more traditional methods.

In many complex cases (non-uniform emitters and/or presence of radiative obstructions) the projected solid angle principle is the only effective procedure to assess the performance of a given design solution and to obtain the radiative field generated.

### 5.3.- GRAPHICAL METHOD FOR CIRCULAR EMITTERS

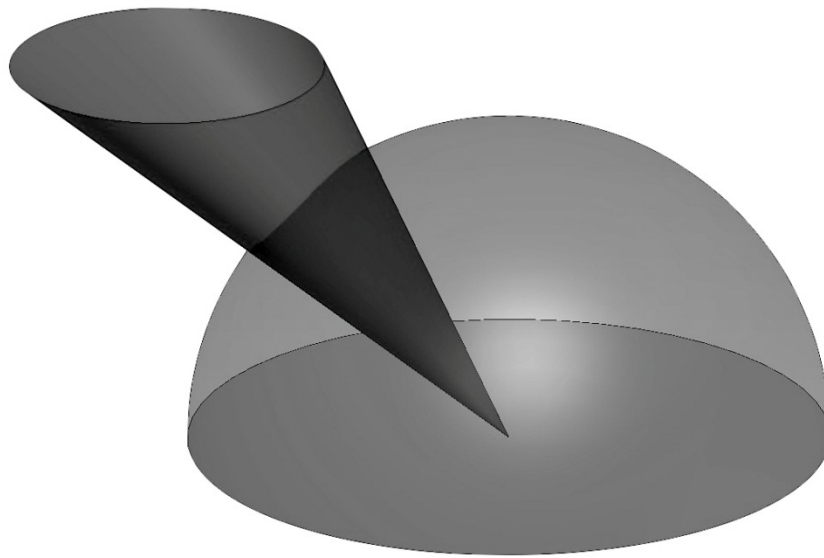


Figure 36. The projected solid angle principle applied to a radiant disk

Now, let us try to solve the same problem for a circular disk emitter. From the analytical point of view we need to integrate complicated equations that even the authors considered insurmountable until recently.

Through Figure 36 we could determine the parameters of the cone that subtends the emitting circle of radius  $a$  at point P.

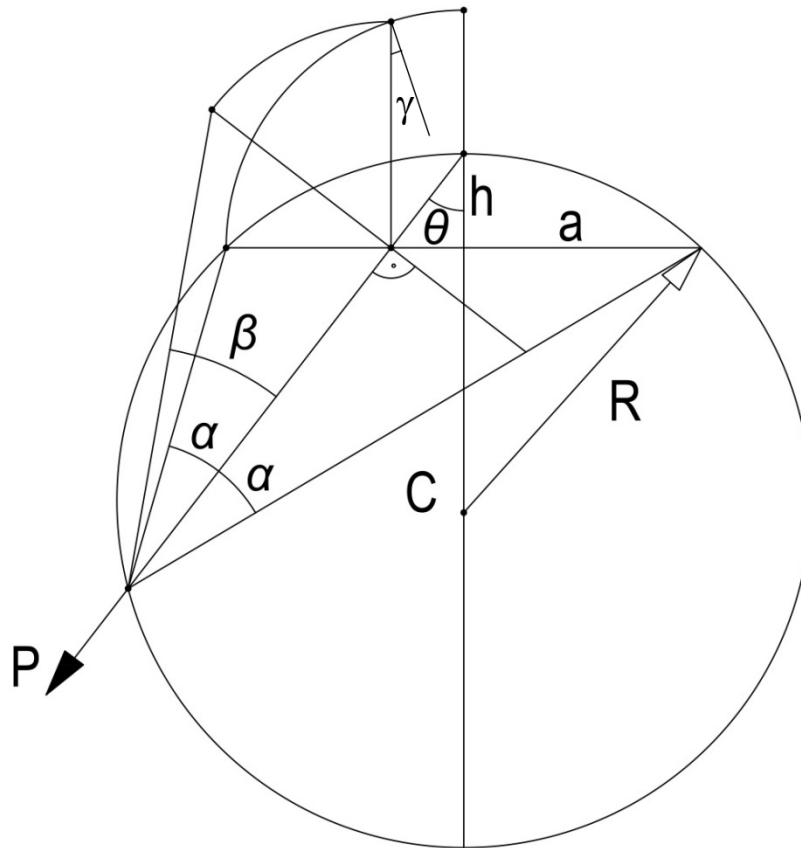


Ilustración 37. Graphic procedure to find the main angles of the radiant cone.

A geometric demonstration follows to determine the main attributes of the cone under consideration.

The distance from the vertex of the cone to the emitting circle is (see figure 37)

$$2R\cos\theta = \frac{h}{\cos\theta} \quad [171]$$

Yamauchi dealt to some extent with the matter. By unifying the denominator

$$\frac{2Rh\cos^2\theta - h^2}{h\cos\theta} \quad [172]$$

But

$$2Rh = a^2 + h^2 \quad [173]$$

And substituting,

$$\frac{(a^2 + h^2)\cos^2\theta - h^2}{h\cos\theta} \quad [174]$$

For simplicity we may call E to the numerator

$$E = (a^2 + h^2)\cos^2\theta - h^2 \quad [175]$$

And we would have,

$$\frac{E}{h\cos\theta} \quad [176]$$

The chord of the emitting circle of radius a, is composed of

$$a\cos\gamma \text{ and } a\sin\gamma \quad [177]$$

$$a\cos\gamma = htg\theta \quad [178]$$

Then

$$\cos\gamma = \frac{h}{a}tg\theta \quad [179]$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}tg^2\theta} \quad [180]$$

$$\sin\gamma = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - \frac{h^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{a\cos\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta - h^2\sin^2\theta} = \frac{1}{a\cos\theta}\sqrt{(a^2 + h^2)\cos^2\theta - h^2} = \frac{\sqrt{E}}{a\cos\theta} \quad [181]$$

And the chord is,

$$\frac{\sqrt{E}}{\cos\theta} \quad [182]$$

The hypotenuse of the triangle formed by the angle  $\beta$  is

$$\sqrt{\frac{E}{\cos^2\theta} + \frac{E^2}{h^2\cos^2\theta}} = \frac{\sqrt{E}}{h\cos\theta}\sqrt{h^2 + E} = \frac{\sqrt{E}}{h}\sqrt{a^2 + h^2} \quad [183]$$

$$\sin\beta = \frac{\frac{\sqrt{E}}{\cos\theta}}{\frac{\sqrt{E}}{h}\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{h}{\cos\theta\sqrt{a^2 + h^2}} \quad [184]$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \quad [185]$$

Thus,

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\theta} = \frac{h}{\cos\theta\sqrt{a^2 + h^2}} \quad [186]$$

And the cone that subtends the solid angle of the circle is defined by the corresponding angles  $\alpha$  and  $\beta$  which bear the relation of  $\theta$ .

The resulting equation of the elliptical cone is

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha} + \frac{y^2}{\cos^2\alpha \tan^2\beta} = \frac{z^2}{\cos^2\alpha} \quad [187]$$

The equation of the intersection projected on the normal (ellipse) gives,

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha} + \frac{y^2}{\sin^2\beta} = 1 \quad [188]$$

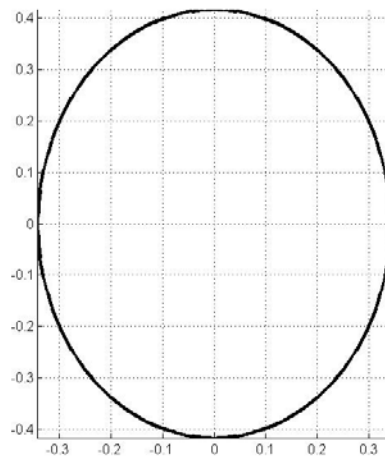


Ilustración 38. Projection of the intersection normal to the axis of the cone. Ellipse.

It can be shown that the projections of the curve on the planes parallel to the normal are hyperbolas of different concavity.



Ilustración 39. One of the projections of the intersection parallel to the axis of the cone. Concave Hyperbola.

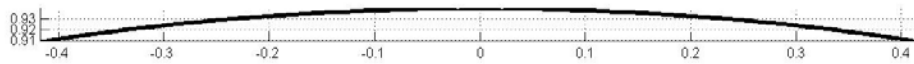


Ilustración 40. Second projection of the intersection parallel to the axis of the cone. Convex Hyperbola.

Thus, we arrive to the parametric equation of the intersection between the former cone and a sphere of unit radius and center in the vertex of the cone, this curve is called Tomomi of Cabeza-Lainez.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x = \sin\alpha * \cos t$$

$$y = \sin\beta * \sin t$$

$$z = \sqrt{(1 - \sin^2\alpha) * \cos^2 t + (1 - \sin^2\beta) * \sin^2 t}$$

[189]

Several views of the new curve follow,

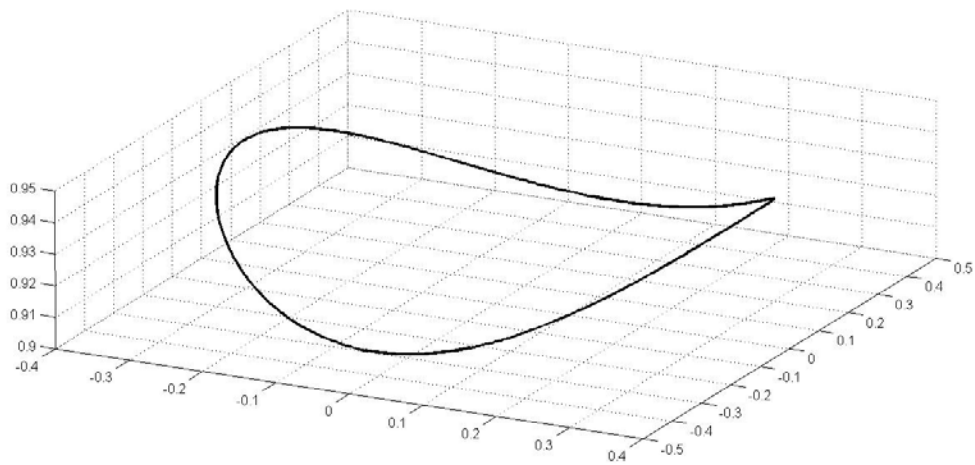


Figure 41. Axonometric view of Tomomi curve.

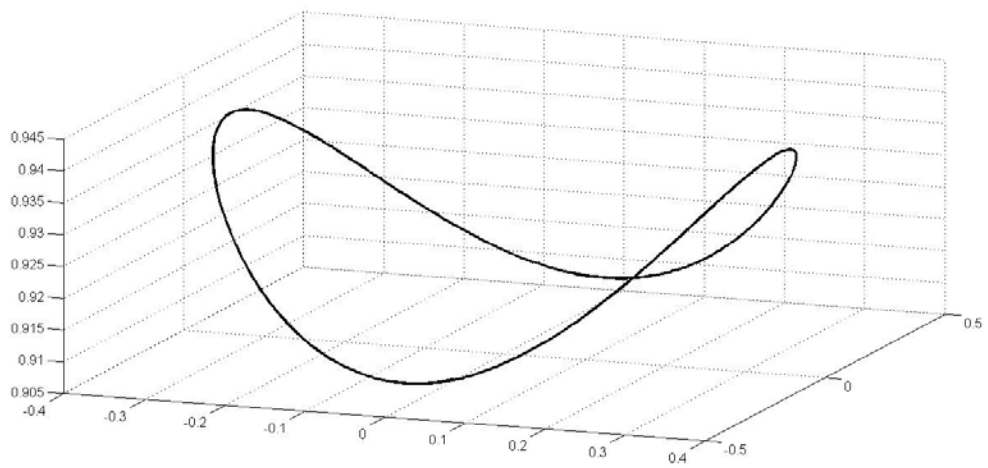


Figure 42. Axonometric view of Tomomi curve.



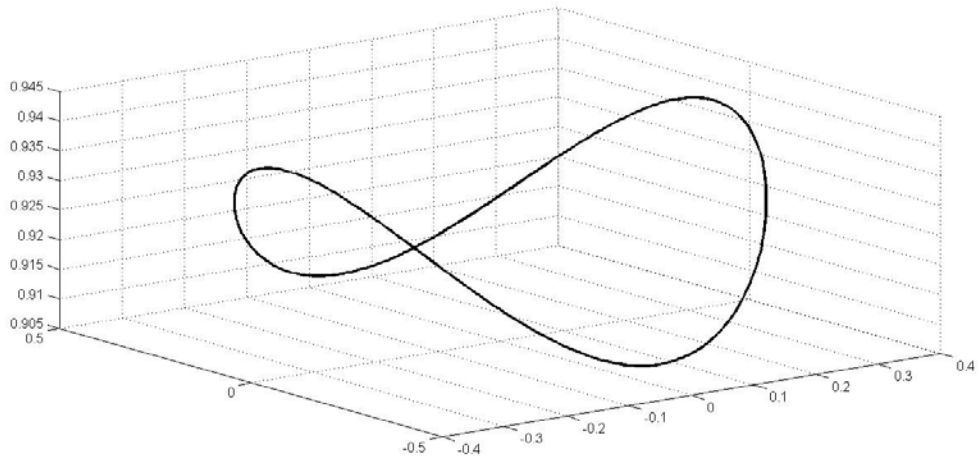


Figure 43. Axonometric view of Tomomi curve.

For a cone in which  $\alpha=20^\circ$ ,  $\theta=35^\circ$  and thus  $\beta=24.67^\circ$ , we have found the following projections for two coordinate planes,

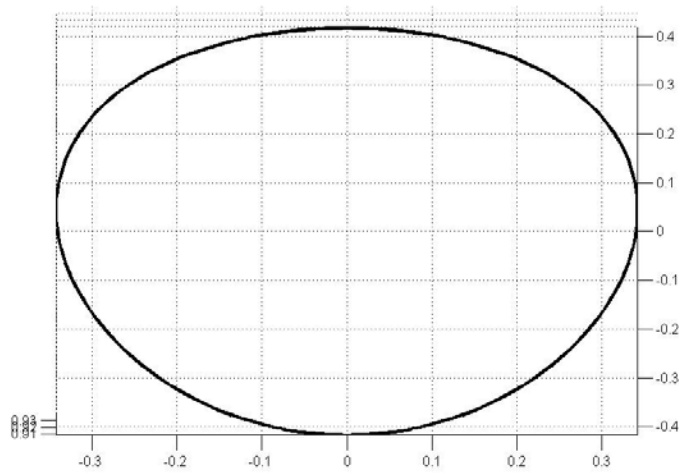


Figure 44. Projection of Tomomi curve on the XY plane.

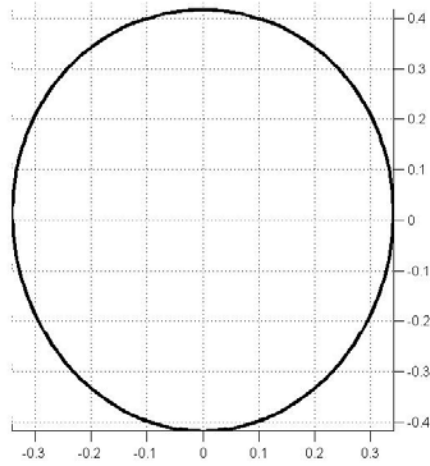


Figure 45. Projection of Tomomi curve on the XZ plane

Employing the well-known formula for rotation of coordinates,

$$z' = z * \cos\gamma - y * \sin\gamma$$

$$y' = z * \sin\gamma + y * \cos\gamma$$

$$x' = x$$

[190]

By calling R to former z,

$$R = z = \sqrt{(1 - \sin^2\alpha) * \cos^2t + (1 - \sin^2\beta) * \sin^2t}$$

$$z' = R * \cos\gamma - \sin\beta * \sin\gamma * \sin t$$

[191]

If we equate this expression to 0,

$$R * \cos\gamma = \sin\beta * \sin\gamma * \sin t$$

[192]

Introducing this finding in the new coordinate y',

$$y' = \frac{\sin\beta * \sin t}{\cos\gamma}$$

[193]

And we arrive to,

$$\frac{x'^2}{\sin^2\alpha} + \frac{y'^2}{\sin^2\beta / \cos^2\gamma} = 1$$

[194]

The result proves that the projected Tomomi curve on any plane different from the plane of symmetry has to be an ellipse. Thus, the authors have shown that its inner area equates the factors determined by virtue of integration in other texts.

#### **5.4.- CONCLUSIONS**

The projected solid-angle principle has been absolutely generalized via exact mathematical procedures. In the process a previously unidentified curve has been detected.

All the former will show immediate application in radiative heat transfer simulations not only for typical emitters but also for more complex non-uniform or occluded sources.

Based on the new fast and accurate procedures that we have deduced a simulation method for all kinds of geometries is being launched. With this method LED and surface sources of light or heat can be studied with higher accuracy thus guaranteeing a better performance.

The authors believe that the achievements hereby exposed represent the dawning of a new day for radiation heat transfer.

## **6.- RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

## 6.- RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 6.1.- Leyes de Cabeza Lainez.

Mediante simples deducciones y aplicando principios elementales de geometría y matemáticas, se ha conseguido encontrar factores de forma entre superficies curvas antes desconocidos. Estos hallazgos han sido posibles gracias a la aplicación de dos leyes fundamentales enunciadas en los artículos, denominadas leyes de Cabeza-Lainez.

La primera de las leyes dice

*“Si un volumen está compuesto por dos superficies, la primera de ellas continua con curvatura positiva y la segunda plana, el factor de configuración entre la primera y la segunda equivale a la inversa del cociente de las áreas de ambas superficies.”*

Expresado matemáticamente:

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{A_2}{A_1} \quad [195]$$

La segunda de las leyes dice:

*“El factor de configuración entre una porción Y de una esfera sobre sí misma es la inversa de la porción Y”*

Expresado matemáticamente:

$$F_{1 \rightarrow 1} = \frac{1}{Y} \quad [196]$$

Esta ley se comprueba también para superficies que no sean esferas.

Estas dos leyes sirven como base para deducir factores de configuración antes desconocidos para formas que se utilizan con profusión en el diseño arquitectónico y urbano. Estamos hablando genéricamente de un volumen compuesto por una superficie plana, donde se desarrolla una actividad, y otra curva, con curvatura positiva, que sirve de cubrición; esta tipología es muy común en grandes espacios públicos diáfanos, muy presentes en tipologías como auditorios, estadios, piscinas cubiertas o teatros.

Las formas con curvatura son propicias para cubrir grandes superficies debido, principalmente, a razones estructurales; además, mediante estas superficies el edificio

recibe radiación desde el exterior y la distribuye hacia el plano donde se hace uso del edificio. Mediante estas dos leyes es posible conocer de un modo inmediato y sin largos cálculos integrales o iterativos la cantidad de energía que estas cubriciones transmiten a su base y la cantidad que se quedan ellas mismas. Podemos aplicar estas leyes al cálculo de la transferencia radiante de cualquier tipo de energía: Radiación solar incidente en estas cubriciones, alumbrado artificial en su interior o instalaciones de climatización.

Las superficies con curvatura positiva pueden ser regladas o no; esto es podemos aplicar estas leyes a cualquier superficie con una forma arbitraria, siempre que se cumpla la condición de la curvatura positiva y siempre que componga un volumen cerrado sólo con una base plana.

Estas dos leyes dan pie a una interesante discusión acerca de las propiedades radiantes de ciertas formas curvas. Dada una forma curva y una base plana, las relaciones 9 y 10 nos informan de la “eficiencia” radiante de dicha forma, esto es, la cantidad de energía que emite la superficie 1 y llega a la 2, y la cantidad que vuelve a la superficie 1. Superficies curvas con mayor área  $A_1$  respecto a su base  $A_2$  darán menores valores en la ecuación 195, y mayores en la 196. El diseñador dispone, de este modo, de una herramienta sencilla para calcular, en cualquier fase de proyecto, los factores de forma entre cubriciones que cumplan las mencionadas condiciones y su base.

## 6.2.- Aplicación de la segunda ley al cálculo de sectores de esfera

Aplicando esta segunda ley se ha obtenido la ecuación que regula el intercambio radiante entre dos semicírculos con un eje común, formando un sector de esfera:

$$F_{1 \rightarrow 2} = 1 - \frac{x}{90} + \frac{x^2}{32400} \quad [197]$$

Donde  $x$  es el ángulo formado por ambas superficies; La importancia de esta novedosa expresión radica en que facilita el cálculo de los factores de forma entre dos superficies planas que comparten un eje común y forman un ángulo, desde  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$ , lo cual siempre ha representado un gran escollo y generado complicadas expresiones, en su mayoría aproximadas. Gracias a las propiedades de la esfera y a las leyes expuestas, es

posible usar esta ecuación incluso para aproximar los factores de configuración formas que no sean semicírculos.

Por ejemplo, la ecuación que regula el intercambio radiante entre dos rectángulos que comparten un eje común y forman un ángulo  $\Phi$  es<sup>10</sup>:

$$\begin{aligned}
 F_{1-2} = & -\frac{\sin 2\Phi}{4\pi B} \left[ AB \sin \Phi + \left( \frac{\pi}{2} - \Phi \right) (A^2 + B^2) + B^2 \tan^{-1} \left( \frac{A - B \cos \Phi}{B \sin \Phi} \right) + A^2 \tan^{-1} \left( \frac{B - A \cos \Phi}{A \sin \Phi} \right) \right] \\
 & + \frac{\sin^2 \Phi}{4\pi B} \left\{ \left( \frac{2}{\sin^2 \Phi} - 1 \right) \ln \left[ \frac{(1 + A^2)(1 + B^2)}{1 + C} \right] + B^2 \ln \left[ \frac{B^2(1 + C)}{(1 + B^2)C} \right] + A^2 \ln \left[ \frac{A^2(1 + A^2) \cos 2\Phi}{C(1 + C)} \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{1}{B} \right) + \frac{A}{\pi B} \tan^{-1} \left( \frac{1}{A} \right) - \frac{\sqrt{C}}{\pi B} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{C}} \right) \\
 & + \frac{\sin \Phi \sin 2\Phi}{2\pi B} AD \left[ \tan^{-1} \left( \frac{A \cos \Phi}{D} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{B - A \cos \Phi}{D} \right) \right] \\
 & + \frac{\cos \Phi}{\pi B} \int_0^B \sqrt{1 + \xi^2 \sin^2 \Phi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\xi \cos \Phi}{\sqrt{1 + \xi^2 \sin^2 \Phi}} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{A - \xi \cos \Phi}{\sqrt{1 + \xi^2 \sin^2 \Phi}} \right) \right] d\xi
 \end{aligned} \tag{198}$$

Siendo los parámetros :

$$A = \frac{a}{c}; \quad B = \frac{b}{c}; \quad C = A^2 + B^2 - 2AB \cos \Phi \quad D = \sqrt{1 + A^2 \cdot \sin^2 \Phi} \tag{199}$$

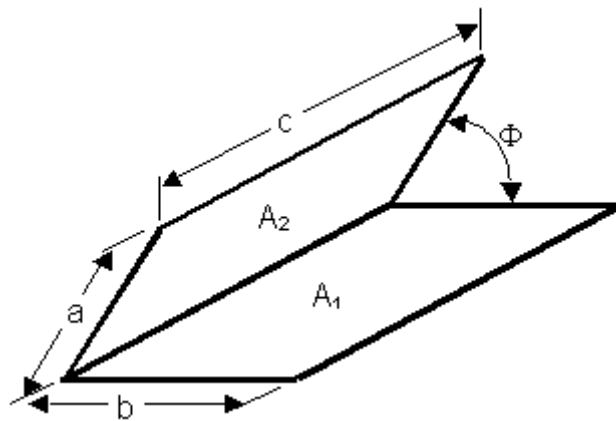


Ilustración 46: Ilustración del intercambio entre dos rectángulos que comparten un eje común y forman un ángulo entre ellos.

Una representación gráfica de dicha ecuación para distintas proporciones de a/b es:

<sup>10</sup> Howell, John R. A catalog of radiation heat transfer configuration factors. <http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/tablecon.html>

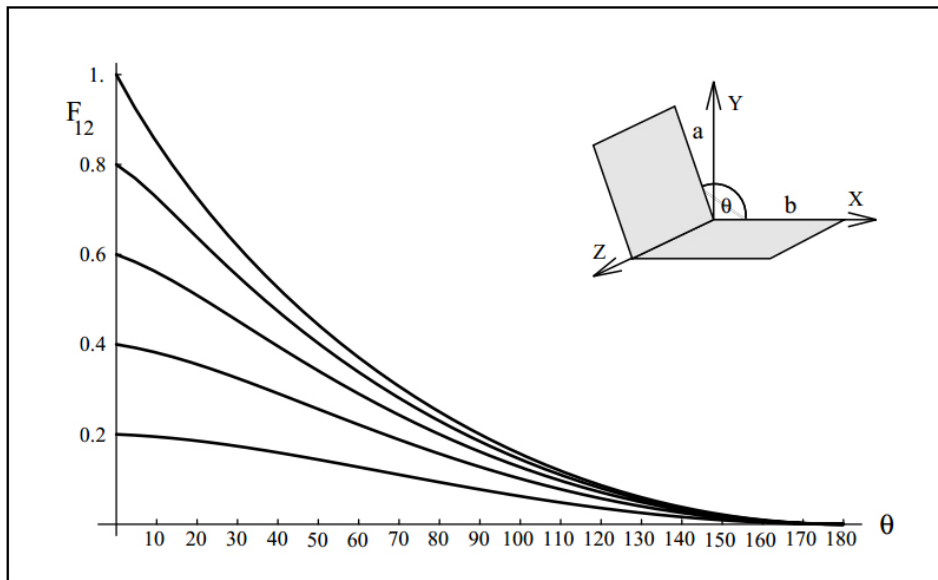


Ilustración 47: Factores de forma entre dos rectángulos que comparten un eje común: En el eje X, el ángulo formado; en el eje Y, el factor de forma.

Comparando los resultados obtenidos con las ecuaciones 11 y 12 tenemos:

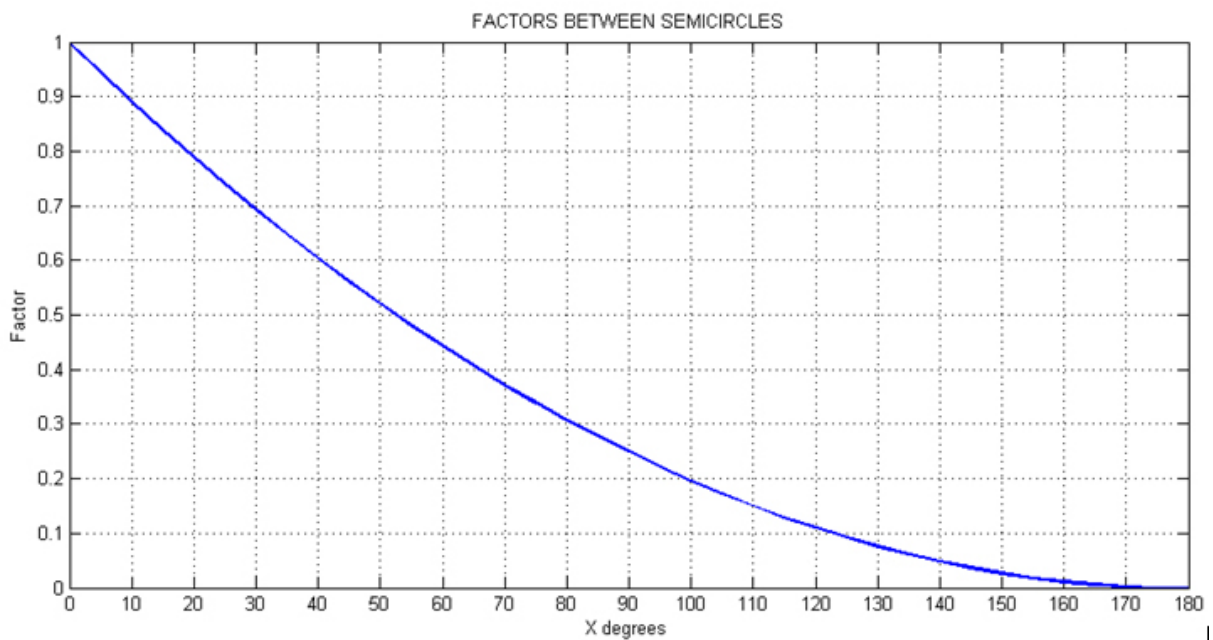


Ilustración 48: Factores de forma entre dos semicírculos.

Es decir, aproximando los dos rectángulos a semicírculos de dimensiones equivalente y usando la ecuación 197 podemos tener una aproximación bastante exacta de su factor de forma; es necesario destacar la simplicidad de la ecuación 197 frente a la ecuación 198, lo



que permitiría al diseñador hacer un primer tanteo con la ecuación aportada 197; si los resultados son satisfactorios, se puede proseguir afinando en el diseño con la ecuación 197.

### 6.3.- Factores de configuración para diferentes superficies curvas

La aplicación de la primera de las leyes mencionadas permite conocer de un modo rápido, directo y sencillo los factores de configuración entre cualquier superficie curva y su base, siempre que conozcamos los siguientes datos:

- El área de la porción de superficie curva en cuestión.
- El área de su base.

A continuación se muestra un resumen de los distintos factores de configuración hallados en virtud de este principio. La notación usada para todos los casos cumple los siguientes principios:

- La superficie denominada 1 es la que tiene curvatura positiva
- La superficie denominada 2 es la base plana.
- El parámetro h es la altura de la superficie curva.

Los parámetros a, y en su caso b, son las dimensiones en los dos ejes coordenados de la base de la superficie plana.

Superficies	Área de la superficie curva	$F_{1 \rightarrow 1}$	$F_{1 \rightarrow 2}$	$F_{2 \rightarrow 1}$
Semi esferoide prolato y base circular	$2\pi r^2 \frac{\arcsen(m) \cdot (h + am)}{a \cdot m}$ $m = \sqrt{1 - \frac{a^2}{h^2}}$	$\frac{h \cdot \arcsen(m)}{am + h \cdot \arcsen(m)}$	$\frac{am}{am + h \cdot \arcsen(m)}$	1
Semi esferoide oblató y base elíptica	$2\pi r^2 \frac{(am + h) \cdot \operatorname{arcsinh}(m)}{am}$ $m = \sqrt{\frac{a^2}{h^2} - 1}$	$\frac{h \cdot \operatorname{arcsinh}(m)}{(am + h) \cdot \operatorname{arcsinh}(m)}$	$\frac{am}{(am + h) \cdot \operatorname{arcsinh}(m)}$	1
Paraboloide de revolución y base circular	$\pi \frac{\sqrt[3/2]{a^2 + 4h^2} - a^3}{6ah^2}$	$1 - \frac{6ah^2}{\sqrt[3/2]{a^2 + 4h^2} - a^3}$	$\frac{6ah^2}{\sqrt[3/2]{a^2 + 4h^2} - a^3}$	1
Cono recto y base circular	$\pi a \sqrt{a^2 + h^2}$	$1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$	1

---

Elipsoide de revolución	$4\pi \left( \frac{a^y b^y + a^y h^y + b^y h^y}{3} \right)^{1/y}$ $y = 8/5$	$\frac{ab^y \sqrt{3}}{2^y \sqrt{a^y b^y + a^y h^y + b^y h^y}}$	$1 - \frac{ab^y \sqrt{3}}{2^y \sqrt{a^y b^y + a^y h^y + b^y h^y}}$	1
-------------------------	---	--	--	---

---

Tabla 1: Factores de forma hallados

De igual modo, y aplicando estos principios, podemos extender el cálculo a otros tipos de superficies, con la condición de que compongan, de algún modo, volúmenes en los que las leyes mencionadas sean de aplicación.

Para el caso de una esfera de radio  $r$ , dividida en dos sectores, cuyas alturas son  $h_1$  y  $h_2$ , los factores de configuración obtenidos son:

$$F_{1 \rightarrow 1} = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \quad [200]$$

$$F_{2 \rightarrow 2} = F_{1 \rightarrow 2} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \quad [201]$$

Una extensión de este caso sería aquél en el que los dos casquetes esféricos están situados arbitrariamente, tienen distintas alturas, y sus bases distintos radios; virtualmente forman parte de una esfera que contiene a ambos. Los factores de configuración buscados son:

$$F_{1 \rightarrow 1} = \frac{h_1^2}{h_1^2 + a_1^2} \quad F_{2 \rightarrow 2} = \frac{h_2^2}{h_2^2 + a_2^2} \quad [202]$$

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{h_1 \cdot h_2}{h_1^2 + a_1^2} \quad F_{2 \rightarrow 1} = \frac{h_1 \cdot h_2}{h_2^2 + a_2^2} \quad [203]$$

Y una última aplicación del este razonamiento sería aquella en la que las bases de los casquetes ( es decir, círculos) tienen igual radio  $a$  y son paralelos, formando un cilindro recto entre ellos separados por una distancia  $2b$ . En este caso los factores de forma hallados son:

$$F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1} = \frac{a^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \quad [204]$$

Al ser ambas superficies emisoras de igual dimensión, los factores de forma son, lógicamente, similares.

#### 6.4.- Factores de configuración para volúmenes compuestos por tres superficies.

La extensión de estos métodos de cálculo mediante la aplicación de las leyes de Cabeza-Lainez permite hallar los factores de configuración para volúmenes relativamente complejos, cuyo tratamiento mediante los principios clásicos de la transferencia radiante los hace inabordables. Los dos ejemplos propuestos en los artículos presentados y que ilustran claramente lo expuesto en la presente tesis son los siguientes.

Primeramente, consideramos un volumen compuesto por tres superficies que son:

- Superficie 1: Casquete esférico, de radio  $r_1$  y altura  $h_1$
- Superficie 2: Casquete esférico, de radio  $r_2$  y altura  $h_2$ .
- Superficie 3: Cono truncado, cuyas bases tienen radio  $r_1$  y  $r_2$  (compartiéndolos con ambos casquetes) y una altura  $2b$ .

En este caso, los factores entre todas las superficies quedan:

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	$F_{1 \rightarrow 1} = \frac{Q}{D_1}$	$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q}{D_1}$	$F_{1 \rightarrow 3} = \frac{Q_1}{D_1}$
<b>2</b>	$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{Q}{D_2}$	$F_{2 \rightarrow 2} = \frac{Q}{D_2}$	$F_{2 \rightarrow 3} = \frac{Q_2}{D_2}$
<b>3</b>	$F_{3 \rightarrow 1} = \frac{Q_1}{D_3}$	$F_{3 \rightarrow 2} = \frac{Q_2}{D_3}$	$F_{3 \rightarrow 3} = 1 - \frac{Q_1 + Q_2}{D_3}$

Tabla 2: Factores de configuración para volúmenes de tres superficies

Las expresiones para los factores Q pueden encontrarse en el artículo de referencia.

En un segundo caso consideramos un volumen compuesto igualmente por tres superficies, en este caso:

- Superficie 1: Paraboloide de revolución
- Superficie 2: Cono truncado
- Superficie 3: Semi esferoide oblato.

Aplicando las dos leyes de Cabeza Lainez y el principio de superposición es posible hallar de nuevo, de forma sencilla y directa, los factores de configuración entre todas las superficies implicadas en el cálculo; por brevedad no se reproducen de nuevo las expresiones para los factores hallados, cuya deducción puede encontrarse en el artículo correspondiente.

#### **6.5.- Discusión de los resultados para los puntos 6.3 y 6.4:**

Los descubrimientos aquí presentados constituyen un notable avance en el campo de la transferencia radiante, así como en el campo del cálculo de factores de forma y de configuración.

En efecto, si consideramos los métodos tradicionales o canónicos que aparecen en la mayoría de manuales y libros de referencia sobre transferencia radiante<sup>1112</sup>, resulta prácticamente imposible abordar el cálculo de este tipo de superficies y volúmenes. Aplicando la definición matemática canónica del factor de configuración (ecuación 4), abordar la integral doble en estos tipos de superficies es un problema matemático irresoluble, y los autores de la bibliografía citada así lo admiten. Los métodos matemáticos denominados “alternativos”, esto es, el método de Hottel o de los hilos cruzados, la integración del contorno por el método de Stokes o, en su caso, el método de la esfera unidad, no dan una solución satisfactoria a estos problemas.

Recordemos que los factores de configuración son definidos como cocientes puramente geométricos. La innovación propuesta se basa, pues, en un cálculo genuinamente espacial, considerando directamente el intercambio radiante en tres dimensiones entre superficies y

---

<sup>11</sup> Sparrow, E.M, Cess, R.D, Radiation Heat Transfer. 1978, Hemisphere. California (USA)

<sup>12</sup> Howell, J.R, Siegel R. Thermal radiation Heat Transfer. 1992, Taylor and Francis. Washington (USA).

volúmenes. Aplicando las denominadas Leyes de Cabeza Lainez y el conocido principio de superposición, se ha logrado aportar a este campo de conocimiento los siguientes avances.

En primer lugar, se han deducido y presentado factores de configuración novedosos en la literatura especializada. El intercambio entre superficies de revolución, tal como el paraboloides, el elipsoide, el cono o la esfera como caso particular y una base plana no había sido considerado anteriormente. Del mismo modo, los factores de configuración para los volúmenes compuestos por adición de las anteriores son una novedad en este campo del conocimiento.

Por otra parte, la filosofía de cálculo puramente espacial, aplicando sencillos principios de adición y sustracción se puede considerar del mismo modo un avance notable, al facilitar enormemente un proceso anteriormente inabordable. En este camino se ha considerado la ciencia del espacio como una ciencia puramente arquitectónica; es decir, el intercambio radiante de cualquier tipo de energía en los edificios (y por extensión en cualquier cuerpo que emita y reciba radiación) es puramente función de su diseño, o si queremos expresarlo de otro modo, de su forma y su posición relativa en el espacio.

La transferencia entre superficies curvas con curvatura positiva, (ya sean de revolución o no) y una base plana permite abordar el cálculo de todo tipo de formas arquitectónicas (en particular cubriciones) y en última instancia, comprender sus propiedades energéticas. Como hemos mencionado, al ser estos factores de forma completamente novedosos, su utilidad para los diseñadores es evidente. La aplicación de un método de cálculo sencillo y directo permitirá investigar en el futuro sobre cualquier tipo de volumen que contenga una combinación de este tipo de superficies.

El cálculo de dispositivos de iluminación de cualquier tipología y forma es también posible, especialmente las luminarias LED's en forma de fuentes emisoras superficiales, superando ampliamente la teoría de cálculo que considera la luminaria como un punto. El caso de paraboloides de revolución es particularmente importante, ya que debido a sus propiedades geométricas es ampliamente usado en luminarias, faros de automóviles e incluso colectores solares.

La complejidad del cálculo de los mencionados factores de configuración he llevado en las últimas décadas a los diseñadores a ayudarse de la programación informática para abordar de algún modo el problema. Numerosos programas de cálculo de iluminación, renderizado y

ahorro energético tienen programados rutinas para calcular el intercambio radiante entre superficies; en este sentido podemos destacar los trabajos de Ian Ashdown en el campo de la programación informática<sup>13</sup>. Cualquiera de los métodos de cálculo considerados construye una matriz que incorpora los factores de configuración de todas las superficies implicadas en el cálculo; en los casos en que estos factores no se conocen, las superficies se descomponen en elementos infinitesimales para los cuales se calcula el intercambio, lo que es un proceso largo y tedioso, aunque es llevado a cabo por el ordenador.

En este sentido, todos nuevos factores aportados, así como el método de cálculo que permite una fácil aproximación a cualquier forma, harán posible un considerable ahorro de tiempo y recurso en el cálculo informático. Al igual que muchos factores para todo tipo de formas, que ya han sido programados en lenguaje Matlab<sup>®</sup>, estos nuevos podrán ser incorporados al catálogo; así, sólo con introducir parámetros puramente geométricos, y sin necesidad de discretizar la superficie ni usar métodos iterativos de cálculo, se podrá obtener la matriz de transferencia radiante y la de reflexiones en poco tiempo.

Como ejemplo de lo expuesto podemos componer la matriz de transferencia y de reflexión para un volumen compuesto por tres superficies: Un paraboloide de revolución, un semi-esferoide oblató y un cono truncado que los une:

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1 \cdot \arcsen(m_1)}{r_1 m_1 + h_1 \cdot \arcsen(m_1)} & \frac{m_1 \cdot Q}{r_1 \cdot (r_1 m_1 + h_1 \cdot \arcsen(m_1))} & \frac{m_1 \cdot (r_1^2 - Q)}{r_1 \cdot (r_1 m_1 + h_1 \cdot \arcsen(m_1))} \\ \frac{6 \cdot h_2^2 \cdot Q}{r_2 \cdot \left[ \sqrt[3/2]{r_2^2 + 4h_2^2 - r_2^3} \right]} & 1 - \frac{6 \cdot h_2^2 \cdot r_2}{r_2 \cdot \left[ \sqrt[3/2]{r_2^2 + 4h_2^2 - r_2^3} \right]} & \frac{6 \cdot h_2^2 \cdot (r_2^2 - Q)}{r_2 \cdot \left[ \sqrt[3/2]{r_2^2 + 4h_2^2 - r_2^3} \right]} \\ \frac{Q_1}{D_3} & \frac{Q_2}{D_3} & 1 - \frac{Q_1 + Q_2}{D_3} \end{bmatrix} \quad [205]$$

Hay que hacer notar que esta matriz de transferencia debe ser multiplicada por los correspondientes coeficientes de reflexión para producir una expresión coincidente con la aparecida en el artículo. Esta construcción, aun pareciendo complicada, puede ser calculada por el ordenador en pocos segundos; la alternativa de la discretización es mucho más

<sup>13</sup> Ashdown, I. Radiative Transfer Network revisited. IESNA paper # 8, September 2001.

engorrosa en términos de tiempo y cálculo, y es necesario recurrir a métodos iterativos de cálculo. En este sentido, Ashdown<sup>14</sup> construye un sistema de ecuaciones en el que los factores de forma están estimados y que debe resolverse, por el método de Gauss-Seidel o por el de Jacobi, al estar las superficies discretizadas y tener matrices de un tamaño considerable. En un caso como el presentado discretizar implicaría un cálculo largo e inexacto en última instancia.

Los avances presentados permiten abordar este proceso de un modo directo y sencillo, permitiendo obtener la matriz de transferencia y la de reflectancias simplemente con parámetros geométricos, sin necesidad de discretizar las superficies o iterar. Se hace patente por tanto la importancia de investigar la verdadera naturaleza de los factores de forma, con el objeto de elaborar herramientas de diseño prácticas y fiables.

## 6.6.- Nuevos factores de configuración basados en el círculo

El tratamiento de los emisores circulares ha representado un escollo importante en el cálculo de la transferencia radiante. Sin embargo, los emisores circulares están presentes en numerosos procesos de diseño, entre los que está incluido el diseño arquitectónico y urbano.

Por este motivo, otro de los avances propuestos en los artículos que componen la presente tesis tiene que ver con el tratamiento de dichas fuentes. En los tratados más conocidos de transferencia radiante<sup>15</sup> el problema de la fuente circular es tratado de un modo matemático, aunque se admite que la resolución de la integral doble planteada:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{br \cdot (b - r \cdot \cos\theta)}{(r^2 + d^2 + b^2 - 2dr \cdot \cos\theta)^2} d\theta dr \quad [206]$$

no puede ser abordada, por lo que se recurre al teorema de Stokes y a la integración del contorno. La literatura disponible hasta el momento no aclara cómo puede llegarse a las fórmulas conocidas, sino que éstas se presentan en tablas sin aclaración alguna sobre su posible origen.

Se presenta aquí una resolución matemática completa, siguiendo un procedimiento totalmente ortodoxo mediante la doble integración; primeramente se muestra el factor de

---

<sup>14</sup> Ashdown I. Eigenvector radiosity (MSc). University of British Columbia. 2001.

<sup>15</sup> Howell, J.R, Siegel R. Thermal radiation Heat Transfer. 1992, Taylor and Francis. Washington (USA).

configuración entre un emisor circular y un elemento diferencial situado en un plano paralelo a éste:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} - \frac{b^2 + d^2 - a^2}{2 \sqrt{((a^2 + d^2 + b^2)^2 - 4d^2 a^2)}} \quad [207]$$

Para el mismo emisor circular y un elemento diferencial, situado esta vez en un plano perpendicular al emisor:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{b}{2d} \left( \frac{a^2 + b^2 + d^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 + d^2)^2 - 4a^2 d^2}} - 1 \right) \quad [208]$$

Finalmente, para conocer el intercambio entre un semicírculo emisor y un elemento diferencial situado en un plano perpendicular:

$$F_{d1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2\pi} \left( \arctan \frac{a+d}{b} + \arctan \frac{a-d}{b} \right) + \frac{b}{4\pi d} \ln \frac{a^2 + b^2 + d^2 - 2ad}{a^2 + b^2 + d^2 + 2ad} \quad [209]$$

Las ecuaciones 207 y 208 se conocían en la literatura especializada, pero en ningún momento se ha aclarado su origen o la manera en que se han deducido. Aquí se ha presentado por primera vez una deducción matemática completa de ambas. Por otra parte, la ecuación 209 es completamente nueva y permite conocer el campo radiante producido por un emisor semicircular en un plano perpendicular al mismo.

Los avances mostrados permiten conocer completamente el campo radiante producido por un emisor circular, al conocer el valor del mismo en los tres planos coordenados del espacio. Este hecho es de vital importancia para conocer la verdadera naturaleza de los emisores circulares, muy presentes en multitud de elementos de diseño arquitectónico y urbano.

Las aperturas circulares con ampliamente utilizadas, normalmente, aunque no de modo exclusivo, asociadas a espacios cupulados o abovedados. El cálculo del campo radiante producido por ellas es de capital importancia para entender las propiedades radiantes de estas formas, lo cual puede aplicarse en el cálculo térmico, lumínico o acústico. Como se comentaba anteriormente, la alternativa de la discretización en elementos diferenciales es



un alternativa, aunque su uso implica un gasto de tiempo y recursos muy elevado; se propone en consecuencia una mejora sustancial en estos procesos.

Mediante adiciones o sustracciones y aplicando el principio de superposición podemos obtener el campo radiante de anillos emisores o de una fuente que combine multitud de emisores circulares. Estas configuraciones pueden encontrarse en grandes espacios cubiertos por lucernarios circulares; una aplicación particularmente útil es el cálculo de fuentes luminosas LED. En efecto, dichas luminarias están constituidas por pequeños emisores circulares, que se combinan en multitud de formas, incluyendo muy a menudo círculos, anillos o tiras emisoras por adición de círculos emisores. La asimilación de estas fuentes a emisores puntuales, como hacen los programas de cálculo comerciales, no es una hipótesis de cálculo válida, más si cabe cuando el tamaño de la fuente es comparable al del plano receptor. Las nuevas ecuaciones aportadas permiten abordar el cálculo de dichas fuentes de un modo exacto y sencillo.

Por otra parte, la ecuación para el emisor semicircular (209), totalmente nueva, encuentra utilidades similares a las anteriores ecuaciones. Podemos citar, como un caso particular en el que este descubrimiento aporta avances muy productivos, el cálculo de iluminación en túneles y espacios similares; su boca es un emisor semicircular que ilumina un plano perpendicular al mismo (el pavimento de la carretera), y conocer la distribución de la misma es de capital importancia para disponer una iluminación artificial adecuada en el interior del mismo o para prevenir deslumbramientos y en consecuencia, accidentes de tráfico.

En definitiva, estas nuevas ecuaciones se añaden al ya amplio catálogo existente de factores de configuración, proporcionando al diseñador nuevas herramientas que le ayudarán a mejorar sus proyectos en términos lumínicos, acústicos y térmicos. Estos descubrimientos tienen una aplicación directa al cálculo del ahorro energético mediante exclusivamente su diseño formal.

Se presenta aquí un pequeña muestra de sus posibilidades de aplicación; su futura aplicación por parte de los diseñadores mostrará las verdaderas posibilidades de estos descubrimientos.

### 6.7.- Validación de la ley de proyección del ángulo sólido para emisores circulares:

Además de la integración matemática directa, el otro procedimiento ortodoxo para hallar los factores de configuración es utilizar la ley de proyección del ángulo sólido, ampliamente conocido y que aparece en multitud de manuales y tratados sobre transferencia radiante y óptica geométrica. No obstante, más allá de su enunciado general, no se ofrece una explicación plausible acerca de su aplicación al cálculo de fuentes reales.

Moon<sup>16</sup> y Yamauchi<sup>17</sup> han tratado el tema hasta cierto punto, pero no llegan a conclusiones certeras. Para el caso de emisores circulares se ha aplicado dicho principio al cálculo de un disco sobre un punto situado en un eje perpendicular al mismo que pasa por su centro, dando la conocida relación:

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{a^2}{h^2 + a^2} \quad [210]$$

siendo  $a$  el radio del disco emisor y  $h$  la distancia entre éste y el punto de cálculo.

Para emisores rectangulares, se ha comprobado de forma teórica el caso, también particular, de un emisor rectangular sobre un punto situado en un plano perpendicular, compartiendo ambos un eje común.

Por esta razón, y considerando que la ley de proyección del ángulo sólido, aún siendo un método de cálculo válido, no había sido validado suficientemente, se ha aportado dicha validación para fuentes circulares y rectangulares en cualquier posición, de modo que dicho principio, más allá de consideraciones teóricas, pueda ser comprobado para la generalidad de los campos radiantes.

En un caso se ha hecho de modo semianalítico y en otro de modo gráfico.

La validación semianalítica para el caso de un rectángulo y un punto que yace en un plano perpendicular a éste, en cualquier posición genérica, se ha llevado a cabo comprobando numéricamente cómo coinciden los métodos de cálculo directo mediante la expresión ya conocida que regula dicho intercambio, y la validación semianalítica mostrada en el artículo. Gracias a la ayuda de los sistemas CAD de dibujo por ordenador, el cálculo de los parámetros necesarios se ha facilitado enormemente.

---

<sup>16</sup> Moon, P. H; Spencer D. E. (1981) The Photometric Field. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts.

<sup>17</sup> Yamauchi, J. Further Study of Geometrical Calculation of Illumination due to light from luminous sources of simple forms. Researches of the Electrotechnical Laboratory 194. (1927).

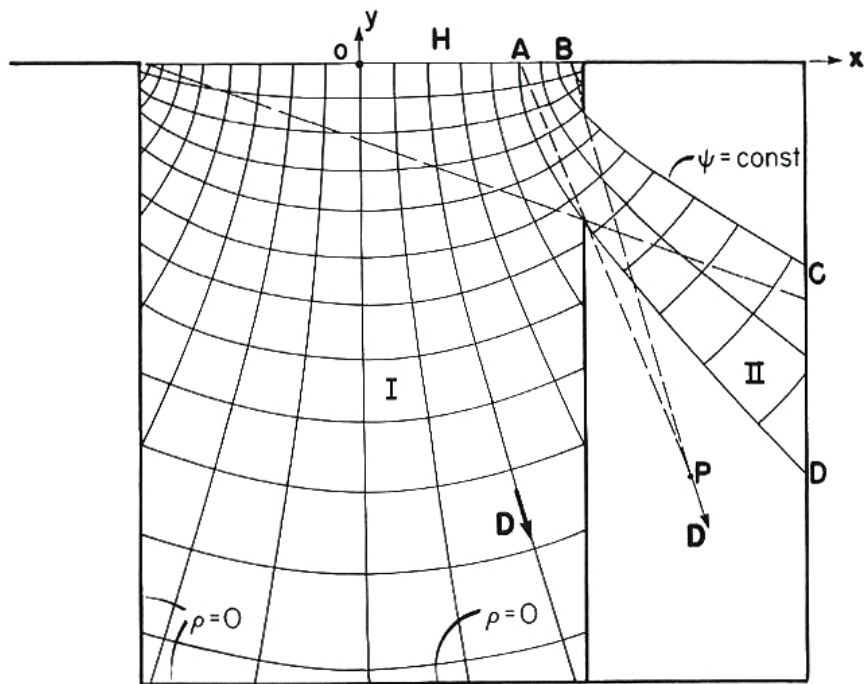


Ilustración 49: Cálculo del campo radiante con fuentes ocluidas por barreras.

Fuente The photic field.

La validación de este método tiene una aplicación muy directa al cálculo de fuentes ocluidas por algún barrera; los cañones urbanos son un claro ejemplo de estas situaciones, y Moon incluso propone este ejemplo para ilustrarlo.

El cálculo del intercambio radiante en este tipo de espacios semiconfinados, tales como cañones urbanos o patios, permite calcular el campo radiante en huecos y estancias cuya captación solar esta influida por los edificios adyacentes que actúan como obstáculos. La demostración aportada permite que arquitectos y diseñadores, mediante el uso de los sistemas de dibujo CAD puedan hacer uso de la ley de proyección del ángulo sólido allí donde el cálculo numérico o integral ofrezca dificultades; una ventaja adicional es, tal como afirma Moon y suscribimos aquí, que se trata de un procedimiento puramente geométrico de sencilla visualización.

Para el caso de un fuente emisora circular se ha realizado una demostración puramente geométrica para un punto P situado en una posición genérica respecto de la primera, lo que supone un notable avance respecto de lo disponible hasta el momento en la literatura especializada, esto es, sólo el caso particular en el que P está alineado con el centro del disco emisor.

La construcción mostrada tiene como objetivo hallar la curva intersección entre la esfera de radio unidad con centro en C y cuya superficie contiene a P y el cono elíptico con vértice en el mismo punto P y base circular, con radio a. Efectivamente, la intersección hallada está definida una vez que la relación entre parámetros de los que depende el cono (esto es,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$ ) haya sido hallada; ésta es:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\theta} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}} \quad [211]$$

Esta aportación permite, en la práctica, generalizar la ley de proyección del ángulo sólido para cualquier tipo de emisor, mediante procedimientos puramente geométricos. Gracias a ellos, y mediante el uso de sistemas de dibujo CAD, esta construcción puede realizarse siempre, siendo de gran ayuda para calcular los factores de configuración allí donde la integración numérica, los métodos iterativos o cualquier otra técnica no permitan obtener una solución satisfactoria.

En la resolución de dicha intersección se ha hallado una nueva curva anteriormente no descrita, llamada Tomomi de Cabeza-Lainez, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x = \sin\alpha \cdot \cos t$$

$$y = \sin\beta \cdot \sin t$$

$$z = \sqrt{(1 - \sin^2\alpha) \cdot \cos^2 t + (1 - \sin^2\beta) \cdot \sin^2 t} \quad [212]$$

Su proyección en cualquier plano que no sea el de simetría son elipses; el área de estas elipses proyectadas equivale al valor del factor de configuración hallado por integración.

La generalización de la ley de proyección del ángulo sólido, mediante los avances mostrados, constituye un avance en la teoría de transferencia radiante, factores de forma y factores de configuración. Estos métodos ya eran conocidos por la literatura disponible, pero sus demostraciones eran parciales y no conseguían conectar con otros métodos de cálculo.

La aportación aquí presentada, unida al cálculo integral ortodoxo del factor de configuración para un disco emisor aporta un entendimiento holístico del problema. La integración es el método que responde directamente a la ecuación canónica del factor de configuración; por su parte, la ley de proyección del ángulo sólido, gracias a los sistemas CAD, es un método geométrico más fácilmente asimilable por arquitectos, ingenieros y diseñadores en general, ya que implica una visión espacial en tres dimensiones más desarrollada.

En conjunto, la combinación de ambos métodos, gracias a las conclusiones obtenidas, nos permite avanzar en la comprensión de los fenómenos de transferencia radiante, de capital importancia para cualquier proceso de diseño.

## **7.- CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO**

## 7.- CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE TRABAJO

Actualmente el consumo energético asociado al sector edificatorio representa el 50% del consumo total de la humanidad; de las fuentes de energía disponibles, la energía solar es la más potente, fiable y segura. El arma más poderosa con la que cuentan los edificios y las áreas urbanas para aprovechar adecuadamente esta energía es, precisamente, su diseño, materializado a través de su forma.

Ha quedado claramente demostrado que todos los intercambios energéticos en los edificios y las áreas urbanas son función de su diseño: Los sistemas de calefacción, las luminarias, las ventanas... y en general, cualquier componente que tenga una excitación energética intercambia energía por radiación con su entorno. En este sentido, cualquier edificio o entorno urbano es un gran intercambiador energético, tanto con el exterior como con sí mismo.

El término "*Diseño científico ambiental*" que compone el título de la presente tesis hace referencia al tipo de proceso de diseño que consideramos que los arquitectos, como diseñadores, deben afrontar. La arquitectura, sin un diseño que se base en postulados científicos y que comprenda los principios ambientales, nunca podrá ser energéticamente eficiente ni ambientalmente aceptable.

En este sentido, la simulación, como herramienta de ayuda al diseño, es de capital importancia para lograr los objetivos antes mencionados. La reproducción de las condiciones reales del intercambio energético en un entorno simulado permite elaborar modelos predictivos para conocer el comportamiento real de un edificio o entorno urbano antes de que estos se hayan construido.

Es la tarea de los diseñadores el elaborar herramientas de simulación adaptadas a sus necesidades y que hagan este proceso más rápido, asequible y eficiente.

Dentro de este contexto, los avances propuestos por la presente tesis doctoral conducen a conclusiones acerca de los procesos de diseño científico ambiental, las herramientas de simulación y la ya extensa discusión acerca de la energética edificatoria.

La aportación de un nuevo catálogo de factores de forma para volúmenes compuestos por superficies curvas y planas, y todas las combinaciones posibles entre ellas, ha aportado conclusiones sobre las propiedades radiantes de ciertos volúmenes de los cuales

anteriormente no se disponía de información. Todas estas aportaciones se incluirán en los catálogos de factores de forma disponibles para su uso por parte de investigadores y diseñadores.

La aplicación de la segunda ley de Cabeza-Lainez se extiende a cualquier superficie curva con curvatura positiva, lo que abre un vasto campo de investigación para todo tipo de volúmenes y superficies, especialmente la cubrición de grandes espacios públicos con formas orgánicas o curvas.

Se ha logrado aportar un cálculo integral mediante procedimientos matemáticos ortodoxos fieles a la ecuación canónica de factores de configuración, y se ha comprobado este extremo con un procedimiento geométrico basado en la ley de proyección del ángulo sólido. Gracias a ello se han podido validar los dos métodos más extendidos de cálculo de factores de forma y comprender la naturaleza emisora de fuentes circulares. Ello permitirá en futuras investigaciones abordar, desde un punto de vista energético, las propiedades radiantes de este tipo de emisores, pudiendo validar siempre los resultados mediante el procedimiento geométrico.

Todas las aportaciones han permitido obtener expresiones y procedimientos matemáticos más sencillos que sus predecesores; en el diseño la cuestión de la eficiencia en términos de tiempo y recursos es fundamental, y estas aportaciones van encaminadas en este sentido. En los casos de superficies curvas, donde era necesaria anteriormente su discretización y cálculo por métodos iterativos, se dispone ahora de fórmulas exactas, que ahorran tiempo y recursos a sus usuarios.

Todas estas aportaciones han sido incorporadas al software de cálculo Diana X, que ya cuenta con numerosas rutinas para el cálculo de emisores rectangulares, datos climáticos o cartas solares, entre otros. Estas herramientas de diseño pueden ser usadas por estudiantes o profesionales en cualquier fase del proyecto, desde los primeros bocetos hasta el cálculo de la distribución energética en los proyectos de ejecución; el software de cálculo propuesto es un método de validación del diseño, que complementa a los programas ya existentes de chequeo y conformidad con la normativa vigente en esta materia. En efecto, es importante que los edificios y áreas urbanas cumplan unos estándares mínimos de calidad ambiental; no obstante, no debe ser éste el único objetivo, ya que un verdadero diseño científico debe contemplar la forma como herramienta principal de trabajo, y en este contexto, conocer la



distribución de la energía en las tres dimensiones del espacio es una condición imprescindible para lograr un buen diseño.

El software de cálculo permite testar las propiedades radiantes de todas las formas mostradas, o de cualquier combinación de las mismas que el diseñador proponga. De este modo, se pueden deducir tipologías más o menos eficientes en función de sus propiedades radiantes, como en el caso comparativo de la esfera, el paraboloide, el elipsoide y la esfera. Una investigación continuada en las propiedades radiantes de determinados patrones de diseño nos permitirá establecer tipologías o patrones que podrán recomendarse para determinadas condiciones ambientales.

Igualmente, todas estas conclusiones serán susceptibles de ser implementadas en normativas de edificación, de modo que los diseñadores dispongan de información acerca de determinadas formas edificatorias asociadas a tipologías que pueden tener un buen comportamiento energético para un contexto climático dado.

La incorporación de estas aportaciones a la transferencia radiante permitirá obtener un conocimiento holístico del problema, y avanzar en el largo camino de un diseño científico ambiental, que reduzca el consumo energético asociado a la edificación y el urbanismo, aproveche con mayor eficiencia la energía solar y contribuya, en definitiva, al progreso y bienestar de las personas.

## **8.- BIBLIOGRAFÍA**

## 8.- BIBLIOGRAFÍA

1. Ashdown I. (2004). *Radiosity: A Programmer's Perspective*. John Wiley & Sons Inc. New York, 1994. Available from <http://www.helios32.com>.
2. Ashdown I. Eigenvector radiosity (MSc). University of British Columbia. 2001.
3. Baker, N. V., Fanchiotti, A., Steemers, K. N.( 1993). *Daylighting in Architecture. A European Reference Book*. Commission of the European Communities. Directorate General XII.
4. Bronshtein I, Semendiaev K. Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes. Moscú, Mir, 1993.
5. Cabeza Lainez, J.M. (2012). Solar Radiation in Buildings. Transfer and Simulation Procedures. Chapter 16 of Solar Radiation Edited by Elisha B. Babatunde. InTech 2012. ISBN 978-953-51-0384-4
6. Cabeza Lainez, J.M. (2010). *Fundamentos de Transferencia Radiante Luminosa*. (Including software for simulation). Netbiblo. Spain.
7. Cabeza Lainez, J.M. (1999). Scientific designs of sky-lights. *Conference on passive and low energy architecture (PLEA)*. Brisbane. Australia.
8. Cabeza Lainez, J. M. (2007). The Japanese experience of environmental architecture through the works of Bruno Taut and Antonin Raymond. Vol.6 I. Pgs. 33-40. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering (JAABE)*. ISSN: 1346-7581
9. Cabeza Lainez, J. M. (2007). Radiative performance of louvres, Simulation and examples in Asian Architecture. *IAQVEC*. Volume III . ISBN: 978-4-86163-072-9 C3052 \4762E. Sendai (Japan).
10. Cabeza Lainez, J. M. (2008). The Quest for Light in Indian Architectural Heritage. Vol.7 I. Pgs. 17-25. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering (JAABE)*. ISSN: 1346-7581.
11. Cabeza Lainez, J.M. (2009) *Lighting Features in Japanese Traditional Architecture*. In "Lessons from Traditional Architecture". Editors, Yannas, S., Weber, W. Earthscan. London. ISBN 9781844076000
12. DiLaura D. L. (1999). New procedures for Calculating Diffuse and Non-Diffuse Radiative Exchange Form Factors. *Proceedings of ASME*.
13. Feynman, R. P. (1990). *Quantum electrodynamics: The Strange Theory of Light and Matter*. Penguin Books.

13. Fock, V. (1924). *Zur Berechnung der Beleuchtungsstärke*. Optisches Institut St. Petersburg.
14. Garibaldi, C. (1994). *Simulazione deterministica della radiazione solare nella chiesa di San Lorenzo a Torino*. CNR Italy.
15. Hamilton, D.C. and Morgan, W.R., 1952, "Radiant-interchange configuration factors," NASA TN 2836.
16. Higbie, H. H. (1934). *Lighting Calculations*. John Wiley and Sons. New York.
17. Holman, J.P. (1997) *Heat Transfer*. Mac Graw-Hill. New York.
18. Hopkinson, R. G.; Petherbridge, P.; Longmore, J. (1966) *Daylighting*. London. Heinemann.
19. Howell, John R. A catalogue of Radiation Heat Transfer Configuration Factors. 3<sup>rd</sup> edition. On-line version available at <http://www.engr.uky.edu/rtl/Catalog/>
20. Howell, John R, Robert Siegel and M. Pinar Menguc,, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 5th ed., Taylor and Francis/CRC, New York, 2010.
21. Howell, John R, Robert Siegel. *Thermal radiation heat transfer*. 3<sup>rd</sup> ed., Taylor and Francis, New York, 1992.
22. Kimura, K. (1977) *Scientific Basis of Air Conditioning*. Amsterdam. Elsevier.
23. Lambert J. H. (1764).*Photometria. sive de mensura et gradibus Luminis, Colorum et Umbrae*. Editor. D. DiLaura. IESNA. 2001.
24. MacAllister, A. S. (1910). Graphical Solutions of Problems Involving Plane-Surface Lighting Sources . *Lighting World* 56. No.1356.
25. Moon, P. H; Spencer D. E. (1981) *The Photoc Field*. The MIT Press. Cambridge. Massachusetts.
26. Moon, P. H. (1962)*The Scientific Basis of Illuminating Engineering*. Dover Publications. New York.
27. Moore, F. (1991). *Concepts and Practice of Architectural Daylighting*. Van Nostrand Reinhold. New York.
28. Ne'eman, E. (1974) Visual Aspects of Sunlight in Buildings. *Lighting Research and Technology*. Vol 6. N° 3.
29. Pierpoint, W. (1983). A Simple Sky Model for Daylighting Calculations. *International Daylighting Conference*. Phoenix.
30. Robbins, C. L. (1986). *Daylighting. Design and Analysis*. Van Nostrand Reinhold. New York.

31. Shukuya M, (1993) *Hikari to Netsu no Kenchiku Kankyôgaku* –Light and temperature in Environmental Science - (in Japanese). Maruzen. Tokyo.
32. Sparrow, E.M, Cess, R.D, Radiation Heat Transfer. 1978, Hemisphere. California (USA)
33. Yamauchi, J. (1927). The Light Flux Distribution of a System of Inter-reflecting Surfaces. *Researches of the Electro-technical Laboratory*. No. 190.Tokyo. (In Japanese).
34. Yamauchi, J. (1929). The Amount of Flux Incident to Rectangular Floor through Rectangular Windows. *Researches of the Electro-technical Laboratory*. No. 250.Tokyo.
35. Yamauchi, J. (1932). Theory of Field of Illumination. *Researches of the Electro-technical Laboratory*. Tokyo. No. 339.
36. Yamauchi, J. Furthers Study of Geometrical Calculation of Illumination due to light from luminous sources of simple forms. *Researches of the Electrotechnical Laboratory* 194. (1927).
37. Yamauchi, J. Geometrical calculation of Illumination due to light from luminous sources of simple forms. *Researches of the Electrotechnical Laboratory* 148. (1924).

## **9.- PRODUCCIÓN CIENTÍFICA DERIVADA DE LA PRESENTE TESIS**

Derivada del desarrollo de la tesis doctoral y de las actividades de investigación llevadas a cabo durante el desarrollo de la beca predoctoral, se presenta la siguiente producción científica:

Pulido-Arcas, JA, Rubio-Bellido, C, León-Muñoz, MA. Mejora de la eficiencia energética del parque edificado. El caso de estudio de la rehabilitación de la barriada de la Plata. I Congreso internacional y III congreso Nacional de construcción sostenible y soluciones ecoeficientes. (Aceptado el 28 de Abril de 2013).

Cabeza-Lainez JM, Pulido-Arcas, JA. *New configuration factors for curved surfaces*. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 117 (2013) 71-80.

Rubio-Bellido, C. Sánchez-Montañés Macías, B. Pulido-Arcas, JA. Cabeza-Lainez JM. Valores ambientales para la intervención en la arquitectura histórica. El caso de la ciudad de Cádiz. Greencities y sostenibilidad, 3er salón de la eficiencia energética y Sostenibilidad en edificación y espacios urbanos. ISBN13: 978-84-695-4438-9. Málaga, Noviembre de 2012. Pp 526-539.

Rubio Bellido C, Sanchez Montañés B, Pulido Arcas JA, Cabeza Lainez, JM. Techniques of environmental analysis applied to the urban heritage of Cádiz. Proceedings of the 3rd International Conference on Heritage and Sustainable Development, June 2012. Greenlines Institute for sustainable development. ISBN 978-989-95671-5-3.

Cabeza Lainez JM, Jimenez Verdejo JR, Sy J, Pulido Arcas JA, Ramirez Juidias E, Luengo Gutierrez P. Rehabilitación de la casa jesuita de 1730 en el parían de Cebú, 59-66, Jornadas de arquitectura y cooperación al desarrollo. Octubre 2011. ISBN: 978-84-693-7003-2.

Cabeza Lainez JM, Almodóvar Melendo JM, Sánchez Montañés B, Pulido Arcas JA, Ramirez Juidias E, Diseño científico ambiental en arquitectura, 99-106, Seminario de innovación, investigación y transferencia en la ETSAS. Junio 2010, ISBN: 978-84-937904-3.